AGRADECIMIENTOS

A lo largo de mi vida, he recorrido senderos llenos de desafíos, aprendizajes y gratitud. Hoy, al culminar esta etapa académica, deseo dedicar este trabajo a quienes han sido el faro y la brújula en mi viaje.

A mi mamá María Carolina Herrera Díaz y a mi papá Agustín Álvarez Bautista, cuyos sacrificios y amor incondicional me han dado la fortaleza para alcanzar mis metas. Ustedes me enseñaron que la educación es el legado más valioso y que el esfuerzo constante siempre rinde frutos. Cada paso que doy es un reflejo de su dedicación y valores inculcados. Mamá, papá, esta tesis es tan suya como mía.

A mis abuelos Mamá Aya, Papá Gogo, Luisa y Agustín, guardianes de la sabiduría y el cariño eterno. Aunque algunos ya no estén físicamente, sus enseñanzas y amor permanecen vivos en mi corazón. Sus historias y consejos me han guiado en los momentos más difíciles, dándome el coraje para persistir y superar obstáculos.

A mis hermanos Paulo Elías, Alan Yareth y Aranza Ailín, incondicionales de aventuras y desafíos. Gracias por ser mi apoyo en los días grises y mi celebración en los días de triunfo. Su confianza en mí ha sido una fuente de motivación constante.

A mis profesores Humberto López Chimil, Fernando Chávez León, Luis Castellanos y todos mis mentores, que con su sabiduría y paciencia han encendido en mí la llama del conocimiento. Sus enseñanzas han trascendido las aulas y han dejado una huella imborrable en mi formación personal y profesional. Gracias por creer en mi potencial y por inspirarme a ser mejor cada día.

A la Univerisdad Autónoma Chapingo

Finalmente, dedico esta tesis a Dios, porque el me dió la voluntad de perseverar a pesar de las adversidades, por cada noche en vela y cada instante de duda superado. Este logro es el resultado de años de esfuerzo y dedicación, me recuerda que los sueños se alcanzan con determinación y pasión. Gracias a todos los que han sido parte de este viaje. Esta tesis es una manifestación de vuestro amor, apoyo y fe en mí. A todos ustedes, mi eterna gratitud.

DATOS BIOGRÁFICOS

Silas Whitcomb Holman was born in Harvard, Massachusetts on January 20, 1856. He received his S.B. degree in Physics from MIT in 1876, and then joined the MIT Department of Physics as an Assistant. He became Instructor in Physics in 1880, Assistant Professor in 1882, Associate Professor in 1885, and Full Professor in 1893. Throughout this period, he struggled with increasingly severe rheumatoid arthritis. At length, he was defeated, becoming Professor Emeritus in 1897 and dying on April 1, 1900.

Holman's light burned brilliantly before his tragic and untimely death. He published extensively in thermal physics, and authored textbooks on precision measurement, fundamental mechanics, and other subjects. He established the original Heat Measurements Laboratory. Holman was a much admired teacher among both his students and his colleagues. The reports of his department and of the Institute itself refer to him frequently in the 1880's and 1890's, in tones that gradually shift from the greatest respect to the deepest sympathy.

Holman was a student of Professor Edward C. Pickering, then head of the Physics department. Holman himself became second in command of Physics, under Professor Charles R. Cross, some years later. Among Holman's students, several went on to distinguish themselves, including: the astronomer George E. Hale ('90) who organized the Yerkes and Mt. Wilson observatories and who designed the 200 inch telescope on Mt. Palomar; Charles G. Abbot ('94), also an astrophysicist and later Secretary of the Smithsonian Institution; and George K. Burgess ('96), later Director of the Bureau of Standards.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS **i**

DATOS BIOGRÁFICOS **ii**

LISTA DE CUADROS **v**

LISTA DE FIGURAS **vi**

RESUMEN **vii**

ABSTRACT **viii**

1 INTRODUCCIÓN **1**
1.1 Planteamiento del problema 1
1.1.1 Descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes 1
1.1.2 Demostraciones abiertas 2
1.1.3 Resultados parciales conocidos sobre Euler y Navier- Stokes . 3
1.2 Estado del arte en las ecuaciones de Navier-Stokes 6
1.3 Contribuciones de este trabajo 6
1.4 Esquema de la tesis 6

2 OBJETIVOS **7**
2.1 Objetivo General 7
2.2 Objetivos Específicos 7

3 REVISIÓN DE LITERATURA **8**
3.1 Ecuación de Nevier-Stokes 2d, Ladyzhenskaya 8

4 MATERIALES Y MÉTODOS **9**
4.1 Método 1 9
4.1.1 Resumen 9

5 RESULTADOS 10

6 CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJO FUTURO 11

A Code listing 12

LITERATURA CONSULTADA 14

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES

by

LUIS EMILIO ÁLVAREZ HERRERA

Submitted to the DEPARTAMENTO DE IRRIGACIÓN
on June 15, 2025 in partial fulfillment of the requirements for the degree of

INGENIERO EN IRRIGACIÓN

RESUMEN

La evapotranspiración es uno de los principales componentes del ciclo hidrológico y de vital importancia en la planeación y operación de zonas de riego, pues de ella dependen en gran medida los cálculos para conocer las necesidades hídricas de los cultivos para evitar la sub o sobreestimación de la lámina de riego aplicada, sin embargo su estudio resulta complicado pues la medición depende de dos procesos separados, evaporación y transpiración los cuales varían espacial y temporalmente, por lo que existen métodos para la estimación de ésta con ayuda de información meteorológica.

Palabras-Clave: Ecuaciones de Navier-Stokes en R3, Inteligencia Artificial, Hidropónia, Aeropónia, Agricultura Vertical

Thesis supervisor: Luis T. Castellanos Serano
Title: Profesor del DIMA

Thesis supervisor: Dr. Mauricio Carrillo García
Title: Profesor de Irrigación

Thesis supervisor: MAN. Eduardo Alvarado Trejo
Title: Profesor de Irrigación

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES

by

LUIS EMILIO ÁLVAREZ HERRERA

Submitted to the DEPARTAMENTO DE IRRIGACIÓN
on June 15, 2025 in partial fulfillment of the requirements for the degree of

INGENIERO EN IRRIGACIÓN

ABSTRACT

La evapotranspiración es uno de los principales componentes del ciclo hidrológico y de vital importancia en la planeación y operación de zonas de riego, pues de ella dependen en gran medida los cálculos para conocer las necesidades hídricas de los cultivos para evitar la sub o sobreestimación de la lámina de riego aplicada, sin embargo su estudio resulta complicado pues la medición depende de dos procesos separados, evaporación y transpiración los cuales varían espacial y temporalmente, por lo que existen métodos para la estimación de ésta con ayuda de información meteorológica. Artificiales, Modelación, Agrometeorología. [1] **Key-Words:** Ecuaciones de Navier-Stokes en R3, Inteligencia Artificial, Hidropónia, Aeropónia, Agricultura Vertical

Thesis supervisor: Luis T. Castellanos Serano
Title: Profesor del DIMA

Thesis supervisor: Dr. Mauricio Carrillo García
Title: Profesor de Irrigación

Thesis supervisor: MAN. Eduardo Alvarado Trejo
Title: Profesor de Irrigación

[1] Text from Holman (1876): doi:10.2307/25138434.

Chapter 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido en $\mathbb{R}^n$ tal que ($n = 2$ o 3). Estas ecuaciones se resuelven por un vector desconocido de velocidad $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ y presión $p(x,t) \in \mathbb{R}$, definido por la posición $x \in \mathbb{R}^n$ y tiempo $t \geq 0$. Se restringe a fluidos incompresibles que están en $\mathbb{R}^n$, dichas ecuaciones son:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)\,, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)\,, \tag{1.2}$$

$$\text{Condiciones iniciales:} \quad u(x,0) = u^{\circ}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.3}$$

Notación 1.1 *De las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) con $\nu = 0$:*

- $u^{\circ}(x)$ *está dado*
- C^{∞} *es un campo vectorial libre de divergencia en* $\mathbb{R}^n$*,*
- $f_i(x,t)$ *son los componentes de una fuerza externa aplicada (ej. gravedad),*
- *La viscosidad* ν*, es un coeficiente positivo*
- $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ *es el Laplaciano en espacios variables.*

1.1.1 Descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuación (1.1), se basa en la Ley de Newton $f = m \cdot a$ para un fluido sujeto a una fuerza externa $f = (f_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ y a las fuerzas que surgen de la presión y la fricción.

La ecuación (1.2), define que el fluido es incompresible. $u(x,t)$ no debe crecer a medida que $|x| \to \infty$. Por lo tanto, se restringirá la atención en las fuerzas f y las condiciones iniciales u° que satisfacen las ecuaciones (1.4) y (1.5)

$$|\partial_x^\alpha u^\circ(x)| \leq C_{\alpha K} \left(1+|x|\right)^{-K} \in \mathbb{R}^n \qquad \forall\, \alpha \wedge K \tag{1.4}$$
$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K} \left(1+|x|+t\right)^{-K} \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \qquad \forall\, \alpha, m \wedge K \tag{1.5}$$

Se acepta una solución de (1.1), (1.2), (1.3) como físicamente razonable sólo si satisfacen las ecuaciones (1.6) y (1.7)

$$p, u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right) \tag{1.6}$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 \, dx < C \quad \forall t \geq 0 \tag{1.7}$$

Alternativamente, para descartar problemas en el infinito, se buscan espacios espacialmente soluciones periódicas de (1.1), (1.2), (1.3). Por lo tanto, asumimos que $u^\circ(x), f(x,t)$ satisfacen

$$u^\circ(x+e_j) = u^\circ(x), \quad f(x+e_j,t) = f(x,t), \quad p(x+e_j,t) = p(x,t) \quad \forall\, 1 \leq j \leq n \tag{1.8}$$

Notación 1.2 *De la ecuación (1.8)*

- $ej = j^{th}$

En lugar de (1.4) y (1.5), se supone que u° es suave y que se cumple la ecuación (1.9)

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K} \left(1+|t|\right)^{-K} \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \qquad \forall\, \alpha, m \wedge K \tag{1.9}$$

Se acepta una solución de (1.1), (1.2), (1.3), físicamente satisfacen las ecuaciones (1.10) y (1.11)

$$u(x+t) = u(x+e_j,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \qquad \forall\, 1 \leq j \leq n \tag{1.10}$$
$$p, u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right) \tag{1.11}$$

Desarrollando la ecuación (1.10), se tiene:

$$\begin{aligned}
&- \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dx \, dt - \sum_{ij} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \, dx \, dt \\
&= \nu \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u \cdot \Delta \theta \, dx \, dt + \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} f \cdot \theta \, dx \, dt + \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} p \cdot (\mathrm{div}\theta) \, dx \, dt
\end{aligned}$$

1.1.2 Demostraciones abiertas

Se solicita una demostración de uno de las siguientes cuatro afirmaciones.

1. **Existencia y suavidad de las soluciones de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$.**

(a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$, sea $u^\circ(x)$ cualquier campo vectorial suave y libre de divergencias que satisfaga la ecuación (1.4)

(b) Se toma $f(x,t) = 0$, entonces existe una función suave $p(x,t), u_i(x,t)$ en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ que satisfagan las ecuaciones (1.1),(1.2),(1.3),(1.6),(1.7)

2. **Existencia y fluidez de soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$**

(a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Sea $u^\circ(x)$ cualquier campo vectorial suave y libre de divergencia que satisfaga (1.8);

(b) Se toma $f(x,t) = 0$. Entonces existen funciones suaves $p(x,t)$, $u_i(x,t)$ en $R^3 \times [0,\infty)$ que satisfacen (1.1),(1.2),(1.3),(1.10),(1.11)

3. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$**

(a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia $u^\circ(x)$ en $\mathbb{R}^3$

(b) y existe un $f(x,t)$ suave en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, que satisface (1.4), (1.5), para el cual no existen soluciones (p,u) de (1.1),(1.2),(1.3),(1.6),(1.7) en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$

4. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.**

(a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia $u^\circ(x)$ en $\mathbb{R}^3$

(b) y existe un $f(x,t)$ suave en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, que satisface (1.8), (1.9), para el cual no existen soluciones (p,u) de (1.1),(1.2),(1.3),(1.10),(1.11) en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

1.1.3 Resultados parciales conocidos sobre Euler y Navier-Stokes

Dos dimensiones

En dos dimensiones, los análogos de las afirmaciones (1) y (2) son conocidos (Ladyzhenskaya [1]), también para el caso más difícil de las ecuaciones de Euler.

Tres dimensiones

En tres dimensiones, se sabe que (1) y (2) se mantienen siempre que la velocidad inicial u° satisfaga una condición de pequeñez. Para los datos iniciales $u^\circ(x)$ que no se supone que sean pequeños, se sabe que (1) y (2) se cumplen (también para $\nu = 0$) si el intervalo de tiempo $[0,\infty)$ se reemplaza por un intervalo de tiempo pequeño $[0,T)$, dependiendo T de los datos iniciales.

Para un $u^\circ(x)$ inicial dado, el T máximo permitido se denomina "tiempo de explosión". (1) y (2) se cumplen, o bien hay un $u^\circ(x)$ suave y sin divergencia para el cual (1.1), (1.2), (1.3) tienen una solución con un tiempo de explosión finito. Para las ecuaciones de Navier-Stokes ($\nu > 0$), si hay una solución con un tiempo de explosión finito T, entonces la velocidad $(u_i(x,t))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ se vuelve ilimitado cerca del momento de la explosión.

Se sabe que suceden otras cosas desagradables en el momento de explosión T, si $T < \infty$. Para las ecuaciones de Euler ($\nu = 0$), si hay una solución (con $f \equiv 0$) con un tiempo de explosión finito T, entonces la vorticidad $\omega(x,t) = curl_x u(x,t)$ satisface

$$\text{Baele-Katp-Majda} \qquad \int_0^T \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\omega(x,t)| \right\} dt = \infty \tag{1.12}$$

para que la vorticidad explote rápidamente.

Muchos cálculos numéricos parecen mostrar una explosión en las soluciones de las ecuaciones de Euler, pero la extrema inestabilidad numérica de las ecuaciones hace que sea muy difícil sacar conclusiones confiables.

Los resultados anteriores están muy bien tratados en el libro de Bertozzi y Majda [2]. A partir de Leray [3], se han logrado importantes avances en la comprensión de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para llegar a la idea de una `solución débil` de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para llegar a la idea de una solución débil en una PDE, se integra la ecuación con una función de prueba y luego se integra por partes (formalmente) para hacer que las derivadas caigan en la función de prueba. Por ejemplo, si (1.1) y (1.2) se cumplen, entonces, para cualquier campo vectorial suave $\theta(x,t) = (\theta_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ soportado de forma compacta en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, una integración formal por partes produce

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\frac{\partial\theta}{\partial t}\,dx\,dt - \sum_{ij}\iint_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\,dx\,dt \\ &= \nu\iint_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}} u\cdot\Delta\theta\,dx\,dt + \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} f\cdot\theta\,dx\,dt - \iint_{R^3\times\mathbb{R}} p\cdot(div\theta)\ dx\,dt\end{aligned} \tag{1.13}$$

La ecuación (12) tiene sentido para $u \in L^2, f \in L^1, p \in L^1$, mientras que (1.1) tiene sentido sólo si $u(x,t)$ es dos veces diferenciable en x. De manera similar, si $\varphi(x,t)$ es una función suave, soportada de manera compacta en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, entonces una integración formal por partes y (1.2) implica:

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\cdot\nabla_x\varphi\,dx\,dt = 0 \tag{1.14}$$

Una solución de (1.13), (1.14) se llama solución débil de las ecuaciones de Navier Stokes.

Una idea establecida desde hace mucho tiempo en el análisis es demostrar la existencia y regularidad de las soluciones de una PDE construyendo primero una solución débil y luego demostrando que cualquier solución débil es suave. Este programa se ha probado para Navier-Stokes con éxito parcial.

Leray en [3] demostró que las ecuaciones de Navier-Stokes (1.1), (1.2), (1.3) en tres dimensiones espaciales siempre tienen una solución débil (p,u) con propiedades de crecimiento adecuadas. Se desconoce la unicidad de las soluciones débiles de la ecuación de Navier-Stokes. Para la ecuación de Euler, la unicidad de las soluciones débiles es sorprendentemente falsa. Scheffer [4] y, más tarde, Schnirelman [5] exhibieron soluciones débiles de las ecuaciones de Euler en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ con soporte compacto en el espacio-tiempo. Esto corresponde a un fluido que parte del reposo en el instante $t = 0$, comienza a moverse en el instante $t = 1$ sin estímulo externo y vuelve al reposo en el instante $t = 2$, con su movimiento siempre confinado a una bola $B \subset \mathbb{R}^3$.

Scheffer [6] aplicó ideas de la teoría de la medida geométrica para demostrar un teorema de regularidad parcial para soluciones débiles adecuadas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Caffarelli-Kohn-Nirenberg [7] mejoraron los resultados de Scheffer y F.-H. Lin [8] simplificó las pruebas de los resultados en Caffarelli-Kohn-Nirenberg [7]. El teorema de regularidad parcial de [7], [8] se refiere a un análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff del conjunto singular de una solución débil adecuada de Navier-Stokes. Aquí, el conjunto singular de una solución débil u consta de todos los puntos $(x^\circ, t^\circ) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ tales que u es ilimitado en todas las vecindades de (x°, t°). (Si la fuerza f es suave, y si (x°, t°) no pertenece al conjunto singular, entonces no es difícil demostrar que u puede corregirse en un conjunto de medida cero para volverse suave en una vecindad de (x°, t°).)

Para definir el análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff, utilizamos cilindros parabólicos $Q_r = B_r \times I_r \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, donde $B_r \subset \mathbb{R}^3$ es una bola de radio r, e $I_r \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de longitud r^2. Dado $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, establecemos

$$\mathcal{P}_{K,\delta}(E) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^K : Q_{r1}, Q_{r2}, \ldots \text{Cubre } E, \text{ y cada } r_i < \delta\right\}$$

y luego definir

$$\mathcal{P}_K(E) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{P}_{K,\delta}(E)$$

Los principales resultados de [7], [8] pueden expresarse aproximadamente de la siguiente manera:

Teorema 1.1 *Regularidad Parcial de Caffarelli-Kohn-Nirenberg y F.-H. Lin*

1. *(A) Sea u una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes, que satisfaga condiciones de crecimiento adecuadas. Sea E el conjunto singular de u. Entonces* $\mathcal{P}_1(E) = 0$.

2. *(B) Dado un campo vectorial libre de divergencia* $u^\circ(x)$ *y una fuerza* $f(x,t)$ *que satisface (1.4) y (1.5), existe una solución débil de Navier-Stokes (1.1), (1.2), (1.3) que satisfacen las condiciones de crecimiento en (A).*

En particular, el conjunto singular de u no puede contener una curva espaciotemporal de la forma $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x = \phi(t)$. Este es el mejor teorema de regularidad parcial conocido hasta ahora para la ecuación de Navier-Stokes.

1.2 Estado del arte en las ecuaciones de Navier-Stokes

1.3 Contribuciones de este trabajo

1.4 Esquema de la tesis

Este trabajo está estructurado como sigue. La introducción va seguida de X capítulos independientes que se han ordenado de forma coherente con el proceso de desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes. En gran medida, la notación es consistente a lo largo de esta tesis y cada excepción está claramente resaltada. Para facilitar la navegación, se incluyen apéndices al final de sus respectivos capítulos, mientras que la bibliografía acumulativa se adjunta al final de este documento. Los capítulos siguientes se resumen brevemente a continuación.

Capítulo 2: Consiste en...

Capítulo 3: Consiste en...

Capítulo 4: Consiste en...

Chapter 2

OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

1. Documentar el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes en tercera dimensión
2. Exponer las aplicaciones en el Ingeniería en Irrigación
3. Aplicar algoritmos de Inteligencia Artificial y Machine Learning a los métodos numéricos

2.2 Objetivos Específicos

1. Modelar las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de Agricultura Vertical Plant Factory Hidropónico con relación agua-planta

Chapter 3

REVISIÓN DE LITERATURA

3.1 Ecuación de Nevier-Stokes 2d, Ladyzhenskaya

Hay dos direcciones principales en la vida científica del prof. Ladyzhenskaya. La primera: la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. La segunda: teoría de la regularidad para ecuaciones elípticas y parabólicas no lineales.

En 1951, Olga A. Ladyzhenskaya demostró la segunda desigualdad fundamental para operadores elípticos L de segundo orden con coeficientes suaves y para cualquier condición de frontera homogénea clásica.

$$\|u\| \, W_2^2(\Omega) \leq c_\Omega \left(\|Lu\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \right) \tag{3.1}$$

que es válido para cualquier $u \in W_2^2(\Omega)$.

En cuanto a la primera dirección, en 1958 en [3] Olga A. Ladyzhenskaya demostró la desigualdad multiplicativa

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq c \, \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \, \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{3.2}$$

que es válido para cualquier $u \in W_2^1(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

Esta desigualdad dio la posibilidad de demostrar la existencia de una solución única global. del sistema bidimensional Navier-Stokes

Chapter 4

MATERIALES Y MÉTODOS

4.1 Método 1

4.1.1 Resumen

Chapter 5

RESULTADOS

Chapter 6

CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJO FUTURO

Appendix A

Code listing

```
function print_rate(kappa,xMin,xMax,npoints,option)
     local c = 1-kappa*kappa
     local croot = (1-kappa*kappa)^(1/2)
     local logx = math.log(xMin)
     local psi = 0

     local xstep = (math.log(xMax)-math.log(xMin))/(npoints-1)

     arg0 = math.sqrt(xMin/c)
     psi0 = (1/c)*math.exp((kappa*arg0)^2)*(erfc(kappa*arg0)-erfc(arg0))

     if option~=[[]] then
       tex.sprint("\\addplot+["..option.."] coordinates{")
       -- addplot+ for color cycle to work
     else
       tex.sprint("\\addplot+ coordinates{")
     end
     tex.sprint("("..xMin..","..psi0..")")

     for i=1, (npoints-1) do
       x = math.exp(logx + xstep)
       arg = math.sqrt(x/c)
       karg = kappa*arg
       if karg<5 then
     -- this break compensates for exp(karg^2), which multiplies the error in the erf approximation...
          logpsi = -math.log(croot) + karg^2 + math.log(erfc(karg)-erfc(arg))
          psi = math.exp(logpsi)
       else
          psi = (1/(karg) - 1/(2*(karg^3)) + 3/(4*(arg^5)) )/(1.77245385*croot)
          -- this is the large x asymptote of the reaction rate
```

```
        end
        logx = math.log(x)
        tex.sprint("("..x..","..psi..")")
      end
      tex.sprint("}")
end
\end{luacode*}
```

LITERATURA CONSULTADA

[1] O. A. Ladyzhenskaya, "The mathematical theory of viscous incompressible flow," *Gordon & Breach*, 1969.

[2] A. J. Majda, A. L. Bertozzi, and A. Ogawa, "Vorticity and incompressible flow. cambridge texts in applied mathematics," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, no. 4, B77–B78, 2002.

[3] J. Leray, "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace," *Acta mathematica*, vol. 63, pp. 193–248, 1934.

[4] V. Scheffer, "An inviscid flow with compact support in space-time.," *Journal of geometric analysis*, vol. 3, no. 4, 1993.

[5] A. Shnirelman, "On the nonuniqueness of weak solution of the euler equation," *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 50, no. 12, pp. 1261–1286, 1997.

[6] V. Scheffer, "Turbulence and hausdorff dimension," in *Turbulence and Navier Stokes Equations: Proceedings of the Conference Held at the University of Paris-Sud Orsay June 10–13 1975*, Springer, 2006, pp. 174–183.

[7] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, "Partial regularity of suitable weak solutions of the navier-stokes equations," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 35, no. 6, pp. 771–831, 1982.

[8] F. Lin, "A new proof of the caffarelli-kohn-nirenberg theorem," *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 51, no. 3, pp. 241–257, 1998.