

Biegung elastischer Stäbe

Leander Flottau

leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina

jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 15.06.2021

Abgabe: 22.06.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Durchbiegung bei einseitiger Einspannung	3
2.2	Durchbiegung bei beidseitiger Einspannung	4
3	Durchführung	5
4	Auswertung	6
4.1	Bestimmung von Materialeigenschaften	6
4.1.1	Flächenträgheitsmoment der runden Stäbe	6
4.1.2	Flächenträgheitsmoment der eckigen Stäbe	7
4.2	Einseitig eingespannter Stab	7
4.3	Beidseitig eingespannter Stab	9
4.4	Vergleich der Elastizitätsmodule	11
5	Diskussion	11
6	Literatur	13
7	Anhang	13

1 Zielsetzung

In diesem Experiment wird das Elastizitätsmodul von vier verschiedenen Metallen anhand ihrer Durchbiegung bestimmt. Dabei wird sowohl eine ein-, als auch eine beidseitige Einspannung verwendet.

2 Theorie

Wenn auf einen Körper eine Kraft wirkt, kann diese mit einer Verformung einhergehen. Die Kraft bezogen auf die Oberfläche, auf die sie wirkt wird als Spannung bezeichnet, wobei zwischen Normal- und Schubspannung unterschieden wird. Erstere ist die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, letztere die tangential, also oberflächenparallele Komponente der Spannung. In der Regel ist die Spannung bei hinreichend kleiner Deformation $\Delta L/L$ proportional zu selbiger:

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Dieser Zusammenhang ist das Hooksche Gesetz. Die Proportionalitätskonstante E des Hookschen Gesetzes wird als Elastizitätsmodul bezeichnet und ist ein materialspezifischer Wert.

2.1 Durchbiegung bei einseitiger Einspannung

Wenn an einem einseitig eingespannten Stab der Länge L eine Kraft F auf die in Abbildung 1 gezeigte Art angreift, führt dies zu einer Auslenkung des Stabes aus der horizontalen. Diese sogenannte Biegung ist abhängig vom Abstand zur Aufhängung, bildet also eine Funktion $D(x)$ die experimentell untersucht werden kann. Aus dieser lässt sich anschließend das Elastizitätsmodul bestimmen. Durch die Kraft F entsteht am Punkt x ein Drehmoment

$$M_F = F(L - x).$$

Dieses führt dazu, dass die Schichten des Stabes im oberen Bereich gestreckt und im unteren gestaucht werden, während in der Mitte eine neutrale Faser existiert, welche nicht verformt wird. Aus dieser Streckung bzw. Stauchung resultieren Schubspannungen oberhalb und Druckspannungen unterhalb der neutralen Faser. Die von ihnen verursachten Drehmomente sind entgegengesetzt gleich und lassen sich durch Integration über die Gesamte Querschnittsfläche Q gemäß

$$M_\sigma = \int_Q y \sigma(y) dy$$

berechnen. Das innere Drehmoment der Spannungen wirkt dem äußeren entgegen, bis diese sich bei einer bestimmten Auslenkung aus der Ruhelage ausgleichen. Daher lässt

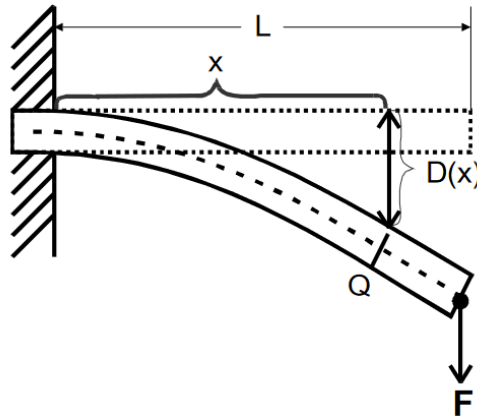


Abbildung 1: Biegung bei einseitiger Einspannung

sich aus $M_F = M_\sigma$ die Durchbiegung $D(x)$ bestimmen:

$$D(x) = \frac{F}{2EI} (Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \quad (2)$$

Wobei mit I das Flächenträgheitsmoment bezeichnet wird.

2.2 Durchbiegung bei beidseitiger Einspannung

Neben der soeben diskutierten einseitigen Einspannung, kann das Elastizitätsmodul auch bestimmt werden, indem der Stab beidseitig eingespannt wird und eine Kraft in der Mitte angreift, wie es in Abbildung 2 dargestellt ist. Auch in diesem Fall wirkt ein äußeres Drehmoment. Dieses beträgt für die eine Hälfte des Stabes ($0 \leq x \leq L/2$)

$$M_F = -\frac{F}{2}x$$

und dementsprechend für die andere Hälfte ($L/2 \leq x \leq L$)

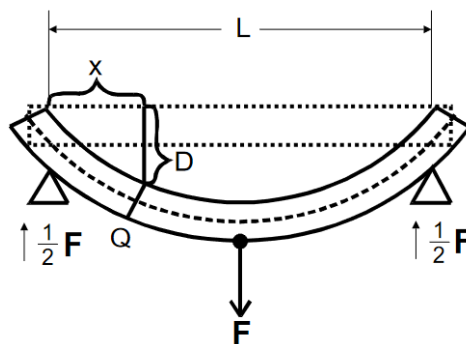


Abbildung 2: Biegung bei beidseitiger Einspannung

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x).$$

Daraus lässt sich mit einer Rechnung analog zu der vorherigen erneut die Durchbiegung in Abhängigkeit vom Abstand bestimmen. Diese beträgt

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \quad (3)$$

für den Bereich $0 \leq x \leq L/2$ und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad (4)$$

im anderen Bereich $L/2 \leq x \leq L$.

3 Durchführung

Für den Versuch wird die Anordnung aus Abbildung 3 verwendet. Der Stab wird eingespannt und anschließend mit einem Gewicht belastet. Die daraus resultierende Biegung aus dem Ausgangszustand lässt sich an den dafür vorgesehenen Messuhren ablesen. Diese müssen jeweils vor Anhängen des Gewichtes auf null geeicht werden, um die relative Auslenkung aus dem Ruhezustand ablesen zu können. Der x-Wert des Messpunktes kann an der Anordnung abgelesen werden.

Für die erste Messreihe wird der jeweilige Stab einseitig eingespannt, am einen Ende

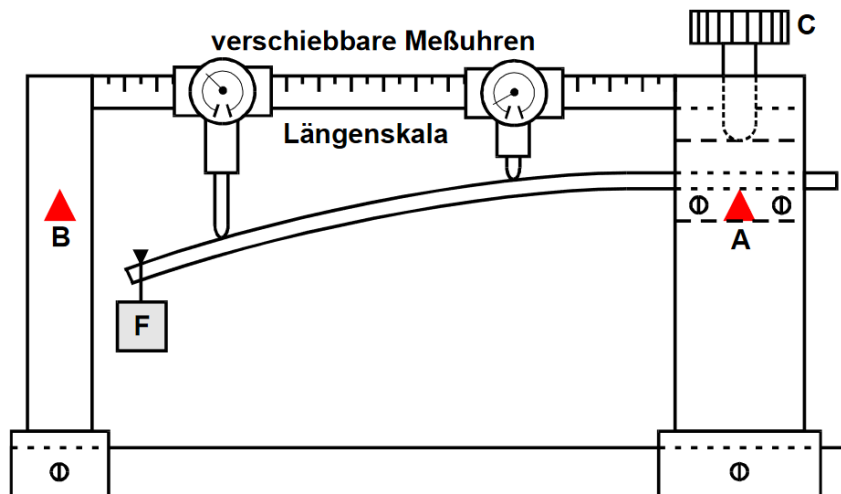


Abbildung 3: Anordnung zur Messung der Durchbiegung eines elastischen Stabes

mit einem festgelegten Gewicht belastet und anschließend an zehn verschiedenen Stellen die Durchbiegung gemessen. Anschließend wird der Stab beidseitig eingespannt und in der Mitte belastet wird. Daraufhin kann mittels zweier Messuhren die Durchbiegung in einem bestimmten Abstand auf beiden Hälften des Stabes gemessen werden. Dies wird

für fünf Abstände jeweils auf beiden Seiten und symmetrisch um die Mitte durchgeführt. Zuletzt werden Länge, Gewicht und Durchmesser bzw. Kantenlänge des Stabes bestimmt. Dieses Vorgehen wird für vier Stäbe wiederholt.

4 Auswertung

In Diesen Kapitel sollen die Aufgenommenen Daten ausgewertet werden

4.1 Bestimmung von Materialeigenschaften

Für den Versuch stehen vier Metallstäbe, zwei runde und zwei Eckige, zur verfügung. diese wurden jeweils gewogen und ausgemessen die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zu sehen. Die Dichte ρ berechnet sich, mit Länge L und Durchmesser d , für die runden Stäbe über:

$$\rho = \frac{4m}{d^2L}$$

und für die eckigen Stäbe, mit Seitenlängen a und b über:

$$\rho = \frac{m}{abL}$$

der Messfehler berechnet sich dann über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (5)$$

Tabelle 1: In der Tabelle sind die Eigenschaften der benutzten Metallstäbe zu sehen.

Nr.	Farbe	m /g	L /cm	d /mm	a /mm	b /mm	ρ / $\frac{\text{t}}{\text{m}^3}$
1	golden	(378.1 ± 0.1)	(57.5 ± 0.1)	(10 ± 0.05)	-	-	(8.37 ± 0.09)
2	braun	(356.0 ± 0.1)	(58.0 ± 0.1)	(10 ± 0.05)	-	-	(7.82 ± 0.08)
3	silbergrau	(166.9 ± 0.1)	(60.0 ± 0.1)	-	(10 ± 0.05)	(10 ± 0.05)	(2.783 ± 0.028)
4	rötlich	(535.6 ± 0.1)	(60.1 ± 0.1)	-	(10 ± 0.05)	(10 ± 0.05)	(8.91 ± 0.09)

Anhand der Dichte und der Farbe kann recht sicher gesagt werden das es sich bei Stab eins um Messing, bei Stab zwei um Eisen, bei Stab drei um Aluminum und bei Stab vier um Kupfer handelt.

4.1.1 Flächenträgheitsmoment der runden Stäbe

Messing und Eisen Liegen als runde Stäbe vor, das entsprechende Flächenträgheitsmoment I berechnet sich mit dem Durchmesser d des Stabes aus Tabelle 1 über:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Damit ergibt sich für den Messingstab:

$$I_{Mes} = (4.91 \pm 0.10) \times 10^{-10} \text{m}^4$$

und für den Eisenstab:

$$I_{Fe} = (4.91 \pm 0.10) \times 10^{-10} \text{m}^4$$

Der Fehler setzt sich mit der Gaußschen-Fehlerfortpflanzung Gleichung 5 fort.

4.1.2 Flächenträgheitsmoment der eckigen Stäbe

Sowohl der Aluminium- als auch der Kupferstab liegen als eckige Stäbe vor, ihr Trägheitsmoment berechnet sich mit den Seitenlängen a und b aus Tabelle 1 über:

$$I = \frac{ab^3}{12}$$

damit folgt für den Aluminiumstab:

$$I_{Al} = (8.33 \pm 0.17) \times 10^{-10} \text{m}^4$$

und für den Kupferstab:

$$I_{Cu} = (8.33 \pm 0.17) \times 10^{-10} \text{m}^4$$

der Fehler berechnet sich auch hier wieder über Gleichung 5.

4.2 Einseitig eingespannter Stab

In diesem Kapitel wird des Elastizitätsmodul E mit einem nur einseitig eingespannten Stab bestimmt. Dazu wird eine Masse $m = (0.3781 \pm 0.1) \text{kg}$ an das Ende des Stabes bei $L = 0.54 \text{m}$ gehängt und an zehn Stellen die Absenkung des Stabes gemessen. In Abbildung 4 ist das Ergebnis der Messung dargestellt. Da das Maß der Absenkung nicht linear verläuft wurde sie nicht gegen x sondern gegen den Term $(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ aufgetragen. Anschließend wird mithilfe der python matplotlib Bibliothek je eine lineare Ausgleichsgrade der Form $f(x) = a*x + b$ für jeden Stab berechnet. Die berechneten Parameter sind in Tabelle 2 dargestellt. Die Elastizitätsmodule ergeben sich durch Vergleich der funktion der Ausgleichsgraden

Tabelle 2: In der Tabelle sind die Parameter der Ausgleichsgraden dargestellt.

Nr.	Material	$a \text{ /m}^2$	$b \text{ /m}$
1	Messing	(0.0444 ± 0.0015)	(0.0000 ± 0.0001)
2	Eisen	(0.0209 ± 0.0005)	(0.0001 ± 0.0000)
3	Aluminium	(0.0371 ± 0.0013)	(0.0000 ± 0.0001)
4	Kupfer	(0.0240 ± 0.0004)	(0.0000 ± 0.0000)

mit ?? zu:

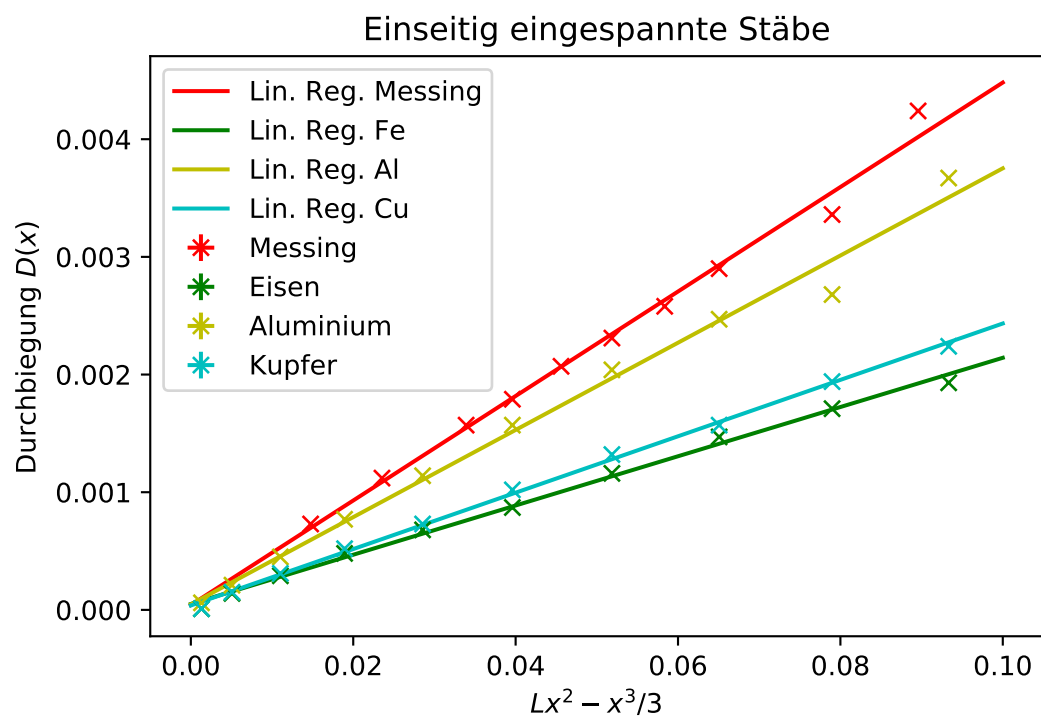


Abbildung 4: Absenkung eines einseitig eingespannten Stabes.

$$E = \frac{mg}{2Ia} \quad (6)$$

mit der Steigung a der Ausgleichsgraden aus Tabelle 2. Es ergeben sich also folgende Elastizitätsmodule:

$$\begin{aligned} E_{Mes} &= (102.0 \pm 4.0) \text{ GPa} \\ E_{Fe} &= (216.0 \pm 7.0) \text{ GPa} \\ E_{Al} &= (71.0 \pm 2.9) \text{ GPa} \\ E_{Cu} &= (111.2 \pm 2.8) \text{ GPa} \end{aligned}$$

4.3 Beidseitig eingespannter Stab

Das Elastizitätsmodul kann auch berechnet werden wenn der Stab beidseitig eingespannt wird und die Masse in der Mitte bei $L/2 = 0,275 \text{ m}$ angehängt wird. Im Folgenden wird die linke Seite des Stabes aufgelegt und die rechte Seite eingespannt. Die Absenkungen der linken Seite werden in Abbildung 5 gegen den Term $3L^2x - 4x^3$ und die rechte Seite in Abbildung 6 gegen den Term $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2 - L^3$ aufgetragen. Analog zu Unterabschnitt 4.2 werden Ausgleichsgraden durch die Punkte gelegt die zugehörigen Parameter sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: In der Tabelle sind die Parameter der Ausgleichsgraden dargestellt.

Nr.	Material	a_{links} / m^2	b_{links} / m	a_{rechts} / m^2	b_{rechts} / m
1	Messing	(0.0029 ± 0.0002)	(0.0004 ± 0.0000)	(0.0020 ± 0.0002)	(0.0051 ± 0.0006)
2	Eisen	(0.0044 ± 0.0003)	(0.0006 ± 0.0000)	(0.0040 ± 0.0005)	(0.0102 ± 0.0012)
3	Aluminium	(0.0038 ± 0.0003)	(0.0012 ± 0.0000)	(0.0036 ± 0.0004)	(0.0095 ± 0.0011)
4	Kupfer	(0.0046 ± 0.0003)	(0.0005 ± 0.0000)	(0.0039 ± 0.0005)	(0.0102 ± 0.0012)

Nun kann ein Vergleich analog zu Unterabschnitt 4.2 angestellt werden welcher zur Formel zur berechnung des Elastizitätsmoduls führt. Sie lautet:

$$E = \frac{mg}{48Ia}$$

Dabei wird für Messing eine Masse von $m = (2.859 \pm 0.0001) \text{ kg}$ und für die anderen drei Materialien eine Masse von $m = (4.298 \pm 0.0001) \text{ kg}$ angehängt. Das führt zu den in Tabelle 4 dargestellten Ergebnissen. Der jeweils zugehörige Fehler berechnet sich über Gleichung 5.

4.4 Vergleich der Elastizitätsmodule

In Tabelle 5 sind die auf beide Arten berechneten Elastizitätsmodule dargestellt. Sie weichen untereinander stark ab. Mögliche Gründe dafür sind in Abschnitt 5 zu finden.

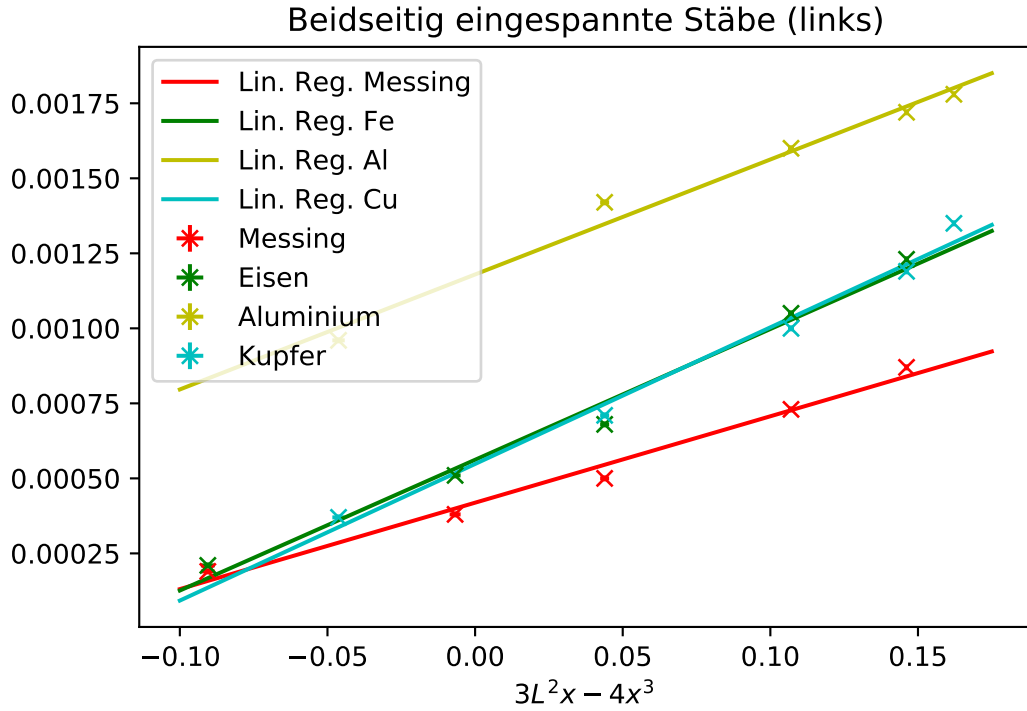


Abbildung 5: Absenkung der linken Seite eines beidseitig eingespannten Stabes.

Tabelle 4: In der Tabelle sind die berechneten Elastizitätsmodule eines beidseitig aufliegenden Stabes aufgeführt.

Nr	Material	E_{links} / GPa	E_{rechts} / GPa
1	Messing	(413 ± 30)	(580 ± 80)
2	Eisen	(411 ± 29)	(450 ± 60)
3	Aluminium	(275 ± 22)	(290 ± 40)
4	Kupfer	(231 ± 16)	(265 ± 34)

Tabelle 5: In der Tabelle sind alle berechneten Elastizitätsmodule dargestellt.

Nr	Material	$E_{einseitig} / \text{GPa}$	E_{links} / GPa	E_{rechts} / GPa
1	Messing	(102.0 ± 4.0)	(413 ± 30)	(580 ± 80)
2	Eisen	(216.0 ± 7.0)	(411 ± 29)	(450 ± 60)
3	Aluminium	(71.0 ± 2.9)	(275 ± 22)	(290 ± 40)
4	Kupfer	(111.2 ± 2.8)	(231 ± 16)	(265 ± 34)

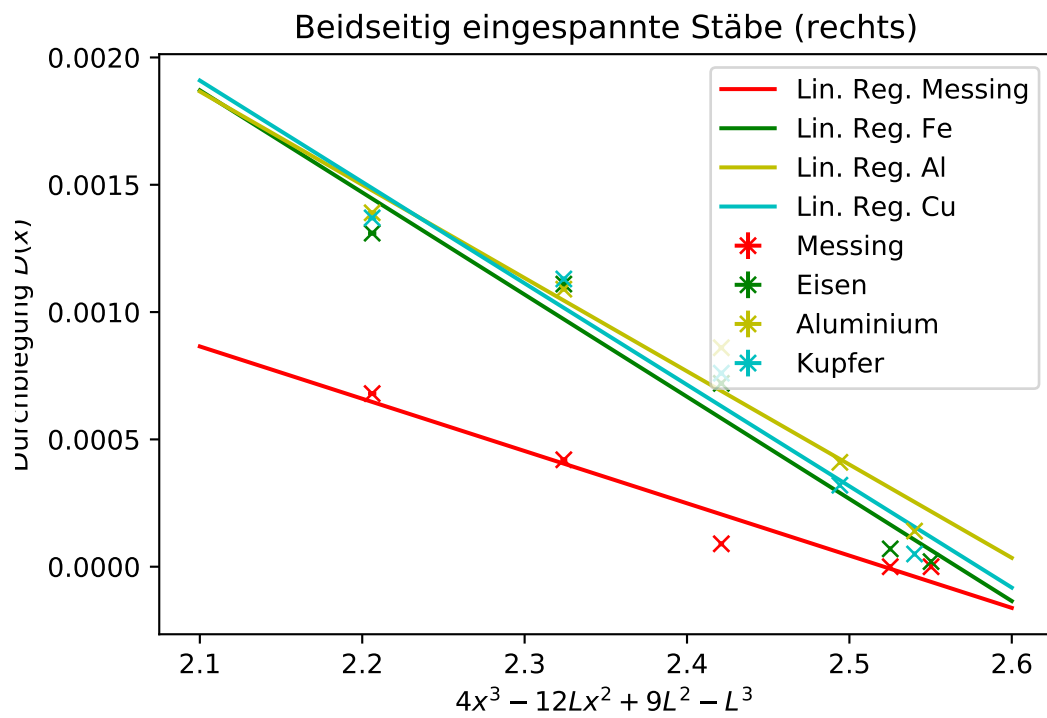


Abbildung 6: Absenkung der rechten Seite eines beidseitig eingespannten Stabes.

5 Diskussion

In diesem Versuch werden die Elastizitätsmodule von verschiedenen Materialien gemessen bzw. errechnet. Dazu wurden zunächst in Unterabschnitt 4.1 die Dichten der Metalle bestimmt. Sie liegen wie in Tabelle 1 zu sehen für den ersten Stab bei

$$\rho_1 = (8.37 \pm 0.09) \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$$

für den zweiten Stabe bei

$$\rho_2 = (7.82 \pm 0.08) \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$$

, für den dritten Stab bei

$$\rho_3 = (2.783 \pm 0.028) \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$$

und für den vierten Stab bei

$$\rho_4 = (8.91 \pm 0.09) \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$$

. Anhand der Dichten und Materialfarben kann auf das Metall geschlossen werden. Die Theoretische Dichte von Messing liegt bei $\rho_{1,t} = 8.4 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ und weicht damit um 0,35% vom gemessenen Wert ab liegt jedoch innerhalb des berechneten Fehlers. Die Dichte von Eisen liegt bei $\rho_{2,t} = 7.874 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ und weicht somit um 0,69% vom experimentellen Wert ab liegt aber auch im errechneten Fehlerintervall. Die Dichte von Aluminium liegt theoretisch bei $\rho_{3,t} = 2.7 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$, die Abweichung vom gemessenen Wert liegt daher bei 3,07% und liegt leicht ausserhalb des Fehlerintervalls, allerdings ist die Abweichung zum nächst dichten Element (Scandium $\rho = 2.9$) noch größer sodass es wahrscheinlich ist das die Abweichung durch eine ungenaue Messung oder dadurch das das Aluminium nicht in reinform vorliegt hervorgerufen wird. Die Dichte von Kupfer liegt bei $\rho_{4,t} = 8.92 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ und weicht damit um 0.1% ab liegt allerdings wieder im berechneten Fehler. Die theoretischen Dichten stammen aus Quelle [2.]. Anschließend werden zuerst die Elastizitätsmodule bestimmt indem der Stab einseitig eingespannt wird und an die andere Seite des Stabes eine Masse angehängt wird. Dannach wird der Stab beidseitig eingespannt und eine Masse in der Mitte angehängt. In beiden Fällen wird die Absenkung des Stabes gemessen. Die Absenkungen können dann wie in Unterabschnitt 4.2 und Unterabschnitt 4.3 zu sehen gegen eine Funktion aufgetragen werden. Aus den Steigungen der errechneten Ausgleichsgraden lassen sich dann die Elastizitätsmodule berechnen. Alle berechneten Elastizitätsmodule sind in Tabelle 5 dargestellt. Die Abweichungen untereinander sowie von den aus Quelle [3.] stammenden Theoriewerten wurden über:

$$\text{Abweichung} = \frac{\text{ExperimentellerWert} - \text{Theoriewert}}{\text{Theoriewert}} \times 100$$

berechnet und in Tabelle 6 dargestellt. Auffällig ist das die durch einseitiges einspannen erhaltenen Werte gut zu den theoretischen Werten passen während die Doppelseitig eingespannten Stäbe sehr große Abweichungen bringen. Dies kann daran liegen das der Stab bei beidseitiger Einspannung „genaugenommen nur einseitig wirklich festgespannt werden konnte während die andere Seite nur auf einem Auflagepunkt auflag. Zudem waren die Stäbe nicht komplett grade.

Tabelle 6: In der Tabelle sind alle Abweichungen der errechneten Elastizitätsmodule von den Theoriewerten und die Abweichungen untereinander dargestellt.

Nr	Material	Modul	Theoriewert E_{theo} /	Abweichung E_{theo} /%	Abweichung $E_{einseitig}$
1	Messing	$E_{einseitig}$	78...123	0.0	-
		E_{links}		335.7	404.9
		E_{rechts}		471.5	568.6
2	Eisen	$E_{einseitig}$	196	10.2	-
		E_{links}		109.7	304.9
		E_{rechts}		129.6	341.2
3	Aluminium	$E_{einseitig}$	70	1.4	-
		E_{links}		292.9	74.2
		E_{rechts}		314.3	75.5
4	Kupfer	$E_{einseitig}$	100...130	0.0	-
		E_{links}		77.7	107.7
		E_{rechts}		103.8	138.3

6 Literatur

1. TU-Dortmund, V103 Biegung elastischer Stäbe 2. www.chemie.de abgerufen am 20.06.2021
3. H. Föll (MaWi 1 Skript), www.Uni-Kiel.de abgerufen am 20.06.2021

7 Anhang

Auf den nächsten Seiten sind die Originalmesswerte zu finden.