702

Relaxationsverhalten des RC-Kreises

Leander Flottau
leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 25.05.2021 Abgabe: 08.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Bei diesem Experiment wird das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises anhand des Aufladevorgangs beobachtet. Außerdem wird die Frequenzabhängigkeit von Phase und Amplitude eines durch eine Sinusspannung gespeisten RC-Kreises bestimmt.

2 Theorie

Der allgemeine Relaxationsvorgang Allgemein wird von einem Relaxationsvorgang gesprochen, wenn ein System nach der Auslenkung aus seinem jeweiligen Anfangszustand wieder in selbigen zurückkehrt, ohne dabei jedoch oszillatorisches Verhalten an den Tag zu legen. Sowohl die Auf- als auch die Entladung eines Kondensators sind Beispiele für einen solchen Vorgang. Bei einem Relaxationsvorgang, bei dem sich die betrachtete Größe A asymptotisch seinem Endzustand $A(\infty)$ nähert, ist die Änderungsrate proportional zur Differenz vom Zustand $A(t)$ zum Endzustand:

$$\frac{dA}{dt} = c(A(t) - A(\infty))$$

was ein allgemeine Differentialgleichung für Relaxationsvorgänge darstellt Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich durch Integration und hat die allgemeine Form:

$$A(t) = A(\infty) + (A(0) + A(\infty))e^c t \tag{1}$$

mit dem Anfangszustand $A(0)$. Da die Funktion A(t) beschränkt sein soll ergibt sich weiterhin, dass $c < 0$ gelten muss.

2.1 Auf- und Entladevorgang des Kondensators

An einem Kondensator der Kapazität C mit der Ladung Q liegt eine Spannung U_C an, die durch

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

beschrieben wird. Daraus resultiert nach dem Ohmschen Gesetz ein Strom $I = U_C/R$ über den Wiederstand R. Da in der Zeit dt die Ladung Idt überfließt ergibt sich für den Strom weiterhin die Darstellung

$$\frac{dQ}{dt} = -I$$

als Ableitung der Ladung nach der Zeit. Mit den vorangegangenen grundlegenden Zusammenhängen für den Kondensator lässt sich daraus die eine Differentialgleichung für die Ladung des Kondensators $Q(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit herleiten

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \tag{2}$$

welche eine Form der allgemeinen Relaxationsgleichung **??** darstellt. Mit Anfangsbedingung $Q(\infty) = 0$, die sich ergibt da der Kondensator im Endzustand entladen sein soll wird der Entladevorgang durch die Gleichung

$$Q(t) = Q(0)\exp(-t/RC) \tag{3}$$

beschreiben.
Analog dazu lässt sich für die Anfangsbedingung des Aufladevorgangs, bei dem der Kondensator am Anfang entladen ($Q(0) = 0$) sein und am Ende der Aufladung durch die Spannung U_0 die Ladung $Q(\infty) = CU_0$ besitzen soll, die Gleichung

$$Q(t) = CU_0(1 - \exp(-t/RC)) \tag{4}$$

herleiten. Der Konstante Faktor RC wird als Zeitkonstante bezeichnet und gibt an wie schnell die Auf bzw. Entladung erfolgt. Je größer die Zeitkonstante, desto langsamer strebt das System seinen jeweiligen Endzustand an.

2.2 Relaxation unter periodischer Auslenkung

Der RC-Kreis soll nun durch eine Wechselspannung der Form

$$U(t) = U_0 cos(wt)$$

gespeist werden. Dadurch ergibt sich ein Vorgang der wiederum analog zu seinem mechanischen Äquivalent verläuft. Wenn die Frequenz der angelegten Wechselspannung klein gegenüber der Zeitkonstante ist entspricht die Spannung am Kondensator annähernd der anregenden Spannung. Wenn die Frequenz erhöht wird, verzögert sich die Auf bzw. Entladung des Kondensators jedoch gegenüber der anregenden Spannung, woraus sich eine frequenzabhängige Phaseverschiebung $\phi(w)$ ergibt. Daher kann die Spannung am Kondensator mit dem Ansatz

$$U_C(t) = A(w) cos(wt + \phi(w))$$

mit der Amplitude $A(w)$ beschreiben. Aus vorigen Überlegungen sowie den Kirchhoffschen Regeln lässt sich damit die Gleichung

$$U_0 \cos(wt) = -AwRC \sin(wt + \phi) + A(w)\cos(wt + \phi)$$

herleiten aus der sich wiederum die Frequenzabhängigkeit von Phase und Amplitude ableiten lassen. Die Phase ergibt sich daraus zu:

$$\phi(w) = \arctan(-wRC) \tag{5}$$

Die Phasenverschiebung verschwindet also für $w = 0$, und nähert sich bei hohen Frequenzen dem Grenzwert $\phi(\infty) = \pi/2$. Weiterhin ergibt sich für die Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung:

$$A(w) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + w^2R^2C^2}} \tag{6}$$

Hieraus lässt sich schließen, dass die Amplitude bei minimaler Frequenz der anregenden Spannung $U_0 entspricht (A(0)=U_0)$ während sie für hohe Frequenzen verschwindet. Aus letzterer Eigenschaft folgt weiterhin auch, dass RC-Kreise als Tiefpässe verwendet werden können, da sie kleine Frequenzen ungehindert passieren lassen und hohe Frequenzen herausfiltern. herleiten. Der Konstante Faktor RC wird als Zeitkonstante bezeichnet und gibt an wie schnell die Auf bzw. Entladung erfolgt. Je größer die Zeitkonstante, desto langsamer strebt das System seinen jeweiligen Endzustand an.

3 Durchführung

Für den Versuch wird ein RC-Kreis mit integriertem Generator sowie ein Oszilloskop verwendet. Am Oszilloskop kann dabei der Spannungsverlauf am Kondensator $U_C(t)$ abgelesen werden, während am Generator die Frequenz der anregenden Spannung reguliert wird. Für die erste Messreihe wurde der RC-Kreis mit einer Rechteckspannung gespeist, sodass auf dem Oszilloskop jeweils Auszüge von Auf- und Entladevorgang zu beobachten sind. Aus diesen wird eine Aufladekurve gewählt und diese mit ca. 15 Messwerten für Spannung und zugehörige Zeit ausgehend von einem selbstgewählten Ursprung abgetastet. Anschließend wird am Generator eine Sinusspannung gewählt. Unter Variirung der Frequenz der anregenden Spannung wird am Oszilloskop die Spitze-zu-Spitze-Spannung gemessen, um die Frequenzabhängigkeit der Amplitude zu untersuchen.
Zuletzt wird am Oszilloskop die Kondensatorspannung gemeinsam mit der anregenden Spannung angezeigt. Aus diesem Bild lässt sich, wiederum unter Veränderung der Generatorfrequenz, die Phasenverschiebung beider Spannungen ablesen und so deren Frequenzabhängigkeit bestimmen. Dies erfolgt wie in Abbildung 1 woraus sich durch

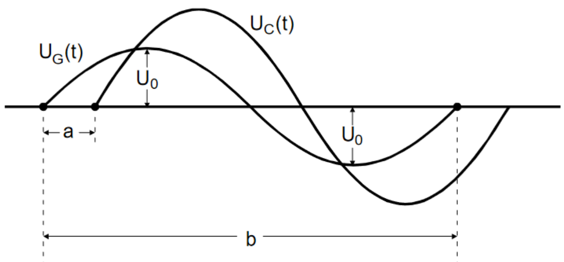

Abbildung 1: Bestimmung der Phasenverschiebung

$$\phi = \frac{a}{b} 2\pi \tag{7}$$

die Phasenverschiebung bestimmen lässt.

4 Auswertung

In diesem Kapitel sollen die aufgenommenen Messwerte Ausgewertet werden.

4.1 Lineare bestimmung von RC

Um einen Wert für die Konstante RC zu ermitteln, werden zunächst vom Oszilloskop einige Wertepaare für die Zeit t und die zugehörige Spannung U aufgenommen, diese werden ins Verhältnis zu $U_0 = 12\,\mathrm{V}$ gesetzt und in Abbildung 2 halblogarithmisch dargestellt. An die Messpunkte wird dann mit der numpy.polyfit Funktion ein Polynom ersten grades angepasst, aus dessen Steigung dann auf den Wert für RC geschlossen werden kann. Das Polynom hat die Form:

$$-ln(\frac{U}{U_0}) = \frac{t}{RC} + b$$

mit den durch python berechnetenParametern:

$$RC = (5.6 \pm 0.7) \times 10^{-3}\mathrm{s}$$
$$b = 0.17341742 \pm 0.05212717$$

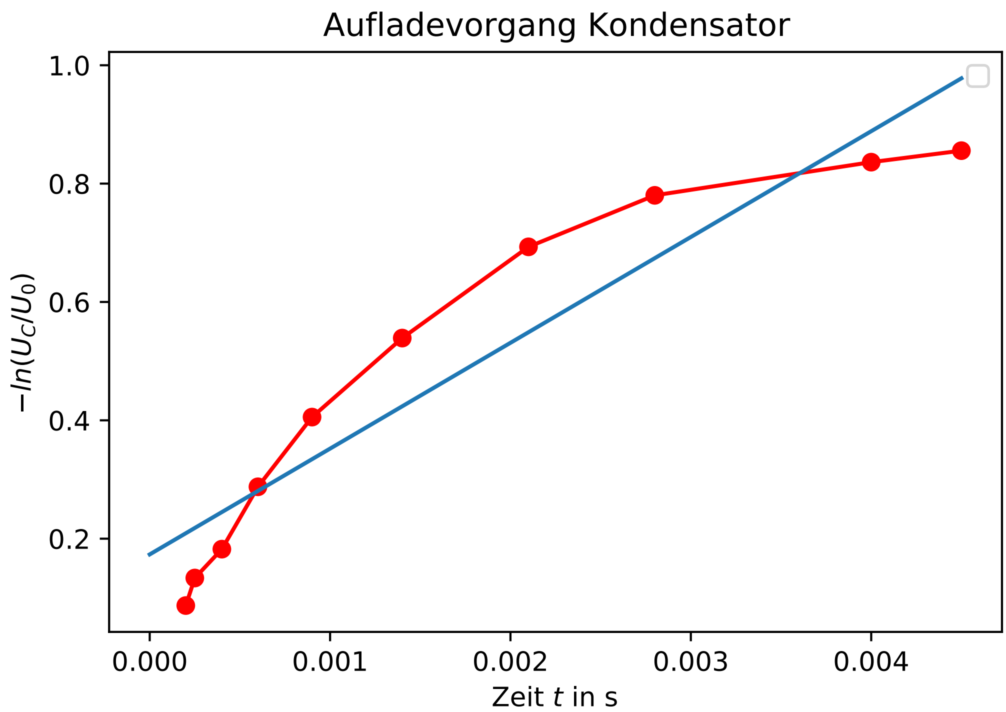

Abbildung 2: Aufladevorgang eines Kondensators

4.2 Bestimmung von RC anhand der Frequenz

Als nächstes werden Wertepaare aus Spitze-Spitze-Spannung U_{SS} und Frequenz f aufgenommen und auf gleiche Weise wie in Unterabschnitt 4.1 in Abbildung 3 dargestellt. An diese Messwerte wurde eine Funktion der Form:

$$\frac{U_{SS}}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 f^2 R^2 C^2}}$$

mithilfe der scipy.curve$_f itFunktionangepasst.DabeiergabsichderWert:$

$$RC = (1.5046 \pm 0.0986) \times 10^{-3}\mathrm{s}$$

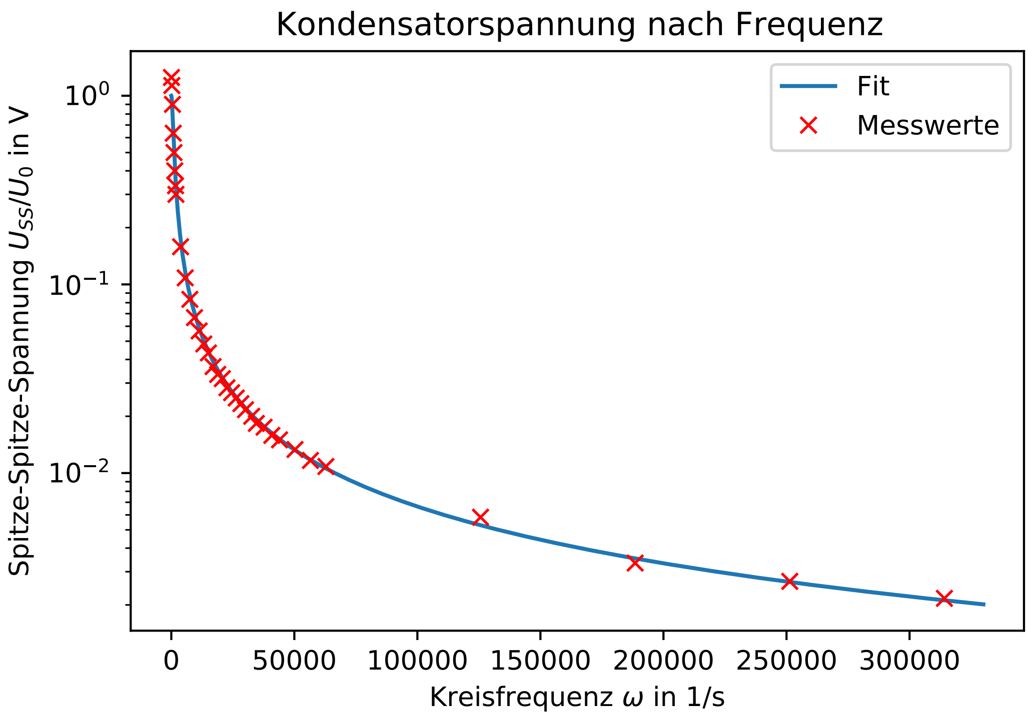

Abbildung 3: kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz

4.3 Bestimmmung von RC anhand der Phasenverschiebung

Im folgenden wird die Phasenverschiebung in Abhängigkeit zur Frequenz gemessen. Dazu wird die Verschiebung zwischen den beiden Maxima vom Oszilloskop abgelesen und mittels:

$$b = \frac{c}{f}$$
$$\phi = 2\pi\frac{a}{b}$$

in Winkel umgerechnet. Da es drei gleiche Werte gibt wird angenommen das hier die Phasenverschiebung bereits an ihrem maximum von 2π angekommen ist und die Kurve wird daran skaliert. Anschließend wird eine Kurve der Form:

$$\phi = a * arctan(f * RC)$$

angepasst. Dies führt zu einem Wert von:

$$RC = (14.37 \pm 5.81) \times 10^{-3}\mathrm{s}$$

Der zugehörige Plot ist in Abbildung 4 zu sehen. In Abbildung 5 wird die Spannung U_{SS}

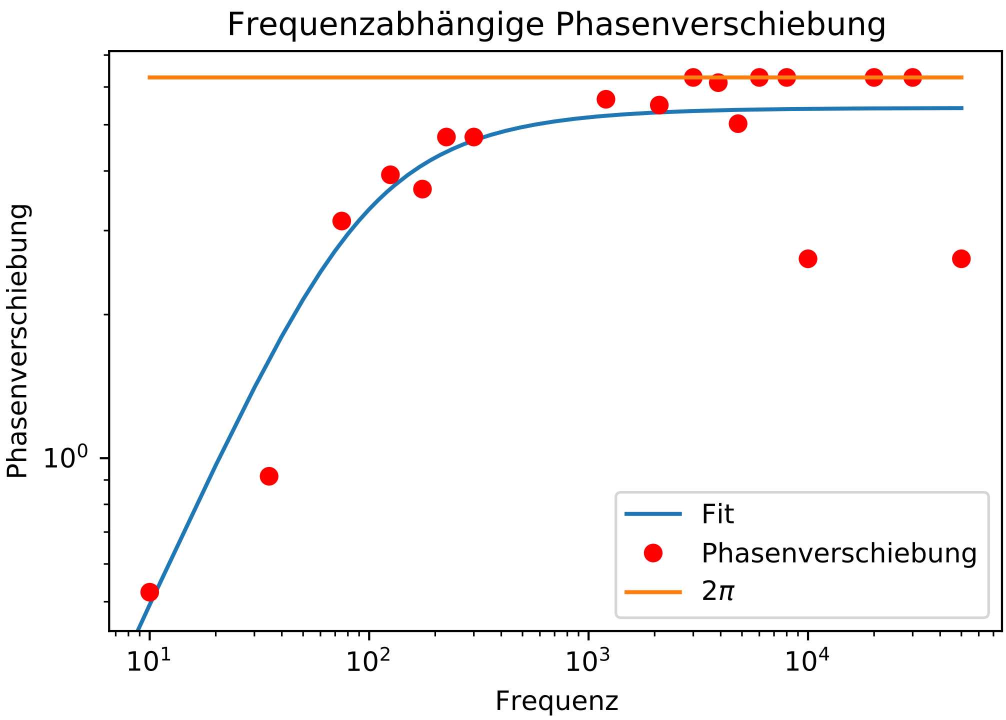

Abbildung 4: Phasenverschiebung

gegen die Phasenverschiebung ϕ aufgetragen.

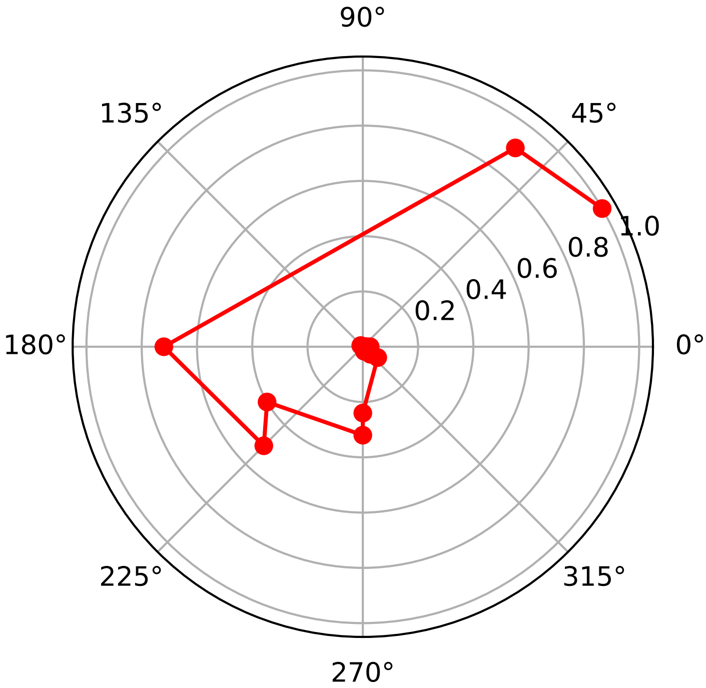

Abbildung 5: Phasenverschiebung pro Spannung

5 Diskuusion

In diesem Cersuch wird auf drei verschiedene Arten die Konstante RC berechnet. Mit der ersten Methode in Unterabschnitt 4.1 wird an Wertepaare aus Spannung U und Zeit t an die Aufladekurve des Kondensators ein Polynom ersten Grades angepasst Abbildung 2, aus dessen Steigung man auf die Größe von RC schließen kann, diese liegt in dem Fall bei $RC = (5.6 \pm 0.7) \times 10^{-3}$s. Als nächstes wird dann in Unterabschnitt 4.2 eine Funktion an Wertepaare aus Kreisfrequenz ω und Spitze-Spitze-Spannung U_{SS} angepasst. Wie in Abbildung 3 zu sehen ist passt der Fit sehr gut an die Messdaten was dafür spricht das das Ergebnis von $RC = (1.5046 \pm 0.0986) \times 10^{-3}$s das genauste ist obwohl es im Vergleich zum Ergebnis aus Unterabschnitt 4.1 weniger als ein Drittel des Betrags groß ist also um etwa 363% abweicht. Im nächsten Kapitel Unterabschnitt 4.3 wurde dann ein Gesetz an Wertepare aus Frequenz f und Phasenverschiebung ϕ angepasst. Hier sind im Plot Abbildung 4 deutliche ausreißer zu kleineren Verschiebungen hin zu sehen. Auch das Ergebnis von $RC = (14.37 \pm 5.81) \times 10^{-3}$s weicht stark von den zuvor berechneten ab. Die Abweichung zur ersten Rechnung liegt bei 256% und zur Zweiten Messung bei etwa 955%. Im Weiteren Ist auffällig das Die Fehler sich alle nicht überschneiden. Die starken Abweichungen können verschiedene Gründe haben, zunächst sind Ablesefehler in betracht zu ziehen, so wären die beiden Einbrüche in der Phasenverschiebung Abbildung 4 zu erklären. Im weiteren können ungünstig gewählte Startwerte bei den Fit-Funktionen oder auch systematische Fehler, wie der Innenwiderstand des Frequenzgenerators, welcher in der Rechnung als zum Kondensator paralleler Widerstand berücksichtigt werden müsste.

6 Literatur

1. TU Dortmund, Versuch 353 Relaxationsverhalten des RC-Kreises

7 Anhang

Auf den nächsten Seiten sind die Originalmesswerte zu finden.