

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Leander Flottau
leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.06.2021

Abgabe: 15.06.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem experiment wird sowohl die Gedämpfte als auch die ungedämpfte Schwingung anhand eines Schwingkreises nachvollzogen.

2 Theorie

2.1 der Schwingkreis

Eine Schaltkreis aus einem Kondensator der Kapazität C und einer Spule der Induktivität L bilden einen sogenannten Schwingkreis. Da sowohl der Kondensator als auch die Spule als Energiespeicher dienen, kann die im Schaltkreis gespeicherte Energie periodisch zwischen beiden Energiespeichern oszillieren, da sie abwechselnd in elektrischem und magnetischem Feld gespeichert wird. Dadurch kommt im idealen Fall, also bei vollständiger Energieerhaltung, eine ungedämpfte harmonische Schwingung zustande.

Wenn zu dieser Schaltung zusätzlich ein Energieverbraucher in Form eines ohmschen Widerstandes hinzugefügt wird, geht kontinuierlich ein Teil der Energie am Widerstand verloren, da sie in Wärme umgewandelt wird. Daher führt das System in diesem Fall eine gedämpfte harmonische Schwingung aus.

Weiterhin kann der Schwingkreis auch zusätzlich von außen durch anlegen einer Sinusförmigen Spannung angeregt werden. Dies führt zu einer erzwungenen Schwingung. Wenn die Frequenz der anregenden Spannung mit der durch Kapazität und Induktivität festgelegten Eigenfrequenz übereinstimmt, führt dies zu Resonanz.

2.2 Gedämpfte harmonische Schwingung

In einem herkömmlichen Schwingkreis wie er in Abbildung ?? dargestellt ist, gilt für die Spannungen gemäß der 2. Kirchhoffschen Regel

$$U_C(t) + U_R(t) + U_L(t) = 0.$$

Mit den herkömmlichen Relationen für Kondensator, Spule und Widerstand lassen sich

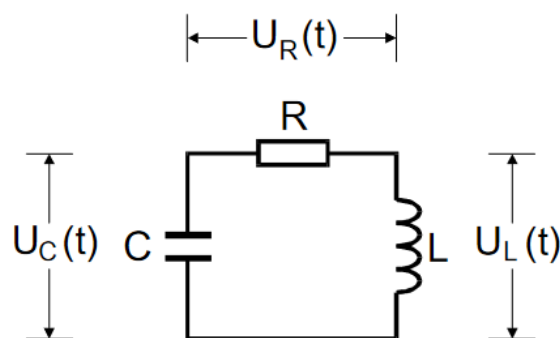


Abbildung 1: Schwingkreis

die einzelnen Spannungen durch den Strom I bzw. die Ladung Q ausdrücken. Daraus lässt sich unter Berücksichtigung von

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

die Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (1)$$

herleiten. Diese hat die allgemeine Lösung

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (Ae^{2\pi i v t} + Be^{-2\pi i v t}) \quad (2)$$

mit der imaginären Einheit i und beliebigen Konstanten A und B . Die weiteren Konstanten sind durch

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{2L}$$

und

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (3)$$

definiert. Die genaue Form dieser Gleichung hängt nun vom Verhältnis der Größen $\frac{1}{LC}$ und $\frac{R^2}{4L^2}$ zueinander ab. Je nachdem welcher der Terme größer, v also reell oder imaginär, ist ergeben sich drei verschiedene Fälle, für die sich das Verhalten des Schwingkreises qualitativ unterscheidet.

Im ersten Fall gilt $1/LC > R^2/4L^2$, v ist also reellwertig. In diesem Fall lässt sich die allgemeine Lösung auf eine Gleichung der Form

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi v t + \eta)$$

mit reellen Konstanten A_0 und η zurückführen. Für diesen Fall zeigt sich also eine gedämpfte Schwingung mit einer e-Funktion als Einhüllenden. Der Wert von μ bestimmt dabei die Abnahmegeschwindigkeit Schwingung. Der Wert

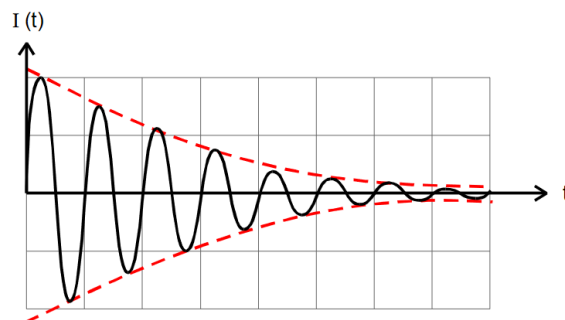


Abbildung 2: gedämpfte Schwingung

$$T_{ex} = \frac{2L}{R} \quad (4)$$

gibt die Zeitspanne an, nach der die Amplitude das $1/e$ -fache seines Ausgangswertes erreicht hat und wird als Abklingzeit bezeichnet. Die Periodendauer der Schwingung beträgt

$$T = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - R^2/4L^2}}$$

Im zweiten Fall ist $1/LC < R^2/4L^2$, v ist also komplexwertig. In diesem Fall besteht die allgemeine Lösung nur noch aus reellen e-funktionen, da die imaginären Anteile durch das imaginäre v kompensiert werden. In diesem Fall zeigt sich eine sogenannte aperiodische Dämpfung, bei welcher kein oszillatorisches Verhalten mehr auftritt. Nach einer gewissen Zeit zeigt sich ein Verlauf der Form

$$\exp -(R/2L - \sqrt{R^2/4L^2 - 1/LC})t$$

der einen einfachen Relaxationsvorgang darstellt.

Für den dritten Fall $1/LC = R^2/4L^2$, also $v = 0$, nimmt die allgemeine Lösung die Form

$$I(t) = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

an. Dies wird als der aperiodische Grenzfall bezeichnet, bei dem das System schnellstmöglich in seinen Grundzustand zurückkehrt.

3 Erzwungene Schwingung

In die vorherige Schaltung wird nun eine Spannungsquelle eingefügt, welche eine sinusförmige Spannung liefert, und dadurch ein System in Form einer angeregten Schwingung erzeugt. Durch die zusätzliche Spannungsquelle nimmt die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Zeit die Form

$$LC \frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + RC \frac{d U_C(t)}{dt} + U_C(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (5)$$

an. Diese Gleichung hat eine allgemeine Lösung der Form $u(w)e^{i\omega t}$ mit der komplexen Funktion $u(w)$, für die sich die Gleichung

$$\frac{U_0(1 - LCw^2 - iwCR)}{(1 - LCw^2)^2 + w^2 R^2 C^2}$$

ergibt wobei sich U_0 und w auf Frequenz und Amplitude der anregenden Spannung beziehen. Aus diesem Zusammenhang lassen sich Amplitude und Phase in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmen. Die Phasenverschiebung hat die Form

$$\phi(w) = \arctan\left(\frac{-wRC}{1 - LCw^2}\right). \quad (6)$$

Aus dem Betrag der Funktion $u(w)$ folgt die Frequenzabhängigkeit der Amplitude, die durch die Gleichung

$$U(w) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LCw^2)^2 + w^2 R^2 C^2}}$$

beschrieben wird. Hieraus folgt, dass die Amplitude der Kondensatorspannung für verschwindende Frequenzen gegen U_0 und für große Frequenzen gegen 0 geht. Darüber hinaus erreicht die Amplitude bei geeigneter Frequenz ein Maximum, welches signifikant größer als die ursprüngliche Erregerfrequenz ist. Dieses Phänomen wird als Resonanz bezeichnet. Die zugehörige Resonanzfrequenz w_{Res} , bei der das Phänomen auftritt, beträgt

$$w_{Res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - R^2 2L^2}. \quad (7)$$

Im Falle schwacher Dämpfung, also für einen vernachlässigbar kleinen Widerstand, nähert sich diese Frequenz der Frequenz w_0 der ungedämpften harmonischen Schwingung und die Resonanzamplitude beträgt

$$U_{max} = \frac{1}{w_0 RC} U_0 \quad (8)$$

wobei der Faktor $1/w_0 RC$ auch als Gütefaktor q bezeichnet wird. Weiterhin von Bedeutung ist die Breite der Resonanzkurve. Diese wird durch die beiden Frequenzen w_+ und w_- definiert, an denen die Spannung den Wert $w = 1/\sqrt{2}U_0$ annimmt. Daraus folgt für die Breite

$$w_+ - w_- \approx \frac{R}{L}.$$

Im umgekehrten Fall der starken Dämpfung, also für $1/LC \gg R^2/2L^2$ zeigt das System ein qualitativ anderes Verhalten. Anstelle von Resonanz strebt das System von der Erregerspannung ausgehend gegen 0. Aufgrund dieser Eigenschaft kann eine solche Schaltung auch als Tiefpass genutzt werden.

Da die Phasenverschiebung die Form eines arcustangens hat, verschwindet selbige für $w = 0$, während sie sich für sehr hohe Frequenzen dem Wert π nähert. Davon Abgesehen kann durch die Gleichung

$$w_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2}} \quad (9)$$

die Frequenz bestimmt werden, an der die Phasenverschiebung den Wert $\pi/4$ bzw. $3\pi/4$ annimmt.

4 Durchführung

Für den Versuch wird ein RCL-Kreis mit regelbarem Widerstand, ein Generator sowie ein Oszilloskop zum Darstellen der Spannungen verwendet. Durch den Generator kann der Schwingkreis sowohl durch einen einzelnen Impuls angeregt als auch durch eine Sinusspannung gespeist werden. Die Frequenz der anregenden Spannung lässt sich am

Generator regulieren.

Für die erste Messreihe wird der Widerstand der Schaltung so eingeschaltet, dass eine Schwingung zustande kommt, wie im ersten Fall der Theorie beschrieben. Anschließend wird das System durch den Generator angeregt, sodass eine gedämpfte harmonische Schwingung wie in Abbildung ?? dargestellt eintritt. Nun wird die Amplitude in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Anschließend wird der Widerstand am RCL-Kreis reguliert, bis der aperiodische Grenzfall eintritt und der zugehörige Widerstandswert notiert.

Für die darauffolgende Messreihe wird am Generator eine Sinusspannung eingestellt die zusammen mit der Kondensatorspannung am Oszilloskop angezeigt wird. Dann kann unter Veränderung der Frequenz der anregenden Spannung sowohl die Amplitude als auch die Phasenverschiebung der Kondensatorspannung untersucht werden, um deren Frequenzabhängigkeit festzustellen.

5 Fehler

Der Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0} x_i \quad (10)$$

Die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (11)$$

Der Fehler des Mittelwertes:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (12)$$

Die Poissonverteilung:

$$\Delta N = \sqrt{N} \quad (13)$$

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (14)$$

6 Auswertung

In diesem Kapitel sollen die aufgenommenen Messwerte ausgewertet werden. Über die Schaltung wurden zudem noch folgende Werte notiert:

$$\begin{aligned}L &= 16,78 \pm 0,09 \text{mH}, \\C &= 2,066 \pm 0,006 \text{nF}, \\R &= 67,2 \pm 0,2.\end{aligned}$$

6.1 Berechnung der Abklingdauer

Die aufgenommenen Wertepaare aus Spannung $U(t)$ und t wurden in ?? aufgetragen und es wurde eine Ausgleichsgrade der Form hindurchgelegt. Sie hat die Parameter:

$$\begin{aligned}a &= -30461.525 \pm 2711.401 \\b &= 33.137 \pm 0.605\end{aligned}$$

Aus der Steigung a kann sofort über $T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{1}{a}$ die Abklingdauer berechnet werden. Sie liegt bei:

$$T_{ex} = 3.2828 \times 10^{-5}$$

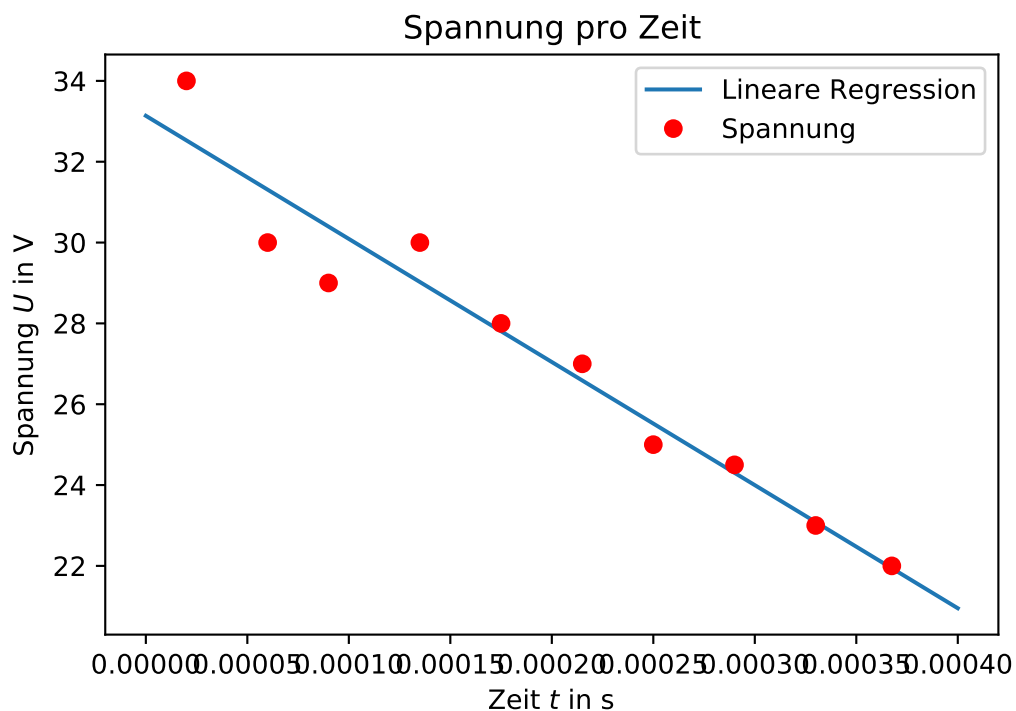


Abbildung 3: Spannungsverlauf in der Zeit

6.2 Der Aperiodische Grenzfall

Der Widerstand wurde solange verändert bis der Aperiodische Grenzfall eingetreten ist. Der zu diesem Zeitpunkt eingestellte Widerstand liegt bei:

$$R_{ap} = 2,91 \text{ k}$$

7 Auswertung

In diesem Abschnitt wird der Versuch ausgewertet.

7.1 gedämpften Schwingung

Zunächst wird bei einer gedämpften Schwingung die Zeitabhängigkeit der Amplitude untersucht, um den effektiven Dämpfungswiderstand bestimmen zu können. Dabei wird zunächst die in der Messung bestimmte Amplitudenspitzen in die Tabelle (??) eingetragen.

Tabelle 1: Gemessene Spannungsamplituden in Abhängigkeit von der Zeit

$t / \mu\text{s}$	U / V
0	-82
12,5	76
25,5	-64
40	56
55	-48
67,5	40
80	-36
93,75	32
107,5	-26
122,5	22
135	-20
148,75	16
162,5	-14
175	11
188,75	-10
202,5	9
216,25	-8

Es reicht jedoch die Einhüllende zu betrachten. Da die Einhüllende unterhalb der X-Achse und Oberhalb sich um ein Vorzeichen unterscheiden, kann zur Modellierung dieser, lediglich der Betrag der gemessenen Spannung betrachtet werden. Daraus folgen die Abbildungen (8), in welcher die Zeit gegen die Spannung und gegen den Spannungsbetrag aufgetragen werden.

Daten/a.pdf

Abbildung 4: Gemessene Spannungsamplituden mit Ausgleichsfunktion

Um die Einhüllende zu modellieren, kann diese in der Form

$$U = ae^{b \cdot t} \quad (15)$$

angenommen werden. Aus der Theorie gilt mit der ?? der Zusammenhang $a = U_0$ und $b = -2\pi\mu$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} a &= 0.0846 \pm 0.0008 \Leftrightarrow U_0 = 0.0846 \pm 0.0008 \text{V} \\ b &= -10852.9624 \pm 174.9926 \Leftrightarrow \mu = 1727.3026 \pm 27.85091 \frac{1}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Mit der Beziehung

$$R_{\text{eff}} = 4\pi\mu L = -2Lb \quad (16)$$

lässt sich der Dämpfungswiderstand R , mit $L = 3.5 \pm 0.01 \text{mH}$ zu

$$R_{\text{eff}} = 76 \pm 1, 2\Omega$$

bestimmen. Damit ist die Abweichung des verbauten Widerstands $R = 30,3 \pm 0,1\Omega$ $99.749 \pm 00.004\%$.

Die Abklingdauer kann mithilfe der Formel

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = -\frac{1}{b}$$

berechnet werden zu

$$T_{\text{ex}} = 92,1 \pm 1,5 \mu\text{s}.$$

7.2 aperiodische Grenzfall

Zusätzlich lässt sich der Dämpfungswiderstand R_{ap} experimentell bestimmen zu $R_{\text{ap}} = 12,725\Omega$. Der theoretische Wert lässt sich mit der Formel (??) mit den gegebenen Werten

$$R = 30,3 \pm 0,1 \Omega$$

$$L = 3,5 \pm 0,01 \text{ mH}$$

$$C = 5 \pm 0 \text{ nF}$$

aus dem Aufbau bestimmen. Daraus folgt das

$$R_{\text{ap}} = 1673.3 \pm 2.4 \, \Omega$$

und eine Abweichung von 660.46 %.

7.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die gemessene Kondensatorspannung U_C und die dazugehörige Frequenz ω wird in die ?? eingetragen und der Quotient $\frac{U_C}{U_{\text{Err}}}$ gegen die Frequenz ω halblogarithmisch in die Abbildung (9) aufgetragen.

Tabelle 2: Messwerte zur Kondensator- und Erregerspannung

ν / kHz	U_C / V	$U_{\text{Err}} / \text{V}$
10	50	50
15	55	50
20	65	50
25	87,5	50
30	130	50
32	177,5	50
34	265	40
36	430	30
38	405	30
40	235	40
42	150	50
45	97,5	50
50	55	50
55	40	50
58	32	50

Daten/c.pdf

Abbildung 5: Quotient $\frac{U_C}{U_{\text{Err}}}$ gegen die Frequenz ω halblogarithmisch aufgetragen

Aus der Grafik lässt sich für die Frequenzen, bei denen die Spannung den Wert $\frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{Err}}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ erreicht, entnehmen als

$$\begin{aligned}\omega_+ &= 35,1 \pm 0,3 \text{ kHz} \\ \omega_- &= 38,5 \pm 0,3 \text{ kHz} .\end{aligned}$$

Daraus folgt die Breite

$$b = 3,4 \pm 0,3 \text{ kHz} .$$

Für die Güte kann mit der ??

$$q = 70 \pm 6$$

berechnet werden.

Die theoretische Breite der Resonanzkurve lässt sich der ?? nähern. Mithilfe dieser Näherung lässt sich die Breite der Resonanzkurve und die Güte berechnen zu

$$\begin{aligned}b &= 8.657 \pm 0.025 \text{ kHz} \\ q &= 27.61 \pm 0.04 .\end{aligned}$$

Daraus folgt für den Fehler zwischen der theoretischen und gemessenen Güte ein Fehler von $1.55 \pm 0.22\%$.