**博弈论**

2020.09.05

目录

[博弈论 2](#_Toc50206872)

[Nim与反Nim 2](#_Toc50206873)

[介绍 2](#_Toc50206874)

[Nim问题的解 2](#_Toc50206875)

[反Nim问题 4](#_Toc50206876)

[典型模型 4](#_Toc50206877)

[威佐夫博弈（Wythoff’s game） 5](#_Toc50206878)

[介绍 5](#_Toc50206879)

[奇异局势 5](#_Toc50206880)

[超自然数博弈 5](#_Toc50206881)

# 博弈论

## Nim与反Nim

### 介绍

Nim游戏的定义: 有若干堆硬币，两人轮流行动。每人可以选择其中一堆，取走若干枚硬币。最后一次取硬币的人获胜。

反Nim游戏的定义: 最后一次取硬币的人落败。

### Nim问题的解

#### ****结论****

当且仅当时，后手必胜

#### ****证明****

(1) 当只有一堆硬币时，先手取走全部硬币，先手必胜。  
(2) 当存在两堆硬币时，  
a) 若，先手每次取多少，后手即在另一堆中取多少，因而后手必胜。  
b) 若，不妨设，先手在中取走，那么剩下的就是两堆数量相等的硬币，因而先手必胜。  
(3) 假设k-1、k-2堆硬币时，原命题成立(k >= 2)  
考虑有k堆硬币时，







……

  
当且仅当 ：  




……

  
 设先手从第i堆（有枚硬币）拿走p枚硬币，设， (t为q的二进制最高位)。  
 若，则说明先手操作后，各堆石子在第j位上的分解的和是奇数，即。下面，后手的策略是消除先手行动后产生的“奇数”，使得各堆石子的异或和变成0。必然存在第k堆，使得, 那么我们选择在第j堆上操作，取枚硬币即可。  
 硬币会在这种平衡状态中减少，某一轮中有一堆或两堆硬币消失。（注意不可能取到只剩一堆的情况）

### 反Nim问题

#### 结论

##### (1) 如果全部为1，若为n为偶数，那么先手必胜 (2) 如果存在，那么如果异或和不为0，那么先手必胜

#### 证明

##### (1) 显然 (2) 只有一个，必胜 (3) 存在两个或以上 A) Nim\_sum == 0，可以转化成两种状态： (a) 至少有两堆, Nim\_sum!=0，转化为（3.B） (b) 至少又一堆, Nim\_sum!=0，转化成先手必胜态，则原态为先手必败态 B) Nim\_sum !=0，可以转化为（3.A）

### 典型模型

## 威佐夫博弈（Wythoff’s game）

### 介绍

#### 有两堆物品，各若干件，两人轮流从任一堆取至少一个或同时从两堆中取同样多的物品，规定每次至少取一个，多者不限，取走最后一件物品者得胜。

### 奇异局势

#### 几个奇异局势：（0，0），（1，2），（3，5），（4，7），（6，10）……（，）

#### 规律： （1） -的差值为k （2） 为前面第一个没出现的值 （3）  = (int) (( - )\*1.618) p.s.

## 超自然数博弈