Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido en $\mathbb{R}^n$ tal que ($n = 2$ o 3). Estas ecuaciones se resuelven por un vector desconocido de velocidad $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ y presión $p(x,t) \in \mathbb{R}$, definido por la posición $x \in \mathbb{R}^n$ y tiempo $t \geq 0$. Se restringe a fluidos incompresibles que están en $\mathbb{R}^n$, dichas ecuaciones son:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad \left(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\right), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad \left(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\right), \tag{1.2}$$

$$\text{Condiciones iniciales:} \quad u(x,0) = u^{\circ}(x) \qquad \left(x \in \mathbb{R}^n\right) \tag{1.3}$$

Notación 1.1 *De las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) con $\nu = 0$:*

- $u^{\circ}(x)$ *está dado*
- C^{∞} *es un campo vectorial libre de divergencia en* $\mathbb{R}^n$*,*
- $f_i(x,t)$ *son los componentes de una fuerza externa aplicada (ej. gravedad),*
- *La viscosidad* ν*, es un coeficiente positivo*
- $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ *es el Laplaciano en espacios variables.*

1.1.1 Descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuación (1.1), se basa en la Segunda Ley de Newton $f = m \cdot a$ para un fluido sujeto a una fuerza externa $f = (f_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ y a las fuerzas que surgen de la presión y la fricción.

La ecuación (1.2), define que el fluido es incompresible. $u(x,t)$ no debe crecer a medida que $|x| \to \infty$. Por lo tanto, se restringirá la atención en las fuerzas f y las condiciones iniciales u° que satisfacen las ecuaciones (1.4) y (1.5)

$$|\partial_x^\alpha u^\circ(x)| \leq C_{\alpha K} \left(1 + |x|\right)^{-K} \in \mathbb{R}^n \qquad \forall\, \alpha \wedge K \tag{1.4}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K} \left(1 + |x| + t\right)^{-K} \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \qquad \forall\, \alpha, m \wedge K \tag{1.5}$$

Se acepta una solución de (1.1), (1.2), (1.3) como físicamente razonable sólo si satisfacen las ecuaciones (1.6) y (1.7)

$$p, u \in C^\infty \left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right) \tag{1.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 \, dx < C \quad \forall t \geq 0 \tag{1.7}$$

Alternativamente, para descartar problemas en el infinito, se buscan espacios espacialmente soluciones periódicas de (1.1), (1.2), (1.3). Por lo tanto, asumimos que $u^\circ(x), f(x,t)$ satisfacen

$$u^\circ(x + e_j) = u^\circ(x), \quad f(x + e_j, t) = f(x,t), \quad p(x + e_j, t) = p(x,t) \quad \forall\, 1 \leq j \leq n \tag{1.8}$$

Notación 1.2 *De la ecuación (1.8)*

- $e_j = j^{th}$

En lugar de (1.4) y (1.5), se supone que u° es suave y que se cumple la ecuación (1.9)

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K} \left(1 + |t|\right)^{-K} \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \qquad \forall\, \alpha, m \wedge K \tag{1.9}$$

Se acepta una solución de (1.1), (1.2), (1.3), físicamente satisfacen las ecuaciones (1.10) y (1.11)

$$u(x + t) = u(x + e_j, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \qquad \forall\, 1 \leq j \leq n \tag{1.10}$$

$$p, u \in C^\infty \left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right) \tag{1.11}$$

Desarrollando la ecuación (1.10), se tiene:

$$- \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dx \, dt - \sum_{ij} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \, dx \, dt$$
$$= \nu \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u \cdot \Delta \theta \, dx \, dt + \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} f \cdot \theta \, dx \, dt + \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} p \cdot (\mathrm{div}\theta) \, dx \, dt$$

1.1.2 Demostraciones sin resolver

Se solicita una demostración de una de las siguientes cuatro afirmaciones.

1. **Existencia y suavidad de las soluciones de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$.**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$, sea $u^\circ(x)$ cualquier campo vectorial suave y libre de divergencias que satisfaga la ecuación (1.4)

b) Se toma $f(x,t) = 0$, entonces existe una función suave $p(x,t), u_i(x,t)$ en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ que satisfagan las ecuaciones (1.1),(1.2),(1.3),(1.6),(1.7)

2. **Existencia y fluidez de soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Sea $u^\circ(x)$ cualquier campo vectorial suave y libre de divergencia que satisfaga (1.8);

b) Se toma $f(x,t) = 0$. Entonces existen funciones suaves $p(x,t)$, $u_i(x,t)$ en $R^3 \times [0,\infty)$ que satisfacen (1.1),(1.2),(1.3),(1.10),(1.11)

3. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia $u^\circ(x)$ en $\mathbb{R}^3$

b) y existe un $f(x,t)$ suave en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, que satisface (1.4), (1.5), para el cual no existen soluciones (p,u) de (1.1),(1.2),(1.3),(1.6),(1.7) en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$

4. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia $u^\circ(x)$ en $\mathbb{R}^3$

b) y existe un $f(x,t)$ suave en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, que satisface (1.8), (1.9), para el cual no existen soluciones (p,u) de (1.1),(1.2),(1.3),(1.10),(1.11) en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

1.1.3 Resultados parciales conocidos sobre Euler y Navier-Stokes

Dos dimensiones

Resuelto. En el capítulo (???) se demuestra para los análogos de las afirmaciones (1) y (2) son conocidos (Ladyzhenskaya [1]), también para el caso más difícil de las ecuaciones de Euler.

Tres dimensiones

Sin resolver. En tres dimensiones, se sabe que (1) y (2) se mantienen siempre que la velocidad inicial u° satisfaga una condición de pequeñez. Para los datos iniciales $u^\circ(x)$ que no se supone que sean pequeños, se sabe que (1) y (2) se cumplen (también para $\nu = 0$) si el intervalo de tiempo $[0,\infty)$ se reemplaza por un intervalo de tiempo pequeño $[0,T)$, dependiendo T de los datos iniciales.

Para un $u^\circ(x)$ inicial dado, el T máximo permitido se denomina "tiempo de explosión". (1) y (2) se cumplen, o bien hay un $u^\circ(x)$ suave y sin divergencia para el cual (1.1), (1.2), (1.3) tienen una solución con un tiempo de explosión finito. Para las ecuaciones de Navier-Stokes ($\nu > 0$), si hay una solución con un tiempo de explosión finito T, entonces la velocidad $(u_i(x,t))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ se vuelve ilimitado cerca del momento de la explosión.

Se sabe que suceden otras cosas desagradables en el momento de explosión T, si $T < \infty$. Para las ecuaciones de Euler ($\nu = 0$), si hay una solución (con $f \equiv 0$) con un tiempo de explosión finito T, entonces la vorticidad $\omega(x,t) = curl_x u(x,t)$ satisface

$$\text{Baele-Katp-Majda} \qquad \int_0^T \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\omega(x,t)| \right\} dt = \infty \tag{1.12}$$

para que la vorticidad explote rápidamente.

Muchos cálculos numéricos parecen mostrar una explosión en las soluciones de las ecuaciones de Euler, pero la extrema inestabilidad numérica de las ecuaciones hace que sea muy difícil sacar conclusiones confiables.

Los resultados anteriores están muy bien tratados en el libro de Bertozzi y Majda [2]. A partir de Leray [3], se han logrado importantes avances en la comprensión de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para llegar a la idea de una `solución débil` de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para llegar a la idea de una solución débil en una Ecuación Diferencial Parcial (EDP), se integra la ecuación con una función de prueba y luego se integra por partes (formalmente) para hacer que las derivadas caigan en la función de prueba. Por ejemplo, si (1.1) y (1.2) se cumplen, entonces, para cualquier campo vectorial suave $\theta(x,t) = (\theta_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ soportado de forma compacta en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, una integración formal por partes produce

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\frac{\partial\theta}{\partial t}\,dx\,dt - \sum_{ij}\iint_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\,dx\,dt \\ &= \nu\iint_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}} u\cdot\Delta\theta\,dx\,dt + \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} f\cdot\theta\,dx\,dt - \iint_{R^3\times\mathbb{R}} p\cdot(div\theta)\;dx\,dt \end{aligned} \tag{1.13}$$

La ecuación (12) tiene sentido para $u \in L^2, f \in L^1, p \in L^1$, mientras que (1.1) tiene sentido sólo si $u(x,t)$ es dos veces diferenciable en x. De manera similar, si $\varphi(x,t)$ es una función suave, soportada de manera compacta en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, entonces una integración formal por partes y (1.2) implica:

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\cdot\nabla_x\varphi\,dx\,dt = 0 \tag{1.14}$$

Una solución de (1.13), (1.14) se llama solución débil de las ecuaciones de Navier Stokes.

Una idea establecida desde hace mucho tiempo en el análisis es demostrar la existencia y regularidad de las soluciones de una EDP construyendo primero una solución débil y luego demostrando que cualquier solución débil es suave. Este programa se ha probado para Navier-Stokes con éxito parcial.

Leray en [3] demostró que las ecuaciones de Navier-Stokes (1.1), (1.2), (1.3) en tres dimensiones espaciales siempre tienen una solución débil (p,u) con propiedades de crecimiento adecuadas. Se desconoce la unicidad de las soluciones débiles de la ecuación de Navier-Stokes. Para la ecuación de Euler, la unicidad de las soluciones débiles es sorprendentemente falsa. Scheffer [4] y, más tarde, Schnirelman [5] exhibieron soluciones débiles de las ecuaciones de Euler en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ con soporte compacto en el espacio-tiempo. Esto corresponde a un fluido que parte del reposo en el instante $t = 0$, comienza a moverse en el instante $t = 1$ sin estímulo externo y vuelve al reposo en el instante $t = 2$, con su movimiento siempre confinado a una bola $B \subset \mathbb{R}^3$.

Scheffer [6] aplicó ideas de la teoría de la medida geométrica para demostrar un teorema de regularidad parcial para soluciones débiles adecuadas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Caffarelli-Kohn-Nirenberg [7] mejoraron los resultados de Scheffer y F.-H. Lin [8] simplificó las pruebas de los resultados en Caffarelli-Kohn-Nirenberg [7]. El teorema de regularidad parcial de [7], [8] se refiere a un análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff del conjunto singular de una solución débil adecuada de Navier-Stokes. Aquí, el conjunto singular de una solución débil u consta de todos los puntos $(x^\circ, t^\circ) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ tales que u es ilimitado en todas las vecindades de (x°, t°). (Si la fuerza f es suave, y si (x°, t°) no pertenece al conjunto singular, entonces no es difícil demostrar que u puede corregirse en un conjunto de medida cero para volverse suave en una vecindad de (x°, t°).)

Para definir el análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff, utilizamos cilindros parabólicos $Q_r = B_r \times I_r \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, donde $B_r \subset \mathbb{R}^3$ es una bola de radio r, e $I_r \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de longitud r^2. Dado $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, establecemos

$$\mathcal{P}_{K,\delta}(E) = inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^K : Q_{r1}, Q_{r2}, \ldots \text{Cubre } E, \text{ y cada } r_i < \delta \right\}$$

y luego definir

$$\mathcal{P}_K(E) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{P}_{K,\delta}(E)$$

Los principales resultados de [7], [8] pueden expresarse aproximadamente de la siguiente manera:

Teorema 1.1 *Regularidad Parcial de Caffarelli-Kohn-Nirenberg y F.-H. Lin*

1. *(A) Sea u una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes, que satisfaga condiciones de crecimiento adecuadas. Sea E el conjunto singular de u. Entonces* $\mathcal{P}_1(E) = 0$.

2. *(B) Dado un campo vectorial libre de divergencia* $u^\circ(x)$ *y una fuerza* $f(x, t)$ *que satisface (1.4) y (1.5), existe una solución débil de Navier-Stokes (1.1), (1.2), (1.3) que satisfacen las condiciones de crecimiento en (A).*

En particular, el conjunto singular de u no puede contener una curva espacio-temporal de la forma $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x = \phi(t)$. Este es el mejor teorema de regularidad parcial conocido hasta ahora para la ecuación de Navier-Stokes.

1.2 Estado del arte

1.2.1 Una formulación cuantitativa del problema de regularidad global para el periódico Sistema Navier-Stokes, Terence Tao

1.3 Contribuciones de este trabajo

1.4 Esquema de la tesis

Este trabajo está estructurado como sigue. La introducción va seguida de X capítulos independientes que se han ordenado de forma coherente con el proceso de desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes. En gran medida, la notación es consistente a lo largo de esta tesis y cada excepción está claramente resaltada. Para facilitar la navegación, se incluyen apéndices al final de sus respectivos capítulos, mientras que la bibliografía acumulativa se adjunta al final de este documento. Los capítulos siguientes se resumen brevemente a continuación.

Capítulo 2 Consiste en...

Capítulo 3 Consiste en...

Capítulo 4 Consiste en...

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

1. Exponer las aplicaciones en el Ingeniería en Irrigación mediante las Ecuaciones de Navier Stokes

2.2 Objetivos Específicos

1. Documentar el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes en tercera dimensión
2. Modelar las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de Agricultura Vertical Plant Factory Hidropónico con relación agua-planta
3. Aplicar algoritmos de Inteligencia Artificial y Machine Learning a los métodos numéricos

Capítulo 3

REVISIÓN DE LITERATURA

3.1 Ecuación de Nevier-Stokes en 2D

En 1958[1], Olga A. Ladyzhenskaya demostró la desigualdad multiplicativa

$$\|u\|^4_{L_4(\Omega)} \leq c\,\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\,\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.1}$$

Que es válido para cualquier $u \in W^1_2(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Esta desigualdad dió la posibilidad de demostrar la existencia de una solución única global del sistema bidimensional Navier-Stokes

3.1.1 Demostración de Olga A. Ladyzhenskaya

Del artículo de Ladyzhenskaya: Solución "en grande" del problema de valores en la frontera no estacionarios para el sistema Navier-Stokes con dos variables espaciales; traducido del ruso se describe a continuación la demostración original:

Consideremos en la región Ω de cambios $x = (x_1, x_2)$ el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} &v_t - \nu\Delta v + \sum_{k=1}^{2} v_k \cdot v_{x_k} = -grad\, p + f(x,t) \\ &\operatorname{div} v = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

para funciones $v = (v_1(x,t), v_2(x,t))$ y $p(x,t)$ bajo condiciones iniciales y de frontera

$$v\mid_s = 0, \qquad\qquad v\mid_{t=0} = a(x)\,(div\, a = 0) \tag{3.3}$$

Teorema 3.1 *El problema (3.2)-(3.3) tiene solución única "en general" (es decir, para cualquier $t \geq 0$ para cualquier valor del número de Reynolds en el momento inicial y para f arbitraria), si solo las integrales son finitas*

$$\int_\Omega a^2\, dx, \qquad \int_\Omega (v_t(x,0))^2\, dx, \qquad \int_0^t \int_\Omega f^2 + f_t^2\, dx\, dt$$

De los resultados obtenidos en el trabajo (a), se deduce que toda la cuestión de la existencia “en general” se reduce ahora a obtener una estimación a priori de la integral

$$\int_0^t \int_\Omega v_t^2 \, dx \, dt + \int_\Omega \sum_{k=1}^2 v_k^4(x,t) \, dx \tag{3.4}$$

O máx $|v|$. En vista de esto, aquí hablaremos sólo de estimaciones a priori de las soluciones a los problemas (3.2) a (3.3). Se sabe que para soluciones del problema (3.2) - (3.3) la desigualdad se cumple

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v^2(x,t) \, dx + 2\nu \int_0^t \int_\Omega \sum_{k=1}^2 (v_{x_k})^2 \, dx \, dt \leq \\ &\leq \int_\Omega a^2 \, dx + 2 \left(\int_\Omega a^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega d^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt + 2 \left[\int_0^t \left(\int f^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Denotemos $\int_\Omega \sum_{k=1}^2 [v_{x_k}(x,t)]^2 \, dx = \varphi^2(t)$ De (3.5) se deduce que conocemos la estimación de la integral $\int_0^t \varphi^2(t) \, dt$. Sea $\int_0^t \int_\Omega (f_t)^2 \, dx \, dt < \infty$. vamos a diferenciar

(3.2) por t, multiplicar el resultado escalarmente por (vt) e integrar Después de transformaciones simples llegamos a la desigualdad.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_\Omega [v_t(x,t)]^2 \, dx \mid_{t=0}^{t=t} + \nu \int_0^t \int_\Omega \sum_{k=1}^2 \left(v_{tx_p} \right)^2 \, dx \, dt + \int_0^t \int_\Omega \sum_{k=1}^2 v_{xt} v_{x_k} v_t \, dx \, dt \\ &= \int_0^t \int_\Omega f_t v_t \, dx \, dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

De donde se despeja:

$$\phi^2(t) \mid_{t=0}^{t=t} + 2\nu \int_0^t F^2(t) \, dt \leq c \int_0^t \phi(t) \left[\int_\Omega \sum_{k=1}^2 v_{kt}^4 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} dt + \int_0^t \phi(t) b(t) \, dt \tag{3.7}$$

Dónde

$$\phi^2(t) = \int_\Omega [v_t(x,t)]^2 \, dx \quad F^2(t) = \int_\Omega \sum_{k=1}^2 [v_{tx_k}(x,t)]^2 \, dx \quad b^2(t) = 2 \int_\Omega f_t^2(x,t) \, dx$$

y c aquí (y más) significa las constantes que conocemos.

Verifiquemos ahora que para cualquier función continuamente diferenciable soportada de forma compacta $u(x_1, x_2)$ dos variables espaciales se cumple la siguiente desigualdad:

$$\iint u^4(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \leq 2 \iint u^2(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \iint \left(u_{x_1}^2 + u_{x_1}^2 \right) dx_1 \, dx_2 \tag{3.8}$$

En el que la integración se realiza en todo el espacio x_1, x_2.Es obvio que.

$$u^2(x_1, x_2) = 2\int_{-\infty}^{x_k} u u_{x_k}\, dx_k, \quad k = 1, 2$$

y por lo tanto

$$\max_{x_k} u^2(x_1, x_2) \leq 2\int_{-\infty}^{\infty} |u u_{x_k}|\, dx_k, \quad k = 1, 2$$

Es por eso

$$\iint_{-\infty}^{\infty} u^4\, dx_1 dx_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left(\max_{x_1} u^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dx_1\right) \leq$$

$$\leq 2\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u u_{x_1}|\, dx_1 \max_{x_3} \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, dx_1\right) \leq 4\int_{-\infty}^{\infty} |u u_{x_1}|\, dx_1\, dx_2 \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} |u u_{x_2}|\, dx_1\, dx_2$$

y esto implica desigualdad (3.8).

Usemos la desigualdad (3.8) Para estimaciones $\int_0^t \int_\Omega \sum_{k=1}^2 \upsilon_{kt}\, dx$ a la (3.7). Porque υ_{kt} son iguales a cero en la frontera S, entonces para ellos, en virtud de (3.8), tenemos

$$\left(\int_\infty \upsilon_{kt}^4\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\phi(t)F(t)$$

y por lo tanto de (3.7) se sigue

$$\phi^2(t)\mid_{t=0}^{t=t} +2\nu\int_0^t F^2(t)\, dt \leq C_1\int_0^t \varphi(t)\phi(t)F(t)\, dt + \int_0^i \phi(t)b(t)\, dt$$

De aquí, a su vez, concluimos consistentemente sobre la validez de las desigualdades.

$$\phi^2(t)\mid_{t=0}^{t=t} +2\nu\int_0^t F^2(t)\, dt \leq \nu\int_0^t F^2(t)\, dt + \frac{c_1}{2\nu}\int_0^t \varphi^2\phi^2\, dt + \int_0^t \phi b\, dt$$

$$\phi^2(t) \leq c_2\int_0^t \left(\phi^2 + b^2\right)\phi^2\, dt + c_3, \tag{3.9}$$

$$\nu\int_0^t F^2(t)\, ft \leq c_2\int_0^t \left(\phi^2 + b^2\right)\phi^2\, dt + c_3 \tag{3.10}$$

Dado que la función $\phi^2(t)+b^2(t)$ es sumable en $[0, t]$, se deduce de (3.9) que $\phi^2(t) \leq c_4$ y de (3.10) $\int_0^t F^2(t)\, dt \leq c_5$

Estas desigualdades nos dan una estimación a priori de las soluciones, incluso más fuerte que (3.4). De la prueba anterior se desprende claramente que el tamaño de la región, así como la suavidad de su límite, no afectan los valores de las constantes ck. Estos últimos dependen únicamente de las integrales especificadas en el teorema. Tenga en cuenta que para cualquier función no negativa soportada de forma compacta $u(x_1, x_2)$ de dos variables, junto con (3.8), la desigualdad también es cierta

$$\iint u^3\, dx_1\, dx_2 \leq \frac{9}{8}\iint u\, dx_1\, dx_2 \iint \left(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2\right)\, dx_1\, dx_2 \tag{3.11}$$

La prueba de desigualdad (3.8) dada anteriormente es similar a la prueba de desigualdad (3.11) de A. O. Gelfond.

3.2 Ecuaciones de Saint Venant

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant está compuesto por dos conjuntos de ecuaciones: las ecuaciones de continuidad y las ecuaciones de cantidad de movimiento o momentum

3.2.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad tiene en cuenta un balance de masa sobre un volumen de control. En forma conservativa puede escribirse en términos del caudal Q y del área A de la siguiente manera:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{3.12}$$

De manera no conservativa en términos de la velocidad media longitudinal V y la profundidad (y) así:

$$V\frac{\partial y}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \tag{3.13}$$

3.2.2 Ecuaciones de cantidad de movimiento

La ecuación de momentum surge al igualar las fuerzas externas aplicadas al volumen de control como la gravedad, la presión, la fricción, el viento entre otras. En forma conservativa puede escribirse esta ecuación en términos del caudal (Q) , área (A), profundidad (A), pendiente del canal (S_0), pendiente de fricción (S_f) y de la gravedad (g) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + g\frac{\partial y}{\partial x} - g\left(S_0 - S_f\right) = 0 \tag{3.14}$$

O de manera no conservativa en términos de la velocidad media longitudinal (V):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} - g\frac{\partial y}{\partial x} - g\left(S_0 - S_f\right) = 0 \tag{3.15}$$

La forma final de continuidad y momento es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A}{Q}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.16}$$

Capítulo 4

MATERIALES Y MÉTODOS

4.1 Método 1

4.1.1 Resumen

Capítulo 5

RESULTADOS

Capítulo 6

CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJO FUTURO

LITERATURA CONSULTADA

[1] O. A. Ladyzhenskaya, “The mathematical theory of viscous incompressible flow,” *Gordon & Breach*, 1969.

[2] A. J. Majda, A. L. Bertozzi y A. Ogawa, “Vorticity and incompressible flow. Cambridge texts in applied mathematics,” *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, n.º 4, B77-B78, 2002.

[3] J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace,” *Acta mathematica*, vol. 63, págs. 193-248, 1934.

[4] V. Scheffer, “An inviscid flow with compact support in space-time.,” *Journal of geometric analysis*, vol. 3, n.º 4, 1993.

[5] A. Shnirelman, “On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation,” *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 50, n.º 12, págs. 1261-1286, 1997.

[6] V. Scheffer, “Turbulence and Hausdorff dimension,” en *Turbulence and Navier Stokes Equations: Proceedings of the Conference Held at the University of Paris-Sud Orsay June 10–13 1975*, Springer, 2006, págs. 174-183.

[7] L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg, “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations,” *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 35, n.º 6, págs. 771-831, 1982.

[8] F. Lin, “A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem,” *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 51, n.º 3, págs. 241-257, 1998.