V27

Der Zeeman-Effekt

Benjamin Schäfer
benjamin.schaefer@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.01.2022 Abgabe:

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist die Überprüfung des Zeeman-Effekts bei niedrigen Flussstärken am Beispiel von Cadmium.
Der Zeeman-Effekt beschreibt die Aufspaltung der Energienieveaus eines Atoms unter Einfluss eines konstanten externen Magnetfeldes. Bei niedrigen Flussstärken wird zwischen normalen und anormalen Zeeman-Effekt unterschieden. Beide Effekte werden in diesem Versuch mittels der Spektrallinien-Aufspaltung an Cadmium untersucht. Dabei wird auch die Polarisation der emittierten Strahlung berücksichtigt.

2 Theorie

In diesem Kapitel werden die theoretischen Hintergründe dieses Versuches erläutert.

2.1 Energieniveaus und LS-Näherung

Gebundene Elektronen in einem Atom besitzen diskrete Energien, sogenannte Energieniveaus. Ohne Einfluss eines äußeren Magnetfeldes lassen sich diese durch folgende Quantenzahlen charakterisieren:

n	Hauptquantenzahl
l	Neben-/Bahndrehimpulsquantenzahl
m_l	Magnetquantenzahl

Der Spin der Elektronen wechselwirkt mit dem Bahndrehimpuls, was als Spin-Bahn-Kopplung verstanden wird. Bei leichten Atomen mit geringer Kernladung spielt diese für die einzelnen Elektronen jedoch eine untergeordnete Rolle, weshalb es sich anbietet hier die sogenannte LS-Kopplung als Näherung zu verwenden. In der LS-Kopplung werden die Bahndrehimpulse $\hat{l}_i$ der N Elektronen zu einem Bahndrehimpuls $\hat{L}$ mit Quantenzahl L zusammengefasst durch:

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^{N} \hat{l}_i \tag{1}$$

Analog werden die einzelnen Spins $\hat{s}_i$ zu einem Spin $\hat{S}$ mit Quantenzahl S aufaddiert.

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{N} \hat{s}_i \tag{2}$$

Für Berechnungen der Spin-Bahn-Kopplung relevant ist dann der Gesamtdrehimpuls $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$. Die zugehörige Quantenzahl ist J. Energieniveaus werden in der LS-Näherung in folgender Form angegeben:

$$^{2S+1}L_J \tag{3}$$

Die Bahndrehimpulsquantenzahl L wird dabei durch Buchstaben anstelle von Zahlen gekennzeichnet. Die Buchstaben S, P, D, F entsprechen den Zahlen $0, 1, 2, 3$. Im folgenden wird die LS-Kopplung als gegebene und gute Näherung angenommen.

2.2 normaler Zeeman-Effekt

Unter dem normalen Zeeman-Effekt wird die Aufspaltung derer Energieniveaus, dessen Spinquantenzahl $S = 0$ ist, unter Einfluss eines externen Magnetfeldes verstanden. Das aus dem Bahndrehimpuls $\hat{L}$ der Elektronen resultierende magnetische Moment wechselwirkt mit dem externen Magnetfeld und bewirkt eine Aufspaltung des Energieniveaus in $2L+1$ Niveaus. Bei $L = 0$ findet keine Wechselwirkung und somit keine Aufspaltung in mehrere Niveaus statt. Die Verschiebung ΔE der Energie zum ursprünglichen Energieniveau berechnet sich zu:

$$\Delta E = \mu_B B m_L \tag{4}$$

Wobei μ_B das Bohrsche Magneton und m_L die Magnetquantenzahl zur z-Komponente des Bahndrehimpulses $\hat{L}_z$ bezeichnet.

2.3 anormaler Zeeman-Effekt

Ist die Spinquantenzahl $S \neq 0$ so findet selbst bei $L = 0$ unter Einfluss eines schwachen Magnetfeldes eine Aufspaltung der Energiniveaus statt. Dieser Effekt wird anormaler Zeeman-Effekt genannt. Der Begriff eines schwachen Magnetfeldes bezeichnet hierbei, dass der Einfluss des Magnetfeldes auf die Enegieniveaus kleiner sein soll als der Einfluss der Spin-Bahn-Kopplung. Der nicht-verschwindende Spin $\hat{S}$ verursacht einen nicht-verschwindenden Anteil am magnetischen Moment des Atoms. Die Wechselwirkung des externen Magnetfeldes findet mit dem Gesamtdrehimpuls $\hat{J}$ statt. Die Energieniveaus spalten sich somit in $2J+1$ Niveaus auf. Die Verschiebung ΔE der Energie zum ursprünglichen Energieniveau berechnet sich zu:

$$\Delta E = g_J \mu_B B m_J \tag{5}$$

dabei bezeichnet m_J die Magnetquantenzahl zur z-Komponente des Gesamtdrehimpulses $\hat{J}_z$ und g_J den Landé-Faktor. Der Landé-Faktor berechnet sich über:

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2 \cdot J(J+1)} \tag{6}$$

2.4 Spektrallinien

Beim Übergang von einem höheren Energieniveau in ein niedrigeres wird elektromagnetische Strahlung emittiert, dessen Energie der Energiedifferenz der beiden Niveaus entspricht. Die in diesem Versuch untersuchten Spektrallinien entstehen durch folgende Übergänge von Cadmium:

1. ${}^1P_1 \leftrightarrow {}^1D_2$

   $\lambda = 643,8\,\mathrm{nm}$

2. ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3P_1$

   $\lambda = 480,0\,\mathrm{nm}$

wobei λ die Wellenlänge der emittierten Strahlung des jeweiligen Überganges bezeichnet. Liegt ein äußeres Magnetfeld an, spaltet sich das Niveau ${}^1D_2$ in fünf Niveaus auf, während alle anderen Niveaus sich nur in drei aufspalten. Erlaubte Übergänge der aufgespaltenen Niveaus sind nur solche bei denen sich m_J nur um maximal 1 ändert.
Unterschieden werden die Übergänge nach:

- $\Delta m_J = 0$

  Diese Übergange werden π- Übergange genannt

- $\Delta m_J = \pm 1$

  Diese Übergange werden σ_+- bzw σ_-- Übergange genannt

Die Strahlung aus π-Übergängen ist parallel zum angelegten Magnetfeld polarisiert, während sie bei $\sigma_\pm$-Übergänge in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld zirkular polarisiert ist. Letztere Polarisation wird in diesem Versuch als senkrecht zum Magnetfeld wahrgenommen, da dies der Projektion zirkular-polarisierter Strahlung auf eine entfernte Ebene parallel zum Magnetfeld entspricht.
Die π-Übergänge von ${}^1P_1 \leftrightarrow {}^1D_2$ haben nach Gleichung 4 die gleiche Energieverschiebung, womit sich keine Spektrallinien-Aufspaltung feststellen lässt. Bei ${}^3S_1 \leftrightarrow {}^3P_1$ sind die Energieverschiebungen der beiden Niveaus nach Gleichung 5 aufgrund von verschiedenen Landé-Faktoren unterschiedlich, weshalb die Spektrallinie sich in drei aufteilt. Aufgrund der geringen Aufspaltung bei den, in diesem Versuch verfügbaren, Magnetflussstärken sind diese aber kaum oder gar nicht zu unterscheiden.
Die Spektrallinien der $\sigma_\pm$-Übergänge spalten sich alle auf, aber auch hier ist im Rahmen dieses Experiments nur eine Aufspaltung in jeweils drei Linien unterscheidbar.

2.5 Lummer-Gehrcke Platte

Die Lummer-Gehrcke Platte besteht aus einem optischen Element durch das ein einfallender Strahl auf zwei planparallele Platte geleitet wird. Dort wird der Strahl zwischen den beiden Platten hin und her reflektiert und bei jeder Reflexion tritt ein Bruchteil aus der Lummer-Gehrcke Platt aus. Diese Strahlen sind parallel und haben einen äquidistanten

Abstand zueinander.
Der Austrittswinkel hängt unter anderem von der Wellenlänge der einfallenden Strahlung ab, wodurch sich damit die Aufspaltung einer Spektrallinie beobachten lässt in Form einer räumlichen Aufteilung der Austretenden Strahlung. Das Auflösungsvermögen der Lummer-Gehrke Platte wird beschrieben durch:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L(n^2-1)}{\lambda} \tag{7}$$

Das Dispersionsgebiet $\Delta\lambda$ in welchem die Strahlen nicht interferieren ist gegeben durch:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{n^2-1}} \tag{8}$$

3 Fehler

Der Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0} x_i \tag{9}$$

Die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{10}$$

Der Fehler des Mittelwertes:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_2}^2 + ... + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2} \tag{12}$$

Die Prozentuale Abweichung:

$$Abweichung = \frac{ExperimentellerWert - Theoriewert}{Theoriewert} \times 100 \tag{13}$$

4 Durchführung

In diesem Kapitel sollen die einzelnen Schritte des Versuches erklärt werden.

Zunächst wird mittels einer Hall-Sonde die Magnetflussstärke des verwendeten Elektromagneten vermessen, um den Zusammenhang zwischen der Flussstärke und der eingestellten Stromstärke berechnen zu können.
Danach wird der Versuch wie in Abbildung 1 aufgebaut. Das aus der Spektrallampe tretende Licht wird auf ein Geradsichtprisma fokussiert. Dieses lenkt das Licht wellenlängenabhängig ab. Ein eingebrachter Polarisationsfilter lässt danach die verschiedenen Übergänge voneinander trennen. Der Spalt S_2 lässt je nach Einstellung nur einen kleinen Wellenlängenbereich, um die zu untersuchende Wellenlänge hindurch. Zuletzt wird das Licht durch eine Linse auf die Lummer-Gehrcke Platte geleitet und danach mittels einer Kamera photographiert.

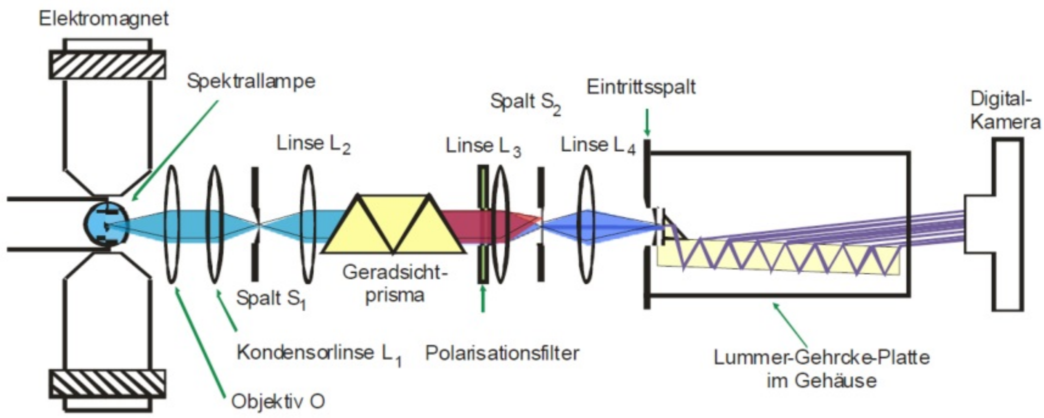

Abbildung 1: Versuchsaufbau

Untersucht wurde die Aufspaltung der Spektrallinien bei 480 nm und 643,8 nm Wellenlänge. Dazu wurde jeweils vier Photos gemacht. Zwei Photos mit eingeschaltetem Magnetfeld für parallel zum Magnetfeld und senkrecht dazu polarisierte Strahlung und zwei Photos ohne Magnetfeld für dieselben Polarisationen.

5 Auswertung

In diesem Kapitel werden die aufgenommenen Messwerte ausgewertet.

5.1 Vorbereitung

5.1.1 Luhmer-Gehrcke Platte

Die Eigenschaften der Luhmer-Ghercke Platte lassen sich mit den Materialeigenschaften der Platte bestimmen. Die in diesem Versuch verwendete Luhmer Ghercke Platte hat die

Maße $d = 4\,\text{mm}$, $L = 120\,\text{mm}$. Die beiden Spektrallinien welche betrachtet werden sollen sind:

$$\lambda_{rot} = 643{,}8\,\text{nm und } \lambda_{blau} = 480{,}0\,\text{nm}.$$

Für diesen Versuchsaufbau ergeben sich die Wellenlängenabhängigen Brechungsindizes:

$$n_{rot} = 1.4567 \text{ und } n_{blau} = 1.4635.$$

Mit diesen Angaben kann dann über Gleichung 7 das Auflösungsvermögen A und über Gleichung 8 das Dispersionsgebiet $\varDelta\lambda$ berechnet werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Wellenlängenabhängige Werte der Lummer-Gehrke Platte.

Größe	643,8 nm	480,0 nm
A	209128.59	285458.06
$\varDelta\lambda_D$/pm	48.91	26.95

5.1.2 Bestimmung der Landé-Faktoren

Die Unterschiede in der Aufspaltung der Spektrallinien ist abhängig von den Landé Faktoren g_j. Für den roten Übergang zwischen den Niveaus $^1P_1 \leftrightarrow^1 D_2$ und den blauen Übergang zwischen den Niveaus $^3S_1 \leftrightarrow^3 P_1$ ergeben sich für die einzelnen Landé Faktoren, mit Gleichung 6 die Werte in Tabelle 2. Mit der Notation $^{2S+}1L_j$ für die Niveaus, wobei L der Name des Niveaus ist, welchem ein fester Drehimpuls zugeordnet ist, ergibt sich Für

Tabelle 2: Berchnung der Landé-Faktoren.

Niveau	J	S	L	g_j
$^1P_1$	1	0	1	1
$^1D_2$	2	0	2	1
$^3S_1$	1	1	0	2
$^3P_1$	1	1	1	$\frac{2}{2}$

die Energiedifferenz zwischen den einzelnen Niveaus ergeben sich nun aus Gleichung 4 folgend die Werte für den normalen Zeeman Effekt in Tabelle 3. Für den anormalen

Tabelle 3: Berchnung der Landé-Faktoren des normalen Zeemann-Effektes.

643,8 nm	m =-1	m =0	m =+1
	$\mu_B B$	0	$\mu_B B$

Zeeman Effekt können die Faktoren über Gleichung 5 bestimmt werden. Sie sind in Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: Berchnung der Landé-Faktoren des anormalen Zeemann-Effektes.

480,0 nm	m =-1	m =0	m =+1
	$\frac{3}{2}\mu_B B$	$-\frac{1}{2}\mu_B B$	$--BB$
	$2\mu_B B$	0	$-2\mu_B B$
	$--$	$\frac{1}{2}\mu_B B$	$\frac{3}{2}\mu_B B$

5.1.3 Berechnung der optimalen B-Feldstärken

Um zu vermeiden das sich Linien überschneiden da sie sich entweder zuweit voneinander entfernen oder nicht weit genug, werden hier die optimalen Feldstärken berechnet. Es ergibt sich über:

$$B = \frac{hc}{4\mu_B \lambda^2 g_{ij}} = \frac{\Delta E}{\mu_B g_{ij}} \tag{14}$$

Die sich daraus ergebenden idealen B-Feldstärken sind in Tabelle 5 dargestellt.

Tabelle 5: Berchnung der Landé-Faktoren des anormalen Zeemann-Effektes.

Δg_{ij}	B/T
0.5	1.25
1.0	0.63
1.5	0.42
2.0	0.31

5.2 Vermessung des Elektromagneten

Es ist aufgrund des Versuchsaufbaus nicht möglich die magnetische Flussdichte B zwischen den beiden Polschuhen des Elektromagneten zu bestimmen während die Cadmiumdampflampe eingeführt ist. Daher muss das Magnetfeld vorher mittels einer Hallsonde in abhängigkeit vom Spulenstrom ausgemessen werden. Wenn die Cadmiumdampflampe dann eingeführt ist muss nurnoch der passende Spulenstrom eingestellt werden. In Tabelle 6 sind die Messdaten für die abfallende Seite der Hysteresekurve dargestellt.
Die Daten aus Tabelle 6 wurden in Abbildung 2 dargestellt. Zudem wurde an die Daten ein Polynom dritten Grades angepasst die verwendeten Parameter lauten:

$$a_3 = -0.00105 \pm 0.00008$$

$$a_2 = 0.00359 \pm 0.00062$$

Tabelle 6: In der Tabelle sind die Messdaten für den Spulenstrom I und die resultierende Flussdichte B dargestellt.

$I/[\mathrm{A}]$	$B/[\mathrm{mT}]$
5.0	452.1
4.8	440.4
4.6	430.2
4.4	415.4
4.2	403.4
4.0	388.0
3.8	371.7
3.6	356.7
3.4	338.8
3.2	320.9
3.0	305.5
2.8	288.2
2.6	266.8
2.4	248.8
2.2	229.6
2.0	209.2
1.6	169.8
1.2	131.1
0.8	89.4
0.4	50.7
0.0	9.9

$$a_1 = 0.09673 \pm 0.00135$$

$$a_0 = 0.01059 \pm 0.00080$$

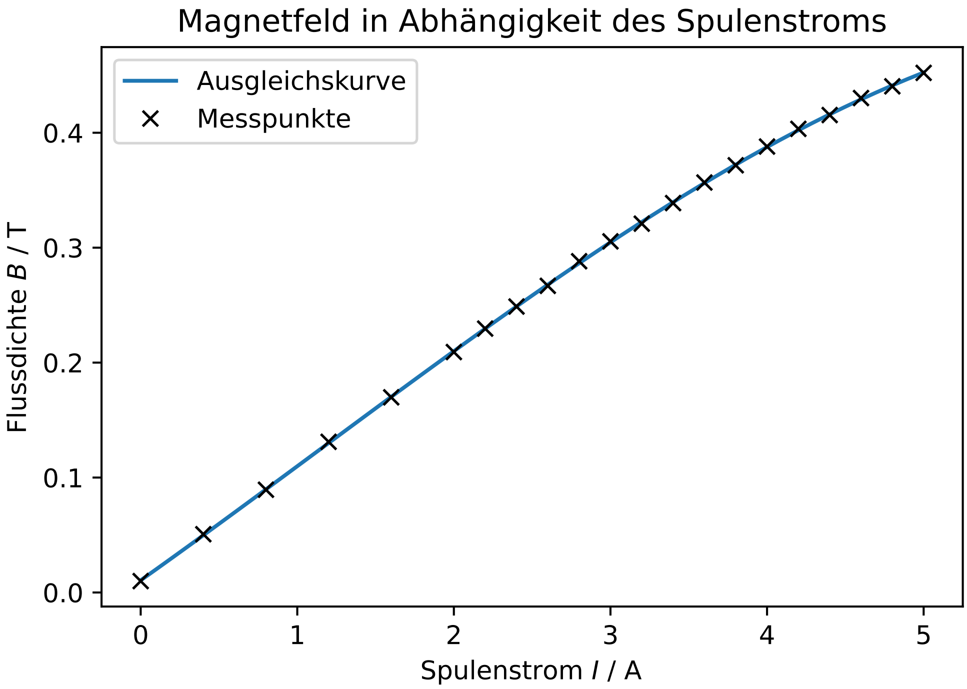

Abbildung 2: Magnetische Flussdichte des verwendeten Elektromagneten in Abhängigkeit des Spulenstroms.

5.3 Vermessung der Spektrallinien

Um die Linien zu vermessen wurde das Licht aus der Lummer-Geehrke Platte mit einer CAD-Kamera aufgenommen. Anschließend wurde mittels eines Python-Programms jeweils die vertikal mittlere Pixelzeile herausgeschnitten und in Graustufen umgerechnet. Die jeweiligen Werte für die Helligkeit wurden gegen die Pixelposition aufgetragen, Die jeweiligen Plots sind in Unterabschnitt 5.5 zu sehen. Das Programm zählte dann die Pixel welche zwischen zwei Maxima liegen.

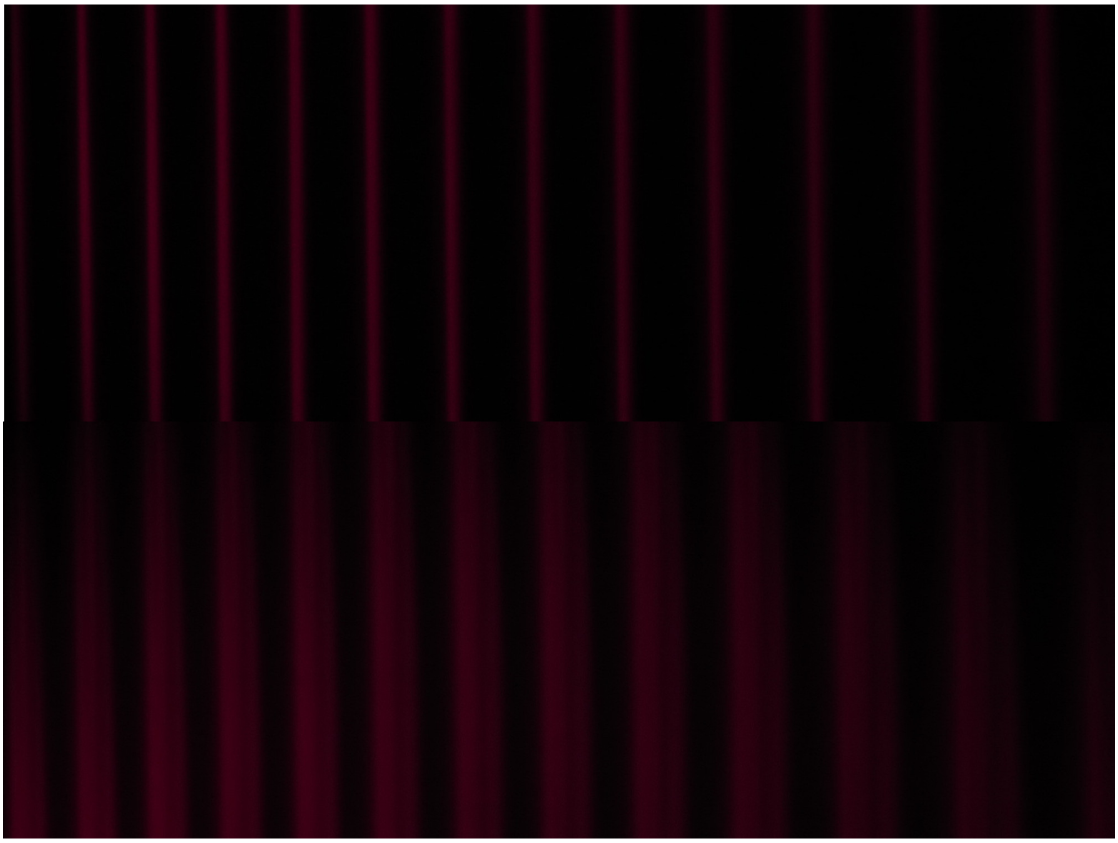

Abbildung 3: Die rote Spektrallienie, oben ohne Magnetfeld, unten mit Magnetfeld.

5.3.1 Die rote Sigma-Linie

Diese Daten sind mit der zugehörigen Wellenlängenverschiebung $\delta\lambda$ in **??** dargestellt. Die Wellenlängenverschiebung berechnet sich über:

$$\delta\lambda = \frac{\delta s}{2\delta S}\Delta\lambda_D \tag{15}$$

Aus diesen Daten wurde dann jeweils ein Mittelwert nach Gleichung 9 mit zugehörigem

Tabelle 7: Wellenlaengenverschiebung der roten Linie.

Mode Nr.	ΔS/px	δS /px	$\delta\lambda$
0	119	37	107.6754
1	124	31	94.005
2	124	41	124.3292
3	133	52	169.1308
4	134	47	154.0176
5	145	53	187.9367
7	149	44	160.327
8	160	56	219.1168
9	165	48	193.6836
10	180	71	312.5349
11	196	81	388.2476
12	218	75	399.8392
∅			209.24±29.86

Fehler nach Gleichung 11 berechent.

5.3.2 Die blaue Pi-Linie

5.3.3 Die blaue Sigma-Linie

5.4 Bestimmung der Lanndé-Faktoren

Um die Landé Faktoren zu bestimmen, wird von der Formel für die Veränderung der Energie Gleichung 5 ausgegangen:

$$\Delta E = g_{ij}\mu_B B m_J \Leftrightarrow g_{ij} = \frac{\Delta E}{\mu_B B}$$

μ_B ist dabei das Bohrsche Magneton und $g = g_{ij}$ der gewünschte Landé Faktor, nach dem direkt umgestellt wurde. In erster Näherung

$$\Delta E = E(\lambda + \delta\lambda) - E(\lambda)$$

ergibt die Taylorentwicklung:

$$\Delta E = \frac{\delta E}{\delta\lambda}E(\lambda).$$

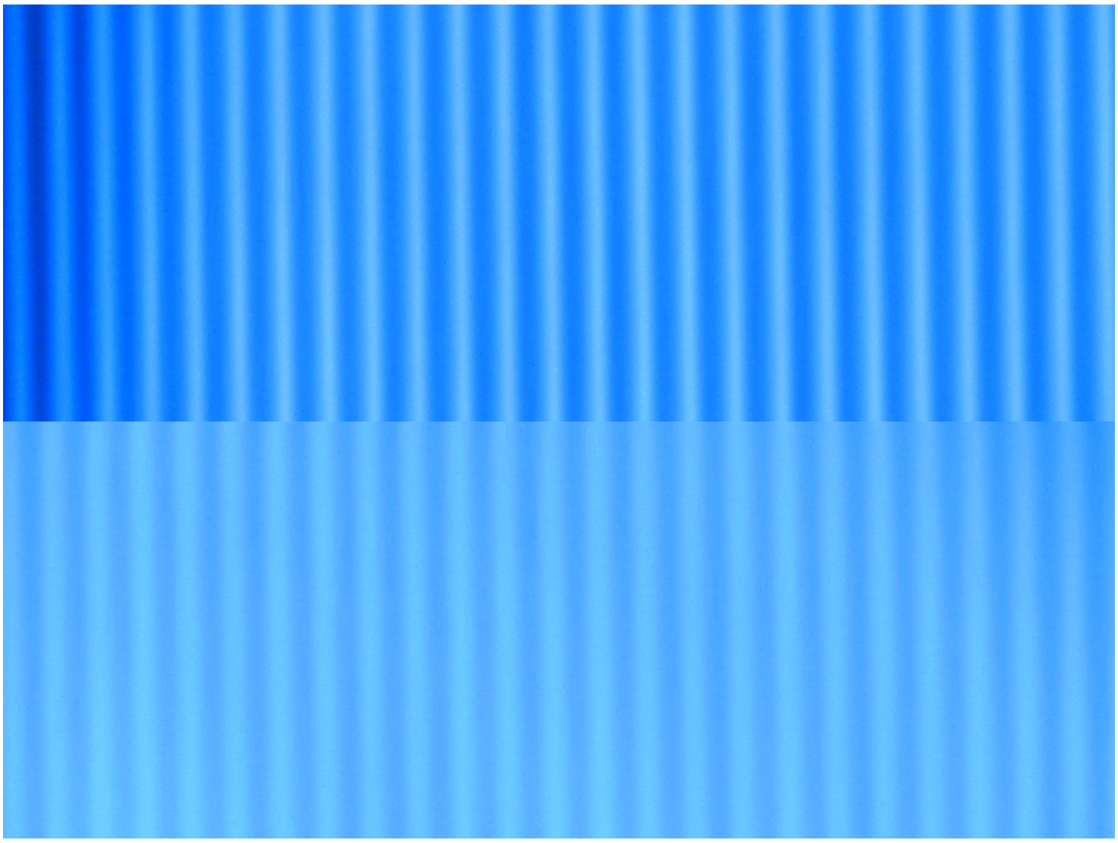

Abbildung 4: Die rote Spektrallienie, oben ohne Magnetfeld, unten mit Magnetfeld.

Tabelle 8: Wellenlaengenverschiebung der blauen Linie.

Mode Nr.	ΔS/px	δS /px	$\delta\lambda$
0	36	18	8.7318
1	35	17	8.0176
2	33	17	7.5595
3	37	15	7.4786
4	35	19	8.9609
5	36	18	8.7318
6	37	19	9.4729
7	36	4	1.9404
8	37	23	11.4672
9	36	24	11.6424
10	36	4	1.9404
12	38	20	10.241
13	38	19	9.729
14	37	21	10.4701
15	36	25	12.1275
16	41	22	12.1544
17	37	19	9.4729
18	35	5	2.3581
19	40	23	12.397
20	38	22	11.2651
21	39	20	10.5105
∅			8.89±0.7

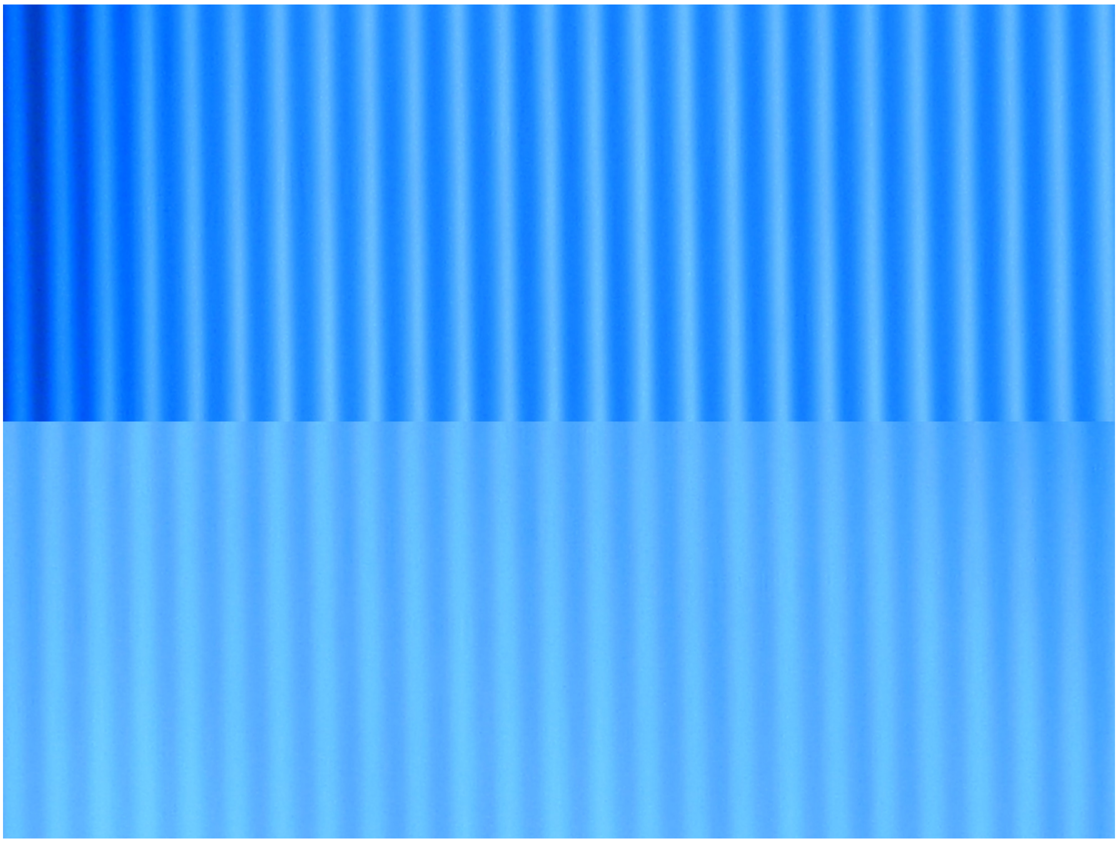

Abbildung 5: Die rote Spektrallienie, oben ohne Magnetfeld, unten mit Magnetfeld.

Diese wird mit der quantenmechanischen Energie $E(\lambda) = \frac{hc}{\lambda}$ in den Landé Faktor eingesetzt und es folgt:

$$g = \frac{\delta\lambda hc}{\mu_B B \lambda^2}$$

Nun können mithilfe der in Unterabschnitt 5.3 bestimmten Wellenlängenverschiebungen die Landé-Faktoren berechnet werden.

Tabelle 9: Die berechneten Landé-Faktoren

λ/nm	Übergang	$\delta\lambda$/pm	g_j
648.8	σ	209.24 ± 29.86	$23.5504\pm$
480.0	σ	8.89 ± 0.7	$2.3817\pm$
480.0	π	$\pm$	$\pm$

5.5 Helligkeitsplots

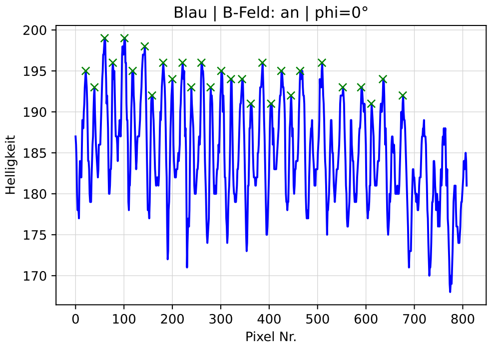

Abbildung 6

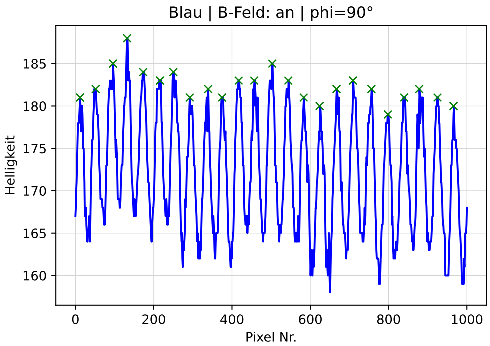

Abbildung 7

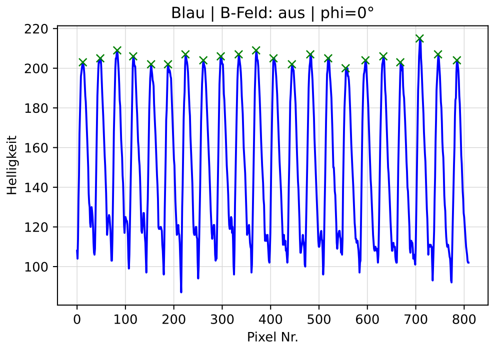

Abbildung 8

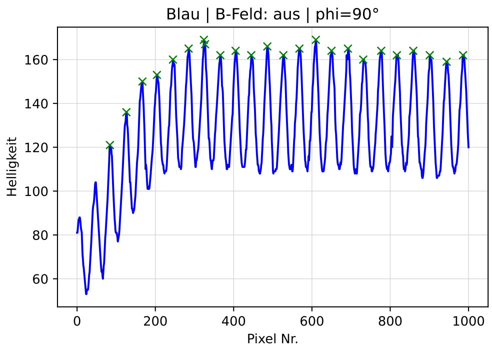

Abbildung 9

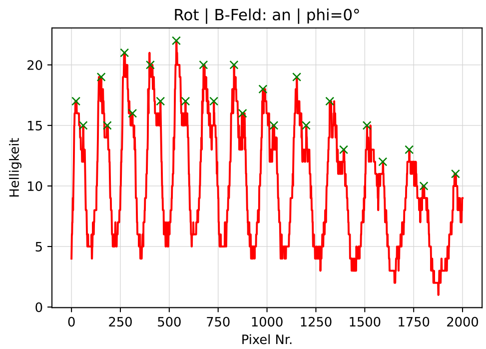

Abbildung 10

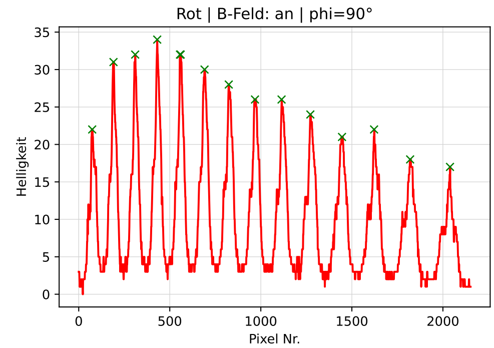

Abbildung 11

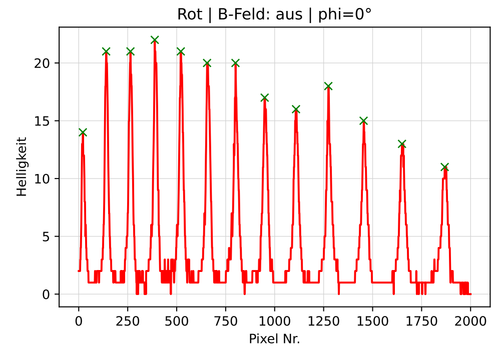

Abbildung 12

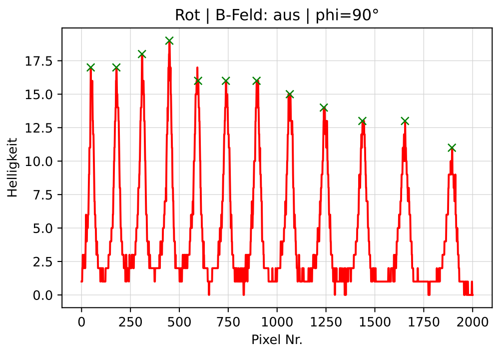

Abbildung 13

6 Diskussion

Dieses Kapitel befasst sich mit der Diskussion der im Abschnitt 5 erhaltenen Ergebnisse.