AGRADECIMIENTOS

A lo largo de mi vida, he recorrido senderos llenos de desafíos, aprendizajes y gratitud. Hoy, al culminar esta etapa académica, deseo dedicar este trabajo a quienes han sido el faro y la brújula en mi viaje.

A mi mamá María Carolina Herrera Díaz y a mi papá Agustín Álvarez Bautista, cuyos sacrificios y amor incondicional me han dado la fortaleza para alcanzar mis metas. Ustedes me enseñaron que la educación es el legado más valioso y que el esfuerzo constante siempre rinde frutos. Cada paso que doy es un reflejo de su dedicación y valores inculcados. Mamá, papá, esta tesis es tan suya como mía.

A mis abuelos Mamá Aya, Papá Gogo, Luisa y Agustín, guardianes de la sabiduría y el cariño eterno. Aunque algunos ya no estén físicamente, sus enseñanzas y amor permanecen vivos en mi corazón. Sus historias y consejos me han guiado en los momentos más difíciles, dándome el coraje para persistir y superar obstáculos.

A mis hermanos Paulo Elías, Alan Yareth y Aranza Ailín, incondicionales de aventuras y desafíos. Gracias por ser mi apoyo en los días grises y mi celebración en los días de triunfo. Su confianza en mí ha sido una fuente de motivación constante.

A mis profesores Humberto López Chimil, Fernando Chávez León, Luis Castellanos y todos mis mentores, que con su sabiduría y paciencia han encendido en mí la llama del conocimiento. Sus enseñanzas han trascendido las aulas y han dejado una huella imborrable en mi formación personal y profesional. Gracias por creer en mi potencial y por inspirarme a ser mejor cada día.

Finalmente, dedico esta tesis a Dios, porque el me dió la voluntad de perseverar a pesar de las adversidades, por cada noche en vela y cada instante de duda superado. Este logro es el resultado de años de esfuerzo y dedicación, me recuerda que los sueños se alcanzan con determinación y pasión. Gracias a todos los que han sido parte de este viaje. Esta tesis es una manifestación de vuestro amor, apoyo y fe en mí. A todos ustedes, mi eterna gratitud.

CONTENIDO

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES

by

LUIS EMILIO ÁLVAREZ HERRERA

Submitted to the DEPARTAMENTO DE IRRIGACIÓN
on May 18, 1876 in partial fulfillment of the requirements for the degree of

INGENIERO EN IRRIGACIÓN

RESUMEN

La evapotranspiración es uno de los principales componentes del ciclo hidrológico y de vital importancia en la planeación y operación de zonas de riego, pues de ella dependen en gran medida los cálculos para conocer las necesidades hídricas de los cultivos para evitar la sub o sobreestimación de la lámina de riego aplicada, sin embargo su estudio resulta complicado pues la medición depende de dos procesos separados, evaporación y transpiración los cuales varían espacial y temporalmente, por lo que existen métodos para la estimación de ésta con ayuda de información meteorológica. Con el objetivo de determinar la evapotranspiración de referencia (ETo) con Machine Learning en la estación meteorológica Chapingo, México, se presentan cuatro modelos para la predicción de la ETo, mediante machine learning usando redes neuronales artificiales para el proceso de entrenamiento. Para entrenar el modelo, se utilizaron 5119 datos diarios de la estación meteorológica automática Chapingo, con los que se calcularon la ETo usando el método de FAO PenmanMonteith. Se realizó un diagrama de correlaciones con el que se identificaron las variables con mayor impacto en el cálculo de la ETo, sobresaliendo la radiación solar, posteriormente la temperatura máxima, la humedad relativa, así como la humedad relativa mínima y máxima. Con esta información se eligieron la combinación de variables que sirvieron como datos de entrada a cada uno de los modelos a entrenar. En cada uno de los modelos se encontraron los parámetros de la red neuronal que optimizaron el cálculo, tales como arquitectura de la red, capas ocultas y número de neuronas en cada capa, así como el número de iteraciones, learning rate y funciones de activación. En el modelo 4, usando únicamente la radiación solar, se obtuvo un muy buen ajuste del modelo con una R2 de 0.92, y un RSME de 0.0119, en los modelos 1 y 2, usando también la temperatura máxima, además la humedad relativa máxima y mínima se mejoró en poca medida el ajuste del modelo, obteniendo una R2 de 0.93 en ambos casos y un RSME de 0.0082 y 0.0074 respectivamente. Finalmente, el modelo 3, que no consideró la radiación solar no se ajustó correctamente obteniendo una R2 de 0.66 y un RSME de 0.1946. Palabras clave: Inteligencia Artificial, FAO Penman-Monteith, Redes Neuronales Artificiales, Modelación, Agrometeorología. [1]

Palabras clave: Ecuaciones de Navier-Stokes en R3, Inteligencia Artificial, Hidropónia, Aeropónia, Agricultura Vertical

Thesis supervisor: Edward C. Pickering
Title: Professor of Physics

[1] Text from Holman (1876): doi:10.2307/25138434.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES

by

LUIS EMILIO ÁLVAREZ HERRERA

Submitted to the DEPARTAMENTO DE IRRIGACIÓN
on May 18, 1876 in partial fulfillment of the requirements for the degree of

INGENIERO EN IRRIGACIÓN

ABSTRACT

La evapotranspiración es uno de los principales componentes del ciclo hidrológico y de vital importancia en la planeación y operación de zonas de riego, pues de ella dependen en gran medida los cálculos para conocer las necesidades hídricas de los cultivos para evitar la sub o sobreestimación de la lámina de riego aplicada, sin embargo su estudio resulta complicado pues la medición depende de dos procesos separados, evaporación y transpiración los cuales varían espacial y temporalmente, por lo que existen métodos para la estimación de ésta con ayuda de información meteorológica. Con el objetivo de determinar la evapotranspiración de referencia (ETo) con Machine Learning en la estación meteorológica Chapingo, México, se presentan cuatro modelos para la predicción de la ETo, mediante machine learning usando redes neuronales artificiales para el proceso de entrenamiento. Para entrenar el modelo, se utilizaron 5119 datos diarios de la estación meteorológica automática Chapingo, con los que se calcularon la ETo usando el método de FAO PenmanMonteith. Se realizó un diagrama de correlaciones con el que se identificaron las variables con mayor impacto en el cálculo de la ETo, sobresaliendo la radiación solar, posteriormente la temperatura máxima, la humedad relativa, así como la humedad relativa mínima y máxima. Con esta información se eligieron la combinación de variables que sirvieron como datos de entrada a cada uno de los modelos a entrenar. En cada uno de los modelos se encontraron los parámetros de la red neuronal que optimizaron el cálculo, tales como arquitectura de la red, capas ocultas y número de neuronas en cada capa, así como el número de iteraciones, learning rate y funciones de activación. En el modelo 4, usando únicamente la radiación solar, se obtuvo un muy buen ajuste del modelo con una R2 de 0.92, y un RSME de 0.0119, en los modelos 1 y 2, usando también la temperatura máxima, además la humedad relativa máxima y mínima se mejoró en poca medida el ajuste del modelo, obteniendo una R2 de 0.93 en ambos casos y un RSME de 0.0082 y 0.0074 respectivamente. Finalmente, el modelo 3, que no consideró la radiación solar no se ajustó correctamente obteniendo una R2 de 0.66 y un RSME de 0.1946. Palabras clave: Inteligencia Artificial, FAO Penman-Monteith, Redes Neuronales Artificiales, Modelación, Agrometeorología.
[2]

Thesis supervisor: Edward C. Pickering
Title: Professor of Physics

[2]Text from Holman (1876): doi:10.2307/25138434.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido en $\mathbb{R}^n$ tal que ($n = 2$ o 3). Estas ecuaciones se resuelven por un vector desconocido de velocidad $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ y presión $p(x,t) \in \mathbb{R}$, definido por la posición $x \in \mathbb{R}^n$ y tiempo $t \geq 0$. Se restringe a fluidos incompresibles que están en $\mathbb{R}^n$, dichas ecuaciones son:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)\,, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)\,, \tag{1.2}$$

$$\text{Condiciones iniciales:} \quad u(x,0) = u^\circ(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.3}$$

Notación 1.1 *De las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) con $\nu = 0$:*

- *$u^\circ(x)$ está dado*
- *C^∞ es un campo vectorial libre de divergencia en $\mathbb{R}^n$,*
- *$f_i(x,t)$ son los componentes de una fuerza externa aplicada (ej. gravedad),*
- *La viscosidad ν, es un coeficiente positivo*
- *$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el Laplaciano en espacios variables.*

1.1.1 Descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuación (1.1), se basa en la Ley de Newton $f = m \cdot a$ para un fluido sujeto a una fuerza externa $f = (f_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ y a las fuerzas que surgen de la presión y la fricción.

La ecuación (1.2), define que el fluido es incompresible. $u(x,t)$ no debe crecer a medida que $|x| \to \infty$. Por lo tanto, se restringirá la atención en las fuerzas f y las condiciones iniciales u° que satisfacen las ecuaciones (1.4) y (1.5)

$$|\partial_x^\alpha u^\circ(x)| \leq C_{\alpha K}\,(1+|x|)^{-K} \in \mathbb{R}^n \qquad \forall\,\alpha \wedge K \tag{1.4}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}\,(1+|x|+t)^{-K} \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \qquad \forall\,\alpha, m \wedge K \tag{1.5}$$

Se acepta una solución de (1.1), (1.2), (1.3) como físicamente razonable sólo si satisfacen las ecuaciones (1.6) y (1.7)

$$p, u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right) \tag{1.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 \, dx < C \quad \forall t \geq 0 \tag{1.7}$$

Alternativamente, para descartar problemas en el infinito, se buscan espacios espacialmente soluciones periódicas de (1.1), (1.2), (1.3). Por lo tanto, asumimos que $u^\circ(x)$, $f(x,t)$ satisfacen

$$u^\circ(x+e_j) = u^\circ(x), \quad f(x+e_j,t) = f(x,t), \quad p(x+e_j,t) = p(x,t) \qquad \forall\, 1 \leq j \leq n \tag{1.8}$$

Notación 1.2 *De la ecuación (1.8)*

- $ej = j^{th}$

En lugar de (1.4) y (1.5), se supone que u° es suave y que se cumple la ecuación (1.9)

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}\,(1+|t|)^{-K} \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \qquad \forall\,\alpha, m \wedge K \tag{1.9}$$

Se acepta una solución de (1.1), (1.2), (1.3), físicamente satisfacen las ecuaciones (1.10) y (1.11)

$$u(x+t) = u(x+e_j,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \qquad \forall\, 1 \leq j \leq n \tag{1.10}$$

$$p, u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right) \tag{1.11}$$

Desarrollando la ecuación (1.10), se tiene:

$$\begin{aligned} &-\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} u \cdot \Delta \frac{\partial \theta}{\partial t}\, dx\, dt - \sum_{ij} \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}\, dx\, dt \\ &= \nu \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} u \cdot \Delta\theta\, dx\, dt + \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} f \cdot \theta\, dx\, dt + \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} p \cdot (\mathrm{div}\theta)\, dx\, dt \end{aligned}$$

1.1.2 Demostraciones abiertas

Se solicita una demostración de uno de las siguientes cuatro afirmaciones.

1. **Existencia y suavidad de las soluciones de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$.**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$, sea $u^{\circ}(x)$ cualquier campo vectorial suave y libre de divergencias que satisfaga la ecuación (1.4)

b) Se toma $f(x,t) = 0$, entonces existe una función suave $p(x,t), u_i(x,t)$ en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ que satisfagan las ecuaciones (1.1),(1.2),(1.3),(1.6),(1.7)

2. **Existencia y fluidez de soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Sea $u^{\circ}(x)$ cualquier campo vectorial suave y libre de divergencia que satisfaga (1.8);

b) Se toma $f(x,t) = 0$. Entonces existen funciones suaves $p(x,t)$, $u_i(x,t)$ en $R^3 \times [0,\infty)$ que satisfacen (1.1),(1.2),(1.3),(1.10),(1.11)

3. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3$**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia $u^{\circ}(x)$ en $\mathbb{R}^3$

b) y existe un $f(x,t)$ suave en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, que satisface (1.4), (1.5), para el cual no existen soluciones (p,u) de (1.1),(1.2),(1.3),(1.6),(1.7) en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$

4. **Desglose de las soluciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.**

a) Con $\nu > 0$ y $n = 3$. Entonces existe un campo vectorial suave y libre de divergencia $u^{\circ}(x)$ en $\mathbb{R}^3$

b) y existe un $f(x,t)$ suave en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, que satisface (1.8), (1.9), para el cual no existen soluciones (p,u) de (1.1),(1.2),(1.3),(1.10),(1.11) en $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

1.1.3 Resultados parciales conocidos sobre Euler y Navier- Stokes

Dos dimensiones

En dos dimensiones, los análogos de las afirmaciones (1) y (2) son conocidos (Ladyzhenskaya [1]), también para el caso más difícil de las ecuaciones de Euler.

Tres dimensiones

En tres dimensiones, se sabe que (1) y (2) se mantienen siempre que la velocidad inicial u° satisfaga una condición de pequeñez. Para los datos iniciales $u^{\circ}(x)$ que no se supone que sean pequeños, se sabe que (1) y (2) se cumplen (también para $\nu = 0$) si el intervalo de tiempo $[0,\infty)$ se reemplaza por un intervalo de tiempo pequeño $[0,T)$, dependiendo T de los datos iniciales.

Para un $u^{\circ}(x)$ inicial dado, el T máximo permitido se denomina "tiempo de explosión". (1) y (2) se cumplen, o bien hay un $u^{\circ}(x)$ suave y sin divergencia para el cual (1.1), (1.2), (1.3) tienen una solución con un tiempo de explosión finito. Para las ecuaciones de Navier-Stokes ($\nu > 0$), si hay una solución con un tiempo de explosión finito T, entonces la velocidad $(u_i(x,t))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ se vuelve ilimitado cerca del momento de la explosión.

Se sabe que suceden otras cosas desagradables en el momento de explosión T, si $T < \infty$. Para las ecuaciones de Euler ($\nu = 0$), si hay una solución (con $f \equiv 0$) con un tiempo de explosión finito T, entonces la vorticidad $\omega(x,t) = curl_x u(x,t)$ satisface

$$\text{Baele-Katp-Majda} \qquad \int_0^T \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\omega(x,t)| \right\} dt = \infty \tag{1.12}$$

para que la vorticidad explote rápidamente.

Muchos cálculos numéricos parecen mostrar una explosión en las soluciones de las ecuaciones de Euler, pero la extrema inestabilidad numérica de las ecuaciones hace que sea muy difícil sacar conclusiones confiables.

Los resultados anteriores están muy bien tratados en el libro de Bertozzi y Majda [2]. A partir de Leray [3], se han logrado importantes avances en la comprensión de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para llegar a la idea de una `solución débil` de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Para llegar a la idea de una solución débil en una PDE, se integra la ecuación con una función de prueba y luego se integra por partes (formalmente) para hacer que las derivadas caigan en la función de prueba. Por ejemplo, si (1.1) y (1.2) se cumplen, entonces, para cualquier campo vectorial suave $\theta(x,t) = (\theta_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ soportado de forma compacta en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, una integración formal por partes produce

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\frac{\partial\theta}{\partial t}\,dx\,dt - \sum_{ij}\iint_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}} u_i u_j \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\,dx\,dt \\
&= \nu\iint_{\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}} u\cdot\Delta\theta\,dx\,dt + \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} f\cdot\theta\,dx\,dt - \iint_{R^3\times\mathbb{R}} p\cdot(div\theta)\;dx\,dt
\end{aligned} \tag{1.13}$$

La ecuación (12) tiene sentido para $u \in L^2, f \in L^1, p \in L^1$, mientras que (1.1) tiene sentido sólo si $u(x,t)$ es dos veces diferenciable en x. De manera similar, si $\varphi(x,t)$ es una función suave, soportada de manera compacta en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, entonces una integración formal por partes y (1.2) implica:

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\cdot\nabla_x\varphi\,dx\,dt = 0 \tag{1.14}$$

Una solución de (1.13), (1.14) se llama solución débil de las ecuaciones de Navier Stokes.

Una idea establecida desde hace mucho tiempo en el análisis es demostrar la existencia y regularidad de las soluciones de una PDE construyendo primero una solución débil y luego demostrando que cualquier solución débil es suave. Este programa se ha probado para Navier-Stokes con éxito parcial.

Leray en [3] demostró que las ecuaciones de Navier-Stokes (1.1), (1.2), (1.3) en tres dimensiones espaciales siempre tienen una solución débil (p,u) con propiedades de crecimiento adecuadas. Se desconoce la unicidad de las soluciones débiles de la ecuación de Navier-Stokes. Para la ecuación de Euler, la unicidad de las soluciones débiles es sorprendentemente falsa. Scheffer [4] y, más tarde, Schnirelman [5] exhibieron soluciones débiles de las ecuaciones de Euler en $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ con soporte compacto en el espacio-tiempo. Esto corresponde a un fluido que parte del reposo en el instante $t = 0$, comienza a moverse en el instante $t = 1$ sin estímulo externo y vuelve al reposo en el instante $t = 2$, con su movimiento siempre confinado a una bola $B \subset \mathbb{R}^3$.

Scheffer [6] aplicó ideas de la teoría de la medida geométrica para demostrar un teorema de regularidad parcial para soluciones débiles adecuadas de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Caffarelli-Kohn-Nirenberg [7] mejoraron los resultados de Scheffer y F.-H. Lin [8] simplificó las pruebas de los resultados en Caffarelli-Kohn-Nirenberg [7]. El teorema de regularidad parcial de [7], [8] se refiere a un análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff del conjunto singular de una solución débil adecuada de Navier-Stokes. Aquí, el conjunto singular de una solución débil u consta de todos los puntos $(x^\circ, t^\circ) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ tales que u es ilimitado en todas las vecindades de (x°, t°). (Si la fuerza f es suave, y si (x°, t°) no pertenece al conjunto singular, entonces no es difícil demostrar que u puede corregirse en un conjunto de medida cero para volverse suave en una vecindad de (x°, t°).)

Para definir el análogo parabólico de la dimensión de Hausdorff, utilizamos cilindros parabólicos $Q_r = B_r \times I_r \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, donde $B_r \subset \mathbb{R}^3$ es una bola de radio r, e $I_r \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de longitud r^2. Dado $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, establecemos

$$\mathcal{P}_{K,\delta}(E) = inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^K : Q_{r1}, Q_{r2}, \ldots \text{Cubre } E, \text{ y cada } r_i < \delta \right\}$$

y luego definir

$$\mathcal{P}_K(E) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{P}_{K,\delta}(E)$$

Los principales resultados de [7], [8] pueden expresarse aproximadamente de la siguiente manera:

Teorema 1.1 *Regularidad Parcial de Caffarelli-Kohn-Nirenberg y F.-H. Lin*

1. *(A) Sea u una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes, que satisfaga condiciones de crecimiento adecuadas. Sea E el conjunto singular de u. Entonces $\mathcal{P}_1(E) = 0$.*

2. *(B) Dado un campo vectorial libre de divergencia $u^\circ(x)$ y una fuerza $f(x,t)$ que satisface (1.4) y (1.5), existe una solución débil de Navier-Stokes (1.1), (1.2), (1.3) que satisfacen las condiciones de crecimiento en (A).*

En particular, el conjunto singular de u no puede contener una curva espacio-temporal de la forma $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x = \phi(t)$. Este es el mejor teorema de regularidad parcial conocido hasta ahora para la ecuación de Navier-Stokes.

1.2 Estado del arte en las ecuaciones de Navier-Stokes

1.3 Contribuciones de este trabajo

1.4 Esquema de la tesis

Este trabajo está estructurado como sigue. La introducción va seguida de X capítulos independientes que se han ordenado de forma coherente con el proceso de desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes. En gran medida, la notación es consistente a lo largo de esta tesis y cada excepción está claramente resaltada. Para facilitar la navegación, se incluyen apéndices al final de sus respectivos capítulos, mientras que la bibliografía acumulativa se adjunta al final de este documento. Los capítulos siguientes se resumen brevemente a continuación.

Capítulo 2: Consiste en...

Capítulo 3: Consiste en...

Capítulo 4: Consiste en...

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

1. Documentar el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes en tercera dimensión
2. Exponer las aplicaciones en el Ingeniería en Irrigación
3. Aplicar algoritmos de Inteligencia Artificial y Machine Learning a los métodos numéricos

2.2 Objetivos Específicos

1. Modelar las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema de Agricultura Vertical Plant Factory Hidropónico con relación agua-planta

Capítulo 3

REVISIÓN DE LITERATURA

3.1 Ecuación de Nevier-Stokes 2d, Ladyzhenskaya

Hay dos direcciones principales en la vida científica del prof. Ladyzhenskaya. La primera: la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. La segunda: teoría de la regularidad para ecuaciones elípticas y parabólicas no lineales.

En 1951, Olga A. Ladyzhenskaya demostró la segunda desigualdad fundamental para operadores elípticos L de segundo orden con coeficientes suaves y para cualquier condición de frontera homogénea clásica.

$$\|u\| W_2^2(\Omega) \leq c_\Omega \left(\|Lu\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \right) \tag{3.1}$$

que es válido para cualquier $u \in W_2^2(\Omega)$.

En cuanto a la primera dirección, en 1958 en [3] Olga A. Ladyzhenskaya demostró la desigualdad multiplicativa

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq c \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{3.2}$$

que es válido para cualquier $u \in W_2^1(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

Esta desigualdad dio la posibilidad de demostrar la existencia de una solución única global. del sistema bidimensional Navier-Stokes

Capítulo 4

MATERIALES Y MÉTODOS

4.1 Método 1

4.1.1 Resumen

Capítulo 5

RESULTADOS

Capítulo 6

CONCLUSIONES FINALES Y TRABAJO FUTURO

Apéndice A

Code listing

```
function print_rate(kappa,xMin,xMax,npoints,option)
     local c = 1-kappa*kappa
     local croot = (1-kappa*kappa)^(1/2)
     local logx = math.log(xMin)
     local psi = 0

     local xstep = (math.log(xMax)-math.log(xMin))/(npoints-1)

     arg0 = math.sqrt(xMin/c)
     psi0 = (1/c)*math.exp((kappa*arg0)^2)*(erfc(kappa*arg0)-erfc(arg0))

     if option~=[[]] then
       tex.sprint("\\addplot+["..option.."] coordinates{")
       -- addplot+ for color cycle to work
     else
       tex.sprint("\\addplot+ coordinates{")
     end
     tex.sprint("("..xMin..","..psi0..")")

     for i=1, (npoints-1) do
       x = math.exp(logx + xstep)
       arg = math.sqrt(x/c)
       karg = kappa*arg
       if karg<5 then
     -- this break compensates for exp(karg^2), which multiplies the error in the erf approximation...
         logpsi = -math.log(croot) + karg^2 + math.log(erfc(karg)-erfc(arg))
         psi = math.exp(logpsi)
       else
         psi = (1/(karg) - 1/(2*(karg^3)) + 3/(4*(arg^5)) )/(1.77245385*croot)
```

```
          -- this is the large x asymptote of the reaction rate
       end
       logx = math.log(x)
       tex.sprint("("..x..","..psi..")")
     end
     tex.sprint("}")
end
\end{luacode*}
```

Apéndice B

Code listing

rga erg erg sgarg

LITERATURA CONSULTADA

[1] O. A. Ladyzhenskaya, "The mathematical theory of viscous incompressible flow," *Gordon & Breach*, 1969.

[2] A. J. Majda, A. L. Bertozzi y A. Ogawa, "Vorticity and incompressible flow. Cambridge texts in applied mathematics," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, n.º 4, B77-B78, 2002.

[3] J. Leray, "Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace," *Acta mathematica*, vol. 63, págs. 193-248, 1934.

[4] V. Scheffer, "An inviscid flow with compact support in space-time.," *Journal of geometric analysis*, vol. 3, n.º 4, 1993.

[5] A. Shnirelman, "On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation," *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 50, n.º 12, págs. 1261-1286, 1997.

[6] V. Scheffer, "Turbulence and Hausdorff dimension," en *Turbulence and Navier Stokes Equations: Proceedings of the Conference Held at the University of Paris-Sud Orsay June 10–13 1975*, Springer, 2006, págs. 174-183.

[7] L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg, "Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 35, n.º 6, págs. 771-831, 1982.

[8] F. Lin, "A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem," *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, vol. 51, n.º 3, págs. 241-257, 1998.