

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Leander Flottau
leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 22.06.2021

Abgabe: 29.06.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 der Schwingkreis	3
2.2 Gedämpfte harmonische Schwingung	3
3 Erzwungene Schwingung	5
4 Durchführung	6
5 Fehler	7
6 Auswertung	8
6.1 Berechnung der Abklingdauer	8
6.2 Der Aperiodische Grenzfall	8
6.3 Resonanzüberhöhung	10
6.4 Phasenverschiebung	10
7 Diskussion	15
8 Literatur	15
9 Anhang	15

1 Zielsetzung

In diesem experiment wird sowohl die Gedämpfte als auch die ungedämpfte Schwingung anhand eines Schwingkreises nachvollzogen.

2 Theorie

2.1 der Schwingkreis

Eine Schaltkreis aus einem Kondensator der Kapazität C und einer Spule der Induktivität L bilden einen sogenannten Schwingkreis. Da sowohl der Kondensator als auch die Spule als Energiespeicher dienen, kann die im Schaltkreis gespeicherte Energie periodisch zwischen beiden Energiespeichern oszillieren, da sie abwechselnd in elektrischem und magnetischem Feld gespeichert wird. Dadurch kommt im idealen Fall, also bei vollständiger Energieerhaltung, eine ungedämpfte harmonische Schwingung zustande.

Wenn zu dieser Schaltung zusätzlich ein Energieverbraucher in Form eines ohmschen Widerstandes hinzugefügt wird, geht kontinuierlich ein Teil der Energie am Widerstand verloren, da sie in Wärme umgewandelt wird. Daher führt das System in diesem Fall eine gedämpfte harmonische Schwingung aus.

Weiterhin kann der Schwingkreis auch zusätzlich von außen durch anlegen einer Sinusförmigen Spannung angeregt werden. Dies führt zu einer erzwungenen Schwingung. Wenn die Frequenz der anregenden Spannung mit der durch Kapazität und Induktivität festgelegten Eigenfrequenz übereinstimmt, führt dies zu Resonanz.

2.2 Gedämpfte harmonische Schwingung

In einem herkömmlichen Schwingkreis wie er in Abbildung 1 dargestellt ist, gilt für die Spannungen gemäß der 2. Kirchhoffschen Regel

$$U_C(t) + U_R(t) + U_L(t) = 0.$$

Mit den herkömmlichen Relationen für Kondensator, Spule und Widerstand lassen sich

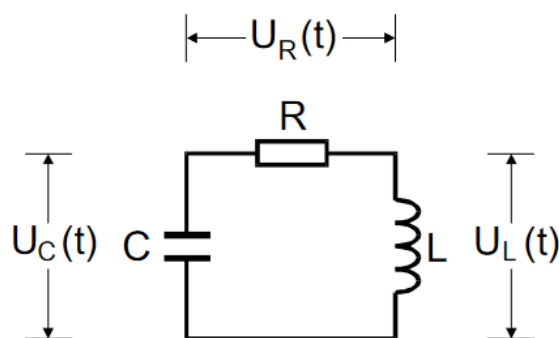


Abbildung 1: Schwingkreis

die einzelnen Spannungen durch den Strom I bzw. die Ladung Q ausdrücken. Daraus lässt sich unter Berücksichtigung von

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

die Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (1)$$

herleiten. Diese hat die allgemeine Lösung

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (Ae^{2\pi i v t} + Be^{-2\pi i v t}) \quad (2)$$

mit der imaginären Einheit i und beliebigen Konstanten A und B . Die weiteren Konstanten sind durch

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{2L}$$

und

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (3)$$

definiert. Die genaue Form dieser Gleichung hängt nun vom Verhältnis der Größen $\frac{1}{LC}$ und $\frac{R^2}{4L^2}$ zueinander ab. Je nachdem welcher der Terme größer, v also reell oder imaginär, ist ergeben sich drei verschiedene Fälle, für die sich das Verhalten des Schwingkreises qualitativ unterscheidet.

Im ersten Fall gilt $1/LC > R^2/4L^2$, v ist also reellwertig. In diesem Fall lässt sich die allgemeine Lösung auf eine Gleichung der Form

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi v t + \eta)$$

mit reellen Konstanten A_0 und η zurückführen. Für diesen Fall zeigt sich also eine gedämpfte Schwingung mit einer e-Funktion als Einhüllenden. Der Wert von μ bestimmt dabei die Abnahmegeschwindigkeit Schwingung. Der Wert

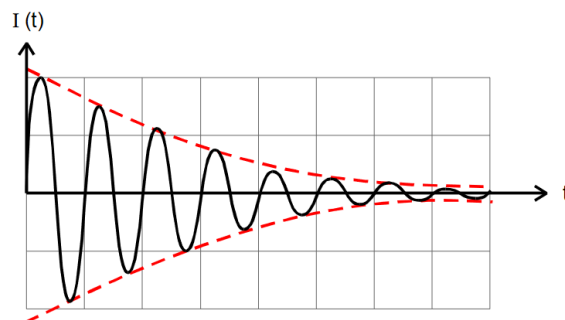


Abbildung 2: gedämpfte Schwingung

$$T_{ex} = \frac{2L}{R} \quad (4)$$

gibt die Zeitspanne an, nach der die Amplitude das $1/e$ -fache seines Ausgangswertes erreicht hat und wird als Abklingzeit bezeichnet. Die Periodendauer der Schwingung beträgt

$$T = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}}$$

Im zweiten Fall ist $1/LC < R^2/4L^2$, v ist also komplexwertig. In diesem Fall besteht die allgemeine Lösung nur noch aus reellen e-funktionen, da die imaginären Anteile durch das imaginäre v kompensiert werden. In diesem Fall zeigt sich eine sogenannte aperiodische Dämpfung, bei welcher kein oszillatorisches Verhalten mehr auftritt. Nach einer gewissen Zeit zeigt sich ein Verlauf der Form

$$\exp -(R/2L - \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC})t$$

der einen einfachen Relaxationsvorgang darstellt.

Für den dritten Fall $1/LC = R^2/4L^2$, also $v = 0$, nimmt die allgemeine Lösung die Form

$$I(t) = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

an. Dies wird als der aperiodische Grenzfall bezeichnet, bei dem das System schnellstmöglich in seinen Grundzustand zurückkehrt.

3 Erzwungene Schwingung

In die vorherige Schaltung wird nun eine Spannungsquelle eingefügt, welche eine sinusförmige Spannung liefert, und dadurch ein System in Form einer angeregten Schwingung erzeugt. Durch die zusätzliche Spannungsquelle nimmt die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Zeit die Form

$$LC \frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + RC \frac{d U_C(t)}{dt} + U_C(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (5)$$

an. Diese Gleichung hat eine allgemeine Lösung der Form $u(w)e^{i\omega t}$ mit der komplexen Funktion $u(w)$, für die sich die Gleichung

$$\frac{U_0(1 - LCw^2 - iwCR)}{(1 - LCw^2)^2 + w^2 R^2 C^2}$$

ergibt wobei sich U_0 und w auf Frequenz und Amplitude der anregenden Spannung beziehen. Aus diesem Zusammenhang lassen sich Amplitude und Phase in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmen. Die Phasenverschiebung hat die Form

$$\phi(w) = \arctan\left(\frac{-wRC}{1 - LCw^2}\right). \quad (6)$$

Aus dem Betrag der Funktion $u(w)$ folgt die Frequenzabhängigkeit der Amplitude, die durch die Gleichung

$$U(w) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LCw^2)^2 + w^2 R^2 C^2}}$$

beschrieben wird. Hieraus folgt, dass die Amplitude der Kondensatorspannung für verschwindende Frequenzen gegen U_0 und für große Frequenzen gegen 0 geht. Darüber hinaus erreicht die Amplitude bei geeigneter Frequenz ein Maximum, welches signifikant größer als die ursprüngliche Erregerfrequenz ist. Dieses Phänomen wird als Resonanz bezeichnet. Die zugehörige Resonanzfrequenz w_{Res} , bei der das Phänomen auftritt, beträgt

$$w_{Res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - R^2 2L^2}. \quad (7)$$

Im Falle schwacher Dämpfung, also für einen vernachlässigbar kleinen Widerstand, nähert sich diese Frequenz der Frequenz w_0 der ungedämpften harmonischen Schwingung und die Resonanzamplitude beträgt

$$U_{max} = \frac{1}{w_0 RC} U_0 \quad (8)$$

wobei der Faktor $1/w_0 RC$ auch als Gütefaktor q bezeichnet wird. Weiterhin von Bedeutung ist die Breite der Resonanzkurve. Diese wird durch die beiden Frequenzen w_+ und w_- definiert, an denen die Spannung den Wert $w = 1/\sqrt{2}U_0$ annimmt. Daraus folgt für die Breite

$$w_+ - w_- \approx \frac{R}{L}.$$

Im umgekehrten Fall der starken Dämpfung, also für $1/LC \gg R^2/2L^2$ zeigt das System ein qualitativ anderes Verhalten. Anstelle von Resonanz strebt das System von der Erregerspannung ausgehend gegen 0. Aufgrund dieser Eigenschaft kann eine solche Schaltung auch als Tiefpass genutzt werden.

Da die Phasenverschiebung die Form eines arcustangens hat, verschwindet selbige für $w = 0$, während sie sich für sehr hohe Frequenzen dem Wert π nähert. Davon Abgesehen kann durch die Gleichung

$$w_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2}} \quad (9)$$

die Frequenz bestimmt werden, an der die Phasenverschiebung den Wert $\pi/4$ bzw. $3\pi/4$ annimmt.

4 Durchführung

Für den Versuch wird ein RCL-Kreis mit regelbarem Widerstand, ein Generator sowie ein Oszilloskop zum Darstellen der Spannungen verwendet. Durch den Generator kann der Schwingkreis sowohl durch einen einzelnen Impuls angeregt als auch durch eine Sinusspannung gespeist werden. Die Frequenz der anregenden Spannung lässt sich am

Generator regulieren.

Für die erste Messreihe wird der Widerstand der Schaltung so eingeschaltet, dass eine Schwingung zustande kommt, wie im ersten Fall der Theorie beschrieben. Anschließend wird das System durch den Generator angeregt, sodass eine gedämpfte harmonische Schwingung wie in Abbildung 2 dargestellt eintritt. Nun wird die Amplitude in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Anschließend wird der Widerstand am RCL-Kreis reguliert, bis der aperiodische Grenzfall eintritt und der zugehörige Widerstandswert notiert.

Für die darauffolgende Messreihe wird am Generator eine Sinusspannung eingestellt die zusammen mit der Kondensatorspannung am Oszilloskop angezeigt wird. Dann kann unter Veränderung der Frequenz der anregenden Spannung sowohl die Amplitude als auch die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung untersucht werden, um deren Frequenzabhängigkeit festzustellen.

5 Fehler

Der Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0} x_i \quad (10)$$

Die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (11)$$

Der Fehler des Mittelwertes:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (12)$$

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (13)$$

Die Prozentuale Abweichung:

$$Abweichung = \frac{ExperimentellerWert - Theoriewert}{Theoriewert} \times 100 \quad (14)$$

6 Auswertung

In diesem Kapitel sollen die aufgenommenen Messwerte ausgewertet werden. Über die Schaltung wurden zudem noch folgende Werte notiert:

$$\begin{aligned}L &= 16,78 + / - 0,09\text{mH}, \\C &= 2,066 + / - 0,006\text{nF}, \\R &= 67,2 + / - 0,2.\end{aligned}$$

6.1 Berechnung der Abklingdauer

Die aufgenommenen Wertepaare aus Spannung $U(t)$ und t wurden in Abbildung 3 aufgetragen und es wurde eine Ausgleichskurve hindurchgelegt. Sie hat die Parameter:

$$\begin{aligned}a &= 3.3568 \pm 0.0669 \Leftrightarrow U_0 = 3.3568 \pm 0.0669\text{V} \\b &= -1119.1751 \pm 100.4186 \Leftrightarrow \mu = 178.1222 \pm 15.9821/\text{s}.\end{aligned}$$

Der erste Parameter kann hier als Spannung $a = U_0$ interpretiert werden. Über die Beziehung

$$R_{eff} = 4\pi\mu L = -2Lb$$

lässt sich der Dämpfungswiderstand R_{eff} , mit $L = 16,78 \pm 0,09\text{mH}$ zu

$$R_{eff} = 37.6 \pm 3.4\Omega$$

bestimmen. Damit lässt sich über Gleichung 14 die prozentuale Abweichung des gemessenen gegenüber des Verbauten Widerstandes $R = 67,2 \pm 0,2$ zu $44 \pm 5\%$ bestimmen. Nun kann auch die Abklingdauer mithilfe des Zusammenhangs

$$T_{ex} = -\frac{1}{b}$$

berechnet werden. Damit folgt sofort:

$$T_{ex} = 0.00089 \pm 0.00008\text{s}.$$

6.2 Der Aperiodische Grenzfall

Der Widerstand wurde solange verändert bis der Aperiodische Grenzfall eingetreten ist. Der zu diesem Zeitpunkt eingestellte Widerstand liegt bei:

$$R_{ap} = 2,91\text{k}.$$

Der entsprechende Widerstand lässt sich mit den gegebenen für L und c Werten auch über:

$$R_{ap} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 5,700 + / - 0,017\text{k}$$

bestimmen. Die nach ?? berechnete prozentuale Abweichung beträgt 48.94%. Sie lässt sich vor allem dadurch erklären das es schwierig ist exakt den richtigen Widerstand einzustellen da das eintreten des Aperiodischengrenzfalls nur schwer auf dem Oszilloskop zu erkennen ist, es handelt sich also um einen Ablesefehler. Erschwerend kommt hinzu das Verschiedene Widerstände von Leitungen und Innenwiderstände von Geräten wie dem Oszilloskop und dem Erreger nicht ideal sind.

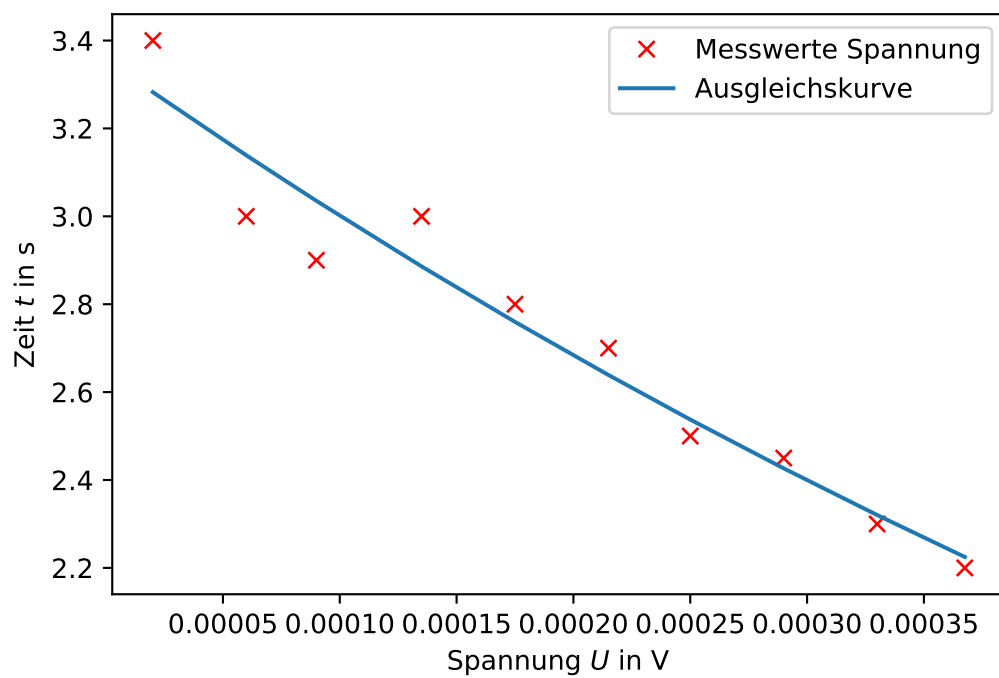


Abbildung 3: Spannungsverlauf in der Zeit

6.3 Resonanzüberhöhung

In Abbildung 4 ist die Erregerfrequenz gegen die Spannung halblogarithmisch aufgetragen. Die rote Linie zeigt dabei an, wo die Resonanzüberhöhung bzw. die Güte berechnet wurde. In Abbildung 5 ist nur der Bereich der Resonanzüberhöhung linear dargestellt. Da es keine Messwerte gibt, welche genau den Wert $\frac{\max(U_C)}{U_E \cdot \sqrt{2}}$ mit $U_E = 50V$, haben wurde zwischen dem jeweils darüber und darunter liegenden Messwert linear interpoliert. Dies führt zu folgenden Ergebnissen:

$$\begin{aligned}\omega_- &= 25,2245 \text{ kHz}, \\ \omega_+ &= 26,6224 \text{ kHz}.\end{aligned}$$

Die Güte lässt sich dann einfach über:

$$\begin{aligned}q &= \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}, \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ \Rightarrow q &= \frac{1}{\sqrt{LC}(\omega_+ - \omega_-)} = 121.5 \pm 0.4\end{aligned}$$

Der theoretische Wert lässt sich dann über:

$$\begin{aligned}q &= \frac{L}{\sqrt{LC}R}, \\ \Rightarrow q &= 42.41 \pm 0.18\end{aligned}$$

berechnen. Die über Gleichung 14 berechnete prozentuale Abweichung beträgt dann 186.5%.

6.4 Phasenverschiebung

Aus der als Zeitwerte gemessenen Phasenverschiebung lassen sich über:

$$\phi = \Delta t f 360^\circ$$

die Phasenverschiebungen in Grad berechnen. Sie wurden in Abbildung 6 halblogarithmisch gegen die Frequenz aufgetragen. In Abbildung 7 ist der Selbe Sachverhalt noch einmal linear aufgetragen. Zudem sind hier noch Grad bei den Winkeln $45^\circ, 90^\circ$ und 135° eingetragen. Um die zugehörigen Frequenzen zu finden wurde wieder linear interpoliert. Die daraus resultierenden Frequenzen lauten:

$$\begin{aligned}45^\circ &\rightarrow \omega_1 = 25,5728 \text{ kHz}, \\ 90^\circ &\rightarrow \omega_{res} = 25,9684 \text{ kHz} \text{ und} \\ 135^\circ &\rightarrow \omega_2 = 26,4182 \text{ kHz}.\end{aligned}$$

Die theoretischen pendants lassen sich über die nachstehenden Gleichungen bestimmen.

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &= \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}, \\ \omega_{res} &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}\end{aligned}$$

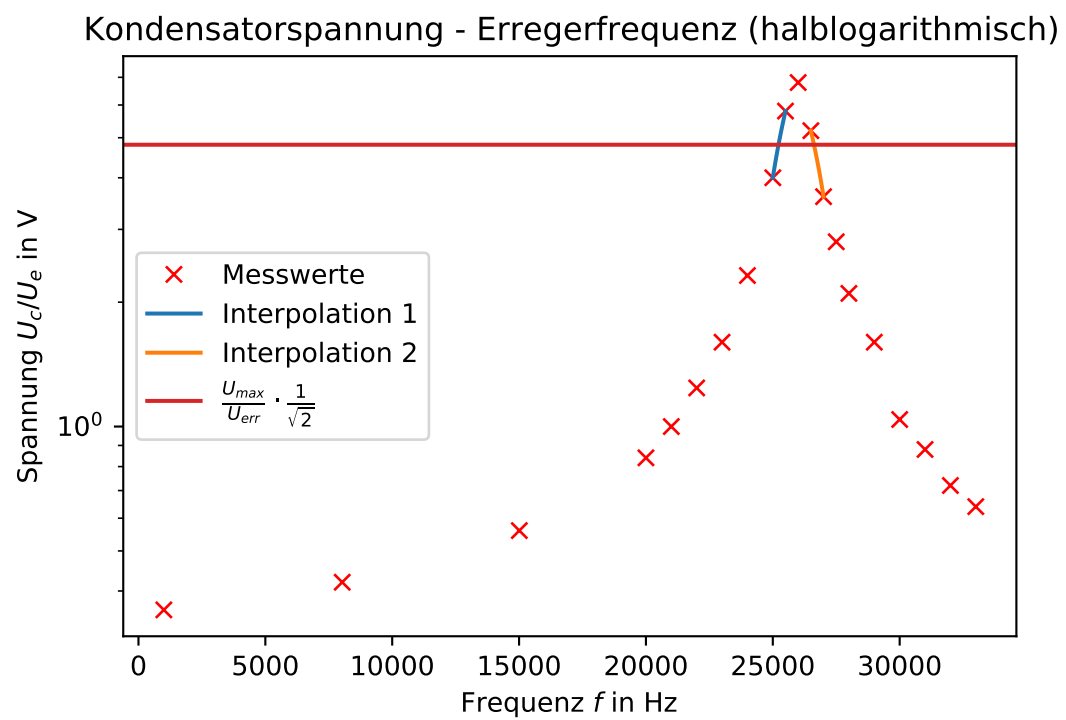


Abbildung 4: Spannungsverlauf in Abhängigkeit der Frequenz

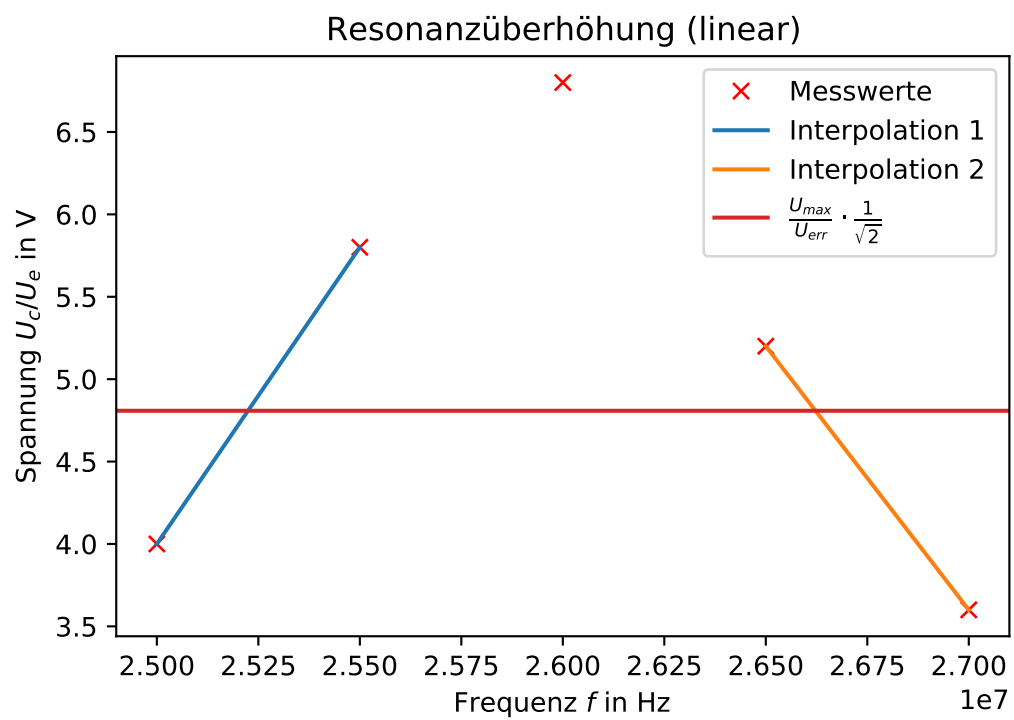


Abbildung 5: Spannungsverlauf in Abhängigkeit der Frequenz

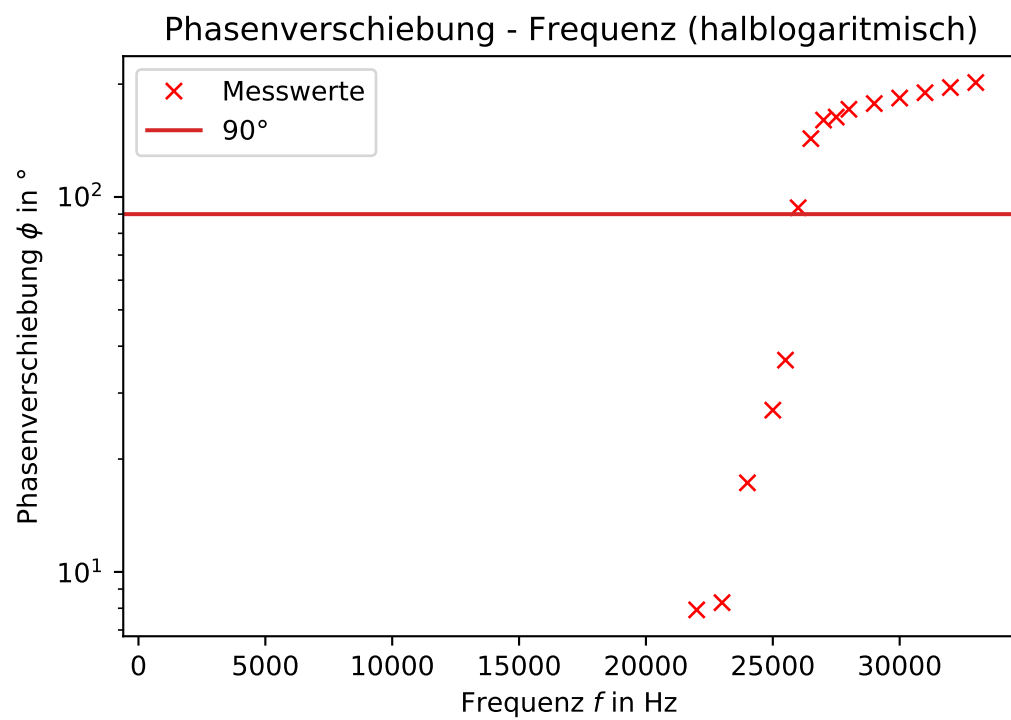


Abbildung 6: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz.

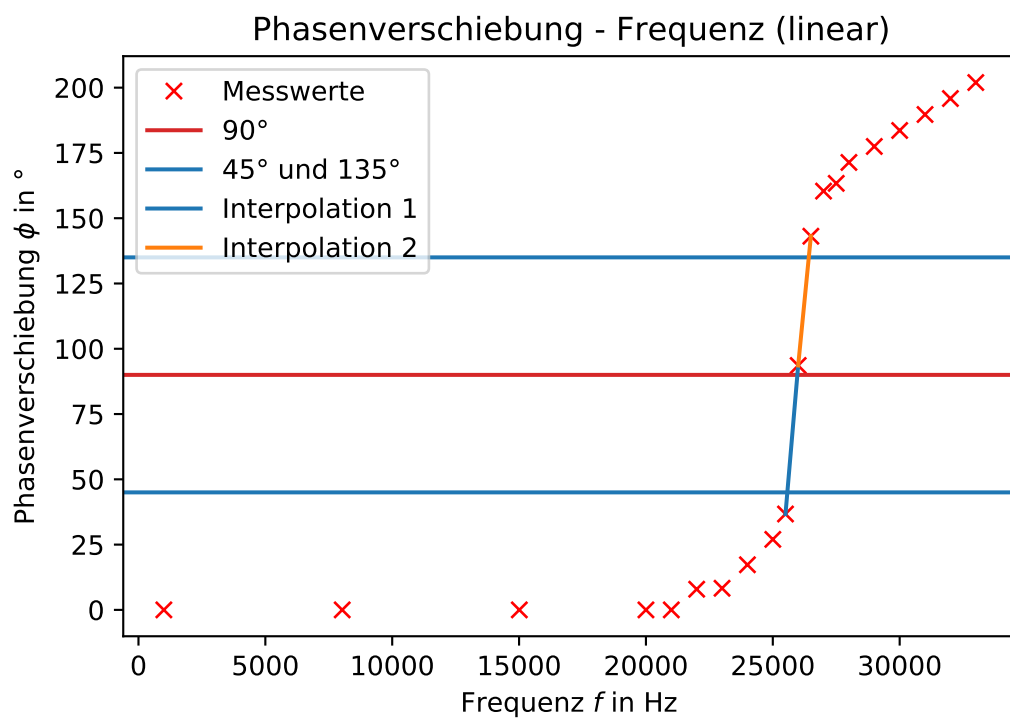


Abbildung 7: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz.

Damit folgt dann sofort:

$$\begin{aligned}45^\circ \rightarrow \omega_1 &= (2.774 \pm 0.011) \times 10^5 \text{Hz}, \\90^\circ \rightarrow \omega_{res} &= (1.0398 \pm 0.0027) \times 10^5 \text{kHz} \text{ und} \\135^\circ \rightarrow \omega_2 &= (1.175 \pm 0.004) \times 10^5 \text{kHz}.\end{aligned}$$

Die nach Gleichung 14 berechneten relativen Abweichungen betragen für ω_1 90.78%, für ω_2 77,9% und für ω_{res} 74,59%.

7 Diskussion

In diesem Versuch sollte zunächst in Unterabschnitt 6.1 die Abklingdauer bestimmt werden. Das Ergebnis liegt hier bei $T_{ex} = 0.89 \pm 0.08 \text{ms}$. Es liegen keine Vergleichswerte vor das Ergebnisch scheint jedoch autentisch zu sein. Im nächsten Versuchsteil in Unterabschnitt 6.2 wurde dann der theoretische widerstands Wert des aperiodeischen Grenzfalls berechnet und festgestellt das dieser um 48,94% vom experimentell ermittelten Wert abweicht. Im nächsten Kapitel Unterabschnitt 6.3 wurde dann die Resonanzüberhöhung bzw. die Güte der Schaltung ermittelt. Der Experimentelle Wert liegt hier bei 121.5 ± 0.4 und weicht damit um 186.5% vom errechneten Wert, welcher bei $q = 42.41 \pm 0.18$ liegt, ab. Im darauf folgenden Abschnitt, Unterabschnitt 6.4 wurden dann die Frequenzen untersucht bei denen die Phasenverschiebung bei $45^\circ, 90^\circ$ und 135° liegt die hier gemessenen werte weichen für ω_1 um 90.78%, für ω_2 um 77,9% und für ω_{res} 74,59% ab. Die großen Abweichungen bei allen Messwerten werden vorallem daran liegen das die Werte vom Oszilloskop nur ungenau abgelesen werden konnten und das diverse andere Faktoren wie Innenwiderstände vernachlässigt wurden.

8 Literatur

1. TU Dortmund Versuch 354 Gedämpfte und Erzwungene Schwingungen

9 Anhang

Auf den nächsten Seiten sind die Originalmesswerte zu finden.

LCR-Kreis

t	U
0,9 · 50 μs	3,4 · 10 V
1,2 · 50 μs	3,0 · 10 V
1,8 · 50 μs	2,9 · 10 V
2,4 ^{25 μs} · 25 μs	6,0 · 5 V
7,0 · 25 μs	5,6 · 5 V
8,6 · 25 μs	5,4 · 5 V
(8,6 + 1,4) · 25 μs	5 · 5 V 4,9 · 5 V
(8,6 + 3) · 25 μs	4,9 · 5 V
(11,6 + 1,6) · 25 μs	4,6 · 5 V
(11,6 + 3,7) · 25 μs	4,4 · 5 V

Aperiodischer

Grenzfall $R = 2,97 \text{ k}\Omega$

Kriechfall $R = 3,47 \text{ k}\Omega$

	U_{SS}	Δt
112 Hz	$1,8 \times 10 \text{ V}$	0
8,031 kHz	$2,1 \times 10 \text{ V}$	0 0
15,011 kHz	$2,8 \times 10 \text{ V}$	0 0
20,01 kHz	$4,2 \times 10 \text{ V}$	0
27,011 kHz	$5 \times 10 \text{ V}$	0
22,011 kHz	$6,2 \times 10 \text{ V}$	$0,2 \times 5 \mu\text{s}$
23,01 kHz	$4 \times 20 \text{ V}$	$0,2 \times 5 \mu\text{s}$
29,01 kHz	$5,8 \times 20 \text{ V}$	$0,4 \times 5 \mu\text{s}$
25,01 kHz	$4 \times 50 \text{ V}$	$0,6 \times 5 \mu\text{s}$
25,51 kHz	$5,8 \times 50 \text{ V}$	$0,8 \times 5 \mu\text{s}$
26	$6,8 \times 50 \text{ V}$	$2 \times 5 \mu\text{s}$
26,5	$5,2 \times 50 \text{ V}$	$3 \times 5 \mu\text{s}$
27	$3,6 \times 50 \text{ V}$	$3,3 \times 5 \mu\text{s}$
27,5 27,5	$2,8 \times 50 \text{ V}$	$3,3 \times 5 \mu\text{s}$
28 28	$2,1 \times 50 \text{ V}$	$3,4 \times 5 \mu\text{s}$

φ	U_{SS}	Δt
29 29	$1,6 \times 50$	$3,4 \times 5 \mu\text{s}$
30 30	$2,6 \times 20$	$3,4 \times 5 \mu\text{s}$
31	$2,2 \times 20$	$3,4 \times 5 \mu\text{s}$
32	$1,8 \times 20$	$3,4 \times 5 \mu\text{s}$
33	$1,6 \times 20$	$3,4 \mu\text{s}$

13.5.21