APUNTES DE MATEMÁTICAS PREPARATORIA AGRÍCOLA

A. H. EMILIO

UACh Curso de Matemáticas

(Universidad Autónoma Chapingo)

$$e^{\pi i} - 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$\int \sqrt{\tan x}\, dx$$

Álgebra I y II
Matemáticas I y II

Geometría y Trigonometría
Geometría Analítica

Cálculo Diferencial
Cálculo Integral

📖 Julio de 2030

PUBLICADO POR LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

PÁGINA DEL AUTOR https://emilio-ah.web.app

Primera edición, 26 de julio de 2024

Índice general

I Primer semestre

I Primer semestre

1. Álgebra I

1.1 Sistemas Numéricos

En esta sección, exploraremos los diferentes tipos de números y sus propiedades, así como las operaciones que se pueden realizar con ellos.

1.1.1 Números Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales, Reales y Primos

1. Números Naturales ($\mathbb{N}$): Son los números utilizados para contar, empezando desde 1. Ejemplo: 1, 2, 3, 4, ...
2. Números Enteros ($\mathbb{Z}$): Incluyen todos los números naturales, sus opuestos negativos y el cero. Ejemplo: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
3. Números Racionales ($\mathbb{Q}$): Son números que pueden expresarse como el cociente de dos enteros, donde el denominador no es cero. Ejemplo: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5, -2, 0$
4. Números Irracionales: No pueden expresarse como fracción de dos enteros. Su expresión decimal es no periódica e infinita. Ejemplo: $\sqrt{2}, \pi, e$
5. Números Reales ($\mathbb{R}$): Incluyen todos los números racionales e irracionales.
6. Números Primos: Son números naturales mayores que 1, que sólo tienen dos divisores: 1 y el mismo número. Ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

1.1.2 Operaciones en los números: enteros y racionales

- Suma y Resta: La adición y sustracción de enteros y números racionales sigue las reglas básicas de aritmética.

Ejemplo:

$$3 + (-5) = -2$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

- Multiplicación y División: La multiplicación de números enteros y racionales también sigue reglas estándar.

Ejemplo:

$$(-4)(3) = -12$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

1.1.3 Jerarquía de las operaciones y uso de símbolos de agrupación

La jerarquía de operaciones, comúnmente recordada por la sigla PEMDAS (Paréntesis, Exponentes, Multiplicación y División, Adición y Sustracción), dicta el orden en el cual se deben realizar las operaciones.

1. Paréntesis: Realizar primero las operaciones dentro de paréntesis o símbolos de agrupación.
2. Exponentes: Evaluar exponentes o potencias después de resolver los paréntesis.
3. Multiplicación y División: Realizar estas operaciones de izquierda a derecha.
4. Adición y Sustracción: Por último, realizar sumas y restas de izquierda a derecha.

Ejemplo:

$$2 + 3 \times (4^2 - 6) \div 2$$

1. Paréntesis: $4^2 - 6 = 16 - 6 = 10$
2. Exponentes: $2 + 3 \times 10 \div 2$
3. Multiplicación/División: $2 + 30 \div 2 = 2 + 15$
4. Suma: 17

1.1.4 Problemas verbales con números racionales

Los problemas verbales con números racionales implican la traducción de una situación real a una expresión matemática, que luego se resuelve usando operaciones con fracciones.

Ejemplo:
Si un tanque contiene 5/8 de agua y se agregan 3/4 de agua al tanque, ¿Cuánto agua hay ahora?
Solución:

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8} \text{ del tanque está lleno}$$

1.2 Operatividad con Polinomios

En esta sección, se abordarán los conceptos fundamentales y las operaciones básicas relacionadas con los polinomios, facilitando la transición del lenguaje común al lenguaje algebraico.

1.2.1 Lenguaje común a lenguaje algebraico, primera parte

El lenguaje común se refiere a la forma cotidiana de expresar cantidades y relaciones, mientras que el lenguaje algebraico utiliza símbolos y letras para representar estos conceptos. Por ejemplo, la frase "el doble de un número" se expresa algebraicamente como $2x$.

1.2.2 Expresión y término algebraicos

- Expresión Algebraica: Es una combinación de números, variables y operaciones. Ejemplo: $3x^2 - 5x + 2$

- Término Algebraico: Es una parte de una expresión algebraica que consiste en un coeficiente y una variable con un exponente. Ejemplo: en $3x^2 - 5x + 2$, los términos son $3x^2$, $-5x$ y 2.

1.2.3 Términos semejantes

Términos semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal (mismas variables elevadas a los mismos exponentes). Ejemplo: $3x^2$ y $-7x^2$ son términos semejantes.

1.2.4 Reducción de términos semejantes

Consiste en combinar términos semejantes sumando o restando sus coeficientes. Ejemplo: $3x^2 - 7x^2 = -4x^2$.

1.2.5 Eliminación de signos de agrupación

Los signos de agrupación como paréntesis se eliminan aplicando la propiedad distributiva. Ejemplo: $3(x+2) = 3x+6$.

1.2.6 Suma y resta de expresiones algebraicas

Para sumar o restar expresiones algebraicas, primero se combinan los términos semejantes. Ejemplo:

$$(3x^2+2x-5)+(4x^2-3x+7) = 7x^2-x+2$$

1.2.7 Leyes de los exponentes para multiplicación y división de expresiones algebraicas

Las leyes de los exponentes son fundamentales para operar con expresiones algebraicas:
- Multiplicación: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ - División: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (para $m \geq n$)
Ejemplo:

$$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$$

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

1.2.8 Multiplicación de expresiones algebraicas

La multiplicación de expresiones algebraicas se realiza utilizando la propiedad distributiva. Ejemplo:

$$(2x+3)(x-4) = 2x(x-4)+3(x-4) = 2x^2-8x+3x-12 = 2x^2-5x-12$$

1.2.9 División de expresiones algebraicas

La división de expresiones algebraicas, como la división de polinomios, puede implicar la simplificación de fracciones o el uso de la división larga de polinomios. Ejemplo:
División de $4x^3-2x^2+5x$ por $2x$:

$$\frac{4x^3-2x^2+5x}{2x} = 2x^2-x+\frac{5}{2}$$

1.2.10 Lenguaje común a lenguaje algebraico, segunda parte

En esta etapa, se aborda una conversión más compleja de problemas del lenguaje común al lenguaje algebraico, incluyendo problemas verbales que requieren la formulación de ecuaciones algebraicas para su solución.

1.3 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En esta sección, exploraremos los fundamentos de las ecuaciones de primer grado, incluyendo sus conceptos básicos, métodos de resolución y aplicaciones prácticas en problemas verbales.

1.3.1 Conceptos básicos

Ecuación

Una ecuación es una igualdad matemática que contiene una o más incógnitas. La solución de una ecuación es el valor o valores que hacen verdadera la igualdad. Ejemplo: $2x+3=7$.

Propiedades de la igualdad

Las propiedades de la igualdad son reglas que permiten manipular ecuaciones para encontrar soluciones. Incluyen:

- Propiedad reflexiva: Si $a=b$, entonces $b=a$.
- Propiedad de adición: Si $a=b$, entonces $a+c=b+c$.
- Propiedad de sustracción: Si $a=b$, entonces $a-c=b-c$.
- Propiedad de multiplicación: Si $a=b$, entonces $a\cdot c=b\cdot c$.
- Propiedad de división: Si $a=b$ y $c\neq 0$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

1.3.2 Operaciones y procedimientos

Factorización por factor común

La factorización es una técnica que permite simplificar expresiones algebraicas extrayendo factores comunes. Ejemplo: Factorizar $2x+6$ resulta en $2(x+3)$.

Resolución de Ecuaciones de primer grado con una incógnita, con coeficientes enteros, fraccionarios, literales y despejes en fórmulas

Para resolver una ecuación de primer grado:

1. Reunir términos semejantes: $3x-2x=5-1$ se convierte en $x=4$.

2. Despejar la incógnita: En $2x+4=12$, primero restamos 4 de ambos lados: $2x=8$. Luego dividimos por 2: $x=4$.

Ejemplo con coeficientes fraccionarios:

Resolver $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

1. Encontrar un común denominador: $3x-2=1$

2. Resolver para x: $3x=3\Rightarrow x=1$

1.3.3 Problemas y aplicaciones

Plantear y resolver ecuaciones lineales a partir de problemas verbales

Para resolver problemas verbales, se debe:

1. Identificar las incógnitas.

2. Traducir la situación al lenguaje algebraico.

3. Resolver la ecuación resultante.

Ejemplo:

Un tren recorre una distancia de 300 km en 5 horas. ¿Cuál es la velocidad media del tren?

$$\text{Velocidad}=\frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}=\frac{300\text{ km}}{5\text{ h}}=60\text{ km/h}$$

1.4 Ecuaciones cuadráticas

1.4.1 Ecuaciones cuadráticas y sus raíces o soluciones

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, y c son constantes y $a \neq 0$. Las soluciones de una ecuación cuadrática se llaman raíces y se pueden encontrar mediante varios métodos, como la factorización, completación del cuadrado, o la fórmula cuadrática.

1.4.2 La propiedad del producto cero y la resolución de ecuaciones por factorización

La propiedad del producto cero establece que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Esto es útil en la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización, donde se factoriza la ecuación en productos de binomios y luego se igualan a cero cada uno de los factores.

■ **Ejemplo 1.1** Resolvamos $x^2 - 5x + 6 = 0$ por factorización:
$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$
Las soluciones son $x = 2$ y $x = 3$. ■

1.4.3 Solución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto

Este método implica reescribir una ecuación cuadrática en la forma de un trinomio cuadrado perfecto para encontrar sus soluciones.

■ **Ejemplo 1.2** Resolvamos $x^2 + 6x + 9 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto:
$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0$
La solución es $x = -3$. ■

1.4.4 Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general

La fórmula general, o fórmula cuadrática, es una herramienta estándar para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ **Ejemplo 1.3** Para la ecuación $2x^2 - 4x - 6 = 0$:
$a = 2, b = -4, c = -6$
$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)}$
$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{4}$
$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4}$
$x = \frac{4 \pm 8}{4}$
Las soluciones son $x = 3$ y $x = -1$. ■

1.4.5 El discriminante de una ecuación cuadrática y el tipo de raíces

El discriminante Δ de una ecuación cuadrática se define como $\Delta = b^2 - 4ac$. Este valor determina la naturaleza de las raíces:

- $\Delta > 0$: Dos raíces reales y distintas. - $\Delta = 0$: Una raíz real y doble. - $\Delta < 0$: No hay raíces reales (las raíces son complejas conjugadas).

1.4.6 Solución de ecuaciones reducibles a cuadráticas mediante un cambio de variable

A veces, las ecuaciones no son cuadráticas en apariencia, pero se pueden convertir en una forma cuadrática mediante un cambio de variable.

■ **Ejemplo 1.4** Resolvamos $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$:
Dejando $u = x^2$, obtenemos:
$u^2 - 5u + 6 = 0$
Factorizamos: $(u-2)(u-3) = 0$
Así, $u = 2$ y $u = 3$, lo que implica $x^2 = 2$ y $x^2 = 3$.
Las soluciones son $x = \pm\sqrt{2}$ y $x = \pm\sqrt{3}$. ■

1.4.7 Resolución de ecuaciones que contienen radicales

Las ecuaciones con radicales se resuelven generalmente aislando el radical y luego elevando ambos lados de la ecuación al cuadrado para eliminar el radical.

■ **Ejemplo 1.5** Resolvamos $\sqrt{x+5} = x - 1$:
Elevamos al cuadrado ambos lados:
$x + 5 = (x-1)^2$
$x + 5 = x^2 - 2x + 1$
$0 = x^2 - 3x - 4$
$(x-4)(x+1) = 0$
Las soluciones son $x = 4$ y $x = -1$. Sin embargo, verificamos que $x = -1$ no satisface la ecuación original, por lo tanto, la única solución es $x = 4$. ■

1.5 Sistema de Ecuaciones Lineales

1.5.1 Conceptos básicos.

Sistema de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con las mismas variables. El objetivo es encontrar los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de valores para las variables que hace que todas las ecuaciones del sistema sean verdaderas. Dependiendo del sistema, puede haber una solución única, infinitas soluciones, o ninguna solución.

Sistemas consistentes, inconsistentes y dependientes.

- Un sistema es **consistente** si tiene al menos una solución. - Es **inconsistente** si no tiene soluciones. - Es **dependiente** si tiene infinitas soluciones, lo cual ocurre cuando las ecuaciones son múltiplos unas de otras.

1.5.2 Operaciones y procedimientos.

Método de Igualación (2x2 y 3x3).

Este método consiste en despejar una misma variable de dos ecuaciones diferentes y luego igualar las dos expresiones obtenidas. Esto lleva a una nueva ecuación con una variable menos, que puede resolverse para encontrar el valor de la otra variable.

■ **Ejemplo 1.6** Resolver el sistema:

$$2x + 3y = 7$$
$$4x - y = 5$$

Despejando x de la primera ecuación:

$$x = \frac{7 - 3y}{2}$$

Despejando x de la segunda ecuación:

$$x = \frac{5+y}{4}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{7-3y}{2} = \frac{5+y}{4}$$

Resolvemos para y y luego para x. ■

Método de Sustitución (2x2 y 3x3).

En este método, una de las ecuaciones se resuelve para una variable en términos de la otra y luego se sustituye esta expresión en la otra ecuación.

■ **Ejemplo 1.7** Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} &x+2y = 10 \\ &3x-y = 5 \end{aligned}$$

Despejando x de la primera ecuación:

$$x = 10-2y$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$3(10-2y)-y = 5$$

Resolvemos para y y luego para x. ■

Método de Reducción (eliminación, sumas o restas) (2x2 y 3x3).

Este método consiste en sumar o restar ecuaciones para eliminar una de las variables, facilitando así la solución del sistema.

■ **Ejemplo 1.8** Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} &2x+3y = 7 \\ &4x-3y = 1 \end{aligned}$$

Sumamos ambas ecuaciones para eliminar y:

$$2x+3y+4x-3y = 7+1$$

$$6x = 8 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Sustituimos x en una de las ecuaciones para encontrar y. ■

Método de Determinantes (2x2 y 3x3).

Este método utiliza la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se basa en calcular determinantes de matrices formadas por los coeficientes de las variables y los términos constantes.

■ **Ejemplo 1.9** Para el sistema:

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

Los valores de x y y se obtienen de:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$

Donde $\det(A)$ es el determinante de la matriz de coeficientes, $\det(A_x)$ es el determinante de la matriz formada al reemplazar la columna de coeficientes de x con los términos constantes, y $\det(A_y)$ es similar para y. ■

1.5.3 Aplicaciones y problemas.

Plantear y resolver problemas.

En esta sección, los estudiantes aprenderán a plantear sistemas de ecuaciones lineales a partir de problemas verbales y luego resolverlos usando los métodos aprendidos.

Empleo de un sistema de ecuaciones lineales.

Se explorarán aplicaciones prácticas de los sistemas de ecuaciones lineales en diversas disciplinas como economía, ingeniería y ciencias sociales.

1.6 DDesigualdad Lineal

1.6.1 Conceptos

Concepto de intervalo.

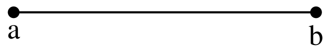
Un intervalo es un subconjunto de números reales que se encuentran entre dos valores, llamados extremos. Los intervalos pueden ser de varios tipos:

- **Intervalo cerrado** $[a,b]$: Incluye ambos extremos, es decir, todos los números x tales que $a \leq x \leq b$.
- **Intervalo abierto** (a,b): No incluye los extremos, es decir, todos los números x tales que $a < x < b$.
- **Intervalo semiabierto** $[a,b)$ o $(a,b]$: Incluye solo uno de los extremos, es decir, $a \leq x < b$ o $a < x \leq b$.
- **Intervalo infinito**: Puede extenderse hacia el infinito positivo (a,∞) o negativo $(-\infty,b)$.

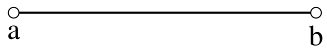
Representar intervalos en la recta de los reales.

Los intervalos se representan en la recta real con diferentes notaciones y símbolos:

- $[a,b]$ se representa con un segmento de línea desde a hasta b, con puntos sólidos en ambos extremos.
- (a,b) se representa con un segmento de línea desde a hasta b, pero con puntos huecos en los extremos.
- $[a,b)$ y $(a,b]$ combinan un punto sólido y un punto hueco, dependiendo del extremo que esté incluido.



Intervalo cerrado $[a,b]$



Intervalo abierto (a,b)

Desigualdad.

Una desigualdad es una relación que compara dos expresiones, indicando que una es mayor o menor que la otra. Las desigualdades se pueden clasificar como:

- **Desigualdades estrictas**: Utilizan los símbolos $<$ (menor que) y $>$ (mayor que), por ejemplo, $x < 5$ significa que x es menor que 5.
- **Desigualdades no estrictas**: Utilizan los símbolos $\leq$ (menor o igual que) y $\geq$ (mayor o igual que), por ejemplo, $x \leq 5$ significa que x es menor o igual a 5.

Propiedades de la desigualdad.

Las desigualdades tienen varias propiedades que facilitan su manejo:

- **Transitiva**: Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
- **Adición y sustracción**: Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$ para cualquier c.
- **Multiplicación y división**:
  - Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
  - Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ (las desigualdades se invierten).

1.6.2 Operaciones y procedimientos

Resolver desigualdades lineales en forma gráfica y analítica.

Para resolver una desigualdad lineal, podemos usar métodos gráficos y analíticos.

Método gráfico: Consiste en representar la desigualdad en una recta numérica y determinar las regiones que cumplen con la desigualdad. Por ejemplo, para la desigualdad $x > 3$, se dibuja una línea desde $x = 3$ hacia la derecha con un círculo abierto en 3.

Método analítico: Involucra manipular algebraicamente la desigualdad para aislar la variable. Aquí hay algunos ejemplos:

■ **Ejemplo 1.10** Resolver la desigualdad $2x - 5 < 3$.

1. Sumamos 5 a ambos lados: $2x < 8$.
2. Dividimos ambos lados por 2: $x < 4$.

La solución es $x < 4$, que se representa en la recta real con un círculo abierto en 4 y una línea que se extiende hacia la izquierda. ■

■ **Ejemplo 1.11** Resolver la desigualdad $\frac{x-2}{3} \geq 1$.

1. Multiplicamos ambos lados por 3: $x - 2 \geq 3$.
2. Sumamos 2 a ambos lados: $x \geq 5$.

La solución es $x \geq 5$, que se representa con un círculo cerrado en 5 y una línea hacia la derecha.

■

1.6.3 Aplicaciones

Las desigualdades lineales se utilizan en diversas aplicaciones, como problemas de optimización y economía. Por ejemplo, determinar la cantidad mínima o máxima de un recurso que se debe utilizar para cumplir con ciertas restricciones.

II Segundo semestre

2. Álgebra II

2.1 Función lineal

En esta unidad se abordarán los conceptos fundamentales relacionados con las funciones lineales, incluyendo su definición general, la relación con la variación directamente proporcional, y las técnicas para tabular y graficar estas funciones.

2.1.1 Concepto general de función

Una función es una relación matemática entre dos conjuntos de números, donde a cada elemento del primer conjunto (dominio) le corresponde exactamente un elemento del segundo conjunto (codominio). Formalmente, una función f se define como un conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x es el valor de entrada y $f(x)$ es el valor de salida. La función lineal es un caso específico de función que se puede expresar en la forma general:

$$f(x) = mx + b \tag{2.1}$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

2.1.2 Variación directamente proporcional

La variación directamente proporcional es un tipo especial de relación entre dos variables x e y, donde y varía en la misma proporción que x. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$y = kx$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Esta relación representa una función lineal con pendiente k y ordenada al origen $b = 0$.

2.1.3 Función Lineal

Una función lineal es aquella que se puede representar en la forma general:

$$f(x) = mx + b$$

donde:

- m es la pendiente de la recta, que indica la tasa de cambio de la función.
- b es la ordenada al origen, el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$.

La pendiente m se calcula como la relación entre el cambio en y y el cambio en x:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.2}$$

La función lineal produce una gráfica en forma de recta. La pendiente determina la inclinación de la recta y la ordenada al origen determina el punto donde la recta cruza el eje y.

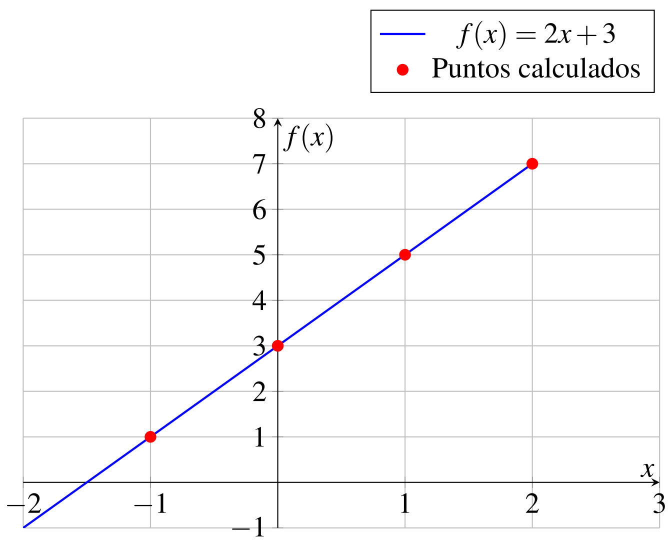
2.1.4 Tabular y graficar funciones lineales

Para tabular y graficar una función lineal, se siguen estos pasos:

1. **Determinar la función lineal** $f(x) = mx + b$.
2. **Elegir valores de** x para los cuales se calcularán los valores correspondientes de $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = 2x + 3$, elige valores como $x = -1, 0, 1, 2$.
3. **Calcular los valores** de $f(x)$ para los valores elegidos de x. Para $x = -1$, $f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$.
4. **Construir una tabla** con los pares ordenados $(x, f(x))$:

x	$f(x)$
-1	1
0	3
1	5
2	7

5. **Graficar los puntos** en un plano cartesiano y dibujar la recta que pasa por todos ellos.
6. **Interpretar la gráfica** para obtener información sobre la pendiente y la ordenada al origen de la función lineal.



2.2 Sistema de Ecuaciones Lineales

En esta unidad, se explorarán los conceptos fundamentales y métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, así como sus aplicaciones prácticas.

2.2.1 Conceptos Básicos

Concepto de Sistema de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones que comparten las mismas variables. La solución del sistema es el conjunto de valores de las variables que satisface todas las ecuaciones simultáneamente.

Concepto de Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales

La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de valores de las variables que hace que todas las ecuaciones del sistema sean verdaderas al mismo tiempo.

Concepto de Solución Consistente, Inconsistente y Dependiente

Consistente: Un sistema es consistente si tiene al menos una solución. Inconsistente: Un sistema es inconsistente si no tiene soluciones. Dependiente: Un sistema es dependiente si tiene infinitas soluciones.

2.2.2 Operaciones y Procedimientos

Métodos de Solución de Sistemas

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

- Igualación
- Sustitución
- Reducción (Eliminación, Sumas o Restas)
- Determinantes
- Gráfica

Igualación

El método de igualación consiste en despejar una de las variables en ambas ecuaciones y luego igualar las expresiones obtenidas.

Procedimiento:

1. **Despejar una variable:** Despeja la misma variable en ambas ecuaciones.
2. **Igualar las expresiones:** Igualar las dos expresiones obtenidas para esa variable.
3. **Resolver:** Resuelve la ecuación resultante para obtener el valor de la variable.
4. **Sustituir:** Sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra variable.

Ejemplo:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=4 \end{cases}$$

1. **Despejar la variable y en ambas ecuaciones:**

$$y = 7-2x$$

$$y = 3x-4$$

2. **Igualar las dos expresiones para y:**

$$7-2x = 3x-4$$

3. **Resolver para x:**

$$7+4=3x+2x \implies 11=5x \implies x=\frac{11}{5}$$

4. **Sustituir $x=\frac{11}{5}$ en una de las ecuaciones originales:**

$$y=7-2\left(\frac{11}{5}\right)=7-\frac{22}{5}=\frac{35-22}{5}=\frac{13}{5}$$

Solución: $\left(\frac{11}{5},\frac{13}{5}\right)$

Sustitución

El método de sustitución implica resolver una de las ecuaciones para una de las variables y luego sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Procedimiento:

1. **Despejar una variable:** Despeja una de las variables en una de las ecuaciones.
2. **Sustituir:** Sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación.
3. **Resolver:** Resuelve la ecuación resultante para obtener el valor de una variable.
4. **Sustituir el valor encontrado:** Sustituye el valor de la variable obtenida en la ecuación inicial para encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplo:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

1. **Despejar la variable y en la primera ecuación:**

$$y=8-x$$

2. **Sustituir en la segunda ecuación:**

$$2x-(8-x)=3$$

$$2x-8+x=3 \implies 3x-8=3 \implies 3x=11 \implies x=\frac{11}{3}$$

3. **Sustituir $x=\frac{11}{3}$ en la ecuación $y=8-x$:**

$$y=8-\frac{11}{3}=\frac{24-11}{3}=\frac{13}{3}$$

Solución: $\left(\frac{11}{3},\frac{13}{3}\right)$

Reducción (Eliminación, Sumas o Restas)

El método de reducción o eliminación se basa en sumar o restar las ecuaciones para eliminar una de las variables.

Procedimiento:

1. **Multiplicar las ecuaciones:** Si es necesario, multiplica las ecuaciones para que los coeficientes de una de las variables sean opuestos.
2. **Sumar o restar las ecuaciones:** Suma o resta las ecuaciones para eliminar una variable.
3. **Resolver la ecuación resultante:** Resuelve para la variable restante.

4. **Sustituir:** Sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra variable.

Ejemplo:
Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$$

1. **Sumar las ecuaciones (ya están listas para ser sumadas):**

$$(4x+3y)+(2x-3y)=10+1$$

$$6x=11 \implies x=\frac{11}{6}$$

2. **Sustituir $x=\frac{11}{6}$ en una de las ecuaciones originales:**

$$4\left(\frac{11}{6}\right)+3y=10$$

$$\frac{44}{6}+3y=10 \implies 3y=10-\frac{44}{6}$$

$$3y=\frac{60-44}{6}=\frac{16}{6} \implies y=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$$

Solución: $\left(\frac{11}{6},\frac{8}{9}\right)$

Determinantes

Para sistemas de ecuaciones lineales de n ecuaciones con n incógnitas, se pueden utilizar determinantes para encontrar soluciones.

Procedimiento:

1. **Formar la matriz:** Escribe el sistema de ecuaciones en forma de matriz aumentada.
2. **Calcular el determinante:** Usa la regla de Cramer o matrices inversas para calcular el determinante y encontrar las soluciones.

Ejemplo:
Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

1. **Formar la matriz:**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. **Calcular el determinante de A:**

$$\mathrm{Det}(A)=(1\cdot(-1))-(1\cdot 2)=-1-2=-3$$

Determinantes para x y y:

$$A_x=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Det}(A_x)=(4\cdot(-1))-(1\cdot 1)=-4-1=-5$$

$$A_y=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Det}(A_y)=(1\cdot 1)-(4\cdot 2)=1-8=-7$$

3. **Calcular las soluciones:**

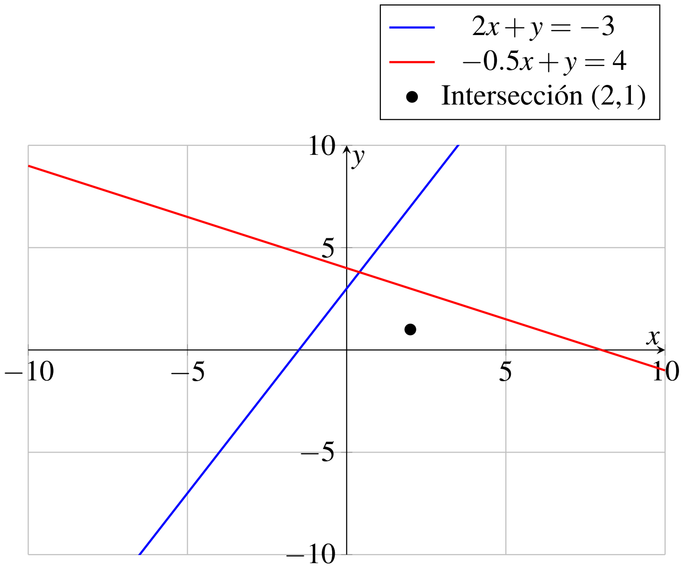
$$x = \frac{\text{Det}(A_x)}{\text{Det}(A)} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\text{Det}(A_y)}{\text{Det}(A)} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

Solución: $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Gráfica de Sistema de Ecuaciones Lineales de Dos Variables

Para sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, las ecuaciones se pueden representar gráficamente como líneas en un plano cartesiano. La intersección de estas líneas representa la solución del sistema.



Procedimiento:

1. **Graficar cada ecuación:** Encuentra dos puntos para cada línea y dibuja las líneas correspondientes.
2. **Encontrar la intersección:** La solución al sistema es el punto donde las líneas se cruzan.

Ejemplo:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

1. **Graficar las ecuaciones:**
   - Para $x + y = 4$:

     Cuando $x = 0$, $y = 4$

     Cuando $x = 4$, $y = 0$

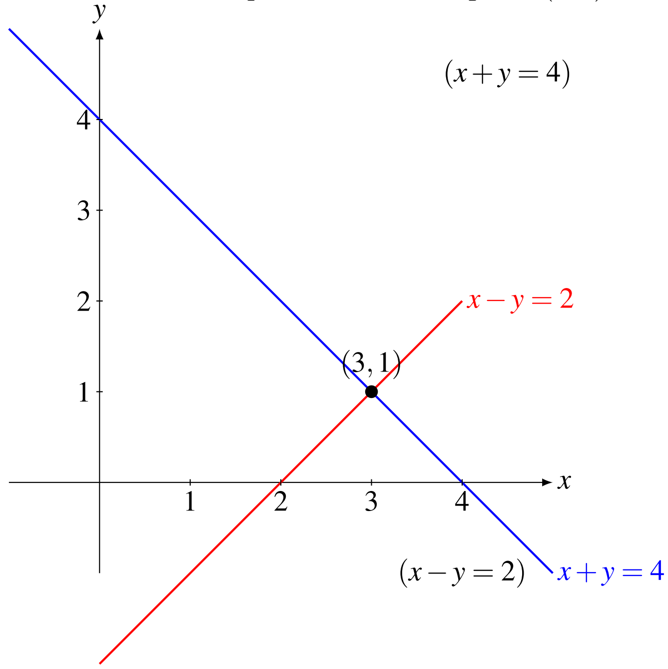
     Dibuja la línea que pasa por (0,4) y (4,0)
   - Para $x - y = 2$:

     Cuando $x = 0$, $y = -2$

     Cuando $x = 2$, $y = 0$

     Dibuja la línea que pasa por (0,-2) y (2,0)

2. **Encontrar la intersección:**
   Al graficar las líneas, observamos que se cruzan en el punto $(3,1)$.



Solución: $(3,1)$

2.2.3 Aplicaciones y Problemas

Plantear y Resolver Problemas

Los sistemas de ecuaciones lineales se aplican en diversos contextos, como en la resolución de problemas de mezcla, planificación de recursos y modelado de datos.

Empleo de un Sistema de Ecuaciones Lineales

En aplicaciones prácticas, los sistemas de ecuaciones lineales pueden modelar situaciones donde se necesita encontrar soluciones que satisfagan múltiples restricciones simultáneamente.

Ejemplo: Mezcla de Productos

Problema: Un fabricante de mezclas tiene dos tipos de productos: A y B. El producto A cuesta \$5 por litro y el producto B cuesta \$8 por litro. El fabricante desea preparar 100 litros de una mezcla que debe costar \$6 por litro. ¿Cuántos litros de cada tipo de producto debe usar?

Solución:

Sea x la cantidad de litros del producto A y y la cantidad de litros del producto B. Entonces, tenemos dos ecuaciones:

- La ecuación para el total de litros es:

$$x+y=100$$

- La ecuación para el costo total de la mezcla es:

$$5x+8y=6\times 100$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 5x+8y=600 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$5x+5y=500$$

Restamos esta ecuación de la segunda ecuación:

$$(5x+8y)-(5x+5y)=600-500 \qquad 3y=100 \qquad y=\frac{100}{3}\approx 33.33$$

Sustituyendo $y=33.33$ en la primera ecuación:

$$x+33.33=100 \qquad x=100-33.33=66.67$$

Por lo tanto, se deben usar aproximadamente 66.67 litros del producto A y 33.33 litros del producto B.

2.2.4 Planificación de Recursos: Asignación de Tareas

Problema: Una empresa debe asignar tres tareas a dos trabajadores. La tarea 1 toma 4 horas, la tarea 2 toma 3 horas y la tarea 3 toma 2 horas. Los trabajadores tienen disponibles 8 horas cada uno. ¿Cómo deben asignarse las tareas para que se utilicen al máximo las horas disponibles?

Solución:

Sea x_1, x_2, y x_3 la cantidad de horas dedicadas a las tareas 1, 2 y 3 por el Trabajador 1, y y_1, y_2, y y_3 la cantidad de horas dedicadas a las mismas tareas por el Trabajador 2. Entonces:

- La ecuación para las horas disponibles de cada trabajador es:

$$4x_1+3x_2+2x_3\leq 8$$

$$4y_1+3y_2+2y_3\leq 8$$

- La ecuación para completar todas las tareas es:

$$x_1+y_1=1 \qquad x_2+y_2=1 \qquad x_3+y_3=1$$

Podemos resolver este problema mediante programación lineal. Si el objetivo es maximizar el uso de horas disponibles, se plantea como un problema de maximización sujeto a las restricciones anteriores.

2.2.5 Modelado de Datos: Ajuste de Modelo Lineal

Problema: Un analista desea modelar la relación entre el tiempo (en horas) dedicado al estudio y la calificación obtenida en un examen. Se recopilan los siguientes datos:

Horas de Estudio	Calificación
1	60
2	65
3	70
4	75
5	80

Se desea ajustar un modelo lineal $y=mx+b$ a estos datos.

Solución:

Se utiliza el método de mínimos cuadrados para encontrar los valores de m y b. Primero calculamos las medias de x y y, y luego las sumas requeridas:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{60+65+70+75+80}{5} = 70$$

Las fórmulas para m y b son:

$$m = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

Calculamos:

$$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$$
$$(1-3)(60-70) + (2-3)(65-70) + (3-3)(70-70) + (4-3)(75-70) + (5-3)(80-70) =$$
$$40+5+0+5+20 = 70$$

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 4+1+0+1+4 = 10$$

$$m = \frac{70}{10} = 7$$

$$b = 70 - 7 \times 3 = 49$$

El modelo ajustado es $y = 7x + 49$.

2.3 Ecuaciones Cuadráticas

2.3.1 Ecuaciones Cuadráticas y Sus Raíces o Soluciones

Una ecuación cuadrática tiene la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.3}$$

donde a, b, y c son constantes y $a \neq 0$. Las soluciones de una ecuación cuadrática se obtienen resolviendo para x.

2.3.2 La Propiedad del Producto Cero y la Resolución de Ecuaciones por Factorización

Propiedad del Producto Cero: Si el producto de dos factores es cero, al menos uno de los factores debe ser cero. Esto se expresa como:

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ o } b = 0$$

Ejemplo de Factorización: Considera la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Para resolverla por factorización, buscamos dos números que multiplicados den 6 y sumados den -5. Estos números son -2 y -3, por lo que:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$$

Aplicando la propiedad del producto cero:

$$x - 2 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$

$$x = 2 \text{ o } x = 3$$

2.3.3 Solución de Ecuaciones Cuadráticas Completando el Trinomio Cuadrado Perfecto

Para resolver una ecuación cuadrática completando el trinomio cuadrado perfecto, transformamos la ecuación en la forma:

$$x^2 + bx = -c$$

Añadimos y restamos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ para completar el cuadrado:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

Luego resolvemos:

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Ejemplo: Para $x^2 - 4x - 5 = 0$:

$$x^2 - 4x = 5$$

Añadimos $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$:

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$$

$$(x-2)^2 = 9$$

$$x - 2 = \pm 3$$

$$x = 2 \pm 3$$

$$x = 5 \text{ o } x = -1$$

2.3.4 Resolución de Ecuaciones Cuadráticas por la Fórmula General

La fórmula general para resolver una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Para la ecuación $2x^2-4x-6=0$:

$$a=2, \quad b=-4, \quad c=-6$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{4}$$

$$x = 3 \text{ o } x = -1$$

2.3.5 El Discriminante de una Ecuación Cuadrática y el Tipo de Raíces

El discriminante de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ es:

$$\Delta = b^2-4ac$$

El discriminante nos indica el tipo de raíces:

- $\Delta > 0$: Dos raíces reales y distintas.
- $\Delta = 0$: Una raíz real doble.
- $\Delta < 0$: Dos raíces complejas conjugadas.

Ejemplo: Para la ecuación $x^2-4x+4=0$:

$$a=1, \quad b=-4, \quad c=4$$

$$\Delta = (-4)^2-4\cdot 1\cdot 4 = 16-16 = 0$$

Tipo de Raíces: Una raíz real doble, $x=2$.

2.3.6 Solución de Ecuaciones Reducibles a Cuadráticas Mediante un Cambio de Variable

Algunas ecuaciones pueden ser reducidas a una cuadrática mediante un cambio de variable. Por ejemplo, para la ecuación:

$$x^4-5x^2+4=0$$

Hacemos el cambio de variable $y=x^2$, así que la ecuación se convierte en:

$$y^2-5y+4=0$$

Resolviendo esta cuadrática:

$$(y-4)(y-1)=0$$

$$y=4 \text{ o } y=1$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$x^2=4 \implies x=\pm 2$$

$$x^2=1 \implies x=\pm 1$$

2.3.7 Resolución de Ecuaciones que Contienen Radicales

Para resolver ecuaciones que contienen radicales, es útil aislar el radical y luego elevar ambos lados de la ecuación al cuadrado para eliminar el radical.

Ejemplo: Resolvamos la ecuación:

$$\sqrt{x+3} = x-1$$

Elevamos ambos lados al cuadrado:

$$x+3 = (x-1)^2$$

$$x+3 = x^2-2x+1$$

$$0 = x^2-3x-2$$

Resolviendo esta cuadrática por factorización:

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 2 \text{ o } x = 1$$

Verificamos las soluciones en la ecuación original:

$$\text{Para } x = 2 : \sqrt{2+3} = 2-1 \quad \text{es cierto.}$$

$$\text{Para } x = 1 : \sqrt{1+3} = 1-1 \quad \text{no es cierto.}$$

Solución final: $x = 2$.

2.4 Funciones y Desigualdades Cuadráticas

2.4.1 Funciones Cuadráticas

Una función cuadrática tiene la forma general:

$$f(x) = ax^2+bx+c$$

donde a, b, y c son constantes. La gráfica de esta función es una parábola.

2.4.2 Formas de Representar una Función Cuadrática

- **Expresión Algebraica:** La forma estándar de una función cuadrática es $f(x) = ax^2+bx+c$.
- **Gráfica:** La parábola puede ser trazada en un plano cartesiano.

$$\text{Ejemplo: } f(x) = x^2-4x+3$$

- **Tabular:** Consiste en calcular los valores de $f(x)$ para varios valores de x y presentarlos en una tabla.

2.4.3 Elementos de una Función Cuadrática

- **Intersección con los Ejes Coordenados:**
  - **Intersección con el eje x:** Se obtiene resolviendo $ax^2+bx+c = 0$.
  - **Intersección con el eje y:** Se obtiene evaluando $f(0) = c$.
- **Vértice de la Parábola:** El vértice (h,k) se encuentra usando la fórmula:

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h)$$

- **Eje de Simetría:** Es la línea vertical que pasa por el vértice de la parábola y tiene la ecuación $x = h$.

2.4.4 Transformaciones de la Gráfica de $y = x^2$

- **Transformación:** $y = (x+h)^2$

  Desplazamiento horizontal hacia la izquierda por h unidades

- **Transformación:** $y = ax^2$
- **Transformación:** $y = ax^2$
- **Transformación:** $y = x^2 + k$

  Desplazamiento vertical hacia arriba por k unidades.

- **Transformación:** $y = a(x+h)^2 + k$

Desplazamiento horizontal hacia la izquierda por h unidades y vertical hacia arriba por k unidades.

2.4.5 Desigualdades Cuadráticas

Para resolver una desigualdad cuadrática, seguimos los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Transformar la desigualdad en una ecuación cuadrática igualando a cero.
- **Paso 2:** Encontrar las raíces de la ecuación cuadrática (si es posible) usando factorización, fórmula general o completando el cuadrado.
- **Paso 3:** Usar una línea de números para determinar los intervalos en los que la desigualdad se cumple.

Ejemplo: Resolver la desigualdad:

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

Factorizamos:

$$(x-4)(x+1) > 0$$

Las raíces son $x = 4$ y $x = -1$. Determinamos los intervalos para x usando una línea de números.

2.4.6 Desigualdades Lineales (Un Repaso)

Las desigualdades lineales tienen la forma:

$$ax + b < c$$

Para resolverla, se sigue un procedimiento similar al de las ecuaciones lineales.

Ejemplo:

$$2x - 5 \geq 3$$

Sumamos 5 a ambos lados:

$$2x \geq 8$$

Dividimos entre 2:

$$x \geq 4$$

2.4.7 Métodos para Resolver una Desigualdad Cuadrática

- **Método Gráfico:** Graficar la función cuadrática y determinar los intervalos donde la parábola está por encima o por debajo del eje x.
- **Método Algebraico:** Resolver la desigualdad mediante factorización, fórmula general y análisis de intervalos.

Ejemplo Gráfico: Graficar $y = x^2 - 3x - 4$ y encontrar los intervalos donde $y > 0$.
Ejemplo Algebraico: Para $x^2 - 3x - 4 < 0$:

$$(x-4)(x+1) < 0$$

Determinar los intervalos en los que el producto es negativo.

2.5 Sistema de Ecuaciones Cuadráticas

En esta sección, se abordarán los sistemas de ecuaciones cuadráticas, que involucran ecuaciones con términos cuadráticos y lineales.

2.5.1 Ecuaciones cuadráticas de dos variables

Un sistema de ecuaciones cuadráticas en dos variables consiste en un conjunto de dos ecuaciones donde al menos una de ellas es una ecuación cuadrática. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

La primera ecuación representa un círculo con radio 1, y la segunda una línea recta. El objetivo es encontrar los puntos de intersección entre estas dos curvas.

2.5.2 Gráficas de ecuaciones cuadráticas

Para resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas gráficamente, se grafican las ecuaciones en un sistema de coordenadas y se buscan los puntos de intersección. A continuación se muestra un ejemplo gráfico del sistema anterior.

2.5.3 Métodos de resolución de sistemas cuadráticos

Para resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas, se pueden utilizar diversos métodos. A continuación se describen algunos de los más comunes:

Método de sustitución

1. Resolución de una ecuación cuadrática : Despeja una de las variables en una de las ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo: De la ecuación $x + y = 1$, despejamos $y = 1 - x$.

2. Sustitución en la otra ecuación : Sustituye esta expresión en la otra ecuación cuadrática y resuelve para obtener los valores de x y y.

Ejemplo: Sustituyendo $y = 1 - x$ en $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2 + (1-x)^2 = 1$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 1$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 1$$

$$2x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \text{ o } x = 1$$

Si $x = 0$, entonces $y = 1$. Si $x = 1$, entonces $y = 0$. Los puntos de intersección son $(0,1)$ y $(1,0)$.

Método de igualación

1. Despeja una variable en cada ecuación cuadrática : De manera similar al método de sustitución, despejamos una variable en ambas ecuaciones.

Ejemplo: De la ecuación $x + y = 1$, obtenemos $y = 1 - x$ y sustituimos en la otra ecuación.

2. Igualar las dos expresiones obtenidas para la misma variable : Si tenemos una expresión para y en términos de x en ambas ecuaciones, igualamos estas dos expresiones.

Método de eliminación

1. Eliminación de una variable : Manipulamos las ecuaciones para eliminar una de las variables mediante suma o resta.

Ejemplo: Multiplicamos la ecuación $x + y = 1$ por 2:

$$2x + 2y = 2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Restamos las ecuaciones para eliminar y:

$$(2x + 2y) - (x^2 + y^2) = 2 - 1$$
$$2x + 2y - x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 1 \text{ y } 2x + 2y = 2$$

Método de determinantes

1. Formar un sistema de ecuaciones lineales : Convertimos el sistema cuadrático a un sistema lineal utilizando matrices.
2. Resolver el sistema de ecuaciones : Utilizamos la regla de Cramer o el método de matrices para encontrar las soluciones.

2.6 Expresiones Exponenciales y Logarítmicas

En esta sección se explorarán las funciones exponenciales y logarítmicas, sus propiedades, y cómo resolver ecuaciones que las involucren.

2.6.1 Exponentes racionales y función exponencial

Una función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva distinta de 1, y x es el exponente. Los exponentes pueden ser números racionales, lo cual se expresa como $a^{\frac{m}{n}}$ que se define como

$$\sqrt[n]{a^m} \tag{2.4}$$

■ **Ejemplo 2.1**

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

■

2.6.2 Logaritmos y funciones logarítmicas

El logaritmo de un número es el exponente al cual se debe elevar una base para obtener dicho número. Si $a^x = b$, entonces $\log_a(b) = x$. La función logarítmica inversa de la exponencial es

$$f(x) = \log_a(x) \tag{2.5}$$

■ **Ejemplo 2.2**

$$\log_2(8) = 3 \quad \text{porque} \quad 2^3 = 8$$

■

2.6.3 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen varias propiedades útiles para simplificar y resolver ecuaciones:

1. **Producto:**

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \tag{2.6}$$

2. **Cociente:**

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \tag{2.7}$$

3. **Potencia:**

$$\log_a(x^n) = n\log_a(x) \tag{2.8}$$

Por ejemplo:

$$\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5\log_2(2) = 5$$

2.6.4 Logaritmos comunes y naturales

- Logaritmos comunes: Son logaritmos de base 10, denotados como $\log(x)$. - Logaritmos naturales: Son logaritmos de base e (donde $e \approx 2.718$), denotados como $\ln(x)$.

Por ejemplo:

$$\log_{10}(100) = 2 \quad \text{y} \quad \ln(e^2) = 2$$

2.6.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la variable aparece en el exponente. Para resolverlas, se utilizan logaritmos:

Ejemplo:

$$3^x = 81 \qquad \log_3(3^x) = \log_3(81) \qquad x = \log_3(81) = 4$$

Las ecuaciones logarítmicas involucran logaritmos de la variable y se resuelven exponenciando ambos lados de la ecuación.

Ejemplo:

$$\log_2(x) = 3 \qquad x = 2^3 = 8$$

2.6.6 Problemas de crecimiento y decrecimiento

Las funciones exponenciales y logarítmicas se aplican en problemas de crecimiento (por ejemplo, poblacional) y decrecimiento (por ejemplo, desintegración radiactiva).

Ejemplo de crecimiento exponencial:

Una población inicial de 1000 bacterias se duplica cada 3 horas. ¿Cuántas bacterias habrá después de 9 horas?

Solución:

$$P(t) = P_0 \times 2^{t/T}$$

Donde:

- $P(t)$ es la población en el tiempo t.
- P_0 es la población inicial (1000 bacterias).
- T es el tiempo de duplicación (3 horas).
- t es el tiempo transcurrido (9 horas).
  $P(9) = 1000 \times 2^{9/3} = 1000 \times 2^3 = 1000 \times 8 = 8000$ bacterias

III Tercer semestre

3. Geometría y Trigonometría

3.1 Conceptos básicos

3.1.1 Bosquejo histórico de la Geometría

La geometría, una de las ramas más antiguas de las matemáticas, ha evolucionado a lo largo de los siglos, desde sus orígenes en la antigüedad hasta las formas más avanzadas de geometría moderna. Los antiguos egipcios y babilonios ya empleaban principios geométricos para resolver problemas prácticos, como la medición de tierras y la construcción de estructuras. Euclides, en su obra *Los Elementos*, sistematizó gran parte del conocimiento geométrico de su tiempo, estableciendo axiomas y teoremas fundamentales que aún se estudian hoy en día. La geometría ha crecido para incluir no solo la geometría euclidiana clásica, sino también otras formas como la geometría no euclidiana, que exploran espacios curvos y multidimensionales.

3.1.2 Términos no definidos

En la geometría, ciertos conceptos se consideran primitivos o indefinibles porque no se explican mediante otros conceptos más básicos. Estos incluyen:

- **Punto**: Una entidad sin dimensiones, que indica una posición en el espacio.
- **Línea (o recta)**: Una serie infinita de puntos que se extiende en ambas direcciones sin fin y sin ancho.
- **Plano**: Una superficie bidimensional que se extiende infinitamente en todas las direcciones.

3.1.3 Postulados de la Recta

Los postulados de la recta son afirmaciones aceptadas sin demostración que sirven como base para la geometría euclidiana. Algunos de los postulados de la recta incluyen:

1. A través de dos puntos distintos pasa una única línea recta.
2. Un segmento de línea puede prolongarse indefinidamente en ambas direcciones.
3. Una línea recta puede dividir un plano en dos regiones distintas.

3.1.4 Axiomas de la Geometría

Los axiomas de la geometría son proposiciones que se aceptan como verdaderas sin pruebas y que sirven como base para la deducción de otros teoremas. Algunos de los axiomas fundamentales incluyen:

1. Los objetos iguales a un mismo objeto son iguales entre sí.
2. Si se añaden cantidades iguales a cantidades iguales, los totales son iguales.
3. Si se restan cantidades iguales de cantidades iguales, los restos son iguales.

3.1.5 Terminología y notación

La terminología y notación en geometría son esenciales para una comunicación clara y precisa. Algunas notaciones comunes incluyen:

- **Puntos**: Generalmente representados por letras mayúsculas (A, B, C, etc.).
- **Líneas**: Denotadas por letras minúsculas (l, m, n) o por dos puntos (AB).
- **Ángulos**: Representados por el símbolo $\angle$ seguido de tres letras, donde la letra del medio representa el vértice (ej. $\angle ABC$).
- **Segmentos de línea**: Denotados por dos puntos con una línea encima (ej. $\overline{AB}$).
- **Planos**: Representados por letras griegas (ej. plano α, plano β).

3.2 Ángulos

3.2.1 Definición, clasificación de los ángulos

Un ángulo es la figura formada por dos rayos que comparten un extremo común, llamado vértice del ángulo. Los ángulos se pueden clasificar de varias maneras:

- **Ángulo agudo**: mide menos de 90°.
- **Ángulo recto**: mide exactamente 90°.
- **Ángulo obtuso**: mide más de 90° pero menos de 180°.
- **Ángulo llano**: mide exactamente 180°.
- **Ángulo completo**: mide 360°.

3.2.2 Teorema de los ángulos opuestos por el vértice

El teorema de los ángulos opuestos por el vértice establece que, cuando dos líneas se cruzan, los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Esto significa que tienen la misma medida.

3.2.3 Ángulos que se forman entre parejas de rectas cortadas por una transversal

Cuando una recta transversal corta dos rectas, se forman varios tipos de ángulos, incluyendo:

- **Ángulos correspondientes**: Ángulos que están en el mismo lado de la transversal y en la misma posición relativa con respecto a las dos rectas.
- **Ángulos alternos internos**: Ángulos que están en lados opuestos de la transversal pero dentro de las dos rectas.
- **Ángulos alternos externos**: Ángulos que están en lados opuestos de la transversal pero fuera de las dos rectas.
- **Ángulos colaterales internos (suplementarios)**: Ángulos que están en el mismo lado de la transversal y entre las dos rectas.

3.2.4 Problemas relativos a ángulos

En esta sección se resolverán problemas aplicando los conceptos y teoremas discutidos.

3.2.5 Terminología y notación

La terminología y notación en geometría son esenciales para una comunicación clara y precisa. Algunas notaciones comunes incluyen:

- **Puntos**: Generalmente representados por letras mayúsculas (A, B, C, etc.).
- **Líneas**: Denotadas por letras minúsculas (l, m, n) o por dos puntos (AB).
- **Ángulos**: Representados por el símbolo $\angle$ seguido de tres letras, donde la letra del medio representa el vértice (ej. $\angle ABC$).
- **Segmentos de línea**: Denotados por dos puntos con una línea encima (ej. $\overline{AB}$).
- **Planos**: Representados por letras griegas (ej. plano α, plano β).

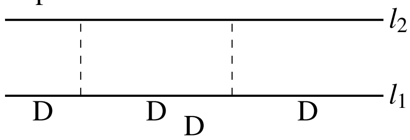
3.3 Paralelismo y Perpendicularidad

3.3.1 Definición: característica del paralelismo y la perpendicularidad

En geometría, el **paralelismo** y la **perpendicularidad** son conceptos fundamentales que describen la relación entre dos o más líneas.

Paralelismo

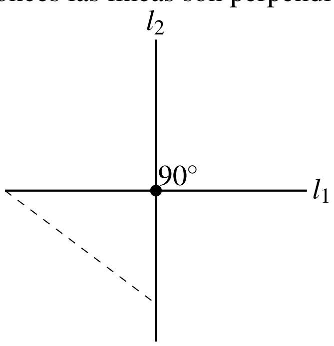
Dos líneas son **paralelas** si y solo si nunca se intersectan y mantienen una distancia constante entre sí en todos sus puntos. Matemáticamente, se dice que dos líneas l_1 y l_2 son paralelas si la pendiente de l_1 es igual a la pendiente de l_2, en el caso de que ambas líneas estén expresadas en forma pendiente-intersección.



Donde D representa la distancia constante entre las dos líneas paralelas.

Perpendicularidad

Dos líneas son **perpendiculares** si se intersectan formando ángulos rectos, es decir, ángulos de 90°. Matemáticamente, si las pendientes de dos líneas m_1 y m_2 son tales que $m_1 \cdot m_2 = -1$, entonces las líneas son perpendiculares.



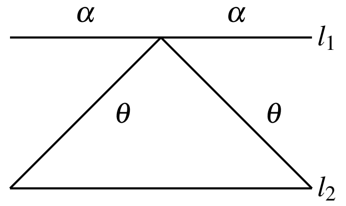
Aquí, la intersección de las dos líneas forma un ángulo recto.

3.3.2 Postulado del Paralelismo

El **Postulado del Paralelismo** establece que dado un punto y una línea no contenida en el punto, existe una única línea que pasa por el punto y es paralela a la línea dada. Este postulado es uno de los axiomas fundamentales en la geometría euclidiana.

3.3.3 Teorema Fundamental del Paralelismo

Uno de los teoremas fundamentales del paralelismo es el **Teorema de la Alternancia de Ángulos**, que establece que si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son iguales.



En el gráfico, los ángulos alternos internos α y θ son iguales.

3.3.4 Problemas de Demostración

3.4 Triángulos

El estudio de los triángulos es fundamental en geometría, ya que proporciona una base sólida para entender muchas propiedades geométricas. Esta sección se enfoca en la definición, clasificación y propiedades de los triángulos, así como en las rectas y puntos notables.

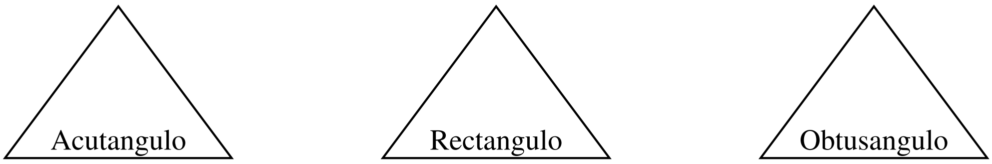
3.4.1 Definición y Clasificación de los Triángulos

Un **triángulo** es una figura geométrica formada por tres segmentos de línea que se encuentran en tres puntos no colineales, llamados **vértices**. Los segmentos de línea son los **lados** del triángulo.

Clasificación según los Ángulos

Los triángulos se clasifican en función de sus ángulos internos:

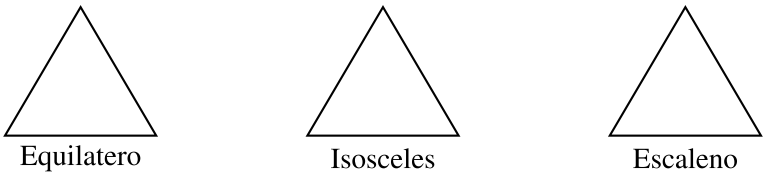
- **Triángulo Acutángulo:** Todos sus ángulos son menores a 90°.
- **Triángulo Rectángulo:** Tiene un ángulo de 90°.
- **Triángulo Obtusángulo:** Tiene un ángulo mayor a 90°.



Clasificación según los Lados

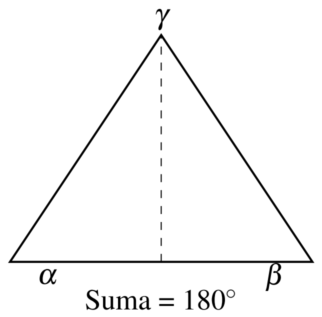
Los triángulos también se clasifican según la longitud de sus lados:

- **Triángulo Equilátero:** Todos sus lados son de igual longitud.
- **Triángulo Isósceles:** Tiene dos lados de igual longitud.
- **Triángulo Escaleno:** Todos sus lados son de diferente longitud.



3.4.2 Teorema de los Ángulos Interiores de un Triángulo

El **Teorema de los Ángulos Interiores** establece que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre igual a 180°.



3.4.3 Rectas y Puntos Notables de los Triángulos

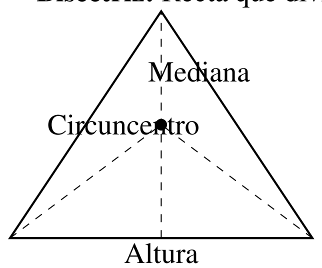
Los triángulos tienen varios puntos y rectas notables que son importantes para resolver problemas geométricos.

Puntos Notables

- **Baricentro:** Punto de concurrencia de las medianas del triángulo.
- **Ortocentro:** Punto de concurrencia de las alturas del triángulo.
- **Circuncentro:** Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados del triángulo.
- **Incentro:** Punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos del triángulo.

Rectas Notables

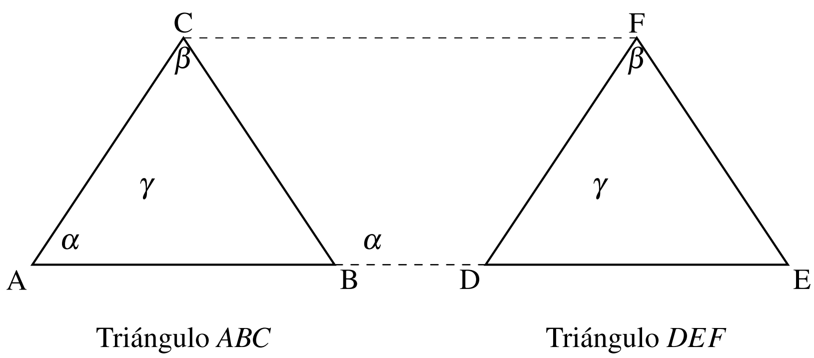
- **Mediana:** Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
- **Altura:** Segmento perpendicular desde un vértice al lado opuesto.
- **Mediatriz:** Recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por su punto medio.
- **Bisectriz:** Recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales.



3.5 Congruencia

3.5.1 Concepto de Congruencia

Dos figuras geométricas son **congruentes** si tienen la misma forma y tamaño. Esto significa que se pueden superponer una sobre otra mediante una secuencia de transformaciones geométricas: traslaciones, rotaciones y reflexiones. En particular, dos triángulos son congruentes si sus ángulos y lados correspondientes son iguales.



En la figura anterior, los triángulos ABC y DEF son congruentes porque sus ángulos y lados correspondientes son iguales.

3.5.2 Postulados de Congruencia

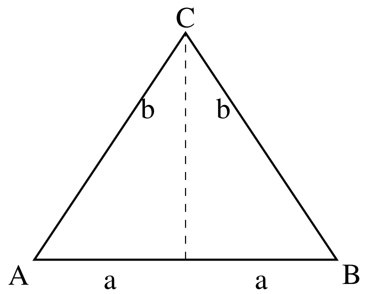
Para determinar si dos triángulos son congruentes, se utilizan los siguientes postulados:

- **Postulado Lado-Lado-Lado (LLL):** Si en dos triángulos, los tres lados de uno son iguales a los tres lados del otro, entonces los triángulos son congruentes.
- **Postulado Ángulo-Lado-Ángulo (ALA):** Si en dos triángulos, un ángulo y los dos lados adyacentes a ese ángulo son iguales a los correspondientes en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- **Postulado Ángulo-Ángulo-Lado (AAL):** Si en dos triángulos, dos ángulos y el lado no comprendido entre ellos son iguales a los correspondientes en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

3.5.3 Teorema del Triángulo Isósceles

Un triángulo es **isósceles** si tiene al menos dos lados iguales. El teorema del triángulo isósceles establece que:

- Los ángulos opuestos a los lados iguales son también iguales.
- La altura, mediana y bisectriz desde el vértice del ángulo de los dos lados iguales son coincidentes.



Triángulo Isósceles ABC

3.5.4 Problemas de Aplicación

3.6 Semejanza

3.6.1 Razones y Proporciones

Definición 3.6.1 Razón: Una razón es la relación entre dos magnitudes de la misma especie, expresada como una fracción o un cociente.

Definición 3.6.2 Proporción: Una proporción es una igualdad entre dos razones. Se expresa como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a, b, c y d son magnitudes positivas.

■ **Ejemplo 3.1** Consideremos las razones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$. Como $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, decimos que estas razones son proporcionales. ■

3.6.2 Concepto de Semejanza. Triángulos Semejantes

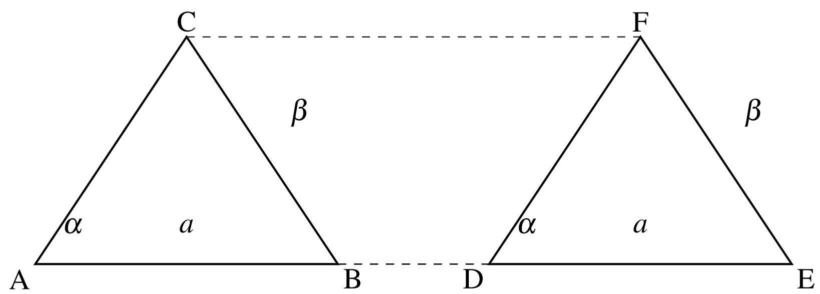
Definición 3.6.3 Semejanza de Triángulos: Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes iguales y sus lados correspondientes proporcionales.

■ **Ejemplo 3.2** Dos triángulos con ángulos iguales y lados proporcionales se llaman triángulos semejantes. Por ejemplo, si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$. ■

3.6.3 Postulado de Semejanza

Definición 3.6.4 Los postulados de semejanza para triángulos son:

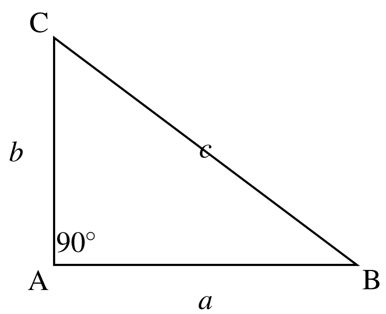
- **Postulado AAA:** Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.
- **Postulado LAL:** Si un ángulo y los dos lados adyacentes de un triángulo son proporcionales a un ángulo y los dos lados adyacentes de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.
- **Postulado LLL:** Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.



Triángulo ABC Triángulo DEF

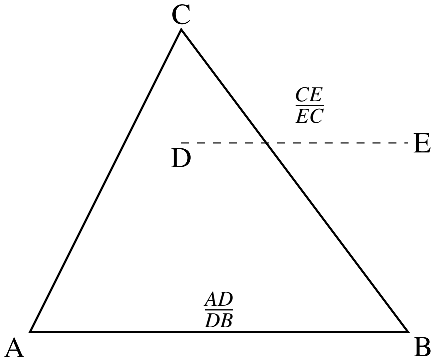
3.6.4 Teorema de Pitágoras

Teorema 3.6.1 — Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, si a y b son los catetos y c es la hipotenusa, entonces $c^2 = a^2 + b^2$.



3.6.5 Teorema Fundamental de Proporcionalidad

Teorema 3.6.2 — Teorema Fundamental de Proporcionalidad. Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, entonces se forma un triángulo semejante al triángulo dado, y los segmentos de los otros dos lados son proporcionales.



3.7 Funciones Trigonométricas

3.7.1 Introducción a la Trigonometría

Definición 3.7.1 Trigonometría: La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Su desarrollo histórico se remonta a las civilizaciones antiguas como los egipcios y babilonios, y fue formalmente desarrollada por los griegos y los indios en la antigüedad.

- **Breve semblanza histórica:** La trigonometría tiene sus raíces en la astronomía y la geometría. Los antiguos griegos, como Hiparco y Ptolomeo, hicieron contribuciones significativas, y la trigonometría se desarrolló aún más en la India y el mundo islámico durante la Edad Media.
- **Importancia para el Ingeniero Agrónomo:** La trigonometría es crucial para medir distancias inaccesibles y resolver problemas relacionados con la topografía y la geometría del terreno.
- **Objetivo general del curso:** Proporcionar una comprensión sólida de las funciones trigonométricas y su aplicación en la resolución de triángulos rectángulos.
- **Ubicación en el plan de estudios:** La trigonometría se ubica en el estudio de las matemáticas aplicadas, y es fundamental para la ingeniería y las ciencias aplicadas.

3.7.2 Funciones Trigonométricas de un Ángulo Agudo de un Triángulo Rectángulo

Definición 3.7.2 Funciones Trigonométricas: Para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, las funciones trigonométricas principales son:
- **Seno** (sin): $\sin(\theta) = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
- **Coseno** (cos): $\cos(\theta) = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$
- **Tangente** (tan): $\tan(\theta) = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$

■ **Ejemplo 3.3** En un triángulo rectángulo con un ángulo de 30°, si la hipotenusa es 10 unidades, entonces:

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \text{lado opuesto} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

■

3.7.3 Manejo de Tablas y/o Calculadora

Definición 3.7.3 Tablas y Calculadora: Las tablas trigonométricas y las calculadoras permiten encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos dados. Es fundamental familiarizarse con su uso para resolver problemas de trigonometría de manera eficiente.

■ **Ejemplo 3.4** Para encontrar $\sin(45^\circ)$ usando una calculadora:

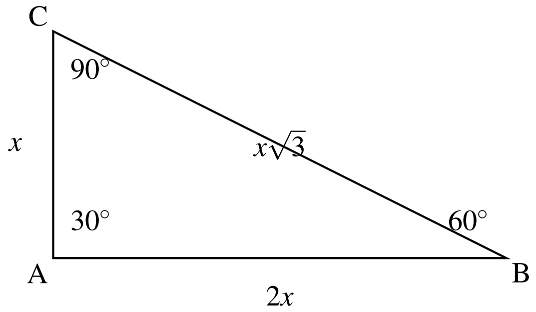
$$\sin(45^\circ) \approx 0.707$$

■

3.7.4 Triángulos Especiales

Definición 3.7.4 Triángulos Especiales: Existen triángulos rectángulos especiales que tienen ángulos de 30°, 45° y 60°. Estos triángulos tienen propiedades y razones trigonométricas específicas:

- Triángulo $30° - 60° - 90°$: Las longitudes de los lados están en la proporción $1 : \sqrt{3} : 2$.
- Triángulo $45° - 45° - 90°$: Las longitudes de los lados están en la proporción $1 : 1 : \sqrt{2}$.



3.7.5 Solución de Triángulos Rectángulos, Cálculo de Áreas

Definición 3.7.5 Solución de Triángulos Rectángulos: Consiste en encontrar las longitudes de los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo utilizando funciones trigonométricas. El área de un triángulo rectángulo se calcula como:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$

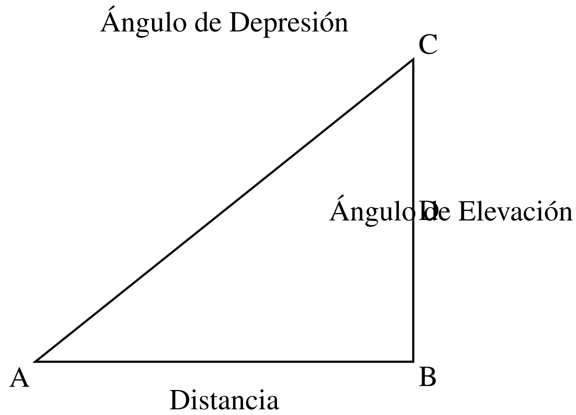
■ **Ejemplo 3.5** En un triángulo rectángulo con base 6 y altura 8, el área es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

■

3.7.6 Ángulos de Elevación y Depresión

Definición 3.7.6 Ángulos de Elevación y Depresión: El ángulo de elevación es el ángulo formado por la línea de visión hacia arriba desde un punto de observación. El ángulo de depresión es el ángulo formado por la línea de visión hacia abajo desde un punto de observación. Ambos se utilizan para resolver problemas de altura y distancia.



3.8 Funciones Trigonométricas

3.8.1 Sistema de Coordenadas Rectangulares

Definición 3.8.1 Sistema de Coordenadas Rectangulares: El sistema de coordenadas rectangulares, también conocido como sistema de coordenadas cartesianas, está formado por dos ejes perpendiculares: el eje x (horizontal) y el eje y (vertical). Cada punto en el plano se localiza mediante un par de coordenadas (x, y), donde x es la distancia desde el eje y y y es la distancia desde el eje x.

3.8.2 Definir Grados y Radianes, Conversiones de un Sistema al Otro

Definición 3.8.2 Grados y Radianes:

- **Grados:** Un círculo completo tiene 360 grados.
- **Radianes:** Un círculo completo tiene 2π radianes. La conversión entre grados y radianes se realiza mediante las siguientes fórmulas:

$$\text{Radianes} = \text{Grados} \times \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Grados} = \text{Radianes} \times \frac{180}{\pi}$$

■ **Ejemplo 3.6** Convertir 45° a radianes:

$$45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

■

3.8.3 Ángulo en Posición Normal, Concepto de Ángulo Reducido o de Referencia

Definición 3.8.3 Ángulo en Posición Normal: Un ángulo está en posición normal cuando su vértice está en el origen y uno de sus lados está en el eje positivo x. Los ángulos se miden en sentido antihorario desde el eje positivo x.

Ángulo Reducido o de Referencia: Es el ángulo agudo formado entre el lado terminal del ángulo en posición normal y el eje x.

■ **Ejemplo 3.7** Para un ángulo de 135°, el ángulo de referencia es $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. ■

3.8.4 Definición de las Funciones Trigonométricas de un Ángulo Cualquiera en Posición Normal

Definición 3.8.4 Funciones Trigonométricas en Posición Normal:

- **Seno** (sin): La razón del lado opuesto al ángulo dividido por la hipotenusa.
- **Coseno** (cos): La razón del lado adyacente al ángulo dividido por la hipotenusa.
- **Tangente** (tan): La razón del seno sobre el coseno.

■ **Ejemplo 3.8** Para un ángulo de 150° (en el segundo cuadrante), el seno es positivo y el coseno es negativo. El ángulo de referencia es 30°:

$$\sin(150^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

3.8.5 Signo de las Funciones Trigonométricas en los Cuatro Cuadrantes

Definición 3.8.5 Signo de las Funciones Trigonométricas:
- **Primer Cuadrante** ($0°$ a $90°$): sin, cos, y tan son positivos.
- **Segundo Cuadrante** ($90°$ a $180°$): sin es positivo, cos y tan son negativos.
- **Tercer Cuadrante** ($180°$ a $270°$): tan es positivo, sin y cos son negativos.
- **Cuarto Cuadrante** ($270°$ a $360°$): cos es positivo, sin y tan son negativos.

3.8.6 Ángulos Positivos, Ángulos Negativos

Definición 3.8.6 Ángulos Positivos y Negativos:
- **Ángulos Positivos:** Se miden en sentido antihorario desde el eje x.
- **Ángulos Negativos:** Se miden en sentido horario desde el eje x.

■ **Ejemplo 3.9** Un ángulo de $-30°$ es equivalente a $360° - 30° = 330°$. ■

3.8.7 Funciones Trigonométricas Inversas

Definición 3.8.7 Funciones Trigonométricas Inversas: Las funciones trigonométricas inversas son:
- **Arco seno** ($\sin^{-1}$): Determina el ángulo cuyo seno es el valor dado.
- **Arco coseno** ($\cos^{-1}$): Determina el ángulo cuyo coseno es el valor dado.
- **Arco tangente** ($\tan^{-1}$): Determina el ángulo cuyo tangente es el valor dado.

■ **Ejemplo 3.10** Para encontrar el ángulo cuyo seno es $\frac{1}{2}$:

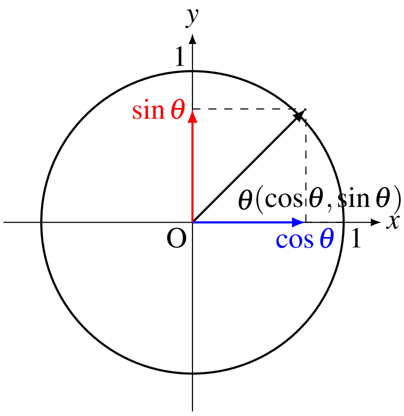
$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

■

3.9 Círculo Trigonométrico, Graficación de las Funciones Trigonométricas

3.9.1 El Círculo Trigonométrico

Definición 3.9.1 Círculo Trigonométrico: Es un círculo con radio 1 centrado en el origen del sistema de coordenadas cartesianas. Los puntos en el círculo corresponden a los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo.



3.9.2 Funciones Trigonométricas Definidas como Segmentos Rectilíneos

Definición 3.9.2 Funciones Trigonométricas como Segmentos Rectilíneos: Las funciones trigonométricas pueden ser representadas como segmentos rectilíneos en el círculo trigonométrico:
- **Seno** ($\sin\theta$): La coordenada y del punto en el círculo.

- **Coseno** ($\cos\theta$): La coordenada x del punto en el círculo.
- **Tangente** ($\tan\theta$): La razón de $\sin\theta$ sobre $\cos\theta$.

■ **Ejemplo 3.11** Para $\theta = 45°$:

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = 1$$

■

3.9.3 Variaciones de las Funciones Trigonométricas con Respecto a la Variación del Argumento en los Cuatro Cuadrantes

Definición 3.9.3 Variaciones en los Cuadrantes:

- **Primer Cuadrante** ($0°$ a $90°$): sin y cos son positivos.
- **Segundo Cuadrante** ($90°$ a $180°$): sin es positivo, cos es negativo.
- **Tercer Cuadrante** ($180°$ a $270°$): sin y cos son negativos.
- **Cuarto Cuadrante** ($270°$ a $360°$): sin es negativo, cos es positivo.

■ **Ejemplo 3.12** Para un ángulo de $210°$ en el tercer cuadrante:

$$\sin 210° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

3.9.4 Graficación de las Funciones Trigonométricas

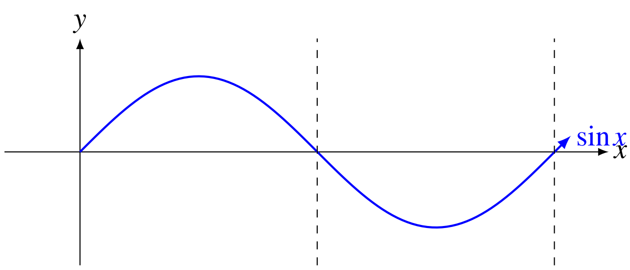
Definición 3.9.4 Graficación de Funciones Trigonométricas:

- **Seno y Coseno:** Tienen una gráfica periódica con periodo 2π. La gráfica de $\sin x$ y $\cos x$ es una onda que oscila entre -1 y 1.
- **Tangente:** Tiene una gráfica con asíntotas verticales en los puntos donde $\cos x = 0$ y oscila entre $-\infty$ y ∞.

■ **Ejemplo 3.13** La gráfica de $\sin x$ tiene un periodo de 2π y oscila entre -1 y 1. La gráfica de $\sin x$ puede ser representada por:

$$y = a\sin(bx + c) + d$$

donde a es la amplitud, b afecta el periodo, c es el desfase horizontal, y d es el desfase vertical. ■



3.10 Triángulos oblicuángulos

3.10.1 Ley de Senos y Cosenos

Para abordar la resolución de triángulos oblicuángulos, es fundamental conocer y aplicar la Ley de Senos y la Ley de Cosenos. Estas leyes nos permiten determinar las medidas de los ángulos y los lados de un triángulo cuando se dispone de ciertos datos. La Ley de Senos establece que, en cualquier triángulo, la razón entre un lado y el seno del ángulo opuesto es constante. Matemáticamente, se expresa como:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo, y A, B y C son los ángulos opuestos. Esta ley es especialmente útil cuando se conocen dos ángulos y un lado, o dos lados y un ángulo no comprendido.

Por otro lado, la Ley de Cosenos generaliza el teorema de Pitágoras para triángulos que no son rectángulos. Se utiliza para encontrar un lado de un triángulo cuando se conocen los otros dos lados y el ángulo comprendido, o para encontrar el ángulo cuando se conocen los tres lados. Se expresa como:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

donde c es el lado opuesto al ángulo C, y a y b son los otros dos lados. Esta ley es crucial para resolver triángulos oblicuángulos cuando se dispone de información diferente de la proporcionada por la Ley de Senos.

3.10.2 Solución de Triángulos Oblicuángulos

Para resolver un triángulo oblicuángulo, es necesario aplicar la Ley de Senos y la Ley de Cosenos de manera adecuada según los datos disponibles. Por ejemplo, si se conocen dos ángulos y un lado, la Ley de Senos permite calcular los lados restantes y el tercer ángulo utilizando la propiedad de que la suma de los ángulos en un triángulo es 180°. En cambio, si se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se puede usar la Ley de Cosenos para encontrar el tercer lado y, posteriormente, aplicar la Ley de Senos para determinar los ángulos restantes.

Para ilustrar esto, consideremos un triángulo oblicuángulo con lados a, b y c, y ángulos A, B y C. Si se conocen los valores de a, b y el ángulo C, se puede calcular el lado c utilizando la Ley de Cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Luego, para encontrar los ángulos A y B, se puede usar la Ley de Senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Este proceso asegura que se obtengan todas las medidas necesarias para la resolución completa del triángulo oblicuángulo.

3.10.3 Áreas de Triángulos Oblicuángulos

El cálculo del área de un triángulo oblicuángulo puede realizarse utilizando la fórmula derivada de la Ley de Senos. Si se conocen dos lados y el ángulo comprendido, la fórmula para el área es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab\sin C$$

donde a y b son los lados adyacentes al ángulo C. Esta fórmula es extremadamente útil en aplicaciones prácticas, como en la Agrimensura y la Topografía, donde la precisión en la medición de áreas es crucial.

Área usando la fórmula de Herón

$$s = \frac{a+b+c}{2} \tag{3.1}$$

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{3.2}$$

Para ejemplificar, si en un triángulo oblicuángulo tenemos los lados $a = 7$, $b = 10$ y el ángulo $C = 45^\circ$, la área se calcularía como:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times 7 \times 10 \times \sin 45^\circ$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times 7 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Área} \approx 24.5$$

Este método de cálculo permite determinar áreas con precisión en diversas aplicaciones prácticas, demostrando la importancia de dominar las técnicas de resolución de triángulos oblicuángulos.

3.11 Identidades trigonométricas

3.11.1 Identidades fundamentales

Para comenzar, es crucial que los estudiantes se familiaricen con las identidades trigonométricas fundamentales. Estas identidades incluyen las relaciones recíprocas, las de cociente y las pitagóricas, que forman la base para la simplificación y manipulación de expresiones trigonométricas. Las identidades fundamentales son:

- **Identidades recíprocas:**

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

- **Identidades de cociente:**

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- **Identidades pitagóricas:**

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Estas identidades son fundamentales para simplificar expresiones y resolver ecuaciones trigonométricas. Los estudiantes deben memorizar estas identidades para facilitar su aplicación en problemas más complejos.

3.11.2 Identidades de sumas y diferencias de ángulos

Una vez que se dominan las identidades fundamentales, el siguiente paso es trabajar con las identidades de sumas y diferencias de ángulos. Estas identidades permiten transformar expresiones trigonométricas que involucran la suma o diferencia de ángulos en formas más simples. Las principales identidades en esta categoría son:

- **Suma de ángulos:**

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

- **Diferencia de ángulos:**

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Estas identidades son útiles para simplificar expresiones que involucran la suma o diferencia de ángulos, facilitando la resolución de problemas trigonométricos.

3.11.3 Ángulos dobles y ángulos mitad

Finalmente, el conocimiento de las identidades para ángulos dobles y mitades es fundamental para resolver problemas trigonométricos avanzados. Estas identidades permiten expresar funciones trigonométricas de ángulos dobles y mitades en términos de funciones de ángulos simples. Las identidades son:

- **Ángulo doble:**

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

- **Ángulo mitad:**

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

El dominio de estas identidades permitirá a los estudiantes manipular y simplificar expresiones trigonométricas complejas, aplicando las reglas adecuadas para resolver una variedad de problemas.

Con el dominio de estas identidades, los alumnos estarán mejor equipados para enfrentar y resolver problemas trigonométricos, aplicando las técnicas y estrategias aprendidas en esta unidad.

3.12 Ecuaciones trigonométricas

En esta unidad, se resolverán ecuaciones trigonométricas mediante una metodología sistemática que incluye la simplificación de ecuaciones, el aislamiento de funciones trigonométricas y el despeje del ángulo. Es importante distinguir entre ecuaciones trigonométricas, que buscan valores específicos para los ángulos, e identidades trigonométricas, que se cumplen para cualquier valor del ángulo.

3.12.1 Solución de ecuaciones trigonométricas de primer grado

Para resolver ecuaciones trigonométricas de primer grado, sigue estos pasos:

1. **Simplificación:** Usa identidades trigonométricas para simplificar la ecuación si es posible. Por ejemplo:

$$\sin 2\theta = \cos\theta.$$

Usando la identidad $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, la ecuación se convierte en:

$$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta.$$

2. **Aislamiento de la función trigonométrica:** Despeja la función trigonométrica. Para el ejemplo anterior:

$$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta.$$

Divide ambos lados por $\cos\theta$ (si $\cos\theta \neq 0$):

$$2\sin\theta = 1.$$

Luego, despeja $\sin\theta$:

$$\sin\theta = \frac{1}{2}.$$

3. **Determinación de los ángulos:** Encuentra todos los ángulos que satisfacen la ecuación. Para $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, los ángulos son:

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.12.2 Solución de ecuaciones trigonométricas de segundo grado

Las ecuaciones trigonométricas de segundo grado suelen requerir métodos adicionales como la factorización. Aquí se muestra cómo resolver estas ecuaciones:

1. **Transformación de la ecuación:** Usa identidades trigonométricas para simplificar. Por ejemplo, para la ecuación:

$$\sin^2\theta - \sin\theta = 0.$$

Esto se puede factorizar como:

$$\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0.$$

2. **Resolución de ecuaciones simples:** Resuelve cada ecuación factorizada por separado. En este caso, tenemos dos ecuaciones:

$$\sin\theta = 0$$

y

$$\sin\theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \sin\theta = 1.$$

Para $\sin\theta = 0$:

$$\theta = k\pi \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para $\theta = \arcsin(1)$:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esta metodología permite una comprensión clara de cómo despejar el ángulo en ecuaciones trigonométricas y proporciona ejemplos prácticos para guiar a los estudiantes en la resolución de problemas.

IV

Cuarto semestre

4. Geometría Analítica

4.1 Conceptos fundamentales

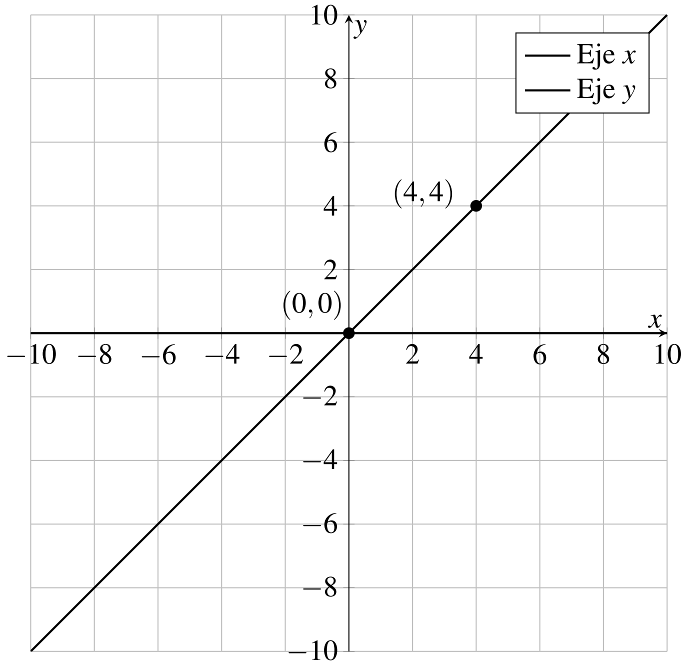
4.1.1 Introducción y Plano Cartesiano

Definición 4.1.1 — Plano Cartesiano. Es una herramienta esencial en la geometría analítica que permite representar gráficamente ecuaciones algebraicas. Está formado por dos ejes perpendiculares: el eje x (eje horizontal) y el eje y (eje vertical). Estos ejes dividen el plano en cuatro regiones conocidas como cuadrantes.

- **Eje** x: También conocido como eje horizontal, mide la posición de un punto a lo largo de la dirección horizontal.
- **Eje** y: También conocido como eje vertical, mide la posición de un punto a lo largo de la dirección vertical.
- **Origen**: El punto de intersección de los ejes x y y, denotado como $(0,0)$.

Sistema de Coordenadas

Cada punto en el plano cartesiano se representa mediante un par ordenado (x,y), donde x es la coordenada horizontal y y es la coordenada vertical.



4.1.2 Distancia entre dos puntos

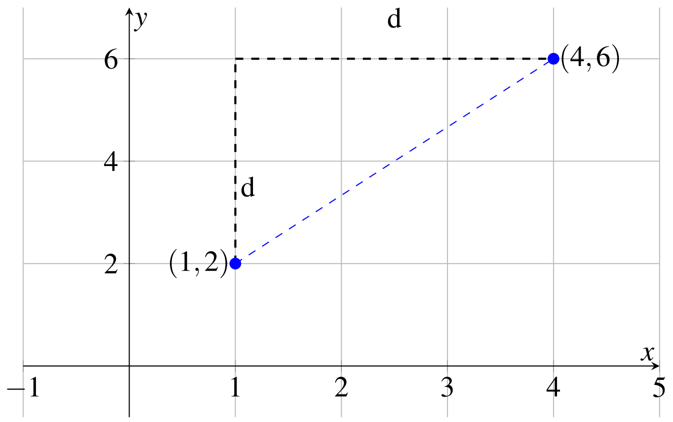
La distancia entre dos puntos en el plano cartesiano se puede calcular utilizando la fórmula de la distancia. Si tenemos dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, la distancia d entre ellos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4.1}$$

■ **Ejemplo 4.1** Encuentra la distancia entre los puntos $A(1,2)$ y $B(4,6)$.

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

■



4.1.3 División de un segmento en una razón dada

Para dividir un segmento de línea en una razón $k:1$, usamos la fórmula de la división de un segmento en coordenadas. Si el segmento une los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el punto de división

$P(x,y)$ que divide el segmento en la razón $k:1$ es:

$$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \tag{4.2}$$

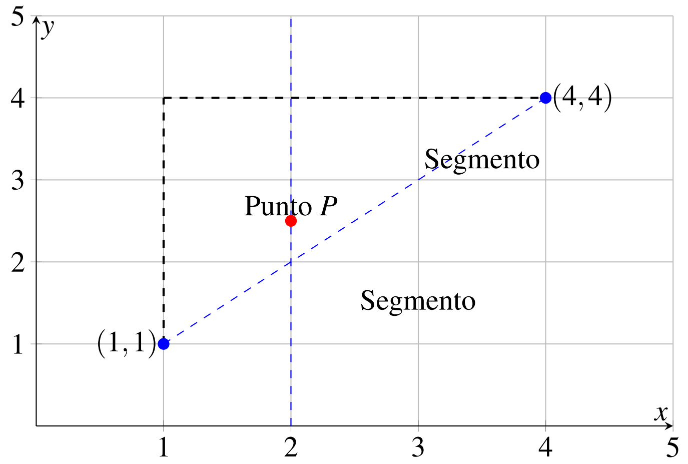
$$y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \tag{4.3}$$

■ **Ejemplo 4.2** Encuentra el punto que divide el segmento AB con $A(1,3)$ y $B(4,7)$ en la razón 2:1.

$$x = \frac{2\cdot 4+1}{2+1} = \frac{8+1}{3} = 3$$

$$y = \frac{2\cdot 7+3}{2+1} = \frac{14+3}{3} = 5.67$$

El punto es $(3,5.67)$. ■



4.1.4 Punto medio de un segmento

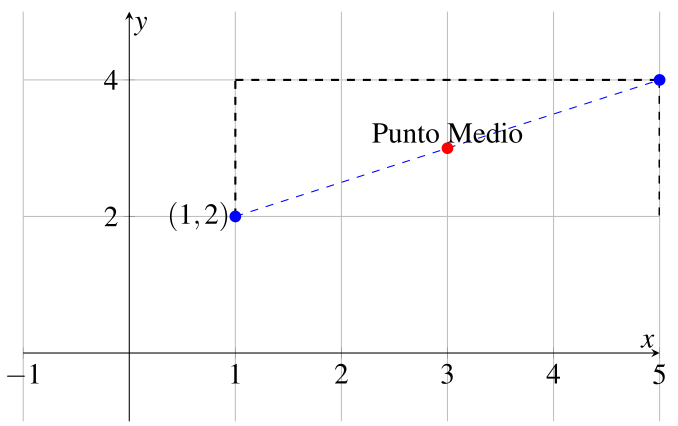
El punto medio de un segmento que une los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ se calcula como:

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \tag{4.4}$$

■ **Ejemplo 4.3** Encuentra el punto medio del segmento que une $A(1,2)$ y $B(4,6)$.

$$M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{8}{2}\right) = (2.5,4)$$

■



4.1.5 Conceptos de ángulo de inclinación y pendiente

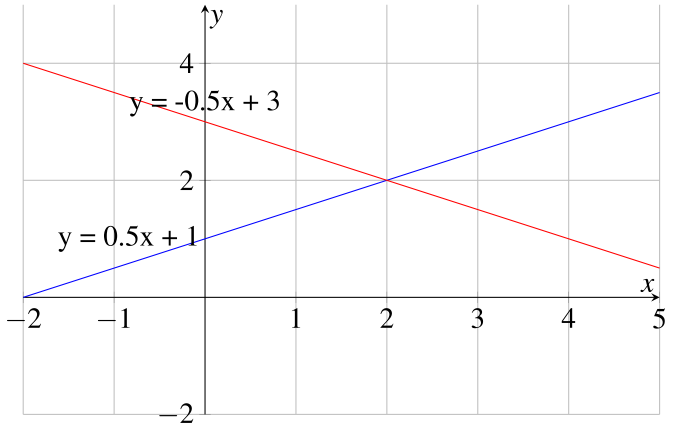
El ángulo de inclinación θ de una recta con pendiente m se puede encontrar mediante:

$$\tan(\theta) = m \implies \theta = \arctan(m) \tag{4.5}$$

La pendiente m de una recta en la forma $y = mx + b$ es el coeficiente m.

■ **Ejemplo 4.4** Para una recta con ecuación $y = 2x + 1$, la pendiente es 2. El ángulo de inclinación es:

$$\theta = \arctan(2) \approx 63.43^\circ$$



■

4.1.6 Ángulo entre dos rectas

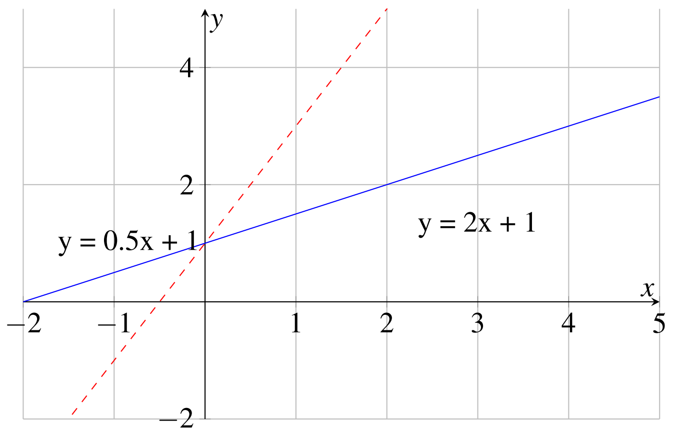
El ángulo ϕ entre dos rectas con pendientes m_1 y m_2 se calcula usando:

$$\tan(\phi) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \tag{4.6}$$

■ **Ejemplo 4.5** Encuentra el ángulo entre las rectas $y = 2x + 1$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

$$\tan(\phi) = \left| \frac{2 - (-\frac{1}{2})}{1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1} \right| = \text{indeterminado}$$

Las rectas son perpendiculares.



■

4.1.7 Paralelismo y Perpendicularidad

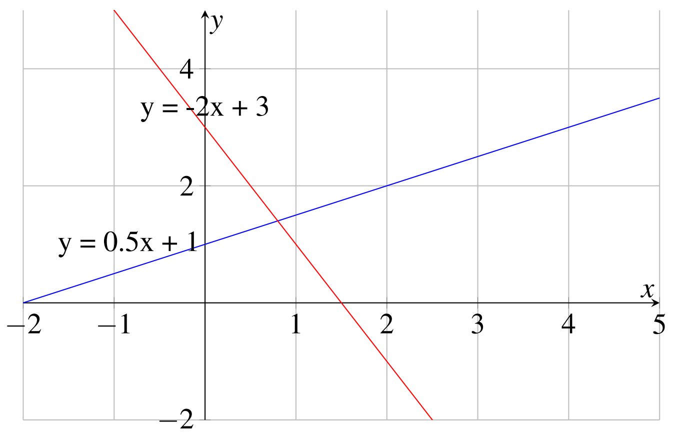
Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente m. Son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \tag{4.7}$$

■ **Ejemplo 4.6** Las rectas $y = 3x + 2$ y $y = -\frac{1}{3}x + 4$ son perpendiculares porque:

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

■

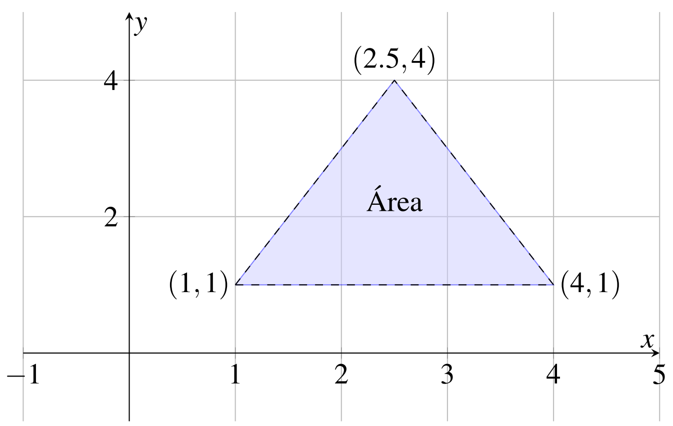


4.1.8 Cálculo de Áreas de polígonos

Triángulo

Para calcular el área de un triángulo con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3), usamos la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$



Cálculo del Área de un Triángulo con Determinantes

Para calcular el área de un triángulo con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3), usamos la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

donde det denota el determinante de la matriz.

■ **Ejemplo 4.7** Consideremos un triángulo con vértices en $(1,1)$, $(4,1)$, y $(2.5,4)$. Aplicamos la fórmula:

1. Escribimos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2.5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculamos el determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2.5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(1\cdot1-1\cdot4)-1\cdot(4\cdot1-1\cdot2.5)+1\cdot(4\cdot4-1\cdot2.5)$$

$$= 1\cdot(1-4)-1\cdot(4-2.5)+1\cdot(16-2.5)$$

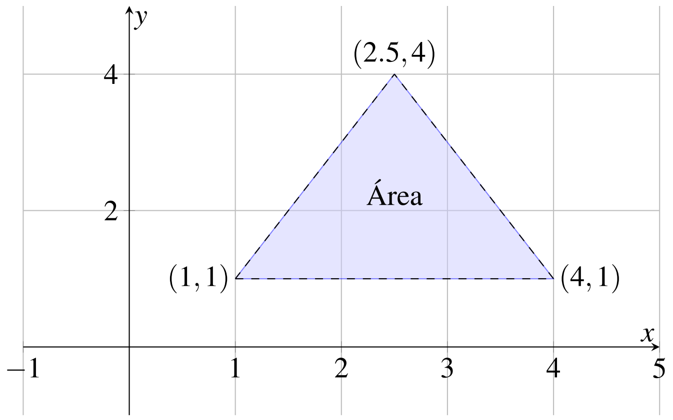
$$= 1\cdot(-3)-1\cdot1.5+1\cdot13.5$$

$$= -3-1.5+13.5$$

$$= 9$$

3. Calculamos el área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|9| = \frac{9}{2} = 4.5$$



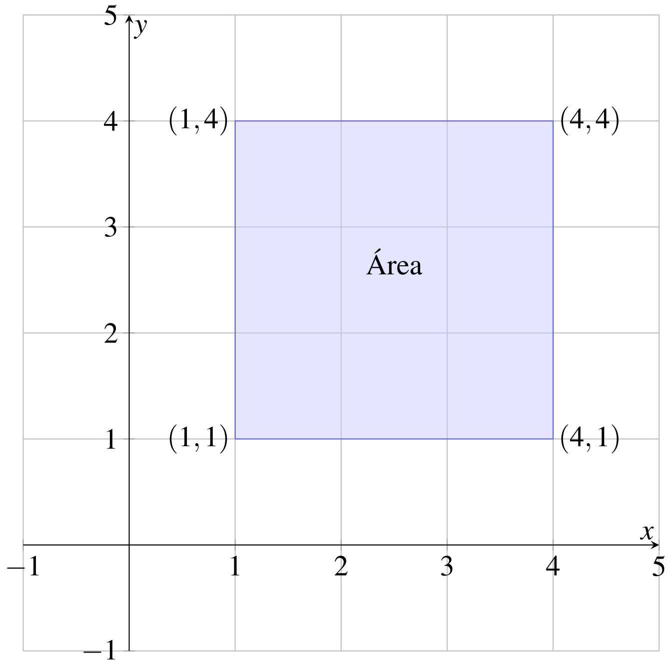
■

Cuadrado

Para un cuadrado con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), y (x_4, y_4), el área se calcula usando la longitud del lado:

$$\text{lado} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{Área} = \text{lado}^2$$



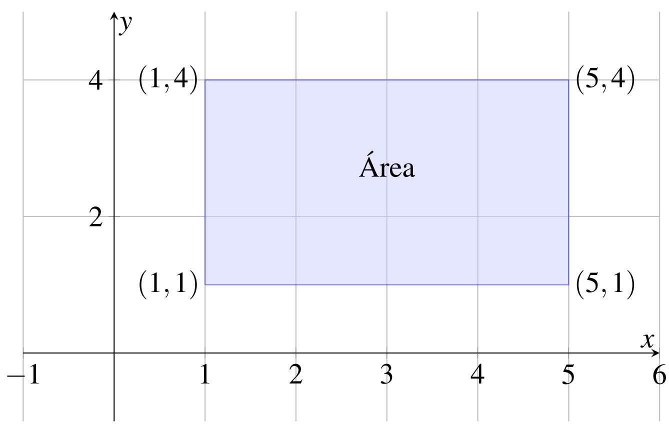
Rectángulo

Para un rectángulo con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), y (x_4, y_4):

$$\text{base} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{altura} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

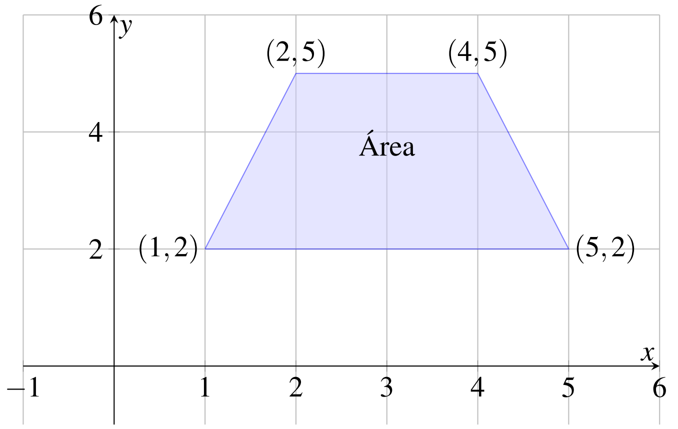
$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$$



Trapecio

Para un trapecio con bases paralelas, se calcula el área usando las bases y la altura:

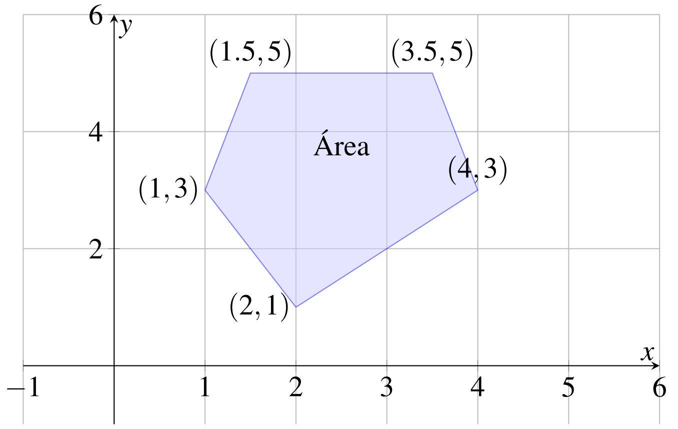
$$\text{Área} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \times h$$



Polígono Regular

Para un polígono regular con n lados de longitud l:

$$\text{Área} = \frac{n \times l^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$



4.2 Línea recta

4.2.1 Definición de línea recta como lugar geométrico

Definición 4.2.1 — Linea Recta. Una línea recta se define como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación lineal.

En términos sencillos, una línea recta es una colección infinita de puntos que se extienden en dos direcciones sin fin y sin curvatura.

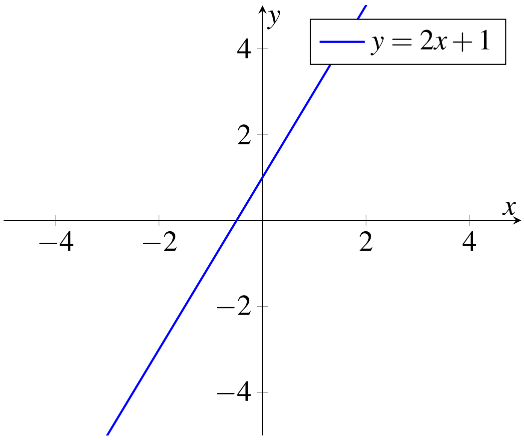
4.2.2 Ecuación de la Recta Conociendo las Coordenadas de un Punto Localizado en Ella y la Pendiente de la Misma

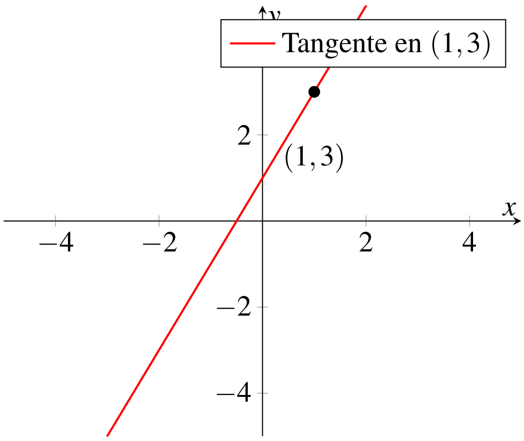
Si conocemos un punto (x_1, y_1) y la pendiente m de la recta, la ecuación de la recta se puede expresar en la forma punto-pendiente:

$$Y - y_1 = m(X - x_1) \tag{4.8}$$

■ **Ejemplo 4.8** Dada la pendiente $m = 2$ y el punto $(1,3)$, la ecuación de la recta es:

$$y - 3 = 2(x-1) \quad \text{o} \quad y = 2x+1$$





■

4.2.3 Ecuación de la Recta Dados Dos Puntos Distintos

Si tenemos dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente m de la recta que pasa por estos puntos se calcula como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{4.9}$$

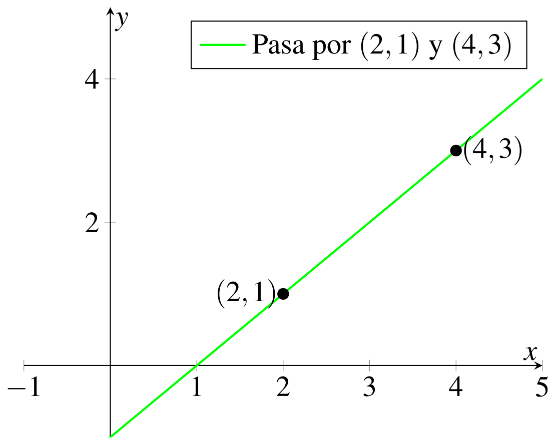
Luego, usamos la ecuación punto-pendiente con uno de los puntos para obtener la ecuación de la recta.

■ **Ejemplo 4.9** Para los puntos $(2,1)$ y $(4,3)$:

$$m = \frac{3-1}{4-2} = 1$$

La ecuación es:

$$y - 1 = 1(x-2) \quad \text{o} \quad y = x - 1$$



■

4.2.4 Ecuación de la Recta Dadas su Pendiente y su Ordenada al Origen

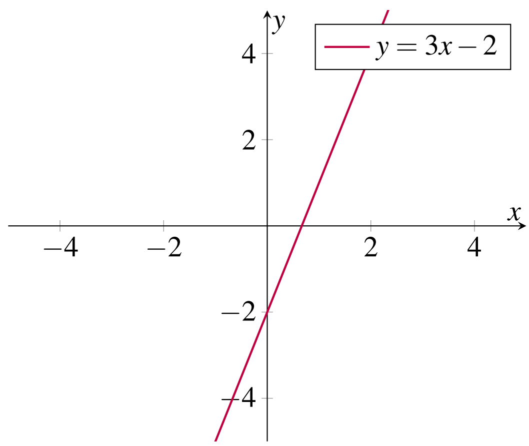
La ecuación de la recta en forma pendiente-ordenada al origen es:

$$y = mx + b \tag{4.10}$$

donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen.

■ **Ejemplo 4.10** Si la pendiente es 3 y la ordenada al origen es -2, la ecuación de la recta es:

$$y = 3x - 2$$



■

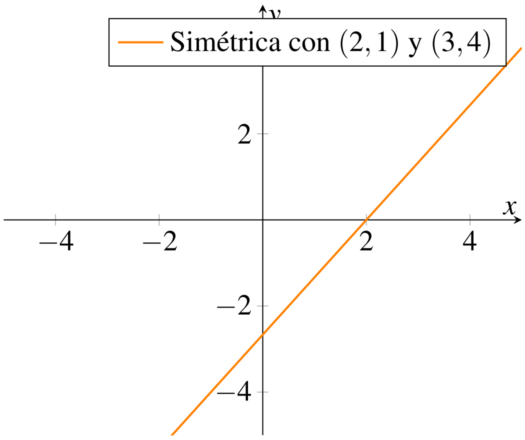
4.2.5 Ecuación Simétrica de la Recta

La ecuación simétrica de una recta en el espacio, dado un punto (x_0, y_0) y direcciones (a, b), es:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \tag{4.11}$$

■ **Ejemplo 4.11** Para la recta con punto $(2, 1)$ y dirección $(3, 4)$, la ecuación es:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$$



■

4.2.6 Ecuación General de la Recta

La ecuación general de una recta se puede expresar como:

$$Ax + By + C = 0 \tag{4.12}$$

donde A, B, y C son constantes.

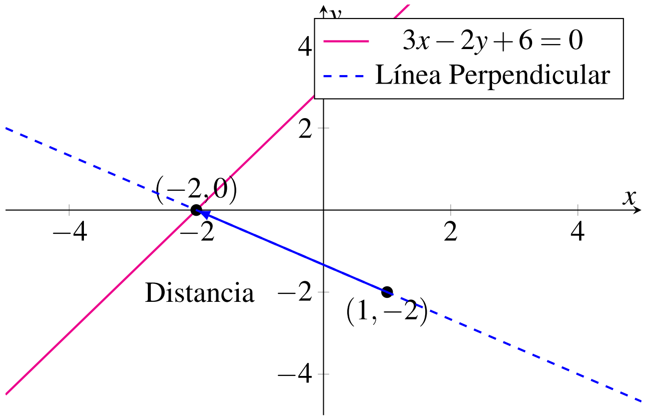
4.2.7 Distancia de un Punto a una Recta

La distancia d entre un punto (x_0, y_0) y una recta $Ax + By + C = 0$ se calcula con la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

■ **Ejemplo 4.12** La distancia entre el punto $(1, -2)$ y la recta $3x - 2y + 6 = 0$ se calcula de la siguiente manera:

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 + 4 + 6|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$



■

4.3 Circunferencia

4.3.1 Definición de la circunferencia como lugar geométrico

La circunferencia es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia fija, llamada radio, de un punto fijo, llamado centro.

4.3.2 Ecuación Ordinaria de la Circunferencia y su Gráfica

La ecuación ordinaria de una circunferencia con centro en (h,k) y radio r es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{4.13}$$

4.3.3 Ecuación General de la Circunferencia

La ecuación general de la circunferencia se obtiene expandiendo y simplificando la ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Expandiendo:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

Reorganizando:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$$

4.3.4 Propiedades de la Circunferencia

- La circunferencia es un conjunto de puntos equidistantes de un punto central.
- Todos los radios de una circunferencia tienen la misma longitud.
- La longitud de la circunferencia es $2\pi r$.
- El área dentro de la circunferencia es πr^2.

4.3.5 Ecuación de la Circunferencia Determinada a partir de Condiciones Dadas

Para determinar la ecuación de una circunferencia con condiciones dadas, por ejemplo, si conocemos el centro (h,k) y un punto sobre la circunferencia (x_1,y_1), primero calculamos el radio:

$$r = \sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2} \tag{4.14}$$

Luego, usamos la ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

ejemplo

Supongamos que el centro de la circunferencia es $(2,3)$ y pasa por el punto $(4,7)$. Calculamos el radio:

$$r = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 20$$

4.4 Parábola

4.4.1 Definición de la parábola como lugar geométrico.

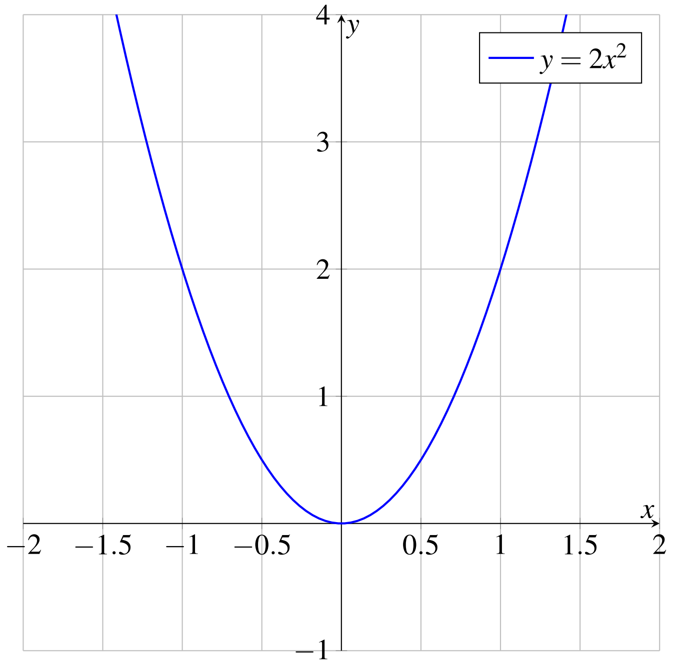
Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en el plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado *foco* y una línea fija llamada *directriz*.

4.4.2 Ecuación ordinaria de la parábola con eje de simetría paralelo a los ejes de coordenadas y su gráfica respectiva.

La ecuación ordinaria de una parábola con vértice en el origen y eje de simetría paralelo a uno de los ejes de coordenadas es:

- **Eje de simetría vertical** (abierta hacia arriba o hacia abajo): $y = ax^2$
- **Eje de simetría horizontal** (abierta hacia la derecha o hacia la izquierda): $x = ay^2$

Aquí, a determina la "apertura" y la orientación de la parábola.



4.4.3 Ecuación general de la parábola con eje horizontal o vertical

La ecuación general de una parábola puede escribirse en la forma:

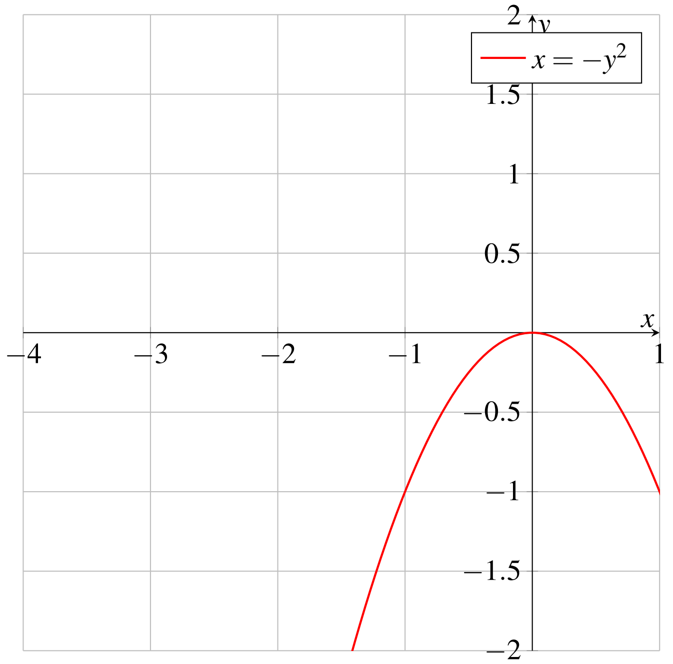
- **Eje vertical**: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
- **Eje horizontal**: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Donde (h,k) es el vértice de la parábola, y p es la distancia desde el vértice al foco.

4.4.4 Ecuación de la parábola determinada a partir de condiciones dadas

Para encontrar la ecuación de una parábola, se pueden utilizar diferentes conjuntos de datos:

- **Conociendo el foco y la directriz**: Si el foco es $(h,k+p)$ y la directriz es $y = k-p$, la ecuación de la parábola es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
- **Conociendo tres puntos por los cuales pasa la parábola**: Se pueden utilizar los puntos dados para resolver un sistema de ecuaciones que determine los coeficientes de la ecuación general.



4.5 Elipse

4.5.1 Definición de la elipse como lugar geométrico

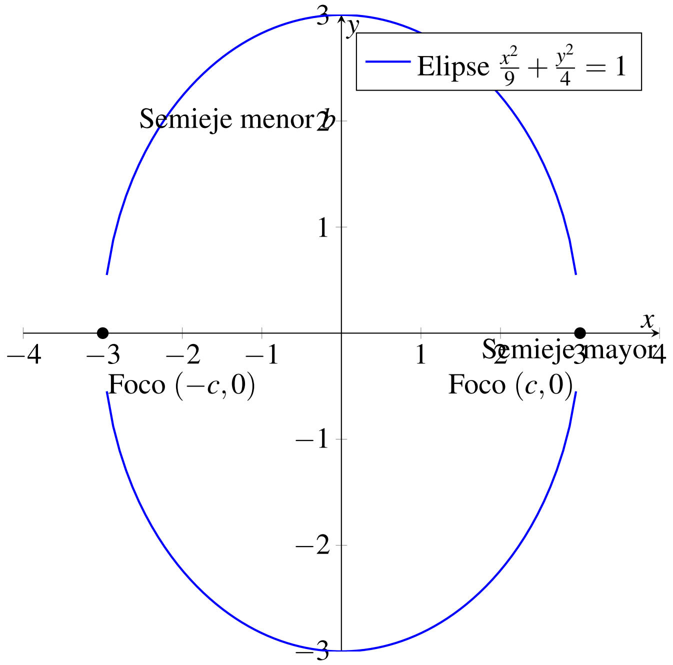
Una elipse es el lugar geométrico de los puntos en un plano tal que la suma de las distancias de cada punto a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Es una curva cerrada y simétrica respecto a sus ejes mayor y menor.

4.5.2 Ecuación ordinaria de la elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas y su gráfica respectiva.

La ecuación ordinaria de una elipse con centro en el origen y ejes mayor y menor paralelos a los ejes de coordenadas es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a es el semieje mayor y b el semieje menor. Si $a > b$, el eje mayor es horizontal; si $b > a$, el eje mayor es vertical.



4.5.3 Ecuación general de la elipse con eje mayor horizontal o vertical

La ecuación general de la elipse puede escribirse como:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

donde los coeficientes A y B determinan la orientación del eje mayor (horizontal si $A>B$ y vertical si $B>A$).

4.5.4 Ecuación de la elipse determinada a partir de condiciones dadas

Para determinar la ecuación de una elipse a partir de condiciones específicas, se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Identificar la longitud del semieje mayor a y del semieje menor b.
2. Determinar la ubicación del centro de la elipse (h,k).
3. Utilizar la fórmula $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ para obtener la ecuación.

4.6 Hipérbola

4.6.1 Definición de la hipérbola como lugar geométrico

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos en un plano tal que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta constante es igual a la distancia entre los vértices de la hipérbola.

4.6.2 Ecuación ordinaria de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas

La ecuación ordinaria de una hipérbola con centro en el origen y ejes asintóticos paralelos a los ejes de coordenadas puede ser de dos tipos:

- Con eje transversal horizontal:

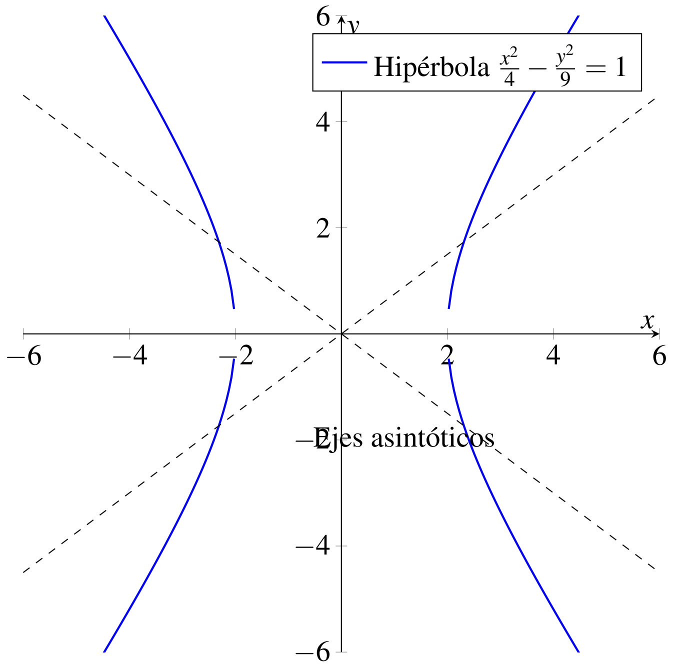
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- Con eje transversal vertical:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Donde a y b son las longitudes de los semiejes, con $2a$ siendo la distancia entre los vértices y $2b$ la distancia entre los focos.

4.6.3 Gráfica de la hipérbola



4.7 Lugares geométricos

4.7.1 Definición

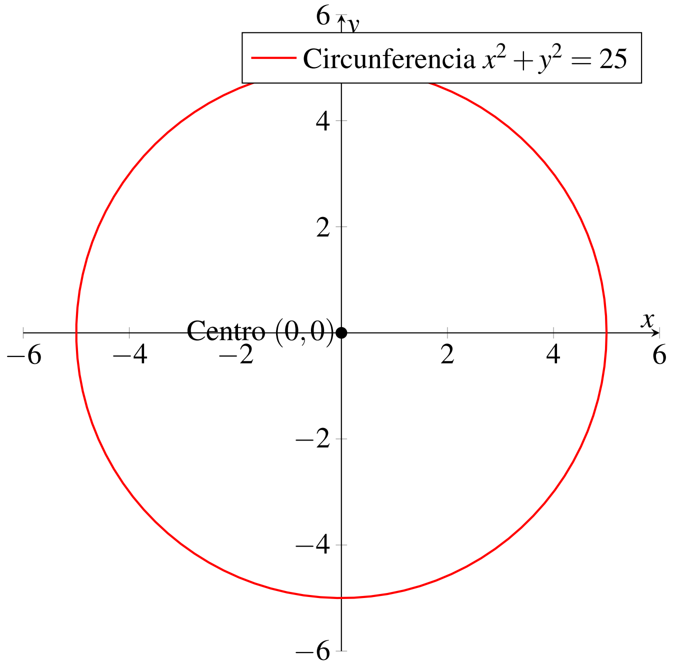
Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen una condición geométrica determinada. En geometría analítica, estas condiciones se expresan mediante ecuaciones matemáticas que describen curvas, como líneas rectas, círculos, elipses, parábolas e hipérbolas.

4.7.2 Dada una ecuación obtener el lugar geométrico

Para encontrar el lugar geométrico correspondiente a una ecuación dada, se identifican las características y restricciones que esta ecuación impone sobre los puntos en el plano cartesiano. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ describe un lugar geométrico en el que todos los puntos están a una distancia constante r del centro (h,k).

Ejemplo: Encontrar el lugar geométrico de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

- La ecuación $x^2 + y^2 = 25$ describe una circunferencia con centro en el origen $(0,0)$ y radio 5.



4.7.3 Dado el lugar geométrico obtener la ecuación

Para determinar la ecuación que corresponde a un lugar geométrico dado, se utilizan las propiedades geométricas del lugar. Esto implica formular una expresión matemática que capture las relaciones geométricas descritas.

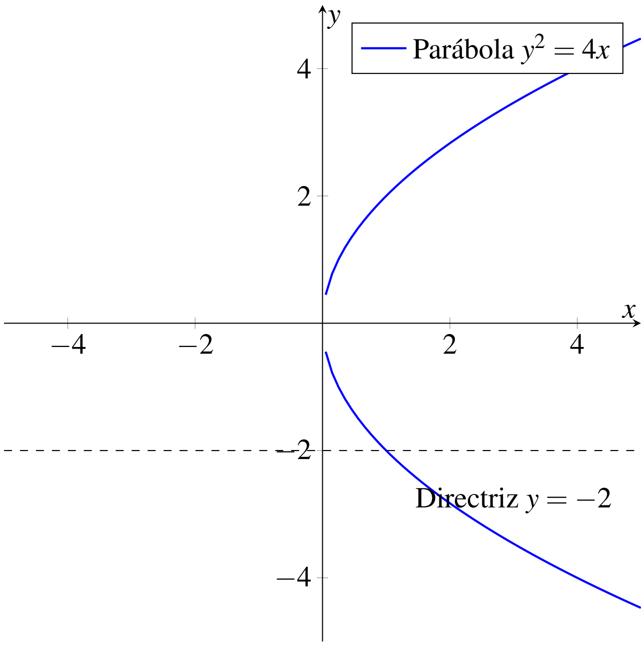
Ejemplo: Encuentra la ecuación de una parábola cuyo vértice está en el origen y cuya directriz es la línea $y = -2$.

- La ecuación de una parábola con vértice en el origen y directriz $y = -2$ se puede encontrar utilizando la definición de parábola. La distancia de cualquier punto (x, y) en la parábola al foco $(0, 1)$ debe ser igual a su distancia a la directriz $y = -2$. Esto nos lleva a la ecuación:

$$y^2 = 4(x - (-2))$$

o simplificada,

$$y^2 = 4x$$


y
Parábola $y^2 = 4x$
4
2
x
−4
−2
2
4
−2
Directriz $y = -2$
−4

V

Quinto semestre

5. Cálculo Diferencial

5.1 Razones de cambio

5.1.1 Introducción

Definición 5.1.1 — Razón de cambio. La razón de cambio de una función $f(x)$ en un intervalo es una medida de cómo cambia el valor de $f(x)$ con respecto al cambio en x en ese intervalo. Matemáticamente, se define como la derivada de $f(x)$ en un punto x, que es la pendiente de la línea tangente a la curva en ese punto

La razón de cambio promedio de $f(x)$ entre dos puntos x_1 y x_2 se define como:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La razón de cambio instantánea en un punto x es la derivada de $f(x)$ en ese punto, que se denota por $f'(x)$ o $\frac{d}{dx}f(x)$:

$$\text{Razón de cambio instantánea} = f'(x)$$

■ **Ejemplo 5.1** **Problema:** Consideremos la función $f(x) = x^2$. Queremos calcular la razón de cambio promedio entre $x = 1$ y $x = 3$ y la razón de cambio instantánea en $x = 2$.

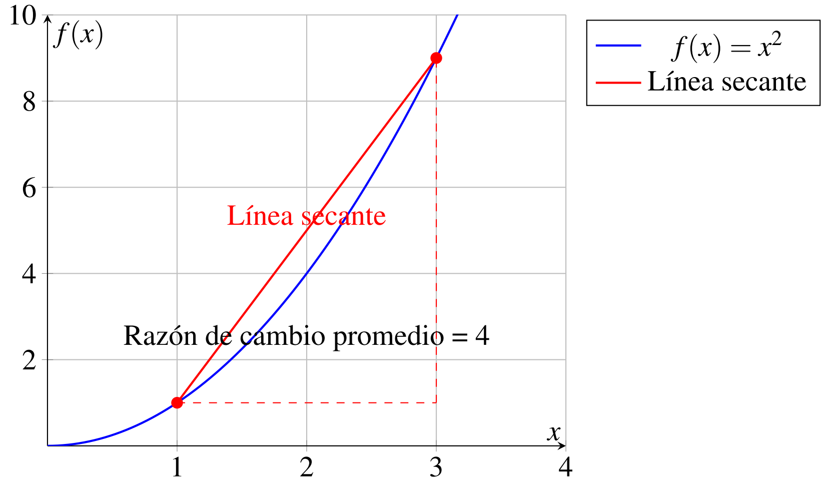
Solución:

1. **Razón de cambio promedio:**

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

2. **Razón de cambio instantánea:** La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. En $x = 2$:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$



■

5.1.2 Razones de cambio y su cuantificación

La razón de cambio instantánea en un punto x se obtiene calculando la derivada de la función en ese punto. La derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 proporciona la pendiente de la línea tangente a la función en ese punto.

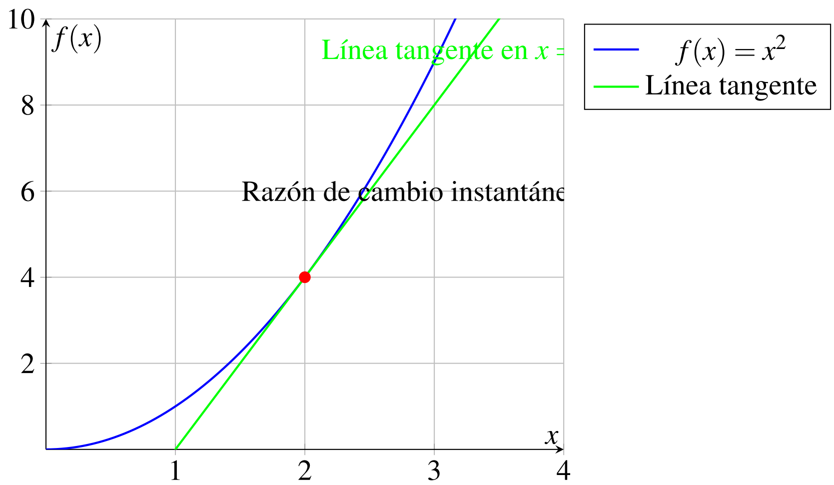
$$\text{Razón de cambio instantánea en } x = x_0 \text{ es } f'(x_0)$$

5.1.3 Ejemplo

Para la función $f(x) = x^2$, la derivada es $f'(x) = 2x$. La razón de cambio instantánea en $x = 2$ es:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

A continuación, se muestra la gráfica que ilustra la razón de cambio instantánea.



5.1.4 Razones de cambio, pendientes y curvas

5.1.5 Pendientes

La pendiente de una línea describe su inclinación. En el contexto de funciones matemáticas, las pendientes se relacionan con las razones de cambio:

Pendiente de una Línea Secante

La pendiente de la línea secante entre dos puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ es equivalente a la razón de cambio promedio entre esos puntos. Se calcula como:

$$\text{Pendiente de la línea secante} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esta pendiente mide el cambio promedio de la función entre los dos puntos.

Pendiente de una Línea Tangente

La pendiente de la línea tangente en un punto específico se determina por la derivada de la función en ese punto. La derivada $f'(x)$ proporciona la pendiente de la línea tangente en $x = x_0$:

$$\text{Pendiente de la línea tangente en } x = x_0 \text{ es } f'(x_0)$$

La línea tangente muestra el cambio instantáneo de la función en ese punto.

5.1.6 Curvas

Las curvas representan funciones que no son lineales. Para analizar el comportamiento de las curvas, se consideran dos conceptos importantes:

Razón de Cambio en Curvas

En una curva, la razón de cambio promedio entre dos puntos se representa por la pendiente de la línea secante entre esos puntos. La razón de cambio instantánea en una curva se representa por la pendiente de la línea tangente en un punto específico, que se obtiene a través de la derivada.

Curvatura

La curvatura de una función mide cómo se desvía la curva de una línea recta. En cálculo, esto se analiza a través de la segunda derivada de la función. La segunda derivada de $f(x)$, denotada como $f''(x)$, proporciona información sobre la concavidad de la función:

$$\text{Si } f''(x) > 0, \text{ la curva es cóncava hacia arriba.}$$

$$\text{Si } f''(x) < 0, \text{ la curva es cóncava hacia abajo.}$$

La segunda derivada indica la velocidad a la que cambia la pendiente de la función.

5.1.7 Cálculo de razones de cambio instantáneas

Para calcular la razón de cambio instantánea, sigue estos pasos:

Encuentra la Derivada de la Función

La derivada de una función $f(x)$, denotada como $f'(x)$, proporciona la razón de cambio instantánea en cualquier punto x. Algunas de las reglas básicas para encontrar la derivada son:

- Derivada de una constante: Si $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$.
- Derivada de x^n: Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
- Derivada de una suma: Si $f(x) = g(x) + h(x)$, entonces $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.
- Derivada de un producto: Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, entonces $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.
- Derivada de un cociente: Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, entonces $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$.

Evalúa la Derivada en el Punto Deseado

Una vez que tengas la derivada $f'(x)$, evalúala en el punto específico $x = x_0$ donde deseas encontrar la razón de cambio instantánea. Esto se hace sustituyendo x_0 en la derivada.

■ **Ejemplo 5.2** Consideremos la función $f(x) = x^2$. Calcularemos la razón de cambio instantánea en $x = 3$.

Encuentra la Derivada

La derivada de $f(x) = x^2$ es:

$$f'(x) = 2x$$

Evalúa la Derivada en $x = 3$
Sustituimos $x = 3$ en la derivada:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Por lo tanto, la razón de cambio instantánea de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = 3$ es 6. ■

5.2 Funciones

5.2.1 Concepto de función. Notación y clasificación:

Definición 5.2.1 — Función. Una **función** es una relación entre un conjunto de **entrada** (o **dominio**) y un conjunto de **salida** (o **contradominio**) en la cual a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del contradominio. Formalmente, una función f de un conjunto X a un conjunto Y se denota como:

$$f : X \to Y \tag{5.1}$$

y para cada $x \in X$, $f(x)$ es el elemento correspondiente en Y.

Notación 5.1. *La notación estándar para una función es $f(x)$, donde x es la variable independiente y $f(x)$ es el valor de la función para ese valor de x*

■ **Ejemplo 5.3** Si $f(x) = x^2$, entonces para $x = 3$, $f(3) = 9$. ■

- **Funciones Algebraicas:** Son funciones que pueden expresarse usando operaciones algebraicas básicas como suma, resta, multiplicación, división, y raíces. Ejemplos incluyen polinomios y fracciones algebraicas.
- **Funciones Trigonométricas:** Incluyen funciones como el seno, coseno y tangente, que están relacionadas con los ángulos y triángulos.

- **Funciones Exponenciales y Logarítmicas:** Funciones como $f(x) = e^x$ o $g(x) = \log(x)$.
- **Funciones Racionales:** Son funciones que pueden expresarse como el cociente de dos polinomios. Ejemplo: $\frac{p(x)}{q(x)}$.
- **Funciones Irracionales:** Incluyen funciones que contienen raíces de variables. Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$.
- **Funciones Especiales:** Como la función paso, función gama, entre otras.

Algebraicas: racionales e irracionales.

- **Funciones Algebraicas:** Son funciones que pueden expresarse usando operaciones algebraicas básicas como suma, resta, multiplicación, división, y raíces. Ejemplos incluyen polinomios y fracciones algebraicas.

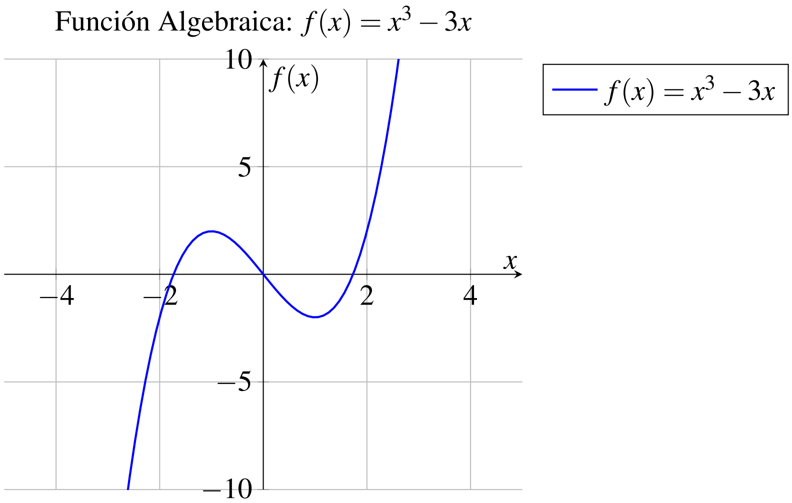


Figura 5.1: Gráfica de la función algebraica $f(x) = x^3 - 3x$.

- **Funciones Racionales:** Son funciones que pueden expresarse como el cociente de dos polinomios. Ejemplo: $\frac{p(x)}{q(x)}$.

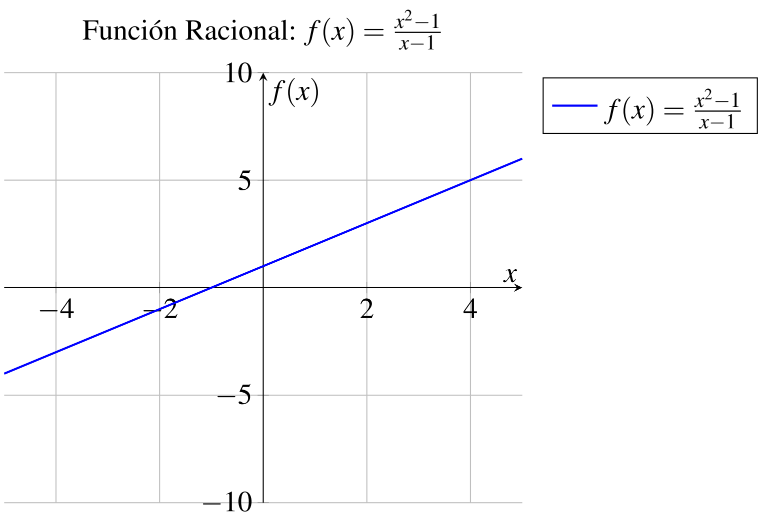


Figura 5.2: Gráfica de la función racional $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

- **Funciones Irracionales:** Incluyen funciones que contienen raíces de variables. Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$.

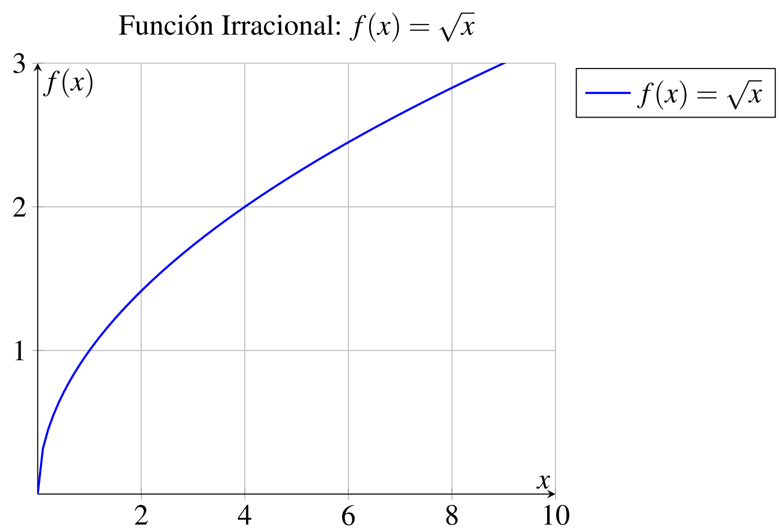


Figura 5.3: Gráfica de la función irracional $f(x) = \sqrt{x}$.

Trascendentes: trigonométricas, logarítmicas y exponenciales

- **Funciones Trigonométricas:** Incluyen funciones como el seno, coseno y tangente, que están relacionadas con los ángulos y triángulos.

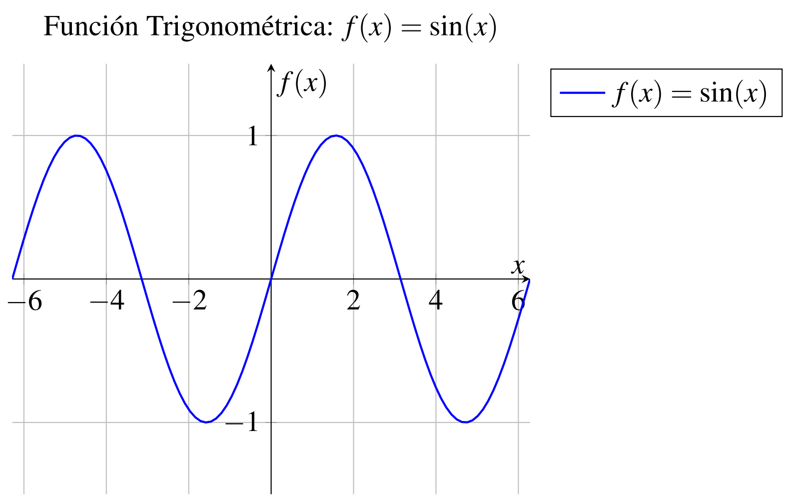


Figura 5.4: Gráfica de la función trigonométrica $f(x) = \sin(x)$.

- **Funciones Exponenciales y Logarítmicas:** Funciones como $f(x) = e^x$ o $g(x) = \log(x)$.

5.2.2 Elementos esenciales de una función (dominio y contra dominio)

Dominio

Definición 5.2.2 — Dominio. Es el conjunto de todos los valores de entrada (valores de la variable independiente) para los cuales la función está definida. Es decir, el dominio representa el conjunto de todos los posibles valores que pueden ser utilizados como entrada para la función.

Si $f : A \to B$ es una función que asigna cada elemento de A a un único elemento en B,

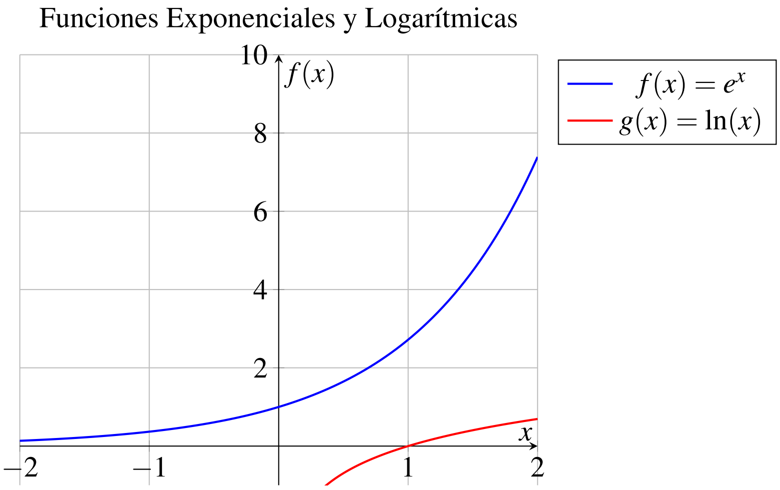


Figura 5.5: Gráficas de $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$.

entonces el dominio de f es el conjunto A.

$$\text{Dominio}(f) = \{x \in A \mid f(x) \text{ está definido}\} \tag{5.2}$$

▪ **Ejemplo 5.4** Para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, el dominio está definido para todos los números reales excepto $x = 0$, ya que la división por cero no está definida. ▪

Contradominio

Definición 5.2.3 — Contradominio o Rango. Es el conjunto de todos los posibles valores de salida (valores de la variable dependiente) que la función puede tomar. A diferencia del rango (o imagen) de la función, que es el conjunto real de valores que efectivamente toma la función, el contradominio es el conjunto de valores que la función podría tomar, definido por la función misma o por el contexto en el que se utiliza.

Si $f : A \to B$, el contradominio de f es el conjunto B, que representa todos los posibles valores de salida.

$$\text{Contradominio}(f) = B \tag{5.3}$$

▪ **Ejemplo 5.5** Para la función $f(x) = x^2$ definida en los números reales, el contradominio es el conjunto de todos los números reales no negativos, es decir, $[0, \infty)$, aunque el rango exacto también sería $[0, \infty)$. ▪

Problema 5.1 — Encontrar el dominio y rango. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x-2}$

- **Dominio:** Para que $f(x) = \sqrt{x-2}$ esté definida, el argumento de la raíz cuadrada debe ser mayor o igual a cero. Por lo tanto, $x - 2 \geq 0$ o $x \geq 2$. El dominio de f es $[2, \infty)$.
- **Contradominio:** Dado que la función raíz cuadrada siempre produce valores no negativos, el contradominio de f es $[0, \infty)$.

5.2.3 Evaluación de funciones y Gráficas de funciones: constante, lineal, cuadrática

Dominio

El **dominio** de una función es el conjunto de todos los posibles valores de entrada x para los cuales la función está definida.

- **Función Constante:** Para una función constante $f(x) = c$, donde c es una constante, el dominio es el conjunto de todos los números reales, ya que la función está definida para cualquier valor de x.

- **Función Lineal:** Para una función lineal $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes, el dominio también es el conjunto de todos los números reales, ya que las funciones lineales están definidas para cualquier x.
- **Función Cuadrática:** Para una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, el dominio es el conjunto de todos los números reales. Las funciones cuadráticas están definidas para cualquier valor de x.
- **Función Racional:** Para una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto los valores de x que hacen que $q(x) = 0$.
- **Función Radicada:** Para una función radicada $f(x) = \sqrt{x - a}$, el dominio es el conjunto de todos los x tales que $x - a \geq 0$, es decir, $x \geq a$.

Rango

El **rango** de una función es el conjunto de todos los posibles valores de salida y que la función puede tomar.

- **Función Constante:** El rango de una función constante $f(x) = c$ es simplemente el conjunto que contiene el valor c, es decir, $\{c\}$.
- **Función Lineal:** El rango de una función lineal $f(x) = mx + b$ es el conjunto de todos los números reales, ya que la función lineal puede tomar cualquier valor real.
- **Función Cuadrática:** El rango de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende del coeficiente a:
  - Si $a > 0$, el rango es $[k, \infty)$, donde k es el valor mínimo de la función (el vértice de la parábola).
  - Si $a < 0$, el rango es $(-\infty, k]$, donde k es el valor máximo de la función.
- **Función Racional:** El rango de una función racional puede ser más complicado de determinar y a menudo requiere la resolución de ecuaciones y el análisis del comportamiento asintótico.
- **Función Radicada:** Para una función radicada $f(x) = \sqrt{x - a}$, el rango es $[0, \infty)$, ya que la raíz cuadrada siempre da valores no negativos.

5.2.4 Gráficas de funciones algebraicas y trascendentes.

Una función constante tiene la forma $f(x) = c$. Su gráfica es una línea horizontal en $y = c$. La gráfica de una función constante se muestra a continuación:

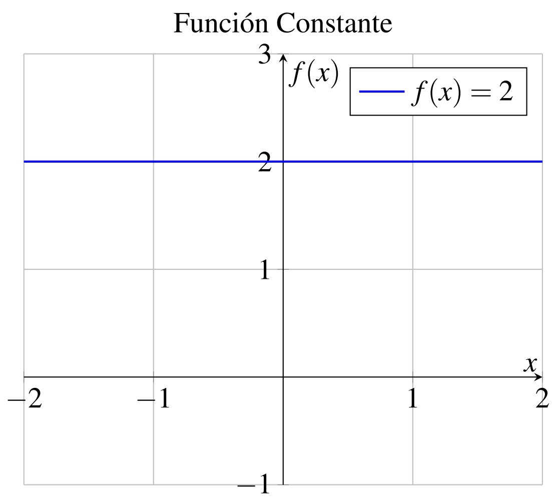


Figura 5.6: Gráfica de la función constante $f(x) = 2$.

5.2.5 Función Lineal

Una función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$. Su gráfica es una línea recta. La pendiente m determina la inclinación de la línea, y b es la intersección con el eje y. La gráfica de una función lineal se muestra a continuación:

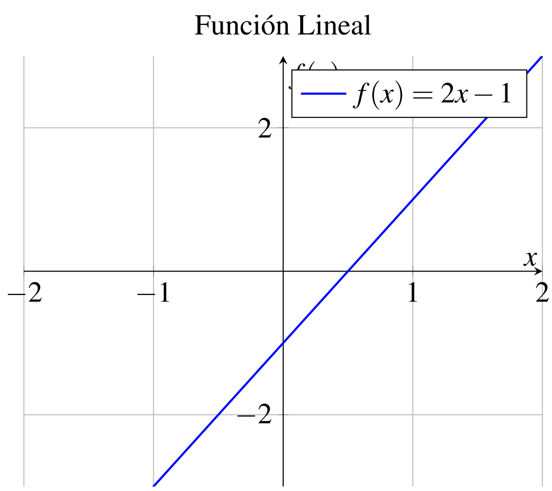


Figura 5.7: Gráfica de la función lineal $f(x) = 2x - 1$.

5.2.6 Función Cuadrática

Una función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Su gráfica es una parábola. El parámetro a determina la dirección en la que se abre la parábola (hacia arriba si $a > 0$, hacia abajo si $a < 0$). La gráfica de una función cuadrática se muestra a continuación:

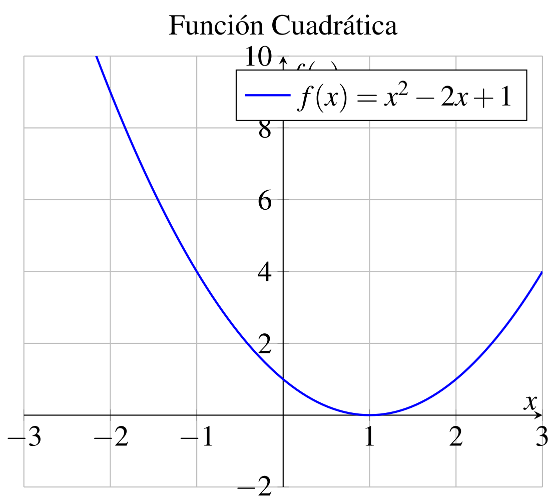


Figura 5.8: Gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

5.2.7 Funciones definidas por intervalos.

Una función definida por intervalos se define mediante diferentes expresiones en diferentes intervalos de su dominio. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para graficar esta función, se grafica cada parte de la función en el intervalo correspondiente.

5.2.8 Operaciones con funciones (suma, resta, multiplicación, división y composición).

Dado dos funciones f y g, las operaciones básicas incluyen:

- **Suma:** $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- **Resta:** $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
- **Multiplicación:** $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$
- **División:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para $g(x)\neq 0$
- **Composición:** $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

5.2.9 Función inversa.

La inversa de una función f, denotada como f^{-1}, es una función tal que:

$$f(f^{-1}(x)) = x \tag{5.4}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{5.5}$$

Para encontrar la inversa de una función, intercambia x y y en la ecuación de la función original y resuelve para y.

5.3 Límites y continuidad

El límite de una función es un concepto fundamental en el cálculo que describe el comportamiento de una función a medida que la variable independiente se acerca a un punto específico. En términos simples, el límite de una función $f(x)$ en un punto a examina el valor al que $f(x)$ se aproxima cuando x se acerca a a.

5.3.1 Concepto de límite de una función

Definición 5.3.1 — Limite. El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a se denota como

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

Formalmente, se dice que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

si para cualquier número positivo ε, por pequeño que sea, existe un número positivo δ tal que siempre que $0 < |x-a| < \delta$, se cumple

$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

5.3.2 Interpretación Gráfica

Gráficamente, el límite de una función en un punto a representa el valor al que la gráfica de la función se aproxima a medida que x se acerca a a. Esto no necesariamente implica que $f(x)$ esté definido en $x = a$, sino que $f(x)$ se comporta de manera predecible a medida que x se acerca a a.

Límite Finito

Considera la función $f(x) = 2x+3$. Queremos encontrar

$$\lim_{x\to 1} f(x).$$

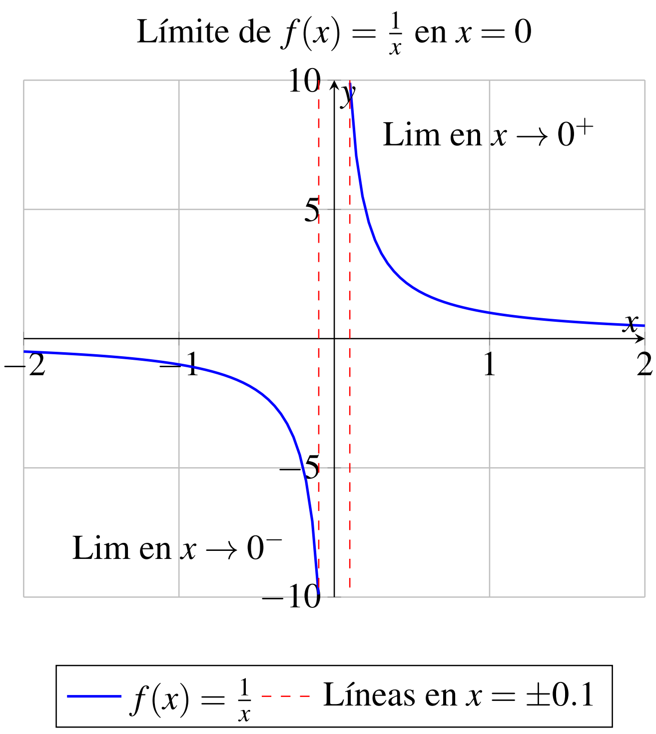


Figura 5.9: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ mostrando cómo se aproxima a ∞ o $-\infty$ cuando x se acerca a 0 desde la derecha o desde la izquierda.

Sustituyendo $x = 1$ en la función,

$$\lim_{x \to 1}(2x+3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5.$$

Por lo tanto, el límite es 5.

Límite Infinito

Para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, el límite cuando x tiende a 0 no está definido de manera finita. Sin embargo, podemos analizar el comportamiento de la función cuando x se acerca a 0 desde la derecha y desde la izquierda. En este caso, tenemos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

5.3.3 Límites Laterales

Si el límite de $f(x)$ existe cuando x se acerca a a desde la izquierda (denotado $\lim_{x \to a^-} f(x)$) y desde la derecha (denotado $\lim_{x \to a^+} f(x)$), y ambos límites son iguales, entonces el límite en $x = a$ existe y es igual a este valor común:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ si } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

5.3.4 Teoremas sobre límites

Teorema del Límite de una Suma

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces el límite de la suma de las funciones es la suma de los límites:

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Teorema del Límite de un Producto

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces el límite del producto de las funciones es el producto de los límites:

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M.$$

Teorema del Límite de un Cociente

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, y $M \neq 0$, entonces el límite del cociente de las funciones es el cociente de los límites:

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}.$$

Teorema del Límite de una Función Compuesta

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to L} g(x) = M$, entonces el límite de la composición de las funciones es el límite de la función exterior evaluado en el límite de la función interior:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = M.$$

Teorema del Límite de una Función Polinómica

Los límites de las funciones polinómicas se pueden calcular directamente evaluando el valor de la variable en el punto del límite:

$$\lim_{x\to a}(p(x)) = p(a),$$

donde $p(x)$ es un polinomio.

Teorema del Límite de Funciones Racionales

Si $\lim_{x\to a} p(x)$ y $\lim_{x\to a} q(x)$ existen y $\lim_{x\to a} q(x) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to a} p(x)}{\lim_{x\to a} q(x)}.$$

Teorema del Límite en el Infinito

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número N tal que si $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

5.3.5 Cálculo de límites.

Cálculo de Límites por Sustitución Directa

Si la función $f(x)$ es continua en $x = a$, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Por ejemplo, para la función polinómica $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, simplemente sustituimos $x = a$ para encontrar el límite:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 2x + 1) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 9.$$

Cálculo de Límites para Funciones Racionales

Para una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, el límite se puede calcular simplificando la expresión:

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \to a} p(x)}{\lim_{x \to a} q(x)}$$

si $\lim_{x \to a} q(x) \neq 0$.

Por ejemplo, para la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

Cuando enfrentamos formas indeterminadas como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se pueden usar métodos adicionales como la factorización, el uso de identidades trigonométricas, o la regla de L'Hôpital.

5.3.6 Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ da una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, y las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite del cociente de las derivadas existe.

Por ejemplo, para la función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \text{ da la forma indeterminada } \frac{0}{0}.$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Límites en el Infinito

Para funciones que tienden al infinito, se analizan los comportamientos asintóticos. Por ejemplo, para $f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2+1}$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-2}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 3.$$

Continuidad de funciones

Una función se dice que es continua en un punto si no tiene interrupciones, saltos o agujeros en ese punto. Formalmente, para una función $f(x)$, la continuidad en un punto a se define como sigue:

5.3.7 Definición de Continuidad en un Punto

Una función $f(x)$ es continua en un punto a si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. **La función está definida en** a: $f(a)$ debe existir.
2. **El límite de la función cuando** x **tiende a** a **existe**:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ debe existir.}$$

3. **El límite de la función es igual al valor de la función en** a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Si todas estas condiciones se satisfacen, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$. De lo contrario, la función no es continua en $x = a$.

Tipos de Discontinuidades

Si una función no es continua en un punto, puede presentar una de las siguientes discontinuidades:

- **Discontinuidad Removible:** Ocurre cuando el límite de la función existe en el punto a, pero la función no está definida en a, o $f(a)$ no es igual al límite. Gráficamente, esto se puede visualizar como un "agujero" en la gráfica de la función.
- **Discontinuidad de Salto:** Ocurre cuando el límite de la función no existe en a debido a que la función se acerca a diferentes valores desde la izquierda y desde la derecha. Gráficamente, esto se muestra como un "salto" en la gráfica.
- **Discontinuidad Infinita:** Ocurre cuando la función tiende a ∞ o $-\infty$ a medida que x se acerca al punto a. Gráficamente, esto se muestra como una asíntota vertical.

Continuidad en un Intervalo

Una función $f(x)$ es continua en un intervalo (a,b) si es continua en cada punto del intervalo. En otras palabras, para cualquier x en (a,b), $f(x)$ debe ser continua.

Propiedades de las Funciones Continuas

- **Suma, Resta y Producto:** La suma, resta y producto de funciones continuas son continuas.
- **Cociente:** El cociente de dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ es continua siempre que $g(x) \neq 0$ en el dominio de la función.
- **Composición:** La composición de dos funciones continuas f y g es continua. Si f es continua en $x = a$ y g es continua en $f(a)$, entonces la función compuesta $g(f(x))$ es continua en $x = a$.

Ejemplos de Continuidad

- **Función Polinómica:** Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio. Por ejemplo, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ es continua en todos los valores de x.
- **Función Racional:** La función $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ es continua en todo su dominio excepto en $x = 3$, donde tiene una discontinuidad infinita.
- **Función Trigonométrica:** Las funciones trigonométricas básicas como $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en todo su dominio.
- **Función de Valor Absoluto:** La función $f(x) = |x|$ es continua en todo su dominio, aunque tiene una discontinuidad removible en $x = 0$ si se considera en términos de derivadas.

5.4 La derivada

5.4.1 Concepto de derivada de una función

La derivada de una función en un punto es uno de los conceptos fundamentales en el cálculo diferencial. Representa la razón de cambio instantánea de la función en ese punto y se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

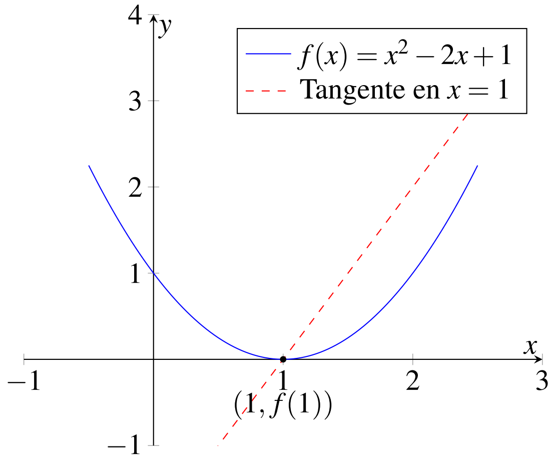
Definición 5.4.1 — Derivada. La derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ se define como el límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5.6}$$

Esta definición se conoce como **regla del cociente incremental** o **regla de los cuatro pasos**.

5.4.2 Interpretación geométrica y física de la derivada de una función

Geométricamente, la derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Si la función es diferenciable en a, entonces la curva es suave en ese punto, y la tangente existe y es única.



Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x^2$. La derivada de $f(x)$ en cualquier punto x es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

En particular, en $x = 1$, la derivada es $f'(1) = 2 \times 1 = 2$, que corresponde a la pendiente de la tangente en ese punto.

En física, la derivada de la posición de una partícula respecto al tiempo representa su velocidad instantánea. Si $s(t)$ es la posición de una partícula en función del tiempo t, entonces $v(t) = s'(t)$ es su velocidad en el instante t.

5.4.3 Reglas de derivación de funciones

Las reglas de derivación son herramientas esenciales para calcular la derivada de funciones más complejas a partir de funciones básicas conocidas. Estas reglas simplifican el proceso de encontrar derivadas, lo que es crucial en diversas aplicaciones de matemáticas y física.

Derivada de una Constante

Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces:

$$f'(x) = 0$$

Derivada de la Función Identidad

Si $f(x) = x$, entonces:

$$f'(x) = 1$$

Regla de la Suma

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la derivada de su suma es:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{5.7}$$

■ **Ejemplo 5.6** Calcular la derivada de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

■

Regla del Producto

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la derivada de su producto es:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{5.8}$$

■ **Ejemplo 5.7** Calcular la derivada de $f(x) = x^2 \sin(x)$.

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

■

Regla del Cociente

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables y $g(x) \neq 0$, entonces la derivada de su cociente es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{5.9}$$

■ **Ejemplo 5.8** Calcular la derivada de $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$.

$$f'(x) = \frac{2x\ln(x) - x}{(\ln(x))^2}$$

■

Regla de la Cadena

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la derivada de la función compuesta $f(g(x))$ es:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{5.10}$$

■ **Ejemplo 5.9** Calcular la derivada de $f(x) = e^{\sin(x)}$.

$$f'(x) = e^{\sin(x)}\cos(x)$$

■

5.4.4 Ecuaciones de las rectas tangente y normal a una curva

Las rectas tangente y normal a una curva en un punto dado son conceptos fundamentales en el estudio de la geometría diferencial. La recta tangente representa la dirección en la que cambia la curva en ese punto, mientras que la recta normal es perpendicular a la tangente.

Ecuación de la Recta Tangente

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, y_0)$, necesitamos el valor de la derivada $f'(x_0)$, que representa la pendiente de la tangente en ese punto.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.11}$$

■ **Ejemplo 5.10** Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$, encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $x_0 = 1$.

Primero, calculamos $f(1)$ y $f'(x)$:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) + 2 = 0, \quad f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 0 = 0(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

■

Ecuación de la Recta Normal

La recta normal a la curva en el punto $P(x_0, y_0)$ es perpendicular a la tangente. Su pendiente es el negativo del inverso de la pendiente de la tangente, es decir, $-\frac{1}{f'(x_0)}$.

La ecuación de la recta normal es:

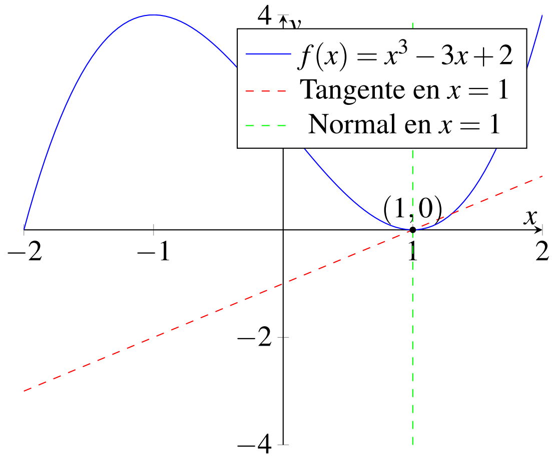
$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{5.12}$$

Nota: Si $f'(x_0) = 0$, la recta normal es vertical y se describe por la ecuación $x = x_0$.

■ **Ejemplo 5.11** Continuando con el ejemplo anterior, como $f'(1) = 0$, la recta normal es vertical:

$$x = 1$$

■



5.4.5 Derivadas de funciones implícitas

Las funciones implícitas son aquellas que no están explicitadas en términos de una variable independiente. En lugar de tener una forma $y = f(x)$, las funciones implícitas están dadas por una ecuación que relaciona x y y de forma implícita, como $F(x, y) = 0$. Para encontrar la derivada de una función implícita, usamos la técnica de derivación implícita.

Derivación Implícita

Para calcular la derivada de una función implícita $F(x, y) = 0$, seguimos los siguientes pasos:

Pasos para la Derivación Implícita

- **Diferenciar ambos lados de la ecuación** con respecto a x, tratando y como una función de x. Esto implica aplicar la regla de la cadena para términos que involucren y
- **Resolver para** $\frac{dy}{dx}$, que es la derivada de y con respecto a x.

Fórmula General

Dada la ecuación implícita $F(x, y) = 0$, la derivada implícita se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

■ **Ejemplo 5.12** Encuentra la derivada de la función implícita $x^2 + y^2 = 25$.

1. Diferenciamos ambos lados de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx} = 0$$

2. Resolviendo para $\frac{dy}{dx}$:

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

■

■ **Ejemplo 5.13** Encuentra la derivada de la función implícita $x^3+y^3 = 6xy$.

1. Diferenciamos ambos lados de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x^3+y^3) = \frac{d}{dx}(6xy)$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx} = 6\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)$$

2. Resolviendo para $\frac{dy}{dx}$:

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx}+6y$$

$$3x^2-6y = (6x-3y^2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-6y}{6x-3y^2}$$

■

5.4.6 Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior son derivadas de derivadas. Mientras que la primera derivada de una función proporciona la pendiente de la curva, las derivadas de orden superior brindan información adicional sobre la curvatura y el comportamiento de la función. La segunda derivada, por ejemplo, indica la concavidad de la función, y las derivadas de orden superior se utilizan para análisis más profundos.

Definición 5.4.2 — Derivadas de orden superior. Sea $f(x)$ una función cuya derivada de orden n existe. La derivada de orden n de $f(x)$, denotada como $f^{(n)}(x)$, se define recursivamente como:

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) \tag{5.13}$$

1. Primera Derivada: La primera derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ proporciona la pendiente de la tangente en cada punto de la curva.

2. Segunda Derivada: La segunda derivada $f''(x)$ proporciona información sobre la concavidad de la función. Si $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba; si $f''(x) < 0$, la función es cóncava hacia abajo.
3. Tercera Derivada y Ordenes Superiores: Las derivadas de orden superior proporcionan información sobre la tasa de cambio de la concavidad y otros aspectos complejos del comportamiento de la función. Por ejemplo, la tercera derivada $f'''(x)$ está relacionada con el cambio en la concavidad.

■ **Ejemplo 5.14** Encuentra la primera, segunda y tercera derivada de la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.

1. **Primera Derivada:**
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4 - 3x^3 + 2x - 1) = 4x^3 - 9x^2 + 2$$
2. **Segunda Derivada:**
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 9x^2 + 2) = 12x^2 - 18x$$
3. **Tercera Derivada:**
$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 18x) = 24x - 18$$

■

■ **Ejemplo 5.15** Encuentra la primera y segunda derivada de la función $f(x) = e^x$.

1. **Primera Derivada:**
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
2. **Segunda Derivada**
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

■

5.5 Aplicaciones de la derivada

5.5.1 Funciones crecientes y decrecientes

Las derivadas no solo nos informan sobre la pendiente de la curva en un punto, sino que también son fundamentales para determinar el comportamiento global de una función. En particular, la derivada de una función puede indicar dónde la función es creciente o decreciente.

Definiciones

Función Creciente

Definición 5.5.1 — Función Creciente. Una función $f(x)$ es creciente en un intervalo (a,b) si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 en (a,b) donde $x_1 < x_2$, se cumple que:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Esto equivale a que su derivada sea positiva en el intervalo:

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ en } (a,b)$$

Definición 5.5.2 — Función decreciente. Una función $f(x)$ es decreciente en un intervalo (a,b) si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 en (a,b) donde $x_1 < x_2$, se cumple que:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Esto equivale a que su derivada sea negativa en el intervalo:

$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ en } (a,b)$$

■ **Ejemplo 5.16** Función Polinómica:
Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 2) = 3x^2 - 6x$$

2. Encontrar intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

La derivada es cero en $x = 0$ y $x = 2$. Estos puntos dividen la recta en tres intervalos:
a) Para $x < 0$: $f'(x) > 0$ (función creciente)
b) Para $0 < x < 2$: $f'(x) < 0$ (función decreciente)
c) Para $x > 2$: $f'(x) > 0$ (función creciente)

■

■ **Ejemplo 5.17** Función Exponencial:
Considera la función $f(x) = e^{-x}$.

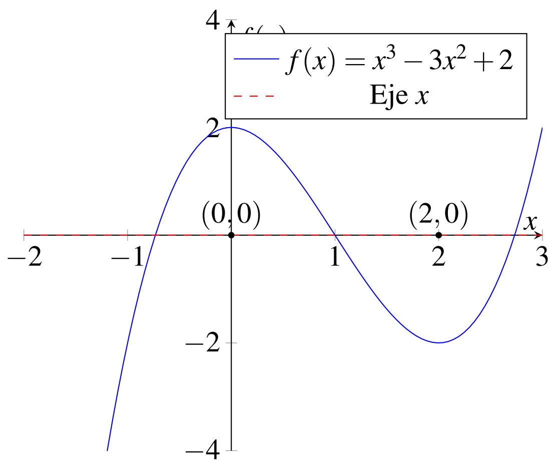
1. Derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$$

2. Análisis:

$$f'(x) = -e^{-x} < 0 \text{ para todo } x$$

La función es decreciente en todo su dominio.



■

5.5.2 Máximos y mínimos de una función.

Los máximos y mínimos de una función son puntos críticos que indican los valores más altos y más bajos en un intervalo dado. Estos puntos son fundamentales en el análisis de funciones, especialmente en optimización y en la interpretación gráfica de funciones.

Definición 5.5.3 — Máximo Local. Un punto $x = c$ es un **máximo local** de una función $f(x)$ si existe un intervalo abierto alrededor de c tal que:

$$f(c) \geq f(x) \text{ para todo } x \text{ en el intervalo} \tag{5.14}$$

Mínimo Local

Definición 5.5.4 — Mínimo Local. Un punto $x = c$ es un **mínimo local** de una función $f(x)$ si existe un intervalo abierto alrededor de c tal que:

$$f(c) \leq f(x) \text{ para todo } x \text{ en el intervalo} \tag{5.15}$$

Definición 5.5.5 — Mázimo y Mínimo Global. Un punto $x = c$ es un **máximo global** (o absoluto) de $f(x)$ si:

$$f(c) \geq f(x) \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Un punto $x = c$ es un **mínimo global** (o absoluto) de $f(x)$ si:

$$f(c) \leq f(x) \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Definición de puntos críticos

Para encontrar los máximos y mínimos de una función $f(x)$:

1. Encuentra la primera derivada $f'(x)$.
2. Resuelve $f'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos.
3. Evalúa la segunda derivada $f''(x)$ en los puntos críticos.

Prueba de la Segunda Derivada

1. Si $f''(c) > 0$, $x = c$ es un mínimo local.
2. Si $f''(c) < 0$, $x = c$ es un máximo local.
3. Si $f''(c) = 0$, la prueba es inconclusa y puede ser necesario usar otras técnicas.

■ **Ejemplo 5.18** Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

2. Encontrar puntos críticos:

$$3x^2 - 6x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 2$$

3. Evaluar la segunda derivada: - Para $x = 0$:

$$f''(0) = -6 \text{ (máximo local)}$$

- Para $x = 2$:

$$f''(2) = 6 \text{ (mínimo local)}$$

■

■ **Ejemplo 5.19** Función Exponencial Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

1. Derivadas:

$$f'(x) = -2x + 4$$

$$f''(x) = -2$$

2. Encontrar puntos críticos:

$$-2x + 4 = 0 \implies x = 2$$

3. Evaluar la segunda derivada: Para $x = 2$:

$$f''(2) = -2 \text{ (máximo local)}$$

■

Criterio de la primera derivada para determinar máximos y mínimos

1. Encuentra los Puntos Críticos:
   a) Calcula la primera derivada $f'(x)$.
   b) Resuelve $f'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos $x = c$.
2. Analiza el Signo de la Primera Derivada:
   a) Para un Máximo Local: Si $f'(x)$ cambia de positivo a negativo al pasar por $x = c$, entonces $x = c$ es un máximo local.
   b) Para un Mínimo Local: Si $f'(x)$ cambia de negativo a positivo al pasar por $x = c$, entonces $x = c$ es un mínimo local.
   c) Punto de Inflexión: Si $f'(x)$ no cambia de signo alrededor de $x = c$, el punto $x = c$ puede ser un punto de inflexión o no tener un comportamiento especial.

5.5.3 Concavidad

Definición de concavidad

Definición 5.5.6 — Concavidad. La **concavidad** de una función $f(x)$ describe la forma en que se curva el gráfico de la función.

La concavidad se puede clasificar en dos tipos:

1. **Concavidad Hacia Arriba**: Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo si su gráfica se curva hacia arriba, como un tazón. En otras palabras, la función tiene una segunda derivada positiva en ese intervalo.
2. **Concavidad Hacia Abajo**: Una función es cóncava hacia abajo en un intervalo si su gráfica se curva hacia abajo, como una cúpula. En otras palabras, la función tiene una segunda derivada negativa en ese intervalo.

Determinación de los Intervalos de Concavidad

Para determinar los intervalos de concavidad de una función $f(x)$, sigue estos pasos:

1. Calcula la Segunda Derivada: Encuentra la segunda derivada $f''(x)$ de la función.
2. Encuentra los Puntos Críticos de la Segunda Derivada: Resuelve $f''(x) = 0$ para encontrar los puntos donde la concavidad podría cambiar. Estos puntos se conocen como puntos de inflexión potenciales.
3. Analiza el Signo de la Segunda Derivada:
   a) Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
   b) Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Funciones Cóncavas Hacia Arriba y Cóncavas Hacia Abajo

- Función Cóncava Hacia Arriba: Por ejemplo, $f(x) = x^2$. La gráfica de esta función es una parábola que se abre hacia arriba.
- Función Cóncava Hacia Abajo: Por ejemplo, $f(x) = -x^2$. La gráfica de esta función es una parábola que se abre hacia abajo.

Puntos de Inflexión

Definición 5.5.7 — Puntos de Inflexión. Es un punto en la gráfica de una función donde la concavidad cambia de hacia arriba a hacia abajo o viceversa.

Para identificar un punto de inflexión:

1. Encuentra los Puntos Críticos de la Segunda Derivada: Resuelve $f''(x) = 0$.
2. Verifica el Cambio de Concavidad: Asegúrate de que la concavidad cambia en el punto crítico encontrado.

Criterio de la Segunda Derivada para la Determinación de Máximos y Mínimos

El criterio de la segunda derivada se utiliza para clasificar los puntos críticos obtenidos de la primera derivada:

1. Encuentra los Puntos Críticos: Resuelve $f'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos $x = c$.
2. Calcula la Segunda Derivada en los Puntos Críticos:
   a) Si $f''(c) > 0$, entonces $x = c$ es un **mínimo local**.
   b) Si $f''(c) < 0$, entonces $x = c$ es un **máximo local**.
   c) Si $f''(c) = 0$, el criterio es inconcluso y se debe utilizar otro método para clasificar el punto crítico.

5.5.4 Análisis de funciones aplicando la derivada.

El análisis de funciones mediante la derivada permite comprender el comportamiento de las funciones, tales como crecimiento, decrecimiento, y puntos de máximo y mínimo.

5.5.5 Problemas de Aplicación

Los problemas de aplicación de la derivada se dividen en dos categorías principales: problemas de razón de cambio instantáneo y problemas de optimización.

Problemas de Razón de Cambio Instantáneo

Estos problemas implican encontrar la tasa de cambio de una función en un punto específico. Para resolver estos problemas:

1. Encuentra la derivada de la función.
2. Evalúa la derivada en el punto de interés para obtener la razón de cambio instantáneo.

■ **Ejemplo 5.20** Considera la función $f(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3$. Queremos encontrar la razón de cambio instantáneo en $t = 2$.

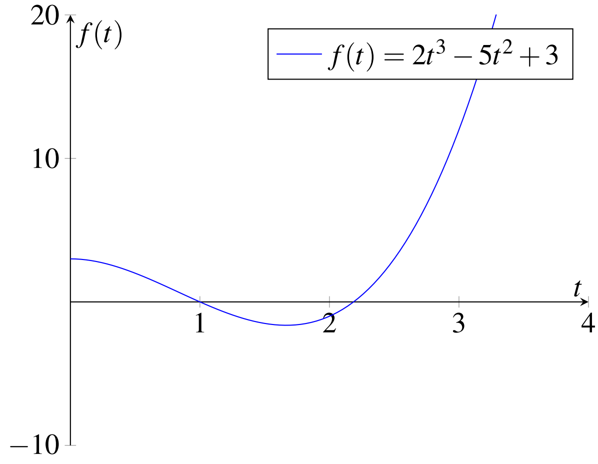
1. Derivada:

$$f'(t) = 6t^2 - 10t$$

2. Razón de Cambio Instantáneo en $t = 2$:

$$f'(2) = 6(2^2) - 10(2) = 24 - 20 = 4$$

Por lo tanto, la razón de cambio instantáneo en $t = 2$ es 4.



■

Problemas de Optimización

Los problemas de optimización buscan encontrar los valores máximos o mínimos de una función en un dominio dado. Los pasos para resolver estos problemas son:

1. Encuentra la derivada de la función.
2. Identifica los puntos críticos resolviendo $f'(x) = 0$.
3. Usa la segunda derivada para clasificar los puntos críticos como máximos o mínimos.
4. Evalúa la función en los puntos críticos y en los límites del dominio para encontrar el valor óptimo.

■ **Ejemplo 5.21** Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Queremos encontrar el valor máximo de la función.

1. Derivada:

$$f'(x) = -2x + 4$$

2. Puntos Críticos:

$$-2x + 4 = 0 \implies x = 2$$

3. Segunda Derivada:

$$f''(x) = -2$$

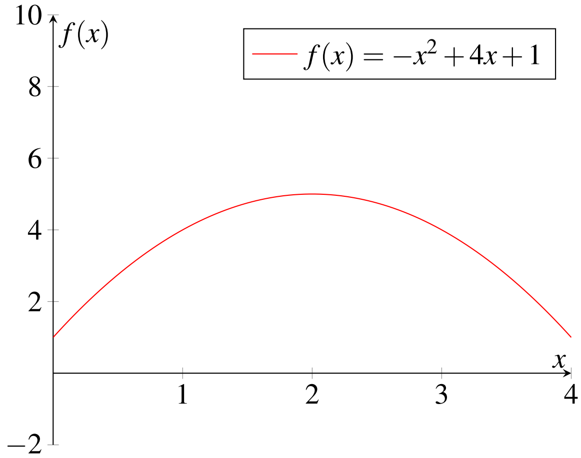
Como $f''(x) < 0$, $x = 2$ es un máximo local.

4. Valor Máximo:

$$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

Por lo tanto, el valor máximo de la función es 5.

Gráfico para el Problema de Optimización



■

VI

Sexto semestre

6.1 Diferencial de una función

6.1.1 Concepto de diferencial de una función

Definición 6.1.1 — Diferencial de una función. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en un intervalo abierto I y sea $x\in I$. El diferencial de f en el punto x, denotado por $\mathrm{d}f(x)$ o df, es una función lineal que aproxima el cambio en el valor de f debido a un pequeño cambio en x. Formalmente, se define como:

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

Notación 6.1. *donde:*

- *$f'(x)$ es la derivada de f con respecto a x.*
- *dx es un pequeño cambio en x.*

■ **Ejemplo 6.1** Consideremos la función $f(x)=x^2$. Su derivada es $f'(x)=2x$. Entonces, la diferencial dy es:

$$dy = f'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{6.2}$$

Esto significa que para un pequeño cambio dx en x, el cambio correspondiente en y es aproximadamente $2x\,dx$.

Aplicación

Si $x=3$ y $dx=0.1$:

$$dy = 2\cdot 3\cdot 0.1 = 0.6$$

Así, cuando x cambia de 3 a 3.1, el cambio en y es aproximadamente 0.6. ■

Actividad en Matlab

Crea una gráfica de la función $f(x) = x^2$ y su recta tangente en un punto

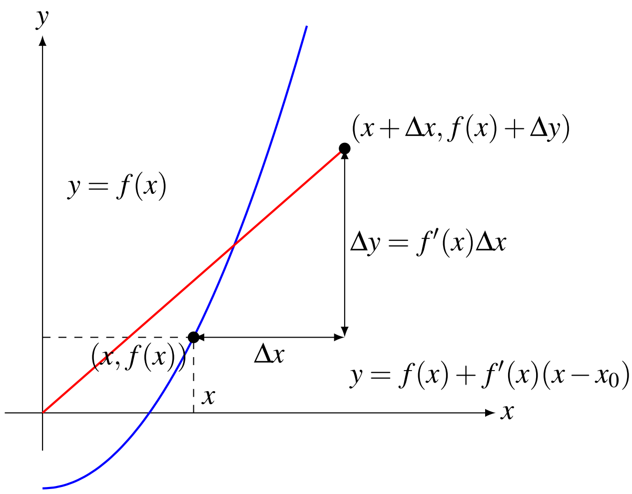
```
% differential_example.m

% Define the function and its derivative
f = @(x) x.^2;
df = @(x) 2*x;

% Define the point at which to evaluate the differential
x0 = 2;
y0 = f(x0);
slope = df(x0);

% Create a range of x values
x = linspace(0, 4, 100);

% Evaluate the function
y = f(x);

% Evaluate the tangent line
tangent = y0 + slope * (x - x0);

% Plot the function and the tangent line
figure;
plot(x, y, 'b-', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(x, tangent, 'r--', 'LineWidth=2);
plot(x0, y0, 'ko', 'MarkerFaceColor', 'k');
hold off;

% Labels and title
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Function f(x) = x^2 and its Tangent Line at x = 2');
legend('f(x) = x^2', 'Tangent Line', 'Point of Tangency');

% Save the plot as an image
saveas(gcf, 'differential_example.png');
```

6.1.2 Interpretación geométrica en todos los posibles casos de curvas

El diferencial se puede tomar en el sentido geométrico como la elevación de la tangente desde el punto en que se toma el diferencial.

Recuérdese que la derivada de la función en el punto es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto, como sabemos que la tangente de un ángulo es igual al cociente entre el cateto opuesto (incremento de y) y el cateto contiguo (incremento de x) de un hipotético triángulo rectángulo, solo hay que despejar el incremento de y que equivale a nuestro diferencial.

Vista geométricamente, la elevación se produce verticalmente a partir del punto en que se toma el diferencial. El incremento Δx que se tome representará el alejamiento horizontal que haga desde el punto en cuestión.



6.1.3 La diferencial como valor aproximado

Cuando x cambia de x a $x+dx$, el cambio en $f(x)$, denotado por Δf, puede ser aproximadamente estimado por la diferencial df:

$$\Delta f \approx df = f'(x)\,dx \tag{6.3}$$

Esto significa que la diferencial df nos proporciona una estimación del cambio en f debido al pequeño cambio dx en x.

Aplicación en Aproximaciones

La diferencial se usa para aproximar el valor de f en $x+dx$ en términos del valor en x y el cambio diferencial:

$$f(x+dx) \approx f(x) + df$$

o de manera más explícita:

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx$$

■ **Ejemplo 6.2** Consideremos la función $f(x) = x^2$. La derivada de f con respecto a x es:

$$f'(x) = 2x$$

La diferencial df es:

$$df = f'(x)\,dx = 2x\,dx$$

Si tomamos $x = 3$ y $dx = 0.1$, entonces:

$$df = 2 \cdot 3 \cdot 0.1 = 0.6$$

Esto indica que si x aumenta de 3 a 3.1, el cambio aproximado en $f(x)$ es 0.6. ■

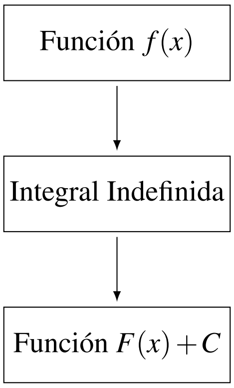
6.2 La integral indefinida

6.2.1 Concepto de integral indefinida. Propiedades

La integral indefinida, también conocida como antiderivada, es el proceso inverso de la derivada. Dada una función $f(x)$, la integral indefinida busca encontrar una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$. La notación para la integral indefinida de $f(x)$ es:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde $F(x)$ es una función tal que $F'(x) = f(x)$, y C es una constante de integración que representa la familia de todas las posibles antiderivadas.



Definición 6.2.1 — Integral Indefinida. Dada una función $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ con respecto a x se define como:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde $F(x)$ es una función tal que $\frac{dF}{dx} = f(x)$, y C es una constante arbitraria que se añade porque la derivada de una constante es cero.

■ **Ejemplo 6.3** Si $f(x) = 2x$, entonces:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Aquí, $F(x) = x^2$ porque la derivada de x^2 es $2x$. ■

■ **Ejemplo 6.4** Si $f(x) = e^x$, entonces:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

En este caso, $F(x) = e^x$ porque la derivada de e^x es e^x. ■

Propiedad de Linealidad

La integral indefinida de una combinación lineal de funciones es igual a la combinación lineal de las integrales indefinidas de esas funciones:

$$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx$$

donde a y b son constantes.

Propiedad de la Integral de una Suma

La integral indefinida de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales indefinidas de esas funciones:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Propiedad de la Integral de un Producto por una Constante

La integral indefinida de una función multiplicada por una constante es igual a la constante multiplicada por la integral indefinida de la función:

$$\int af(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$$

Propiedad de Cambio de Variable

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable y $du = g'(x)\, dx$, entonces:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

Esta propiedad permite simplificar la integración mediante un cambio de variable.

Propiedad de la Integral de una Derivada

La integral indefinida de la derivada de una función es la función original más una constante:

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\, dx = F(x) + C$$

donde $F(x)$ es una función cuya derivada es $\frac{dF(x)}{dx}$.

Integral de una Función Constante

La integral indefinida de una función constante k es el producto de la constante por la variable x más una constante de integración:

$$\int k\, dx = kx + C$$

Propiedad de la Integral de un Producto de Funciones

Para la integral de un producto de funciones, se usa la técnica de integración por partes. Si u y v son funciones de x, entonces:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

donde dv y du son las derivadas de v y u, respectivamente.

Propiedad de la Integral de una Función Racional

Para funciones racionales (cociente de dos polinomios), la integral se puede resolver mediante la descomposición en fracciones parciales. Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, se puede expresar como una suma de fracciones más simples.

Propiedad de la Integral de una Función Exponencial

La integral de una función exponencial es:

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

donde a es una constante.

Propiedad de la Integral de una Función Trigonométrica

Las integrales de las funciones trigonométricas básicas son:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

6.2.2 Integrales inmediatas (uso de las tablas)

Las integrales inmediatas son aquellas que se pueden resolver directamente usando fórmulas conocidas sin necesidad de aplicar métodos adicionales. A continuación se presentan algunas de las integrales inmediatas más comunes y sus fórmulas.

Integrales de Funciones Constantes

La integral indefinida de una constante k es:

$$\int k\,dx = kx + C$$

donde C es la constante de integración.

Integrales de Funciones Potenciales

La integral indefinida de x^n, donde $n \neq -1$, es:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Integrales de Funciones Exponenciales

La integral indefinida de la función exponencial es:

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

donde a es una constante.

Integrales de Funciones Trigonométricas

Las integrales indefinidas de las funciones trigonométricas básicas son:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$$

$$\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + C$$

Integrales de Funciones Logarítmicas

La integral indefinida del logaritmo natural es:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

6.2.3 Aplicaciones de las integrales indefinidas

Las integrales indefinidas tienen muchas aplicaciones prácticas en diversas áreas de las matemáticas y las ciencias. En este documento, exploraremos algunas de las principales aplicaciones.

Cálculo de Áreas Bajo la Curva

Aunque el cálculo directo de áreas bajo la curva se realiza con integrales definidas, la integral indefinida es esencial para encontrar la función antiderivada que se evalúa en los límites de integración. Por ejemplo, para encontrar el área bajo la curva de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[a,b]$, primero encontramos la integral indefinida:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Luego, evaluamos esta antiderivada en b y a para encontrar el área bajo la curva.

Cálculo de Volúmenes de Sólidos de Revolución

Para calcular el volumen de un sólido de revolución, usamos la integral definida del área de secciones transversales. Por ejemplo, para un sólido generado al girar la función $f(x) = x^2$ alrededor del eje x, el volumen V se calcula como:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Donde $[f(x)]^2$ es la función del área de la sección transversal del sólido.

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Las integrales indefinidas son cruciales para resolver ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Integramos ambos lados con respecto a x:

$$y = \int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

Aquí, C es la constante de integración que se determina mediante condiciones iniciales.

Problemas de Física

En física, las integrales indefinidas se utilizan para calcular diversas magnitudes. Por ejemplo, la distancia recorrida s cuando la velocidad $v(t)$ es una función del tiempo t se obtiene integrando la función de velocidad:

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

Si $v(t) = 5t$, entonces:

$$s(t) = \int 5t\,dt = \frac{5t^2}{2} + C$$

Problemas de Ingeniería

En ingeniería, las integrales indefinidas ayudan a encontrar el centro de masa, el momento de inercia, entre otros. Por ejemplo, el momento de inercia I de una barra uniforme de longitud L respecto a un eje que pasa por su centro se calcula usando:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, dm$$

donde dm es el elemento diferencial de masa.

6.3 Métodos de integración

6.3.1 Integración por cambio de variable

6.3.2 Integración por partes

Para integrar productos de funciones, se desarrolla una técnica que se basa en la regla del producto para derivadas y se deriva de la fórmula general de la integración de un producto de funciones. La fórmula de integración por partes es especialmente útil cuando la integral involucra un producto de dos funciones, donde una de ellas se puede simplificar al derivarla, y la otra se puede integrar fácilmente.

Demostración de la Fómrula de Integración por Partes. Sea definida la regla del producto para la derivada de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$, como:

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Integrando ambos lados con respecto a x, obtenemos:

$$\int \frac{d}{dx}(u(x)v(x))\, dx = \int \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)\, dx$$

La integral del lado izquierdo es simplemente $u(x)v(x)$:

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

Reorganizando los términos, tenemos:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Para simplificar la notación, dejamos de escribir las variables x:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Donde, u es una función que derivamos para obtener du, y dv es una función que integramos para obtener v. ■

Definición 6.3.1 — Integración por partes. La integración por partes es una técnica derivada de la regla del producto para la derivada. La fórmula de integración por partes es:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{6.4}$$

Donde u y dv son partes de la integral original $\int u\,dv$.

Método

1. **Identificación de u y dv**:
   - Selecciona u (la función a derivar) y dv (la función a integrar).
   - Usa la regla de LIATE (Logaritmo, Inverso trigonométrico, Algebraico, Trigonométrico, Exponencial) para seleccionar u.
2. **Derivación de u y obtención de du**:
   - Deriva u para encontrar du.
3. **Integración de dv para encontrar v**:
   - Integra dv para encontrar v.
4. **Aplicación de la fórmula de integración por partes**:
   - Sustituye u, v, y du en la fórmula.
   - Simplifica y resuelve la integral restante.

■ **Ejemplo 6.5** Integral con término algebraico y exponencial:

$$\int xe^x\,dx$$

Paso 1: Selección de u y dv
Siguiendo la regla LIATE:

$$\begin{aligned} u &= x \\ dv &= e^x\,dx \end{aligned}$$

Paso 2: Derivación de u y obtención de du

$$du = dx$$

Paso 3: Integración de dv para encontrar v

$$v = \int e^x\,dx = e^x$$

Paso 4: Aplicación de la fórmula

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx =$$
$$= \int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

■

■ **Ejemplo 6.6** Integral con término algebraico y trigonométrico:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

Selección de u y dv:

$$\begin{aligned} u &= x \\ dv &= \cos(x)\,dx \end{aligned}$$

Derivación de u y obtención de du:

$$du = dx$$

Integración de dv para encontrar v:

$$v = \int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

Aplicación de la fórmula:

$$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

■

Definición 6.3.2 — Método DI. También conocido como el método de la tabla de derivadas e integrales, es una técnica sistemática para realizar integración por partes de manera eficiente. Este método es especialmente útil cuando se tienen que realizar varias integraciones por partes consecutivas.

Pasos del Método DI:

1. **Identificación de u y dv**:
   - Selecciona u (la función a derivar) y dv (la función a integrar).
   - Generalmente, se sigue la regla de LIATE (Logaritmo, Inverso trigonométrico, Algebraico, Trigonométrico, Exponencial) para seleccionar u.
2. **Construcción de la tabla DI**:
   - Crea una tabla con dos columnas, una para derivadas (D) y otra para integrales (I).
   - En la primera fila, coloca u en la columna D y dv en la columna I.
3. **Llenado de la tabla**:
   - Deriva u sucesivamente hasta que obtengas cero.
   - Integra dv sucesivamente.
4. **Multiplicación diagonal**:
   - Multiplica cada derivada con la integral correspondiente de la siguiente fila, alternando los signos (positivo y negativo).
5. **Suma de términos**:
   - Suma todos los productos resultantes para obtener el resultado de la integral original.

■ **Ejemplo 6.7** Realizando la integración por partes de la siguiente integral usando el método DI:

$$\int xe^x\,dx \tag{6.5}$$

Paso 1: Selección de u y dv
De acuerdo a la regla LIATE, seleccionamos:

$$\begin{aligned} u &= x \\ dv &= e^x\,dx \end{aligned}$$

Paso 2: Construcción de la tabla DI

D	I
x	e^x
1	e^x
0	e^x

Paso 3: Multiplicación diagonal y suma de términos
Multiplicamos diagonalmente y alternamos los signos:

$$\int xe^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$$

La primera diagonal es $x\cdot e^x$
La segunda diagonal es $-\int e^x\,dx$, que es $-e^x$
Finalmente, sumamos los términos:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

■

■ **Ejemplo 6.8** **Caso 1:** $\int x\cos(x)\,dx$
Selección de u y dv:

$$\begin{aligned} u &= x \\ dv &= \cos(x)\,dx \end{aligned}$$

Tabla DI:

D	I
x	$\cos(x)$
1	$\sin(x)$
0	$-\cos(x)$

Multiplicación diagonal y suma de términos:

$$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

■

■ **Ejemplo 6.9 Caso 2:** $\int x^2 e^x\,dx$
Selección de u **y** dv:

$$u = x^2$$
$$dv = e^x\,dx$$

Tabla DI:

D	I
x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

Multiplicación diagonal y suma de términos:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx$$

Ahora, integramos $\int 2xe^x\,dx$ usando el método DI nuevamente:
Selección de u **y** dv:

$$u = 2x$$
$$dv = e^x\,dx$$

Tabla DI:

D	I
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

Multiplicación diagonal y suma de términos:

$$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C$$
$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

■

6.3.3 Integración por fracciones parciales simples

Esta metodología es especialmente útil cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador en la función racional, permitiendo una descomposición en términos lineales y cuadráticos. A través de la identificación de factores lineales y cuadráticos en el denominador, se pueden establecer integrales básicas que facilitan la resolución del problema original.

Definición 6.3.3 — Integración por fracciones parciales simples. Es una técnica utilizada para integrar funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios. La idea es descomponer una función racional en una suma de fracciones más simples, conocidas como fracciones parciales, que pueden integrarse más fácilmente.

Supongamos que tenemos una función racional de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Podemos descomponer esta función en una suma de fracciones parciales, cuya forma depende de los factores de $Q(x)$.

6.3.4 Tipos de Factores y Fracciones Parciales

El proceso de descomposición en fracciones parciales se basa en la factorización del denominador del polinomio en factores más simples. Dependiendo de la forma de estos factores, la técnica se clasifica en cuatro tipos:

- **Factores Lineales Simples:** Estos son factores de la forma $(x-a)$, donde a es una constante. Para cada factor lineal simple en el denominador, se asigna una fracción parcial de la forma $\frac{A}{x-a}$, donde A es una constante a determinar.
- **Factores Lineales Repetidos:** Estos son factores lineales que aparecen más de una vez, como $(x-a)^n$. La descomposición en fracciones parciales para estos factores incluye términos como $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$, donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes a determinar.
- **Factores Cuadráticos Irreducibles:** Estos son factores de la forma ax^2+bx+c, donde el discriminante $b^2-4ac<0$ indica que el polinomio no se puede factorizar en términos reales. La descomposición en fracciones parciales para estos factores incluye fracciones de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, donde A y B son constantes a determinar.
- **Factores Cuadráticos Irreducibles Repetidos:** Estos son factores cuadráticos que aparecen más de una vez, como $(ax^2+bx+c)^n$. La descomposición en fracciones parciales para estos factores incluye términos como $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$, donde A_i y B_i son constantes a determinar.

Factores Lineales Simples

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal de la forma $(x-a)$, entonces se asigna un término de la forma:

$$\frac{A}{x-a}$$

Demostración de los factores lineales simples. Consideremos una función racional donde el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ son polinomios. Supondremos que $Q(x)$ puede ser factorizado en términos de factores lineales distintos, es decir:

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son raíces distintas del polinomio $Q(x)$. Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, podemos descomponer la función racional en fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes que debemos determinar.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por el denominador común $Q(x)$ para eliminar los denominadores, obtenemos:

$$P(x) = A_1(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) + A_2(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n) + \cdots + A_n(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})$$

Para encontrar los coeficientes A_i, podemos sustituir $x = a_i$ en la ecuación, ya que al hacerlo, todos los términos excepto el correspondiente a A_i se anulan debido a la multiplicación por cero. Así, obtenemos:

$$P(a_i) = A_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)$$

Despejando para A_i, encontramos:

$$A_i = \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

■

■ **Ejemplo 6.10** Integrar la siguiente función racional:

$$\int \frac{5}{(x-1)(x+3)}\,dx$$

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

Multiplicando por el denominador común y resolviendo, encontramos A y B:

$$5 = A(x+3) + B(x-1)$$

se igualan los denominadores a 0:

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$
$$x + 3 = 0 \implies x = -3$$

Para $x = 1$, $A = \frac{5}{4}$ y para $x = -3$, $B = -\frac{5}{4}$. Se sustituye A y B y se integra en ambas partes:

$$\int \frac{5}{(x-1)(x+3)}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+3| + C$$

■

Factores Lineales Repetidos

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido de la forma $(x-a)^n$, se asignan términos de la forma:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Demostración de los Factores Lineales Repetidos. Consideremos una función racional donde el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ son polinomios, y supongamos que $Q(x)$ contiene factores lineales repetidos. Específicamente, si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido de la forma $(x-a)^n$, entonces podemos expresar la función racional como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^n\cdot R(x)}$$

donde $R(x)$ es un polinomio que no tiene el factor $(x-a)$. La descomposición en fracciones parciales en este caso toma la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{P'(x)}{R(x)}$$

donde $A_1,A_2,\ldots,A_n$ son constantes que debemos determinar, y $P'(x)$ es el resto de la descomposición en fracciones parciales con respecto a $R(x)$.

Para encontrar las constantes A_i, multiplicamos ambos lados por el denominador común $(x-a)^n\cdot R(x)$ y evaluamos en diferentes valores de x para eliminar los términos correspondientes y resolver para cada A_i.

Determinación de $A_1,A_2,\ldots,A_n$:

$$P(x)=A_1(x-a)^{n-1}R(x)+A_2(x-a)^{n-2}R(x)+\cdots+A_nR(x)+(x-a)^nP'(x)$$

Para encontrar A_1, evaluamos en $x=a$:

$$P(a)=A_1\cdot 0^{n-1}R(a)+\cdots+A_nR(a)+0$$

$$A_n=\frac{P(a)}{R(a)}$$

Para A_{n-1}, derivamos la expresión de $P(x)$ y luego evaluamos en $x=a$:

$$P'(a)=A_1\cdot 0^{n-2}R(a)+\cdots+A_{n-1}R(a)+0$$

$$A_{n-1}=\frac{P'(a)-A_nR'(a)}{R(a)}$$

Continuamos este proceso hasta encontrar todos los coeficientes A_i.

■

■ **Ejemplo 6.11** Integrar la siguiente función racional:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)^2}\,dx$$

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

Multiplicando por el denominador común y resolviendo, encontramos A y B:

$$2x+3 = A(x-2)+B$$

Para $x=2$, $B=7$ y para A, derivamos y evaluamos en $x=2$:

$$A = 2$$

Entonces:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{x-2}\,dx + 7\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-2| - \frac{7}{x-2} + C$$

■

Factores Cuadráticos Irreducibles

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma (ax^2+bx+c) con $b^2-4ac<0$, se asignan términos de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Demostración de los Factores Cuadráticos Irreducibles. Consideremos una función racional en la que el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ son polinomios, y supongamos que $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible de la forma ax^2+bx+c, donde $b^2-4ac<0$. En este caso, podemos descomponer la función racional en fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)R(x)}$$

donde $R(x)$ es un polinomio que no contiene el factor ax^2+bx+c. La descomposición en fracciones parciales toma la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{P'(x)}{R(x)}$$

donde A y B son constantes que debemos determinar, y $P'(x)$ es el resto de la descomposición con respecto a $R(x)$.

Para encontrar A y B, multiplicamos ambos lados por el denominador común $(ax^2+bx+c)R(x)$ para obtener:

$$P(x) = (Ax+B)R(x) + (ax^2+bx+c)P'(x)$$

Comparando los coeficientes de los términos correspondientes, obtenemos un sistema de ecuaciones para A y B. Esto se hace típicamente evaluando $P(x)$ y sus derivadas, o usando valores estratégicos de x para simplificar el cálculo.

Determinación de A y B:

- **Coeficientes de x^2**: Igualamos los coeficientes de x^2 en ambos lados de la ecuación.
- **Coeficientes de x**: Igualamos los coeficientes de x en ambos lados de la ecuación.
- **Términos constantes**: Igualamos los términos constantes en ambos lados de la ecuación.

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos los valores de A y B. ■

■ **Ejemplo 6.12** Integrar la siguiente función racional:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx$$

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{3x+1}{x^2+4} = \frac{Ax+B}{x^2+4}$$

Multiplicando por el denominador común y resolviendo, encontramos A y B:

$$3x+1 = A(x^2+4)+Bx$$

Igualando coeficientes, encontramos:

$$A = 0, \quad B = 3$$

Entonces:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

La primera integral se resuelve con $u = x^2+4$ y la segunda es una forma de la función arctangente:

$$\frac{3}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

■

Factores Cuadráticos Irreducibles Repetidos

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible repetido de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, se asignan términos de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Demostración de los Factores Cuadráticos Irreducibles Repetidos. Consideremos una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y el denominador $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, donde $b^2-4ac<0$. La descomposición en fracciones parciales en este caso es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^nR(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{P'(x)}{R(x)}$$

donde $R(x)$ es un polinomio que no contiene el factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c, y A_i y B_i son constantes a determinar. $P'(x)$ es el resto de la descomposición.

Para encontrar las constantes A_i y B_i, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el denominador común $(ax^2+bx+c)^nR(x)$ y comparamos los coeficientes de los términos correspondientes de $P(x)$ con los de la expresión expandida.

Determinación de A_i y B_i:

Para cada i (donde $i=1,2,\ldots,n$), evaluamos la ecuación resultante en puntos estratégicos y/o derivamos con respecto a x para eliminar términos y encontrar los coeficientes A_i y B_i.

■

■ **Ejemplo 6.13** Integrar la siguiente función racional:

$$\int\frac{2x+3}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{2x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por el denominador común y resolviendo, encontramos A, B, C y D:

$$2x+3=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$$

Igualando coeficientes, encontramos:

$$A=2,\quad B=3,\quad C=0,\quad D=0$$

Entonces:

$$\int\frac{2x+3}{(x^2+1)^2}\,dx=2\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+3\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

La primera integral se resuelve con $u = x^2 + 1$ y la segunda con una técnica de sustitución especial:

$$= \ln|x^2+1| - \frac{x}{x^2+1} + C$$

■

6.3.5 Uso de las tablas de integración

Los métodos de integración comunes incluyen cambio de variable, integración por partes y fracciones parciales. A continuación, se presenta una tabla que resume las fórmulas para cada método.

Método	**Fórmula**
Integración por Cambio de Variable	
$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$	$\int f(u)\,du$
Integración por Partes	
$\int u\,dv$	$uv - \int v\,du$
Fracciones Parciales	
$\frac{A}{x-a}$	$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$	$\int \left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}\right) dx$
$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$	$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$
$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c} + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{E}{(x^2+bx+c)^n}$	$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx + \int \frac{C_1x+D_1}{(x^2+bx+c)^2}\,dx + \cdots$

Cuadro 6.1: Tabla de Fórmulas de Integración

6.3.6 Integrales trigonométricas

Las integrales trigonométricas son una categoría importante de integrales que involucran funciones trigonométricas como seno, coseno, tangente y sus recíprocas. Estas integrales aparecen con frecuencia en problemas de física e ingeniería, así como en diversos campos de las matemáticas aplicadas. Resolver integrales trigonométricas requiere el uso de identidades trigonométricas y técnicas de integración específicas para simplificar las expresiones y encontrar la solución.

Las integrales trigonométricas se pueden clasificar en varias categorías, tales como:

- **Integrales de funciones trigonométricas simples:** Estas incluyen integrales de funciones como $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc.
- **Integrales de productos de funciones trigonométricas:** Estas implican productos de funciones trigonométricas, como $\sin x \cdot \cos x$.
- **Integrales que involucran funciones trigonométricas elevadas a una potencia:** Estas son integrales que involucran funciones trigonométricas elevadas a una potencia, como $\sin^2 x$ o $\cos^3 x$.
- **Integrales que involucran funciones trigonométricas en fracciones:** Estas implican fracciones donde el numerador y/o el denominador es una función trigonométrica, como $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Para resolver integrales trigonométricas, a menudo se utilizan identidades trigonométricas para simplificar la integral, así como métodos de sustitución y técnicas de integración por partes.

Integrales de Funciones Trigonométricas Básicas

Estas integrales son las más directas y se basan en las fórmulas estándar de integrales de funciones trigonométricas.

Ejemplos:

- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
- $\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$
- $\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + C$

Integrales de Productos de Funciones Trigonométricas

Para productos de funciones trigonométricas, se pueden usar identidades trigonométricas para simplificar la integral antes de resolverla.

Ejemplo 6.14 Para la integral:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

Usamos la identidad $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$:

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Entonces:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx$$

$$\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

Por lo tanto:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

■

Integrales de Funciones Trigonométricas Elevadas a Potencias

Para integrales de funciones trigonométricas elevadas a potencias, se pueden usar identidades trigonométricas y técnicas de reducción de potencias.

Ejemplo 6.15 Para la integral:

$$\int \sin^2(x)\,dx$$

Usamos la identidad $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

■

Integrales de Funciones Trigonométricas en Combinación con Polinomios

Para integrales que combinan funciones trigonométricas y polinomios, es útil usar la técnica de integración por partes o sustituciones adecuadas.

■ **Ejemplo 6.16** Para la integral:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

Usamos integración por partes. Elegimos $u = x$ y $dv = \cos(x)\,dx$:

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = \sin(x)$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$

$$= x\sin(x) + \cos(x) + C$$

■

6.3.7 Integración por sustitución trigonométrica

La integración por sustitución trigonométrica es una técnica utilizada para resolver integrales que involucran raíces cuadradas de expresiones cuadráticas. Esta técnica es especialmente útil para integrales de la forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx$$

donde a es una constante y x es la variable de integración.

Para integrar estas funciones, utilizamos sustituciones basadas en identidades trigonométricas. Los tres casos comunes son:

- **Caso 1:** $x = a\sin(\theta)$
- **Caso 2:** $x = a\cos(\theta)$
- **Caso 3:** $x = a\tan(\theta)$

Donde cada caso corresponde a una forma diferente de la expresión bajo la raíz cuadrada.

Caso 1: $x = a\sin(\theta)$

Para integrales de la forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

Utilizamos la sustitución $x = a\sin(\theta)$. Entonces, $dx = a\cos(\theta)\,d\theta$ y la integral se transforma en:

$$\int \frac{a\cos(\theta)\,d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2(\theta)}}$$

Simplificamos usando la identidad $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$:

$$\sqrt{a^2 - a^2\sin^2(\theta)} = a\cos(\theta)$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{a\cos(\theta)\,d\theta}{a\cos(\theta)} = \int d\theta = \theta + C$$

Regresamos a la variable original x usando $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{entonces} \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Caso 2: $x = a\cos(\theta)$

Para integrales de la forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$$

Utilizamos la sustitución $x = a\cos(\theta)$. Entonces, $dx = -a\sin(\theta)\,d\theta$ y la integral se transforma en:

$$\int \frac{-a\sin(\theta)\,d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2(\theta) - a^2}}$$

Simplificamos usando la identidad $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$:

$$\sqrt{a^2\cos^2(\theta) - a^2} = a\sqrt{\cos^2(\theta) - 1} = a\sqrt{-\sin^2(\theta)} = a\sin(\theta)$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{-a\sin(\theta)\,d\theta}{a\sin(\theta)} = -\int d\theta = -\theta + C$$

Regresamos a la variable original x usando $\theta = \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{entonces} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Caso 3: $x = a\tan(\theta)$

Para integrales de la forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

Utilizamos la sustitución $x = a\tan(\theta)$. Entonces, $dx = a\sec^2(\theta)\,d\theta$ y la integral se transforma en:

$$\int \frac{a\sec^2(\theta)\,d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2(\theta)+a^2}}$$

Simplificamos usando la identidad $\sec^2(\theta) = 1+\tan^2(\theta)$:

$$\sqrt{a^2\tan^2(\theta)+a^2} = a\sec(\theta)$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{a\sec^2(\theta)\,d\theta}{a\sec(\theta)} = \int \sec(\theta)\,d\theta$$

La integral de $\sec(\theta)$ es conocida:

$$\int \sec(\theta)\,d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|+C$$

Regresamos a la variable original x usando $\sec(\theta) = \sqrt{1+\tan^2(\theta)} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ y $\tan(\theta) = \frac{x}{a}$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C$$

6.4 La integral definida

La integral definida representa el área bajo la curva de una función en un intervalo específico. Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a,b]$, la integral definida de $f(x)$ desde a hasta b se denota como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

El valor de esta integral se calcula como la diferencia entre las antiderivadas evaluadas en los límites superior e inferior:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{6.6}$$

Donde $F(x)$ es una función antiderivada de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$.

La integral definida de una función f en el intervalo $[a,b]$ se define formalmente como el límite de la suma de Riemann de f en ese intervalo a medida que el número de particiones tiende al infinito.

Definición 6.4.1 — Suma de Riemann. Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud Δx:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

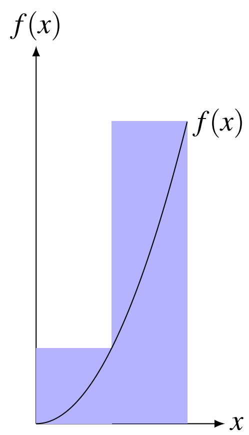
Sea x_i^* un punto arbitrario en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, donde $x_i = a + i\Delta x$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. La suma de Riemann para f en esta partición es:

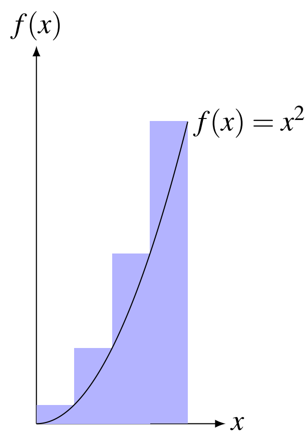
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

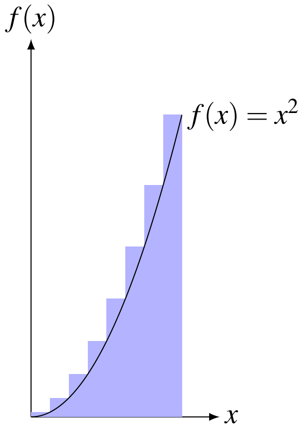
La integral definida de f desde a hasta b está definida como el límite de esta suma de Riemann cuando el número de particiones n tiende al infinito:

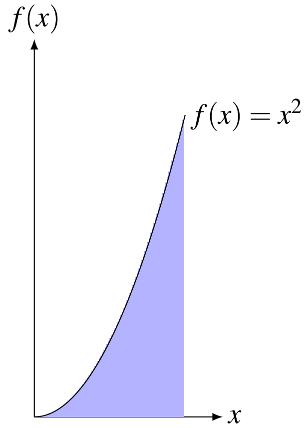
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Donde el límite existe y es independiente de la elección de los puntos x_i^* en los subintervalos.









Dada una función f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ posee las siguientes propiedades:

6.4.1 La integral definida. Propiedades.

1. Linealidad

Para funciones $f(x)$ y $g(x)$ y constantes c_1 y c_2:

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

Esta propiedad indica que la integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales de las funciones.

2. Adición de Intervalos

Si $a \leq c \leq b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Esta propiedad permite dividir el intervalo de integración en subintervalos.

3. Cambio de Orden de los Límites

Si $a \leq b$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Esta propiedad muestra que cambiar el orden de los límites cambia el signo de la integral.

4. Integral de una Constante

Para una constante c:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Esta propiedad indica que la integral de una constante sobre un intervalo es simplemente la constante multiplicada por la longitud del intervalo.

5. Integral de una Función Nula

Para $f(x) = 0$:

$$\int_a^b 0\,dx = 0$$

Esta propiedad indica que la integral de la función nula es cero.

6. Integral de una Función Par y Función Impar en Intervalos Simétricos

Si $f(x)$ es una función impar, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Si $f(x)$ es una función par, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Estas propiedades ayudan a simplificar el cálculo de integrales cuando se trabaja con funciones pares o impares en intervalos simétricos.

7. Teorema Fundamental del Cálculo

Si F es una antiderivada de f en el intervalo $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este teorema conecta la integral definida con el concepto de antiderivada, proporcionando una manera directa de calcular la integral.

6.4.2 Interpretaciones geométrica y física.

La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área neta bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, teniendo en cuenta que el área sobre el eje x es positiva y el área bajo el eje x es negativa.

La integral definida representa el área neta bajo la curva de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Esta área puede ser positiva o negativa dependiendo del signo de $f(x)$ en el intervalo.

Cálculo del Área

Para calcular el área bajo la curva, podemos utilizar el siguiente proceso:

- Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, el área es simplemente la integral de $f(x)$ en ese intervalo.
- Si $f(x) \leq 0$ en $[a,b]$, el área bajo la curva es negativa y la integral representa el valor absoluto del área bajo la curva.
- Si $f(x)$ cruza el eje x en el intervalo $[a,b]$, la integral considera las áreas positivas y negativas y calcula el área neta.

■ **Ejemplo 6.17** Consideremos la integral definida de $f(x) = \ln(x)$ en el intervalo $[a,b]$:

$$\int_a^b \ln(x)\,dx$$

Para resolver esta integral, utilizamos el método de integración por partes:

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + C$$

Entonces:

$$\int_a^b \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]_a^b = (b\ln(b) - b) - (a\ln(a) - a)$$

Simplificando, obtenemos:

$$\int_a^b \ln(x)\,dx = b\ln(b) - b - a\ln(a) + a$$

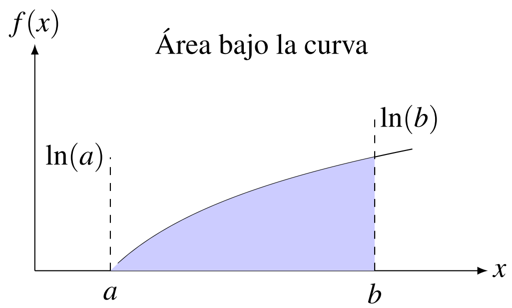
■

Esta integral se interpreta geométricamente como el área neta entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$.

La integral definida tiene varias aplicaciones importantes, como el cálculo de áreas bajo curvas, la determinación de volúmenes de sólidos de revolución, y el cálculo de longitudes de curvas.

6.5 Gráfico Ilustrativo

El siguiente gráfico muestra la interpretación geométrica de la integral definida. Consideremos la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[a, b]$. El área bajo la curva de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ es lo que representa la integral definida.



En el gráfico anterior:

- La función $f(x)$ está representada por la curva azul.
- El área sombreada en azul representa la integral definida de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.
- Esta área se calcula como:

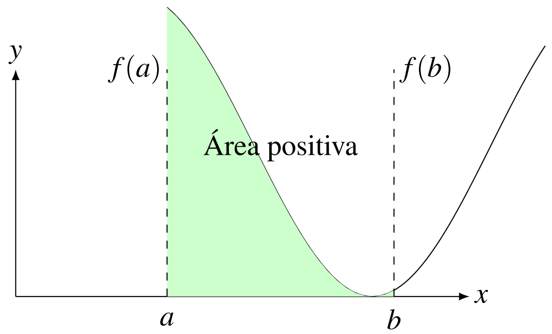
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

La integral definida puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo de si la función $f(x)$ está por encima o por debajo del eje x en el intervalo $[a, b]$.

A continuación se muestran tres casos que ilustran cómo el signo de la función $f(x)$ afecta la integral definida.

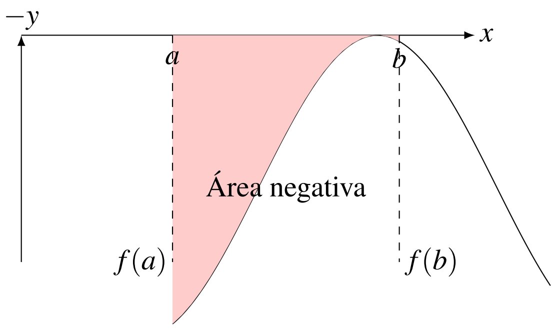
Caso 1: Área por encima del eje x

En este caso, la función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$. La integral definida representa el área bajo la curva que está por encima del eje x.



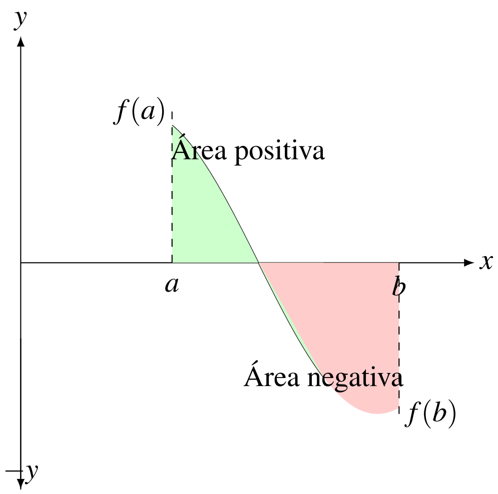
Caso 2: Área por debajo del eje x

En este caso, la función $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$. La integral definida representa el área bajo la curva que está por debajo del eje x.



Caso 3: Función que cruza el eje x

En este caso, la función $f(x)$ cruza el eje x en el intervalo $[a,b]$. La integral definida considera el área neta, es decir, el área positiva y negativa.



6.5.1 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo conecta el concepto de derivada con el de integral. Se divide en dos partes principales:

Primera Parte

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$, y F es una función tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esto significa que la integral definida de una función en un intervalo puede calcularse usando cualquier antiderivada de la función.

Segunda Parte

Si f es una función continua en un intervalo abierto I y a es un punto en I, entonces la función F definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para todo x en I, es continua en I, diferenciable en el interior de I, y $F'(x) = f(x)$.

6.6 Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = 3x^2$. Queremos encontrar el área bajo la curva de $f(x)$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

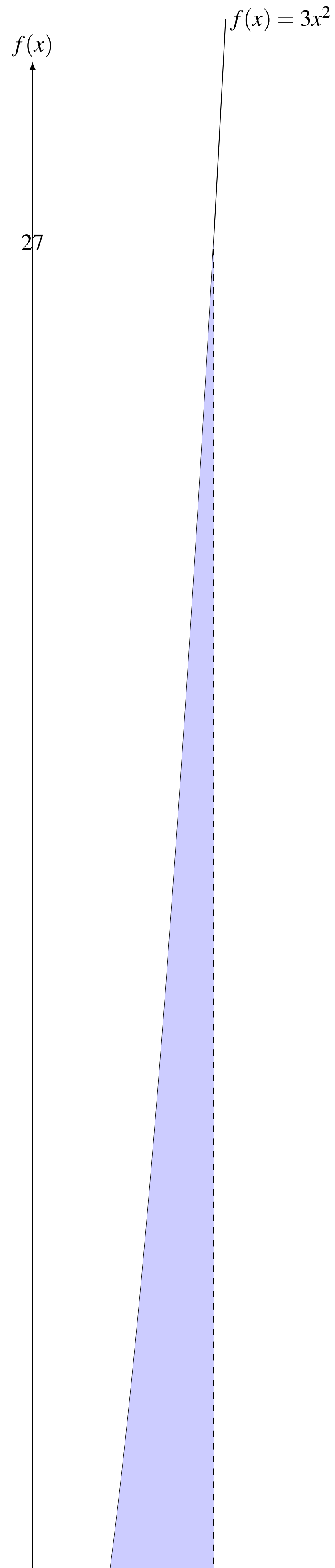
Primero, encontramos una antiderivada de $f(x)$. Una antiderivada de $3x^2$ es $F(x) = x^3$ (ya que la derivada de x^3 es $3x^2$).

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos:

$$\int_1^3 3x^2\,dx = F(3) - F(1) = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$$

Por lo tanto, el área bajo la curva de $f(x) = 3x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$ es 26 unidades cuadradas.

6.7 Gráfico del Ejemplo



6.7.1 Aplicaciones de la integral definida

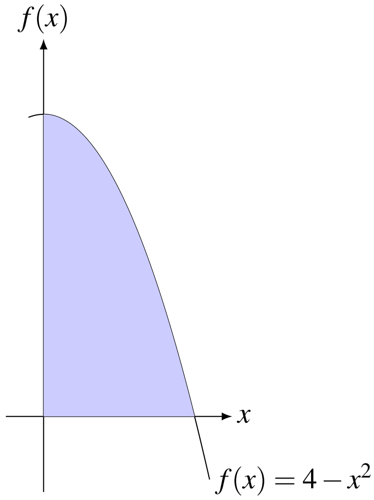
La integral definida tiene numerosas aplicaciones en matemáticas y ciencias. A continuación, se presentan ejemplos de problemas prácticos que ilustran diferentes usos de la integral definida, junto con sus soluciones y gráficos.

Área bajo una curva

■ **Ejemplo 6.18** **Problema:** Calcular el área bajo la curva $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[0,2]$.

Solución:

$$\text{Área} = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = (8 - \frac{8}{3}) - (0 - 0) = \frac{16}{3}$$



■

Área entre dos curvas

■ **Ejemplo 6.19** **Problema:** Calcular el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$ en el intervalo donde se intersectan.

Solución: Primero, encontramos los puntos de intersección resolviendo $x = x^2$:

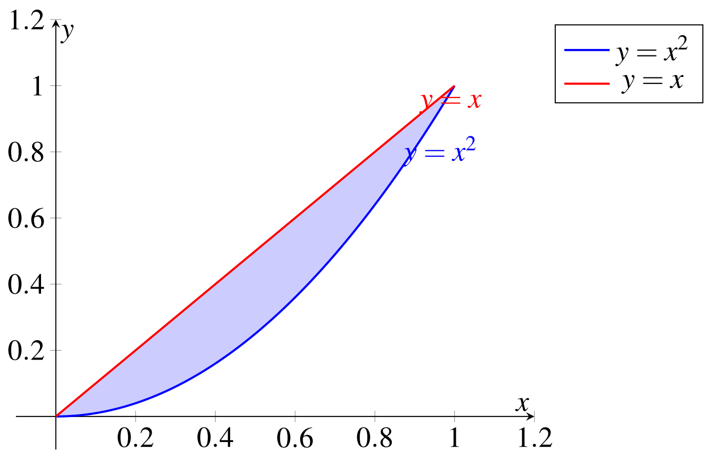
$$x^2 - x = 0 \qquad x(x-1) = 0 \qquad x = 0 \text{ o } x = 1$$

El área entre las curvas se calcula como:

$$\text{Área} = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

Calculando la integral:

$$\text{Área} = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}$$



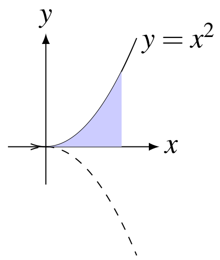
■

Volumen de sólidos de revolución.

■ **Ejemplo 6.20** **Problema:** Calcular el volumen del sólido generado al girar la región bajo la curva $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ alrededor del eje x.

Solución:

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^4\,dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$



■

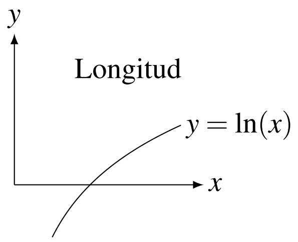
Longitud de una curva.

■ **Ejemplo 6.21** **Problema:** Calcular la longitud de la curva $y = \ln(x)$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$.
Solución:

$$\text{Longitud} = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(\ln(x))\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

$$= \left[\sqrt{x^2+1}\right]_1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$



■

Integral impropia

Definición 6.7.1 — Integral impropia. Es una integral definida en la cual uno o ambos de los límites de integración son infinitos, o la función integrando tiene una discontinuidad en el intervalo de integración.

Formalmente, se definen dos tipos principales de integrales impropias:

Integrales con límites infinitos:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx \tag{6.7}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \tag{6.8}$$

Estas integrales se definen como el límite de integrales definidas cuando el límite superior o inferior tiende a infinito:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{6.9}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{6.10}$$

Integrales con discontinuidades en el intervalo de integración:

Si la función tiene discontinuidades en el intervalo $[a,b]$, se dividen las integrales en intervalos donde la función es continua, y se toman los límites en los puntos de discontinuidad:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx\right) \tag{6.11}$$

donde c es el punto de discontinuidad.

Integral con Límite Superior Infinitamente Grande

■ **Ejemplo 6.22** **Problema:** Calcular la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Solución:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

Calculando la integral definida:

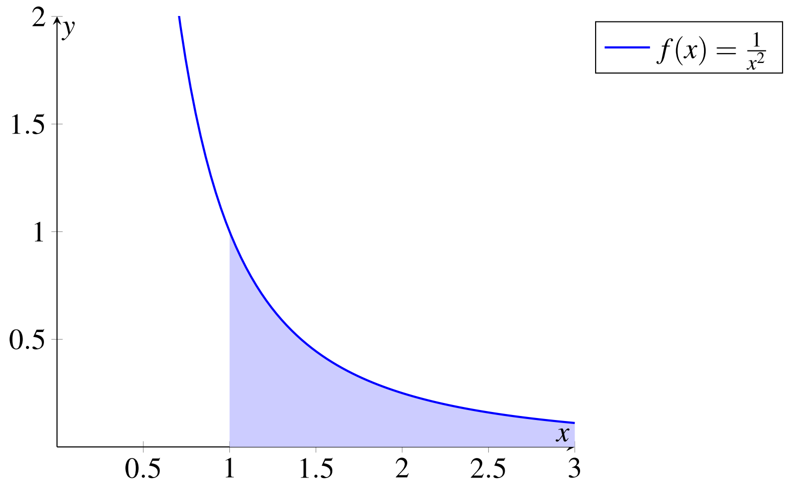
$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b}+1$$

Tomando el límite cuando $b\to\infty$:

$$\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$$

Entonces,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$



■

Integral con Discontinuidad

■ **Ejemplo 6.23** **Problema:** Calcular la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Calculando la integral definida:

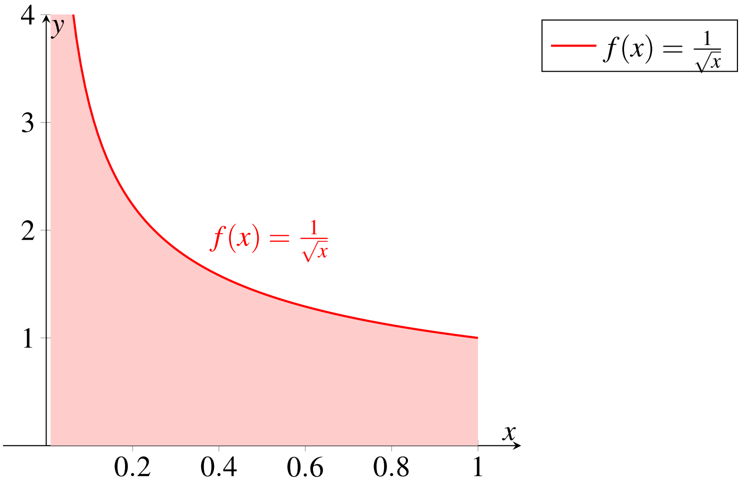
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2-2\sqrt{\varepsilon}$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^+$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

Entonces,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$$



■