

# CONTENIDO

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2. Contexto Histórico . . . . .	1
1.3. Justificación . . . . .	3
1.4. Hipótesis . . . . .	3
1.5. Contribuciones de este trabajo . . . . .	3
1.6. Esquema de la tesis . . . . .	3
<b>2. OBJETIVOS</b>	<b>4</b>
2.1. Objetivo General . . . . .	4
2.2. Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>3. REVISIÓN DE LITERATURA</b>	<b>5</b>
3.1. Definición de términos clave . . . . .	5
3.2. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	6
3.2.1. Descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	6
3.2.2. Demostraciones a resolver . . . . .	8
3.2.3. Resultados parciales conocidos . . . . .	8
3.3. Las soluciones débiles . . . . .	11
3.3.1. Existencia global de estas soluciones en tres dimensiones . . . . .	11
3.4. Ecuación de Navier-Stokes en 2D . . . . .	11
3.4.1. Demostración de Olga A. Ladyzhenskaya . . . . .	11
3.5. Ecuaciones de Saint Venant . . . . .	14
3.5.1. Ecuación de continuidad . . . . .	14
3.5.2. Ecuaciones de cantidad de movimiento . . . . .	14
3.6. Vorticidad . . . . .	15
3.7. Métodos Numéricos . . . . .	16
3.7.1. Métodos de Elementos Finitos (FEM) . . . . .	16
3.7.2. Métodos Espectrales . . . . .	16
3.7.3. Elementos finitos estabilizados . . . . .	16

3.7.4.	Métodos de Volumen Finito (FVM) . . . . .	16
3.7.5.	Métodos Lattice Boltzmann . . . . .	16
3.8.	Simulación de Turbulencia . . . . .	16
3.8.1.	Grandes Simulaciones de Turbulencia (LES) . . . . .	16
3.8.2.	Modelos de Turbulencia RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) . . . . .	16
3.9.	Agricultura Vertical . . . . .	16
<b>4.</b>	<b>MATERIALES Y MÉTODOS</b>	<b>17</b>
4.1.	Materiales . . . . .	17
4.2.	Método 1 . . . . .	17
4.2.1.	Caso de estudio University of Arizona . . . . .	17
<b>5.</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>18</b>
<b>6.</b>	<b>CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJO FUTURO</b>	<b>19</b>
	<b>LITERATURA CONSULTADA</b>	<b>20</b>

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Planteamiento del problema

### 1.2 Contexto Histórico

- 1687: Isaac Newton - Publica la ley de la viscosidad en su obra Principia Mathematica, sentando las bases de la mecánica de fluidos.
- 1822: Claude-Louis Navier - Introduce las primeras ecuaciones que incorporan la viscosidad en la dinámica de fluidos.
- 1845: George Gabriel Stokes - Refina y formaliza las ecuaciones de Navier, produciendo las ecuaciones de Navier-Stokes tal como se conocen hoy.
- 1934: Jean Leray - Introduce el concepto de soluciones débiles y demuestra la existencia global de estas soluciones en tres dimensiones.
- 1950s-1960s: Olga Ladyzhenskaya - Realiza avances significativos en la teoría de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 1967: Lars Onsager - Propone teorías sobre la turbulencia y la energía en sistemas de fluidos.
- 1970s-1980s: Tosio Kato - Contribuye al estudio de la regularidad y la teoría de semigrupos aplicados a las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 1970s: John von Neumann - Desarrolla métodos numéricos y computacionales para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 1980s-1990s: Peter Constantin - Hace importantes contribuciones a la teoría de la turbulencia y el análisis de los flujos de fluidos.
- 1980s-1990s: Ronald Coifman - Trabaja en el análisis armónico y su aplicación a la dinámica de fluidos.

- 2000s-2010s: Cédric Villani - Trabaja en la teoría cinética de los gases y las ecuaciones de Boltzmann, relacionadas con las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 2000s-2010s: Weinan E - Realiza avances en la teoría de la turbulencia y el análisis numérico de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 2010s: Terence Tao - Explora la regularidad y la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 2010s: Charles Fefferman - Trabaja en la teoría de la regularidad de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 2010s: Pierre-Louis Lions - Hace importantes contribuciones al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, incluidas las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 2010s: Beatrice Riviere - Desarrolla métodos numéricos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, aplicándolos a problemas prácticos.
- 2010s: Charles Peskin - Desarrolla el método del punto inmerso, una técnica numérica para simular fluidos y estructuras elásticas que interactúan.
- 2010s: Cédric Villani - Continuó trabajando en la teoría cinética de los gases y sus aplicaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes. Recibió la Medalla Fields en 2010 por sus contribuciones a la teoría del transporte óptimo y sus aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales.
- 2010s: Peter Constantin - Continuó sus investigaciones en turbulencia, estabilidad y métodos numéricos para fluidos, haciendo contribuciones significativas a la comprensión matemática de la dinámica de fluidos.
- 2014: Terence Tao - Publicó trabajos sobre problemas relacionados con la regularidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, explorando métodos innovadores para abordar estos problemas.
- 2020: Yann Brenier - Avanzó en la comprensión de las ecuaciones de Navier-Stokes a través del estudio de flujos óptimos y transporte en fluidos, desarrollando nuevas técnicas en análisis y geometría para abordar estos problemas.
- 2020s: Edriss Titi - Realizó investigaciones sobre la regularidad y la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, con aplicaciones a la modelización de fenómenos atmosféricos y oceánicos.
- 2020s: Alexei Borodin - Aplicó métodos probabilísticos y de teoría de matrices aleatorias al estudio de la dinámica de fluidos, proporcionando nuevas perspectivas sobre el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- 2021: Carlos Kenig - Recibió el Premio Abel por sus contribuciones al estudio de ecuaciones en derivadas parciales, incluyendo resultados importantes sobre la regularidad y la dispersión de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes.

- 2020s: Advances in Computational Fluid Dynamics (CFD) - Se realizaron avances significativos en la simulación numérica de fluidos mediante el uso de supercomputadoras y técnicas de aprendizaje automático, permitiendo simulaciones más precisas y detalladas de problemas complejos en dinámica de fluidos.

## 1.3 Justificación

## 1.4 Hipótesis

## 1.5 Contribuciones de este trabajo

## 1.6 Esquema de la tesis

Este trabajo está estructurado como sigue. La introducción va seguida de X capítulos independientes que se han ordenado de forma coherente con el proceso de desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes. En gran medida, la notación es consistente a lo largo de esta tesis y cada excepción está claramente resaltada. Para facilitar la navegación, se incluyen apéndices al final de sus respectivos capítulos, mientras que la bibliografía acumulativa se adjunta al final de este documento. Los capítulos siguientes se resumen brevemente a continuación.

- **Capítulo 1** Consiste en...
- **Capítulo 2** Consiste en...
- **Capítulo 3** Consiste en...
- **Capítulo 4** Consiste en...
- **Capítulo 5** Consiste en...
- **Capítulo 6** Consiste en...

# Capítulo 2

## OBJETIVOS

### 2.1 Objetivo General

1. Exponer las aplicaciones en el Ingeniería en Irrigación mediante las Ecuaciones de Navier Stokes

### 2.2 Objetivos Específicos

1. Documentar el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes en tercera dimensión
2. Modelar las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de Agricultura Vertical Plant Factory Hidropónico con relación agua-planta
3. Aplicar algoritmos de Inteligencia Artificial y Machine Learning a los métodos numéricos

## Capítulo 3

# REVISIÓN DE LITERATURA

### 3.1 Definición de términos clave

La ley de conservación de masa es definida tal que: “*En un sistema aislado, durante toda reacción química ordinaria, la masa total en el sistema permanece constante, es decir, la masa consumida de los reactivos es igual a la masa de los productos obtenidos*” (Antoine Lavoisier, 1785 [1]).

#### Definición 3.1 (Ley de conservación de la masa) *a*

Se expresa esta ley mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Conservación de la cantidad de movimiento

$$F = m \cdot a = \frac{d}{dt}(mu) \quad (3.1)$$

#### Definición 3.2 (Fluido) *Es una sustancia que puede ser líquido o gas.*

Se caracteriza un fluido por las siguientes funciones:

1. **Campo de velocidades**  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$  que determina la velocidad que tiene una partícula en cada punto  $x \in \Omega$  del dominio y en cada tiempo  $t \in \mathbb{R}$
2. **Presión**,  $p = p(x, t)$ , en el seno del fluido
3. **Densidad**,  $\rho = \rho(x, t)$  del fluido

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} u_i}_{\text{Campo de velocidad}} + \underbrace{\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{Momentum del flujo}} = \underbrace{\nu \Delta u_i}_{\text{Viscosidad}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{Campo de presión}} + \underbrace{f_i(x, t)}_{\text{Fuerzas externas}} \quad (3.2)$$

$$\underbrace{\operatorname{div} u}_{\text{Condición de incompresibilidad}} = \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{parte 1}} \quad (3.3)$$

$$\underbrace{u(x, 0)}_{\text{parte 1}} = \underbrace{u^\circ(x)}_{\text{parte 1}} \quad (3.4)$$

## 3.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido en  $\mathbb{R}^n$  tal que ( $n = 2$  o  $3$ ). Estas ecuaciones se resuelven por un vector desconocido de velocidad  $u(x, t) = (u_i(x, t))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  y presión  $p(x, t) \in \mathbb{R}$ , definido por la posición  $x \in \mathbb{R}^n$  y tiempo  $t \geq 0$ . Se restringe a fluidos incompresibles que están en  $\mathbb{R}^n$ , dichas ecuaciones son:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0), \quad (3.5)$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{Condiciones iniciales: } u(x, 0) = u^\circ(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (3.7)$$

**Notación 3.1** De las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7)

- $u^\circ(x)$  está dado
- $C^\infty$  es un campo vectorial libre de divergencia en  $\mathbb{R}^n$ ,
- $f_i(x, t)$  son los componentes de una fuerza externa aplicada (ej. gravedad),
- $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  es el Laplaciano en espacios variables.
- La viscosidad  $\nu$ , es un coeficiente positivo<sup>1</sup>

### 3.2.1 Descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes

- La ecuación (3.5), se basa en la Segunda Ley de Newton  $f = m \cdot a$  para un fluido sujeto a una fuerza externa  $f = (f_i(x, t))_{1 \leq i \leq n}$  y a las fuerzas que surgen de la presión y la fricción.

---

<sup>1</sup>Las ecuaciones de Euler son las mismas que (3.5), (3.6) y (3.7), pero con viscosidad  $\nu = 0$



- La ecuación (3.6), define que el fluido es incompresible.  $u(x, t)$  no debe crecer a medida que  $|x| \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, se restringirá la atención en las fuerzas  $f$  y las condiciones iniciales  $u^\circ$  que satisfacen las ecuaciones (3.8) y (3.9)

$$|\partial_x^\alpha u^\circ(x)| \leq C_{\alpha K} (1 + |x|)^{-K} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha \wedge K \quad (3.8)$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha m K} (1 + |x| + t)^{-K} \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \quad \forall \alpha, m \wedge K \quad (3.9)$$

Se acepta una solución de (3.5), (3.6), (3.7) como físicamente razonables sólo si satisfacen las ecuaciones (3.10) y (3.11)

$$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \quad (3.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^2 dx < C \quad \forall t \geq 0 \quad (3.11)$$

Alternativamente, para descartar problemas en el infinito, se buscan espacios espacialmente soluciones periódicas de (3.5), (3.6), (3.7). Por lo tanto, asumimos que  $u^\circ(x), f(x, t)$  satisfacen

$$u^\circ(x + e_j) = u^\circ(x), \quad f(x + e_j, t) = f(x, t), \quad p(x + e_j, t) = p(x, t) \quad \forall 1 \leq j \leq n \quad (3.12)$$

**Notación 3.2** De la ecuación (3.12)

- $e_j = j^{th}$

En lugar de (3.8) y (3.9), se supone que  $u^\circ$  es suave y que se cumple la ecuación (3.13)

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha m K} (1 + |t|)^{-K} \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \quad \forall \alpha, m \wedge K \quad (3.13)$$

Se acepta una solución de (3.5), (3.6), (3.7), físicamente satisfacen las ecuaciones (3.14) y (3.15)

$$u(x + t) = u(x + e_j, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \quad \forall 1 \leq j \leq n \quad (3.14)$$

$$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \quad (3.15)$$

Desarrollando la ecuación (3.14), se tiene:

$$\begin{aligned} & - \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dt - \sum_{ij} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} dx dt \\ & = \nu \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u \cdot \Delta \theta dx dt + \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} f \cdot \theta dx dt + \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} p \cdot (\operatorname{div} \theta) dx dt \end{aligned}$$

### 3.2.2 Demostraciones a resolver

Se solicita una demostración de una de las siguientes cuatro afirmaciones.

1. **Existencia y suavidad de las soluciones de Navier-Stokes en  $\mathbb{R}^3$ .**

- a) Con  $\nu > 0$  y  $n = 3$ , sea  $u^\circ(x)$  cualquier campo vectorial suave y libre de divergencias que satisfaga la ecuación (3.8)
- b) Se toma  $f(x, t) = 0$ , entonces existe una función suave  $p(x, t), u_i(x, t)$  en  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  que satisfagan las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.7), (3.10), (3.11)

2. **Existencia y fluidez de soluciones Navier-Stokes en  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$**

- a) Con  $\nu > 0$  y  $n = 3$ . Sea  $u^\circ(x)$  cualquier campo vectorial suave y libre de divergencia que satisfaga (3.12);
- b) Se toma  $f(x, t) = 0$ . Entonces existen funciones suaves  $p(x, t), u_i(x, t)$  en  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  que satisfacen (3.5), (3.6), (3.7), (3.14), (3.15)

3. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en  $\mathbb{R}^3$**

- a) Con  $\nu > 0$  y  $n = 3$ . Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia  $u^\circ(x)$  en  $\mathbb{R}^3$
- b) y existe un  $f(x, t)$  suave en  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ , que satisface (3.8), (3.9), para el cual no existen soluciones  $(p, u)$  de (3.5), (3.6), (3.7), (3.10), (3.11) en  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

4. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ .**

- a) Con  $\nu > 0$  y  $n = 3$ . Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia  $u^\circ(x)$  en  $\mathbb{R}^3$
- b) y existe un  $f(x, t)$  suave en  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ , que satisface (3.12), (3.13), para el cual no existen soluciones  $(p, u)$  de (3.5), (3.6), (3.7), (3.14), (3.15) en  $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ .

### 3.2.3 Resultados parciales conocidos

#### Dos dimensiones

**Resuelto.** En la sección (3.4.1), se demuestra para los análogos de las afirmaciones (1) y (2) por Ladyzhenskaya [2], también para el caso más difícil de las ecuaciones de Euler.

#### Tres dimensiones

**Sin resolver.** En tres dimensiones, se sabe que (1) y (2) se mantienen siempre que la velocidad inicial  $u^\circ$  satisfaga una condición de pequeñez. Para los datos iniciales  $u^\circ(x)$  que no se supone que sean pequeños, se sabe que (1) y (2) se cumplen (también

para  $\nu = 0$ ) si el intervalo de tiempo  $[0, \infty)$  se reemplaza por un intervalo de tiempo pequeño  $[0, T)$ , dependiendo  $T$  de los datos iniciales.

Para un  $u^\circ(x)$  inicial dado, el  $T$  máximo permitido se denomina “tiempo de explosión”. (1) y (2) se cumplen, o bien hay un  $u^\circ(x)$  suave y sin divergencia para el cual (3.5), (3.6), (3.7) tienen una solución con un tiempo de explosión finito. Para las ecuaciones de Navier-Stokes ( $\nu > 0$ ), si hay una solución con un tiempo de explosión finito  $T$ , entonces la velocidad  $(u_i(x, t))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  se vuelve ilimitado cerca del momento de la explosión.

Se sabe que suceden otras cosas desagradables en el momento de explosión  $T$ , si  $T < \infty$ . Para las ecuaciones de Euler ( $\nu = 0$ ), si hay una solución (con  $f \equiv 0$ ) con un tiempo de explosión finito  $T$ , entonces la vorticidad  $\omega(x, t) = \text{curl}_x u(x, t)$  satisface

$$\text{Baele-Katp-Majda} \quad \int_0^T \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\omega(x, t)| \right\} dt = \infty \quad (3.16)$$

para que la vorticidad explote rápidamente.

Muchos cálculos numéricos parecen mostrar una explosión en las soluciones de las ecuaciones de Euler, pero la extrema inestabilidad numérica de las ecuaciones hace que sea muy difícil sacar conclusiones confiables.

Los resultados anteriores están muy bien tratados en el libro de Bertozzi y Majda [3]. A partir de Leray [4], se han logrado importantes avances en la comprensión de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para llegar a la idea de una **solución débil** de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para llegar a la idea de una solución débil en una Ecuación Diferencial Parcial (EDP), se integra la ecuación con una función de prueba y luego se integra por partes (formalmente) para hacer que las derivadas caigan en la función de prueba. Por ejemplo, si (3.5) y (3.6) se cumplen, entonces, para cualquier campo vectorial suave  $\theta(x, t) = (\theta_i(x, t))_{1 \leq i \leq n}$  soportado de forma compacta en  $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ , una integración formal por partes produce

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} u \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dt - \sum_{ij} \iint_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} dx dt \\ &= \nu \iint_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}} u \cdot \Delta \theta dx dt + \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} f \cdot \theta dx dt - \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} p \cdot (\text{div} \theta) dx dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

La ecuación (12) tiene sentido para  $u \in L^2, f \in L^1, p \in L^1$ , mientras que (3.5) tiene sentido sólo si  $u(x, t)$  es dos veces diferenciable en  $x$ . De manera similar, si  $\varphi(x, t)$  es una función suave, soportada de manera compacta en  $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ , entonces una integración formal por partes y (3.6) implica:

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} u \cdot \nabla_x \varphi dx dt = 0 \quad (3.18)$$

Una solución de (3.17), (3.18) se llama solución débil de las ecuaciones de Navier Stokes.

Una idea establecida desde hace mucho tiempo en el análisis es demostrar la existencia y regularidad de las soluciones de una EDP construyendo primero una solución

débil y luego demostrando que cualquier solución débil es suave. Este programa se ha probado para Navier-Stokes con éxito parcial.

Leray en [4] demostró que las ecuaciones de Navier-Stokes (3.5), (3.6), (3.7) en tres dimensiones espaciales siempre tienen una solución débil  $(p, u)$  con propiedades de crecimiento adecuadas. Se desconoce la unicidad de las soluciones débiles de la ecuación de Navier-Stokes. Para la ecuación de Euler, la unicidad de las soluciones débiles es sorprendentemente falsa. Scheffer [5] y, más tarde, Schnirelman [6] exhibieron soluciones débiles de las ecuaciones de Euler en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  con soporte compacto en el espacio-tiempo. Esto corresponde a un fluido que parte del reposo en el instante  $t = 0$ , comienza a moverse en el instante  $t = 1$  sin estímulo externo y vuelve al reposo en el instante  $t = 2$ , con su movimiento siempre confinado a una bola  $B \subset \mathbb{R}^3$ .

Scheffer [7] aplicó ideas de la teoría de la medida geométrica para demostrar un teorema de regularidad parcial para soluciones débiles adecuadas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Caffarelli-Kohn-Nirenberg [8] mejoraron los resultados de Scheffer y F.-H. Lin [9] simplificó las pruebas de los resultados en Caffarelli-Kohn-Nirenberg [8]. El teorema de regularidad parcial de [8], [9] se refiere a un análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff del conjunto singular de una solución débil adecuada de Navier-Stokes. Aquí, el conjunto singular de una solución débil  $u$  consta de todos los puntos  $(x^\circ, t^\circ) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  tales que  $u$  es ilimitado en todas las vecindades de  $(x^\circ, t^\circ)$ . (Si la fuerza  $f$  es suave, y si  $(x^\circ, t^\circ)$  no pertenece al conjunto singular, entonces no es difícil demostrar que  $u$  puede corregirse en un conjunto de medida cero para volverse suave en una vecindad de  $(x^\circ, t^\circ)$ .)

Para definir el análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff, utilizamos cilindros parabólicos  $Q_r = B_r \times I_r \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , donde  $B_r \subset \mathbb{R}^3$  es una bola de radio  $r$ , e  $I_r \subset \mathbb{R}$  es un intervalo de longitud  $r^2$ . Dado  $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $\delta > 0$ , establecemos

$$\mathcal{P}_{K,\delta}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^K : Q_{r_1}, Q_{r_2}, \dots \text{ Cubren } E, \text{ y cada } r_i < \delta \right\}$$

y luego definir

$$\mathcal{P}_K(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{P}_{K,\delta}(E)$$

Los principales resultados de [8], [9] pueden expresarse aproximadamente de la siguiente manera:

**Teorema 3.1** *Regularidad Parcial de Caffarelli-Kohn-Nirenberg y F.-H. Lin*

1. (A) Sea  $u$  una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes, que satisfaga condiciones de crecimiento adecuadas. Sea  $E$  el conjunto singular de  $u$ . Entonces  $\mathcal{P}_1(E) = 0$ .
2. (B) Dado un campo vectorial libre de divergencia  $u^\circ(x)$  y una fuerza  $f(x, t)$  que satisface (3.8) y (3.9), existe una solución débil de Navier-Stokes (3.5), (3.6), (3.7) que satisfacen las condiciones de crecimiento en (A).

En particular, el conjunto singular de  $u$  no puede contener una curva espacio-temporal de la forma  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x = \phi(t)$ . Este es el mejor teorema de regularidad parcial conocido hasta ahora para la ecuación de Navier-Stokes.

### 3.3 Las soluciones débiles

En 1934, Leray introdujo el concepto de soluciones débiles en su libro “Sobre el movimiento de un espacio de llenado de un líquido viscoso” [4]. Este fue un avance significativo porque, aunque no siempre es posible encontrar soluciones clásicas (suaves) a las ecuaciones de Navier-Stokes, las soluciones débiles permiten un enfoque más general.

#### 3.3.1 Existencia global de estas soluciones en tres dimensiones

### 3.4 Ecuación de Navier-Stokes en 2D

En 1958, Olga A. Ladyzhenskaya [2] extendió estos conceptos al trabajar tanto con soluciones débiles como con soluciones fuertes (más regulares). Mientras que Leray se centró en la existencia de soluciones débiles, Ladyzhenskaya se ocupó también de la unicidad y regularidad de las soluciones, particularmente en dos dimensiones.

La desigualdad multiplicativa:

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq c \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (3.19)$$

Que es válido para cualquier  $u \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Esta desigualdad dió la posibilidad de demostrar la existencia de una solución única global del sistema bidimensional Navier-Stokes

#### 3.4.1 Demostración de Olga A. Ladyzhenskaya

Del artículo de Ladyzhenskaya: Solución “en grande” del problema de valores en la frontera no estacionarios para el sistema Navier-Stokes con dos variables espaciales; traducido del ruso se describe a continuación la demostración original:

Consideremos en la región  $\Omega$  de cambios  $x = (x_1, x_2)$  el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} v_t - \nu \Delta v + \sum_{k=1}^2 v_k \cdot v_{x_k} &= -\text{grad } p + f(x, t) \\ \text{div } v &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

para funciones  $v = (v_1(x, t), v_2(x, t))$  y  $p(x, t)$  bajo condiciones iniciales y de frontera

$$v|_s = 0, \quad v|_{t=0} = a(x) \quad (\text{div } a = 0) \quad (3.21)$$

**Teorema 3.2** *El problema (3.20)-(3.21) tiene solución única “en general” (es decir, para cualquier  $t \geq 0$  para cualquier valor del número de Reynolds en el momento inicial y para  $f$  arbitraria), si solo las integrales son finitas*

$$\int_{\Omega} a^2 dx, \quad \int_{\Omega} (v_t(x, 0))^2 dx, \quad \int_0^t \int_{\Omega} f^2 + f_t^2 dx dt$$

De los resultados obtenidos en el trabajo (a), se deduce que toda la cuestión de la existencia “en general” se reduce ahora a obtener una estimación a priori de la integral

$$\int_0^t \int_{\Omega} v_t^2 dx dt + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 v_k^4(x, t) dx \quad (3.22)$$

O máx  $|v|$ . En vista de esto, aquí hablaremos sólo de estimaciones a priori de las soluciones a los problemas (3.20) a (3.21). Se sabe que para soluciones del problema (3.20) - (3.21) la desigualdad se cumple

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^2(x, t) dx + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 (v_{x_k})^2 dx dt \leq \\ & \leq \int_{\Omega} a^2 dx + 2 \left( \int_{\Omega} a^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} d^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt + 2 \left[ \int_0^t \left( \int_{\Omega} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Denotemos  $\int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 [v_{x_k}(x, t)]^2 dx = \phi^2(t)$  De (3.23) se deduce que conocemos la estimación de la integral  $\int_0^t \phi^2(t) dt$ . Sea  $\int_0^t \int_{\Omega} (f_t)^2 dx dt < \infty$ . vamos a diferenciar (3.20) por t, multiplicar el resultado escalarmente por (vt) e integrar Después de transformaciones simples llegamos a la desigualdad.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [v_t(x, t)]^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t} + \nu \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 (v_{tx_k})^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 v_{xt} v_{x_k} v_t dx dt \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} f_t v_t dx dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

De donde se despeja:

$$\phi^2(t) \Big|_{t=0}^{t=t} + 2\nu \int_0^t F^2(t) dt \leq c \int_0^t \phi(t) \left[ \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 v_{kt}^4 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt + \int_0^t \phi(t) b(t) dt \quad (3.25)$$

Dónde

$$\phi^2(t) = \int_{\Omega} [v_t(x, t)]^2 dx \quad F^2(t) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 [v_{tx_k}(x, t)]^2 dx \quad b^2(t) = 2 \int_{\Omega} f_t^2(x, t) dx$$

y c aquí (y más) significa las constantes que conocemos.

Verifiquemos ahora que para cualquier función continuamente diferenciable soportada de forma compacta  $u(x_1, x_2)$  dos variables espaciales se cumple la siguiente desigualdad:

$$\iint u^4(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq 2 \iint u^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \iint (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx_1 dx_2 \quad (3.26)$$

En el que la integración se realiza en todo el espacio  $x_1, x_2$ . Es obvio que.

$$u^2(x_1, x_2) = 2 \int_{-\infty}^{x_k} uu_{x_k} dx_k, \quad k = 1, 2$$

y por lo tanto

$$\max_{x_k} u^2(x_1, x_2) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |uu_{x_k}| dx_k, \quad k = 1, 2$$

Es por eso

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} u^4 dx_1 dx_2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left( \max_{x_1} u^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx_1 \right) \leq \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |uu_{x_1}| dx_1 \max_{x_3} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx_1 \right) \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |uu_{x_1}| dx_1 dx_2 \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} |uu_{x_2}| dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

y esto implica desigualdad (3.26).

Usemos la desigualdad (3.26) Para estimaciones  $\int_0^t \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 v_{kt} dx$  a la (3.25). Porque  $v_{kt}$  son iguales a cero en la frontera  $S$ , entonces para ellos, en virtud de (3.26), tenemos

$$\left( \int_{\Omega} v_{kt}^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \phi(t) F(t)$$

y por lo tanto de (3.25) se sigue

$$\phi^2(t) \Big|_{t=0}^{t=t} + 2\nu \int_0^t F^2(t) dt \leq C_1 \int_0^t \varphi(t) \phi(t) F(t) dt + \int_0^t \phi(t) b(t) dt$$

De aquí, a su vez, concluimos consistentemente sobre la validez de las desigualdades.

$$\begin{aligned} \phi^2(t) \Big|_{t=0}^{t=t} + 2\nu \int_0^t F^2(t) dt &\leq \nu \int_0^t F^2(t) dt + \frac{c_1}{2\nu} \int_0^t \varphi^2 \phi^2 dt + \int_0^t \phi b dt \\ \phi^2(t) &\leq c_2 \int_0^t (\phi^2 + b^2) \phi^2 dt + c_3, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\nu \int_0^t F^2(t) dt \leq c_2 \int_0^t (\phi^2 + b^2) \phi^2 dt + c_3 \quad (3.28)$$

Dado que la función  $\phi^2(t) + b^2(t)$  es sumable en  $[0, t]$ , se deduce de (3.27) que  $\phi^2(t) \leq c_4$  y de (3.28)  $\int_0^t F^2(t) dt \leq c_5$

Estas desigualdades nos dan una estimación a priori de las soluciones, incluso más fuerte que (3.22). De la prueba anterior se desprende claramente que el tamaño de la región, así como la suavidad de su límite, no afectan los valores de las constantes  $c_k$ . Estos últimos dependen únicamente de las integrales especificadas en el teorema. Tenga en cuenta que para cualquier función no negativa soportada de forma compacta  $u(x_1, x_2)$  de dos variables, junto con (3.26), la desigualdad también es cierta

$$\iint u^3 dx_1 dx_2 \leq \frac{9}{8} \iint u dx_1 dx_2 \iint (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx_1 dx_2 \quad (3.29)$$

La prueba de desigualdad (3.26) dada anteriormente es similar a la prueba de desigualdad (3.29) de A. O. Gelfond.

## 3.5 Ecuaciones de Saint Venant

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant está compuesto por dos conjuntos de ecuaciones: las ecuaciones de continuidad y las ecuaciones de cantidad de movimiento o momentum

### 3.5.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad tiene en cuenta un balance de masa sobre un volumen de control. En forma conservativa puede escribirse en términos del caudal  $Q$  y del área  $A$  de la siguiente manera:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.30)$$

De manera no conservativa en términos de la velocidad media longitudinal  $V$  y la profundidad ( $y$ ) así:

$$V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (3.31)$$

### 3.5.2 Ecuaciones de cantidad de movimiento

La ecuación de momentum surge al igualar las fuerzas externas aplicadas al volumen de control como la gravedad, la presión, la fricción, el viento entre otras. En forma conservativa puede escribirse esta ecuación en términos del caudal ( $Q$ ), área ( $A$ ), profundidad ( $A$ ), pendiente del canal ( $S_0$ ), pendiente de fricción ( $S_f$ ) y de la gravedad ( $g$ ) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial y}{\partial x} - g (S_0 - S_f) = 0 \quad (3.32)$$

O de manera no conservativa en términos de la velocidad media longitudinal ( $V$ ):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g \frac{\partial y}{\partial x} - g (S_0 - S_f) = 0 \quad (3.33)$$

La forma final de continuidad y momento es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{A}{Q} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.34)$$

**Campo de aceleraciones:**

- Campo de presión:  $P = P(x, y, z, t)$
- Campo de velocidad:  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$
- Campo de aceleración:  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$



$\vec{V}$  se puede desarrollar en las coordenadas cartesianas

$$\vec{V} = (u, v, w) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \quad (3.35)$$

Aceleración de una partícula de fluido expresada como una variable de campo:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Aceleración local}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}}_{\text{Aceleración convectiva}} \quad (3.36)$$

El operador gradiente u operador nabla, es un operador vectorial que se define en coordenadas cartesianas como:

$$\text{Gradiente} \quad \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.37)$$

Ecuación para una línea de corriente:

$$\text{Línea de corriente} \quad \frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (3.38)$$

### 3.6 Vorticidad

el vector de vorticidad se define matemáticamente como el rotacional del vector de velocidad  $\vec{V}$

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{rot}(\vec{V}) \quad (3.39)$$

Resulta que el vector de razón de rotación es igual a la mitad del vector de vorticidad:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2} \quad (3.40)$$

Por lo tanto, la vorticidad es una medida de la rotación de una partícula de fluido.

## 3.7 Métodos Numéricos

### 3.7.1 Métodos de Elementos Finitos (FEM)

### 3.7.2 Métodos Espectrales

### 3.7.3 Elementos finitos estabilizados

### 3.7.4 Métodos de Volumen Finito (FVM)

### 3.7.5 Métodos Lattice Boltzmann

## 3.8 Simulación de Turbulencia

### 3.8.1 Grandes Simulaciones de Turbulencia (LES)

### 3.8.2 Modelos de Turbulencia RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes)

## 3.9 Agricultura Vertical

## Capítulo 4

# MATERIALES Y MÉTODOS

### 4.1 Materiales

### 4.2 Método 1

#### 4.2.1 Caso de estudio University of Arizona

## Capítulo 5

# RESULTADOS

## Capítulo 6

# CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJO FUTURO

# LITERATURA CONSULTADA

- [1] R. W. Sterner, G. E. Small y J. M. Hood, “The conservation of mass,” *Nature Education Knowledge*, vol. 3, n.º 10, págs. 20, 2011.
- [2] O. A. Ladyzhenskaya, “The mathematical theory of viscous incompressible flow,” *Gordon & Breach*, 1969.
- [3] A. J. Majda, A. L. Bertozzi y A. Ogawa, “Vorticity and incompressible flow. Cambridge texts in applied mathematics,” *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, n.º 4, B77-B78, 2002.
- [4] J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace,” *Acta mathematica*, vol. 63, págs. 193-248, 1934.
- [5] V. Scheffer, “An inviscid flow with compact support in space-time,” *Journal of geometric analysis*, vol. 3, n.º 4, 1993.
- [6] A. Shnirelman, “On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation,” *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 50, n.º 12, págs. 1261-1286, 1997.
- [7] V. Scheffer, “Turbulence and Hausdorff dimension,” en *Turbulence and Navier Stokes Equations: Proceedings of the Conference Held at the University of Paris-Sud Orsay June 10–13 1975*, Springer, 2006, págs. 174-183.
- [8] L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg, “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations,” *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 35, n.º 6, págs. 771-831, 1982.
- [9] F. Lin, “A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem,” *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 51, n.º 3, págs. 241-257, 1998.