

Wärmeleitung von Metallen

Leander Flottau
leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.06.2021

Abgabe: 15.06.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
3	Durchführung	4
3.1	statische Methode	4
3.2	dynamische Methode	4
4	Fehler	4
5	Auswertung	5
5.1	Die statische Methode	5
5.2	Das Angström Messverfahren	10
6	Diskussion	14
7	Literatur	15

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden verschiedene Metalle sowohl durch die statische als auch die dynamische Methode auf ihre Wärmeleitfähigkeit hin untersucht.

2 Theorie

Bei einem Körper in einem Temperaturungleichgewicht, wird dieses durch den Transport von Wärme hin zu den Stellen niedriger Temperatur ausgeglichen. Dieser Transport kann durch Konvektion, Wärmestrahlung und Wärmeleitung zustande kommen, wobei in diesem Falle nur letzteres berücksichtigt wird. Die Wärmeleitung wird von Phononen und freien Elektronen verursacht, erstere können jedoch vernachlässigt werden. Für die Wärmemenge dQ , die in einem festgelegten Zeitintervall durch einen Stab der Querschnittsfläche A fließt, gilt:

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

mit der Temperatur T , welche per Voraussetzung entlang des Stabes ungleich verteilt sein muss. Die Konstante κ ist materialspezifisch und wird Wärmeleitfähigkeit genannt. Aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik fließt die Temperatur immer entlang des Temperaturgefälles, was durch das Minuszeichen berücksichtigt wird. Aus dieser Gleichung lässt sich unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

in einer Dimension herleiten. Hier bezeichnet ρ die Dichte und c die spezifische Wärmekapazität des betreffenden Materials. Die Größe $\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c}$ wird Temperaturleitfähigkeit genannt und beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Temperatur ausgleicht. Die genaue Lösung dieser Differentialgleichung hängt von den Anfangsbedingungen und der Geometrie des Problems ab.

Das abwechselnde Anheizen und Abkühlen eines Stabes an einem Ende mit der Periode T führt zu einer Temperaturwelle der Form

$$T(x, t) = e^{-\sqrt{\frac{w\rho c}{2\kappa}}x} \cos(wt - \sqrt{\frac{w\rho c}{2\kappa}}x) \quad (3)$$

die sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{2\kappa w}{\rho c}} \quad (4)$$

im Stab fortsetzt. Hier wird zusätzlich die Kreisfrequenz $w = 2\pi/T$ der Anregung verwendet, welche sich aus der Periodendauer ergibt. Mithilfe des Verhältnisses der

Amplituden A_{nah} und A_{fern} der Welle an zwei Punkten x_{nah} und x_{fern} lässt sich nun die Wärmeleitfähigkeit bestimmen. Diese ergibt sich aus

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln(A_{nah}/A_{fern})} \quad (5)$$

durch den Abstand $\Delta x = x_{fern} - x_{nah}$ sowie der Phasendifferenz Δt .

3 Durchführung

Für den Versuch wird die Apparatur aus Abbildung 1 verwendet. Sie besteht aus je einem Stab aus Aluminium und Edelstahl, sowie zwei Stäben aus Messing. Diese können mithilfe des Peltier-Elementes in der Mitte erhitzt oder abgekühlt werden. An zwei Stellen eines jeden Stabes befinden sich Thermoelemente, mit denen die Temperatur gemessen und auf einem Datenlogger dargestellt werden kann.

Abbildung 1: Apparatur zur Messung der Wärmeleitung

3.1 statische Methode

Für die statische Methode wird die Spannung des Peltier-Elements auf $U = 5$ V eingestellt. Anschließend wird die Temperatur an den Thermoelementen über eine Zeitspanne von 700 s aufgezeichnet. Dabei werden 5 Werte pro Sekunde aufgezeichnet.

3.2 dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode wird die Betriebsspannung auf $U = 8$ V eingestellt. Anschließend werden die Stäbe in 40 s Abständen abwechselnd geheizt und gekühlt, sodass eine Temperaturwelle der Periode $T = 80$ s zustande kommt. Für diese wird über die Dauer von 10 Perioden die Temperatur bei 2 Werten pro Sekunde aufgezeichnet. Anschließend wird das gleiche Verfahren für die Periodendauer $T = 200$ s über eine Länge von sechs Perioden wiederholt.

4 Fehler

Der Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0} x_i \quad (6)$$

Die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (7)$$

Der Fehler des Mittelwertes:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (9)$$

Die Prozentuale Abweichung:

$$\text{Abweichung} = \frac{\text{ExperimentellerWert} - \text{Theoriewert}}{\text{Theoriewert}} \times 100 \quad (10)$$

5 Auswertung

In diesem Kapitel sollen die aufgenommenen Messwerte ausgewertet und verrechnet werden.

5.1 Die statische Methode

In diesem Kapitel wird die Wärmeleitfähigkeit von verschiedenen Materialien allein durch die Heizkurve bestimmt.

In Abbildung 2 und in Abbildung 3 sind die Temperaturverläufe, welche an den weiter vom Heizelement entfernten Temperatursensoren gemessen wurden, dargestellt. Zu sehen ist, dass die Kurven für Messing am schnellsten ansteigen, die für Aluminium bei einer etwas geringeren Temperatur als die Messingkurven in ein Plateau über. Der Temperaturverlauf von Edelstahl ist der flachste. Um herauszufinden, welcher Metallstab die beste Wärmeleitung bietet, wurden die Temperaturen bei $t = 700 \text{ s}$ abgelesen, sie sind in Tabelle 1 dargestellt. Die höchste Temperatur und damit die beste Wärmeleitfähigkeit hat demnach Aluminium, gefolgt von dem breiten und dem schmalen Messingstab und am Ende dem Edelstahlstab.

Nun wird für verschiedene Zeiten der Wärmestrom $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ bestimmt. Die in Tabelle 2 berechneten Mittelwerte und entsprechenden Fehler wurden nach Gleichung 6 und Gleichung 8 berechnet. In Abbildung 4 ist die Differenz der beiden Temperatursensoren des Messingstabes aufgetragen, und in Abbildung 5 ist die Differenz der Temperatursensoren des Edelstahlstabes aufgetragen. Hier fällt auf, dass der Messingstab die Wärme viel schneller leitet und so die Temperaturdifferenz sehr viel schneller kleiner wird.

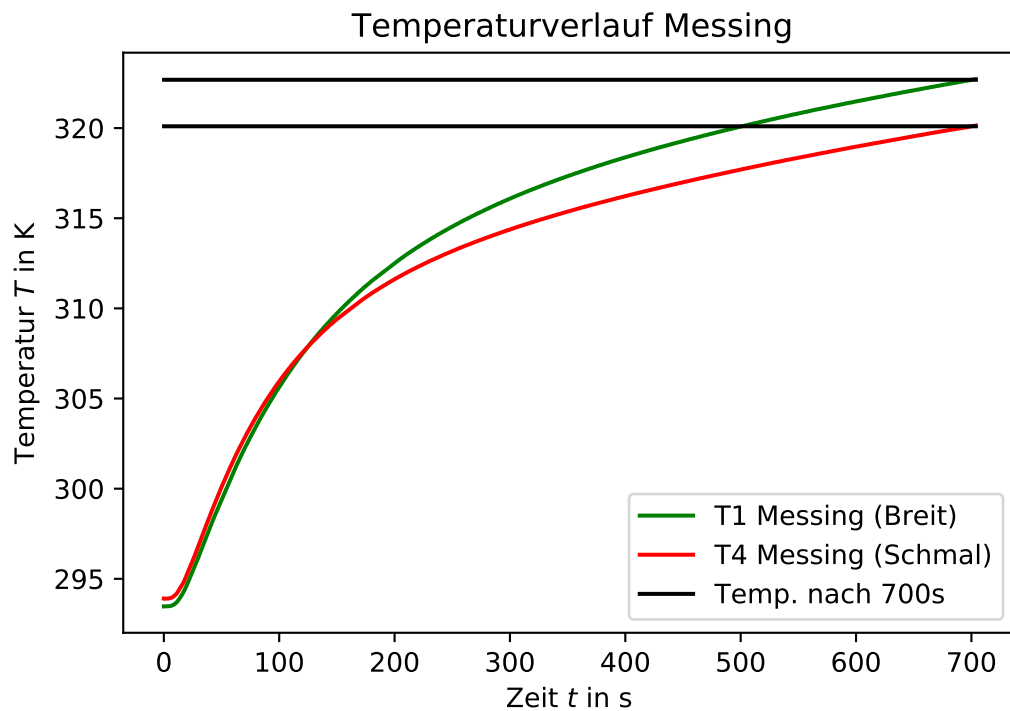


Abbildung 2: Zu sehen ist, der statische Temperaturverlauf von Messing.

Tabelle 1: Gemessene Temperaturen bei $t = 700$ s.

Thermoelement Nr	Temperatur T in K	Material
1	322,68	Messing (breit)
4	320,10	Messing (schmal)
5	325,28	Alluminium
8	311,04	Edelstahl

Tabelle 2: Hier ist der Wärmestrom in abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

Zeitpunkt t	$(\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{Mb}/Wm$	$(\frac{\Delta Q}{\Delta t})_{Ms}/Wm$	$(\frac{\Delta Q}{\Delta t})_A/Wm$	$(\frac{\Delta Q}{\Delta t})_E/Wm$
140,8	0,00927	0,01129	0,00639	0,00600
281,6	0,00570	0,00804	0,00405	0,00545
422,4	0,00468	0,00733	0,00359	0,00511
563,2	0,00439	0,00720	0,00345	0,00493
703,8	0,00432	0,00716	0,00341	0,00483
Ø	$0,0057 \pm 0,0009$	$0,0082 \pm 0,0008$	$0,0042 \pm 0,0006$	$0,00527 \pm 0,00021$

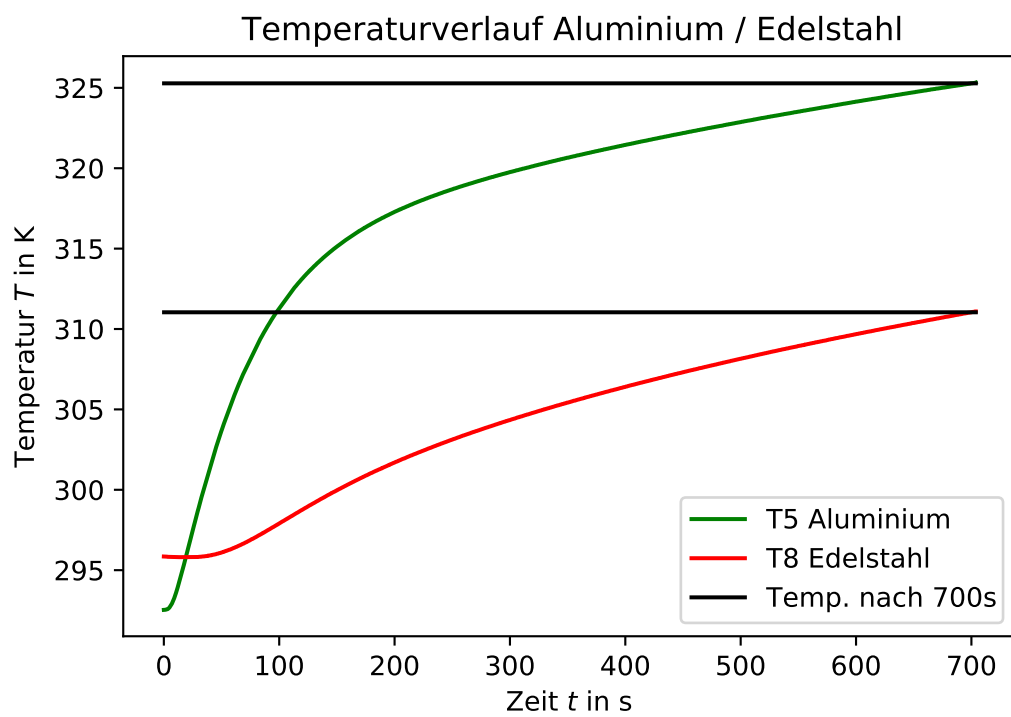


Abbildung 3: Statischer Temperaturverläufe von Aluminium und Edelstahl

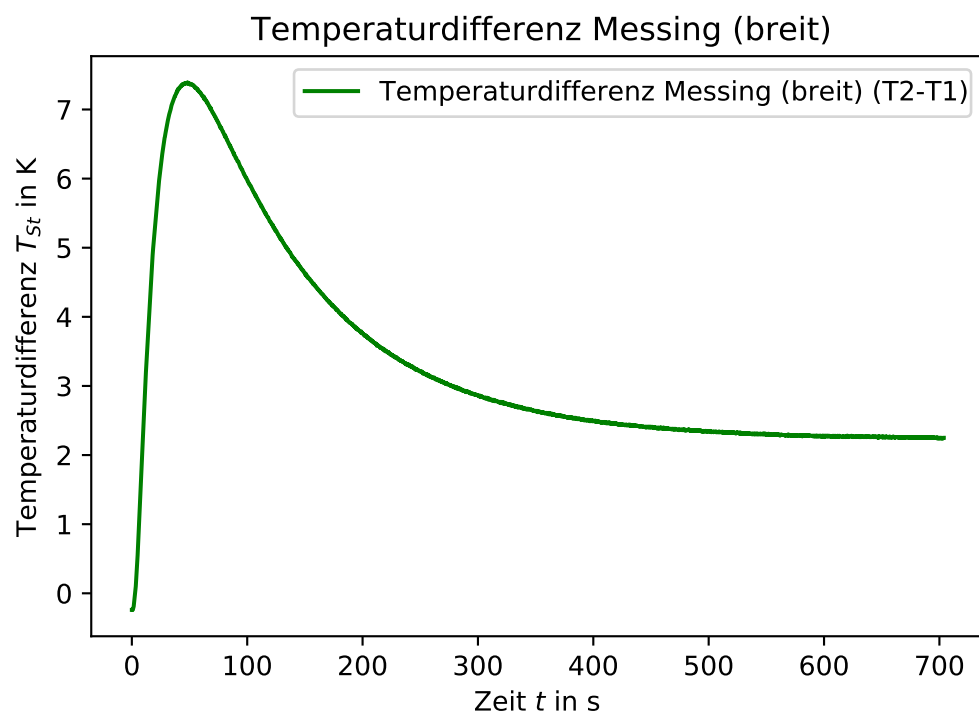


Abbildung 4: Temperaturdifferenzverlauf von Messing.

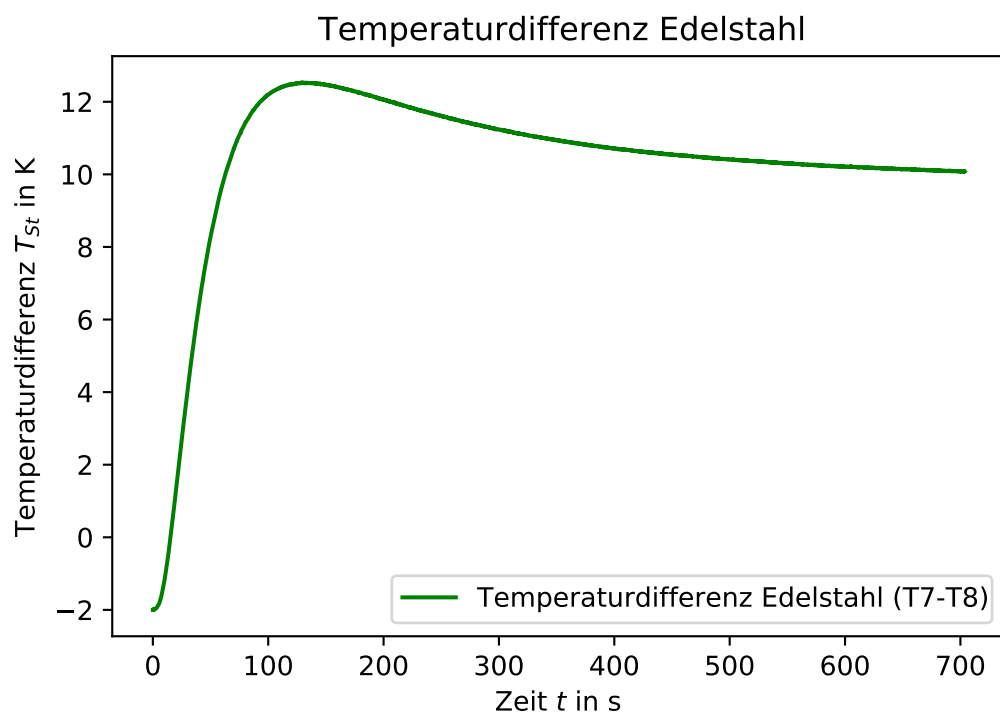


Abbildung 5: Temperaturdifferenzverlauf von Edelstahl.

5.2 Das Angström Messverfahren

In diesem Schritt werden die Wärmeleitfähigkeiten κ mit dem Angström Messverfahren also durch abwechselndes Erhitzen und Kühlen der Stäbe genutzt. Dabei wird eine Periodendauer von $T = 80\text{ s}$ verwendet. Die Temperaturverläufe sind in Abbildung 6 für Messing und in Abbildung 7 für Aluminium dargestellt.

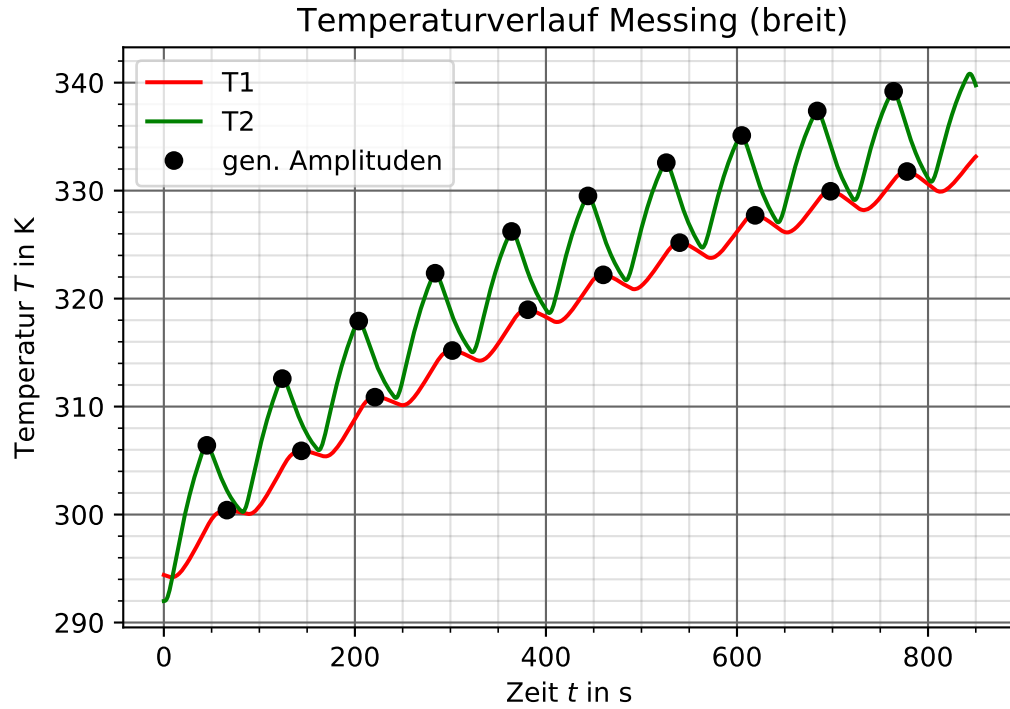


Abbildung 6: In dieser Grafik ist der Temperaturverlauf des breiten Messingstabes im Angström-Verfahren.

Mit den gekennzeichneten Amplituden folgen sofort die Phasenverschiebungen und Amplitudenverhältnisse welche für Messing in Tabelle 3, für Aluminium in Tabelle 4 und für Edelstahl in Tabelle 5 dargestellt. Die ebenfalls in den Tabellen dargestellten Werte für κ wurden einzeln über Gleichung 5 berechnet und anschließend über Gleichung 6 gemittelt und der Fehler mit Gleichung 8 berechnet.

Dazu wurde $\Delta x = 0,03\text{ m}$ verwendet.

Die Wellenlängen und Frequenzen lassen sich einfach bestimmen mit den Zusammenhängen:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T}, \\ v &= \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}}, \\ \lambda &= \frac{2\pi v}{\omega}.\end{aligned}$$

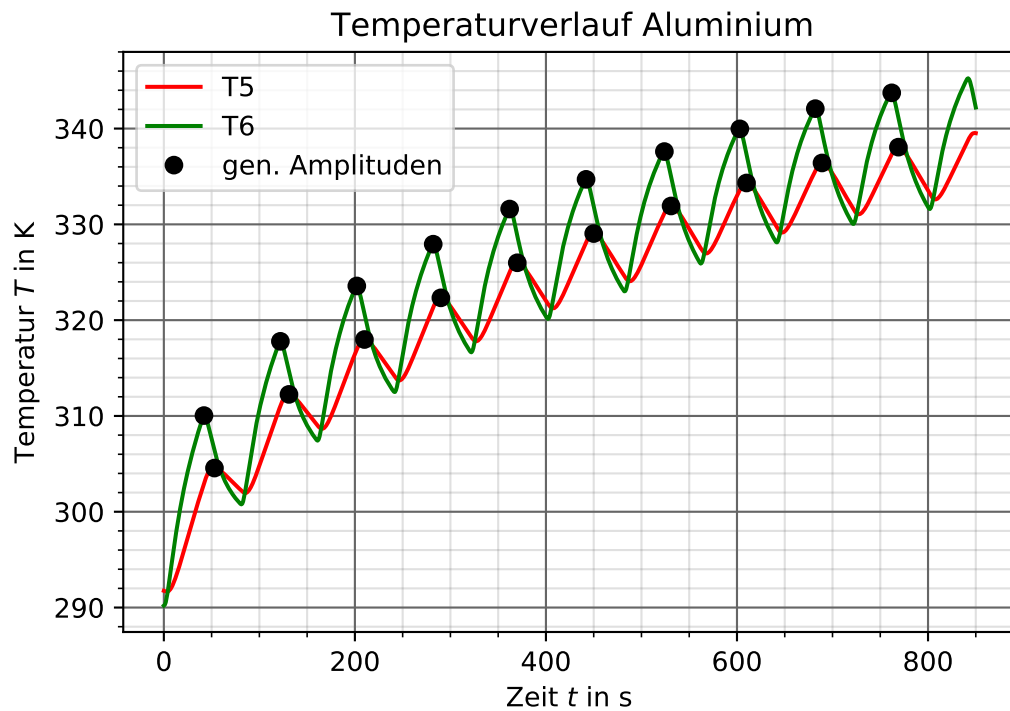


Abbildung 7: Hier ist der Temperaturverlauf von Aluminium im Angström-Verfahren dargestellt.

Tabelle 3: Verschiedene Werte zur berechnung von κ für Messing.

Nr.	Δt / s	$\frac{A_{nah}}{A_{fern}}$	κ / $\frac{\text{kW}}{\text{K}\cdot\text{m}}$
1	21	1,0199	3,5543
2	20	1,0218	3,4114
3	17	1,0226	3,8719
4	18	1,0227	3,6507
5	17	1,0227	3,8634
6	16	1,0227	4,1123
7	14	1,0228	4,6794
8	14	1,0226	4,7217
9	14	1,0225	4,7282
10	14	1,0224	4,7605
Ø			4,14±0,17

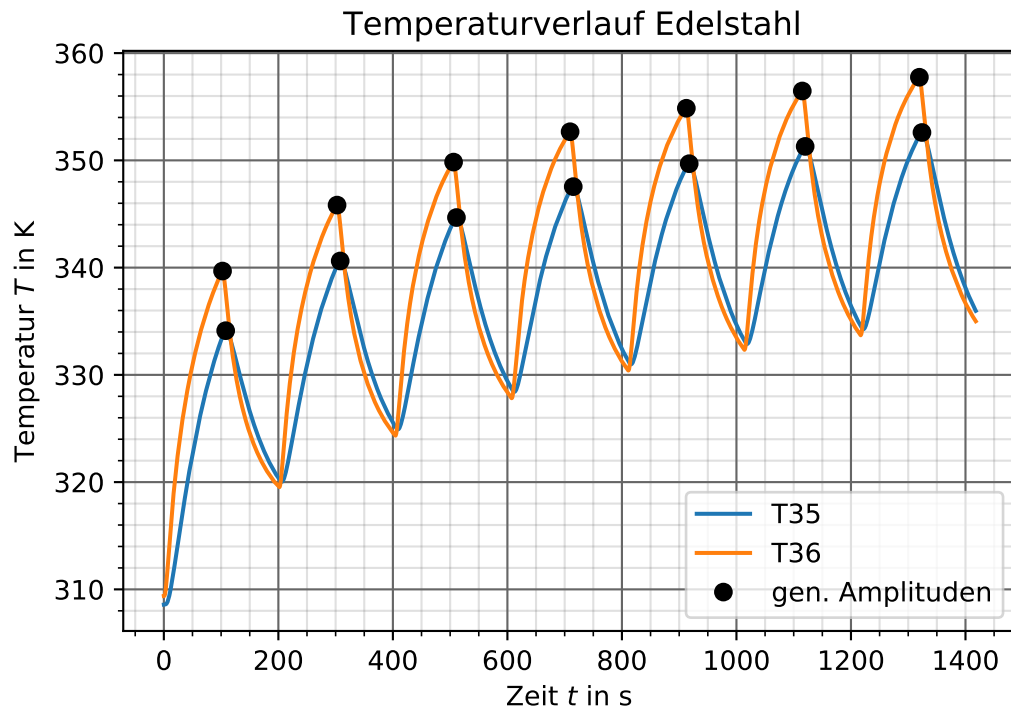


Abbildung 8: Temperaturverlauf von Edelstahl im Angström-Verfahren zu sehen.

Tabelle 4: Verschiedene Werte zur berechnung von κ für Aluminium.

Nr.	Δt / s	$\frac{A_{nah}}{A_{fern}}$	κ / $\frac{\text{kW}}{\text{K}\cdot\text{m}}$
1	11	1,0180	5,3312
2	9	1,0177	6,6072
3	8	1,0176	7,5013
4	8	1,0174	7,5896
5	8	1,0172	7,6614
6	8	1,0172	7,6648
7	7	1,0171	8,8049
8	7	1,0169	8,9147
9	7	1,0169	8,9386
10	7	1,0168	8,9821
Ø			7,8±0,4

Tabelle 5: Verschiedene Werte zur berechnung von κ für Edelstahl.

Nr.	Δt / s	$\frac{A_{nah}}{A_{fern}}$	κ / $\frac{\text{kW}}{\text{K}\cdot\text{m}}$
1	5,5	1,0166	15,8641
2	5,5	1,0153	17,2478
3	5,0	1,0150	19,3438
4	5,5	1,0147	17,9030
5	5,0	1,0148	19,6235
6	5,0	1,0147	19,7132
7	4,5	1,0146	22,0687
\emptyset			18,8 \pm 0,8

Die gemessenen und über Gleichung 6 gemittelten Periodendauern T sind in Tabelle 6 dargestellt. Der Fehler des Mittelwertes berechnet sich wieder über Gleichung 8.

Tabelle 6: Periodendauern der Metalle Messing, Aluminium und Edelstahl.

Nr.	$T_{Messing}$ / s	$T_{Aluminium}$ / s	$T_{Edelstahl}$ / s
1	78	78	200,0
2	77	79	203,0
3	81	80	204,0
4	79	80	202,5
5	79	80	202,5
6	80	81	204,0
7	79	79	
8	79	79	
9	80	80	
\emptyset	79,1 \pm 0,4	79,56 \pm 0,29	202,7 \pm 0,6

Daraus folgen sofort die Ergebnisse in Tabelle 7 deren Fehler sich über Gleichung 9 ergibt.

Tabelle 7: Die Ergebnisse der Rechnungen.

Material	T / s	$\omega / 1/\text{s}$	$v / \text{m/s}$	f / Hz	λ / m
Messing (breit)	$79,1 \pm 0,4$	$0,0794 \pm 0,0004$	$0,0142 \pm 0,0003$	$0,01264 \pm 0,00006$	$1,12 \pm 0,023$
Alluminium	$79,56 \pm 0,29$	$0,0789 \pm 0,0003$	$0,0230 \pm 0,0006$	$0,01257 \pm 0,00005$	$1,83 \pm 0,04$
Edelstahl	$202,7 \pm 0,6$	$0,0310 \pm 0,00009$	$0,0191 \pm 0,0004$	$0,00493 \pm 0,00002$	$3,87 \pm 0,08$

6 Diskussion

In diesem Versuch sollen die Wärmeleitfähigkeiten κ von den Metallen Aluminium, Edelstahl und Messing berechnet werden. Dazu werden zunächst in Unterabschnitt 5.1 die Temperaturen am weiter vom Heiz- bzw. Kühlelement entfernten Thermoelement nach einer Zeit von $t = 700 \text{ s}$ gemessen. Dabei kommt heraus das Aluminium mit $T_A = 325,28 \text{ K}$ scheinbar die beste wärmeleitfähigkeit besitzt. Darauf folgen, in absteigender Reihenfolge, der breite Messingstab $T_{Mb} = 322,68 \text{ K}$, der schmale Messingstab $T_{Ms} = 320,10 \text{ K}$ und der Edelstahlstab $T_E = 311,04 \text{ K}$. Daran anschließend werden die Wärmeströme für alle Metallstäbe zu fünf verschiedenen Zeitpunkten berechnet und in Tabelle 2 dargestellt. Im Mittel betragen die Wärmeströme für Aluminium $(\frac{\Delta Q}{\Delta t}) = (0.0042 \pm 0.0006) \text{ Wm}$, für Edelstahl $(\frac{\Delta Q}{\Delta t}) = (0.00527 \pm 0.00021) \text{ Wm}$, für den breiten Messingstab $(\frac{\Delta Q}{\Delta t}) = (0.0057 \pm 0.0009) \text{ Wm}$ und $(\frac{\Delta Q}{\Delta t}) = (0.0082 \pm 0.0008) \text{ Wm}$ für den schmalen Messingstab. Es liegen leider keine Literaturwerte vor um einen Vergleich anzustellen. Im nächsten Kapitel Unterabschnitt 5.2, werden dann mit dem sogenannten Angström-Messverfahren durch periodisches heizen und kühlen des jeweiligen Stabendes die Wärmeleitfähigkeiten κ berechnet. Sie sind zusammen mit den Literaturwerten und prozentualen Abweichungen nach Gleichung 10 in Tabelle 8 dargestellt.

Tabelle 8: Vergleich mit den Theoriewerten.

Material	$\kappa_{Theo} / \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$	$\kappa_{Exp} / \frac{\text{kW}}{\text{K}\cdot\text{m}}$	Abw. / %
Messing	120	$4,14 \pm 0,17$	3350
Aluminium	236	$7,8 \pm 0,4$	3205
Edelstahl	30	$18,8 \pm 0,8$	62566

Diese liegen bei $\kappa_{Messing} = 4367.46 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$, $\kappa_{Aluminium} = 18745.14 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$, $\kappa_{Edelstahl} = (-2.3 \pm 1.1) \times 10^4 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$. Die gemessenen Werte weichen alle um Faktoren von etwa 10 bis 100 ab, wie ein Vergleich mit den Literaturwerten [2.] zeigt. Dieser große Fehler welcher auch für Edelstahl ausserhalb der berechneten Ungenauigkeit liegt lässt auf einen unentdeckten Rechenfehler schließen. Weitere kleinere Ungenauigkeiten können darin begründet liegen, dass die Isolierung der Stäbe unzureichend ist und nur die Stäbe gegen die Außenwelt nicht aber untereinander abschirmt und es somit durch Strahlung und Konvektion zum Wärmeaustausch zwischen den beiden Stäben kommen kann. Zudem wurde auch der Einfluss von Phononen und eventuelle Ungleichmäßigkeiten beim Heizen

und kühlen durch das Peltierelement vernachlässigt. Für die berechneten Wellenlängen liegen keine Literaturwerte vor. Sie hängen von der Kreisfrequenz und somit indirekt von den Periodendauern ab die im Experiment durch die Länge des Heizen-Kühlen-Intervalls quasi frei gewählt werden können. Die Wellenlängen haben für Messing den Wert $\lambda_{\text{Messing}} = 1,12 \pm 0,023\text{m}$, für Aluminium den Wert $\lambda_{\text{Aluminium}} = 1,83 \pm 0,04\text{m}$ und für Edelstahl den Wert $\lambda_{\text{Edelstahl}} = 3,87 \pm 0,08\text{m}$. Damit liegen sie in einem intuitiv realistischen Bereich.

7 Literatur

1. TU-Dortmund, V204: Wärmeleitung von Metallen
2. Dr.Jörg Wittrock, Wärmeleitfähigkeit der Elemente, www.wittrock-web.de abgerufen am 13.06.2021