

Der Halleffekt

Leander Flottau
leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 15.12.2020

Abgabe: 19.01.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Grundlagen zur elektrischen Leitfähigkeit	3
2.2	Berechnung des Widerstandes	3
2.3	Hall Effekt	4
2.4	anormaler Hall-Effekt	5
2.5	Weitere Parameter	5
2.6	Störspannung	6
3	Versuchsdurchführung	6
3.1	Versuchsapparate	6
3.2	Messung des Widerstandes	6
3.3	Messung der Hall-Spannung	7
4	Werte	7
4.1	Messwerte	8
4.2	Konstanten	8
5	Auswertung	9
5.1	Abmessungen und Spezifikationen der Proben	9
5.1.1	Abmessungen Draht	9
5.1.2	Abmessungen der Folie	10
5.1.3	Die Hallspannung	10
5.2	Die mikroskopischen Leitfähigkeitsparameter	10
5.2.1	Ladungsträger pro Volumen n	10
5.2.2	Ladungsträger pro Atom z	10
5.2.3	Die mittlere Flugzeit $\bar{\tau}$	10
5.2.4	Die mittlere Driftgeschwindigkeit \bar{v}_d	11
5.2.5	Die Beweglichkeit μ	11
5.2.6	Die Totalgeschwindigkeit v	11
5.2.7	Die mittlere freie Wellenlänge \bar{l}	11
5.3	Löcher- oder Elektronenleitung	11
5.4	Flussdichte B des verwendeten Magneten	11
6	Diskussion	13
7	Literatur	13
8	Anhang	13

1 Zielsetzung

In dem im folgenden dokumentierten Experiment sollen mehrere signifikante Materialwerte eines elektrischen Leiters ermittelt werden. Dazu wird insbesondere die durch den gleichnamigen Effekt hervorgerufene Hall-Spannung gemessen.

2 Theorie

2.1 Grundlagen zur elektrischen Leitfähigkeit

In einem Festkörper kristalliner Struktur unterliegen die Elektronen dem Pauli-Prinzip, daraus folgt, dass jeweils nur zwei Elektronen mit der gleichen Energie existieren können (die mit entgegengesetztem Spin). Daher spalten sich die diskreten Energieniveaus der Atomhüllen in Energiebänder auf, deren Breite dem Energieintervall entspricht in dem die zugehörigen Elektronen liegen. Die Bänder können sich abhängig vom Material überschneiden, oder durch ein Energieintervall getrennt sein in dem keine Elektronen liegen ("verbotene Zone"). Zu der elektrischen Leitfähigkeit des Materials tragen nur die Elektronen des Leitungsbandes, also des höchsten nicht vollständig besetzten Bandes, bei, da diese als einzige noch Energie aufnehmen, also durch äußere Krafteinwirkung beschleunigt werden können. Falls das oberste Band leer und vom darunterliegenden Band getrennt ist, können keine Elektronen beschleunigt werden, der Werkstoff ist in diesem Fall nicht leitend.

2.2 Berechnung des Widerstandes

In einer realen Kristallstruktur stoßen die beschleunigten Elektronen beständig auf strukturelle Fehlstellen und werden von diesen abgelenkt. Die gemittelte Zeit zwischen zwei solchen Zusammenstößen wird als mittlere Flugzeit τ bezeichnet. Bei äußerem elektrischen Feld gilt $F = mb = F_{el}$, gilt daher für die Beschleunigung b in Richtung des Feldes E :

$$b = -\frac{e_0}{m_0}E$$

mit der Elektronenmasse m_0 und der Elementarladung e_0 . Daraus ergibt sich die Änderung der Geschwindigkeit Δv :

$$\Delta v = -\frac{e_0}{m_0}E\tau \quad (1)$$

(mit $b = \frac{\Delta v}{\tau}$). Aufgrund der willkürlichen Ablenkrichtung, aus der $v_0 = 0$ (im Mittel) nach dem Stoß folgt und der gleichmäßigen Beschleunigung in E-Richtung gilt für die mittlere Driftgeschwindigkeit

$$v_d = \frac{1}{2}\Delta v \quad (2)$$

Damit ergibt sich die Stromdichte j (in Bewegungsrichtung)

$$j = -nv_d e_0 \quad (3)$$

wobei n die Anzahl an Elektronen pro Volumenelement beschreibt. Wenn man nun einen geraden Leiter mit der Länge L und Querschnittsfläche Q annimmt, ist die Stromdichte als Strom pro Querschnittsfläche ($j = \frac{I}{Q}$ definiert. Für das E-Feld gilt (nach Vorbild des Plattenkondensators) $E = \frac{U}{L}$. Außerdem lässt sich v_d über die Geschwindigkeitsänderung sowie deren Definition ausdrücken ($v_d = \frac{1}{2} \Delta v = -\frac{1}{2} \frac{e_0}{m_0} E \tau$). Damit lässt sich der Ausdruck für die Stromdichte umformen:

$$I = \frac{e_0^2 n \tau Q}{2 m_0 L} U \quad (4)$$

In dieser Gleichung kann man das bekannte Ohmsche Gesetz $U = RI$ wiedererkennen. Daraus lässt sich der Widerstand

$$R = \frac{2 m_0 L}{e_0^2 n \tau Q} \quad (5)$$

sowie dessen Kehrwert, die elektrische Leitfähigkeit

$$S = R^{-1} = \frac{e_0^2 n \tau Q}{2 m_0 L} \quad (6)$$

ablesen. Die zugehörigen spezifischen, also von der geometrischen Beschaffenheit unabhängigen, Größen sind der spezifische Widerstand $\rho = \frac{2 m_0}{e_0^2 n \tau}$ bzw. die spezifische Leitfähigkeit

$$\sigma = \rho^{-1} = \frac{e_0^2 n \tau}{2 m_0}.$$

2.3 Hall Effekt

In der vorliegenden Formel existieren einige Werte wie die Elektronenzahl die unbekannt sind, um diese zu bestimmen kann die Hall Spannung verwendet werden. Dafür wird an eine Leiterplatte, durch die der Querstrom I_q fließt, der Breite b und Dicke d ein homogenes magnetisches Feld angelegt, welches orthogonal auf der Bewegungsrichtung der Elektronen und der Leiterfläche steht. Auf die Elektronen wirkt nun die Lorentzkraft

$$F_l = e_0 v_d B$$

deren Richtung sich aus der rechten Hand Regel ergibt. Sie sorgt in dieser Anordnung dafür, dass alle Elektronen zu einer Seite der Leiterplatte bewegt werden (welche hängt von der Polung des Magnetfeldes ab). Durch diese Ladungsteilung entsteht ein elektrisches Feld E_l , welches der Lorentzkraft entgegenwirkt. Die Stärke dieses Feldes wächst so lange an, bis sich die elektrische Kraft und die Lorentzkraft ausgleichen.

$$F_{el} = F_l \implies e_0 E_l = e_0 v_d B \quad (7)$$

Zwischen den Enden der Leiterplatte liegt daher nun eine Spannung an, dies ist die Hall-Spannung U_H . Wenn die Anordnung als Plattenkondensator mit Abstand b angenommen

wird, kann man in den Ausdruck aus (7) für die elektrische Feldstärke $E_l = \frac{U_H}{b}$ einsetzen, und erhält für die Hall-Spannung

$$U_H = v_d B b \quad (8)$$

Wenn nun noch v_d durch den Querstrom ausgedrückt wird (hier $Q = bd$)

$$v_d = -\frac{j}{ne_0} = -\frac{I_q}{ne_0 b d} \quad (9)$$

kann aus der Hall-Spannung die Elektronenzahl berechnet werden

$$U_H = -\frac{i_q b}{ne_0 d} \Rightarrow n = -\frac{I_q b}{U_H e_0 d} \quad (10)$$

2.4 anormaler Hall-Effekt

Wenn bei einem Material der oben beschriebene Fall eintritt, dass sich das oberste und das darunterliegende Band überschneiden, können Elektronen aus dem unteren in das obere Band wechseln. Sie lassen dabei Leerstellen, sogenannte "Löcher", zurück. Diese verhalten sich wie positive Ladungsträger und rufen daher ebenfalls einen Hall-Effekt hervor, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Dies bezeichnet man als den anormalen Hall-Effekt.

2.5 Weitere Parameter

Ein anderer wichtiger Materialwert ist die mittlere freie Weglänge l , also die Distanz, die ein Elektron im Mittel zwischen zwei Stößen zurücklegt. Für diese gilt

$$l = \tau |v| \quad (11)$$

mit der Totalgeschwindigkeit $|v|$. diese lässt sich durch die Energie ausdrücken

$$|v| = \sqrt{\frac{2E}{m_0}} = \sqrt{\frac{2E_F}{m_0}} \quad (12)$$

Für die Energie in dieser Formel ist die Fermi-Energie E_F , also der Wert der energiereichsten Elektronen am absoluten Nullpunkt verwendet worden, da nur die Elektronen zur Leitfähigkeit beitragen für die $E \approx E_F$ gilt. Die Fermi-Energie lässt sich durch

$$E_F = \frac{h^2}{2m_0} \sqrt[3]{\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^2} \quad (13)$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum h ausdrücken. Daraus ergibt sich für l :

$$l = \tau \sqrt{\frac{2E_F}{m_0}} \quad (14)$$

Außerdem kann die Beweglichkeit μ als Proportionalitätskonstante definiert werden.

$$v_d = \mu E; \mu = \frac{e_0 \tau}{2m_0} \quad (15)$$

2.6 Störspannung

Da es in der Realität nie möglich ist, die Hallspannung an einer Äquipotentialfläche zu messen, tritt bei der Messung eine Störspannung auf. Diese lässt sich eliminieren in dem man die Spannung jeweils für beide Polungen des B-Feldes misst, da sich bei der Umpolung die Richtung der Lorentzkraft und somit das Vorzeichen der Spannung ändert, das der Störspannung jedoch nicht. Dann lässt sich aus den beiden gemessenen Spannungen $U_+ = U_s + U_H$ und $U_- = U_s - U_H$ die tatsächliche Hall-Spannung

$$U_H = \frac{1}{2}(U_+ - U_-) \quad (16)$$

ermitteln

3 Versuchsdurchführung

3.1 Versuchsausrüstung

Für die Widerstandsmessung stehen ein Multimeter und eine Leiterprobe vorgegebener Länge zur Verfügung. Längenmessungen werden mit einer Micrometerschraube vorgenommen. Für die Messung der Hall-Spannung steht ein Elektromagnet Abbildung 1 zur Verfügung, der aus zwei in Reihe geschalteten Spulen besteht, zwischen denen die Leiterprobe platziert werden kann. Sowohl die Probe als auch die Spulen werden durch ein Konstantstromgerät gespeist. Für die Messung der magnetischen Feldstärke steht ein Teslameter zur Verfügung, sowie für die Hall-Spannung ein Voltmeter mit hoher Auflösung.

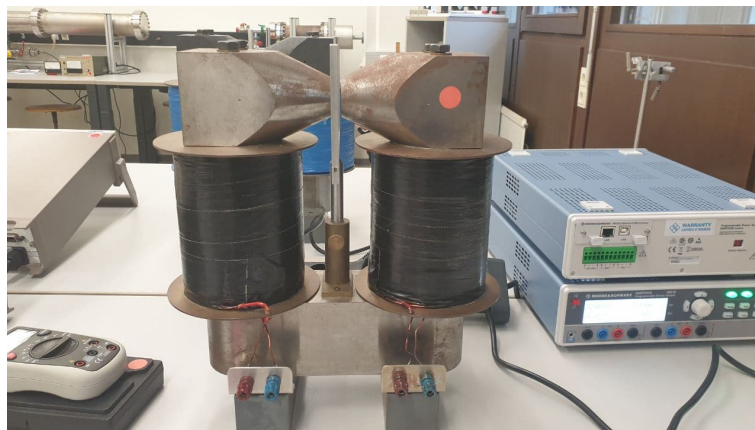


Abbildung 1: Elektromagnet

3.2 Messung des Widerstandes

Zur Widerstandsmessung wurde das Multimeter an den bereitgestellten Draht angeschlossen, sodass der Widerstandswert abgelesen werden konnte. Anschließend wurden



Abbildung 2: Folienprobe

mithilfe des Micrometers der Durchmesser des Drahtes sowie Länge, Breite und Dicke der Leiterplatte Abbildung 2 jeweils an separaten zur Längenmessung bereitgestellten Proben gemessen.

3.3 Messung der Hall-Spannung

Für die Messung der Hall-Spannung wurde zunächst eine Messreihe für die magnetische Feldstärke durchgeführt. Dafür wurde das Teslameter im Magnetfeld des Elektromagneten ausgerichtet und anschließend der Spulenstrom am Kontaktstromgerät beginnend mit $0,5A$ bis zum Wert $4,5A$ jeweils in Intervallen von $0,5A$ erhöht und die zugehörige Feldstärke notiert, anschließend wurde die Polung des Magnetfeldes umgekehrt und das Vorgehen wiederholt. Danach wurden zwei Messreihen für die Hall-Spannung durchgeführt. In der ersten Messreihe wurde bei konstantem Probenstrom der Spulenstrom nach dem gleichen Muster wie bei der vorangegangenen Messreihe variiert und die abfallende Hall-Spannung gemessen. Auch hier wurden identische Messreihen für beide Polungen durchgeführt. Dabei wurde wie bei allen Messungen der Spulenstrom vor dem abschalten heruntergeregelt, um einen plötzlich auftretenden Induktionsspannungsstoß zu vermeiden. In der letzten Messreihe wurde bei einem konstanten Spulenstrom von $4A$ der Probenstrom variiert und die Hall-Spannung gemessen. Auch hier wurde die Messung für beide Polungen durchgeführt. Die Werte des Probenstroms wurden wie in den vorangegangenen Messreihen variiert, jedoch aufgrund des Konstantstromgerätes nur bis zum Wert $2,5A$.

4 Werte

In diesem Kapitel werden alle verwendeten Werte und Konstanten dargestellt. Im Anhang ?? findet sich zudem ein Scan der Originaldaten.

4.1 Messwerte

Die nachstehende Tabelle Tabelle ?? zeigt die gemessenen Hallspannungen $U+$ und $U-$.

Tabelle 1: Daten für eine Kupferprobe

$I[\text{A}]$	$U+[\mu\text{V}]$	$U-[\mu\text{V}]$
0,500	2,000	5,600
1,000	2,000	6,600
1,500	1,800	7,200
2,000	1,100	8,000
2,500	0,200	8,900
3,000	-0,500	9,800
3,500	-1,500	10,600
4,000	-2,100	11,200
4,500	-2,600	11,500

Diese Tabelle Tabelle ?? zeigt die gemessenen Feldstärken B im Elektromagnet. Um $B+$ und $B-$ zu erhalten wurde der Magnet umgepolt.

Tabelle 2: Daten des Magnetfeldes

$I[\text{A}]$	$B+[\text{T}]$	$B-[\text{T}]$
0,500	2,000	5,600
1,000	2,000	6,600
1,500	1,800	7,200
2,000	1,100	8,000
2,500	0,200	8,900
3,000	-0,500	9,800
3,500	-1,500	10,600
4,000	-2,100	11,200
4,500	-2,600	11,500

4.2 Konstanten

$$\begin{aligned}
 N_A &= 6.02214076 \times 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \\
 e_0 &= 1.602176634 \times 10^{-19} \text{C} \\
 m_0 &= 9.1093837015 \times 10^{-31} \text{kg} \\
 h &= 6.62607015 \times 10^{-34}
 \end{aligned}$$

5 Auswertung

In diesem Kapitel werden alle Mittelwerte und deren Fehler berechnet. Dazu wurde Python Numpy benutzt. Diese Mittelwerte sind die anzunehmenden, fehlerbehafteten Größen.

Der Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0} x_i \quad (17)$$

Die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (18)$$

Der Fehler des Mittelwertes:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (19)$$

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (20)$$

5.1 Abmessungen und Spezifikationen der Proben

5.1.1 Abmessungen Draht

Bei der ersten vermessenen Probe handelt es sich um einen Kupferdraht mit folgenden Werten:

$$\begin{aligned} \text{Länge: } L_D &= 1,37 \text{ m} \\ \text{Durchmesser: } d_D &= 1,05 \pm 0,01 \times 10^{-4} \text{ m} \\ \text{Widerstand: } R_D &= (2,6 \pm 0,7) \end{aligned}$$

Um den Wert für den Widerstand angeben zu können wurde die Probe in beide Richtungen vermessen und der Mittelwert nach Gleichung 17 mit zugehörigem Fehler nach Gleichung 19 berechnet.

5.1.2 Abmessungen der Folie

Die zweite vermessene Probe ist eine Kupferfolie mit diesen Werten:

$$\text{Länge: } L_F = 25,0 \pm 1,0 \times 10^{-3} m$$

$$\text{Breite: } b_F = 24,0 \pm 1,0 \times 10^{-3} m$$

$$\text{Dicke: } d_F = 2,7 \pm 0,1 \times 10^{-5} m$$

5.1.3 Die Hallspannung

Für die Folie aus Unterunterabschnitt 5.1.2 lässt sich die Hallspannung ohne Störung mit Gleichung 16 berechnen. Es folgt also:

5.2 Die mikroskopischen Leitfähigkeitsparameter

In diesem Kapitel sollen einige Größen berechnet werden um die Materialeigenschaften der Probe auf mikroskopischer Ebene zu spezifizieren.

5.2.1 Ladungsträger pro Volumen n

Die Anzahl der Ladungsträger pro Volumeneinheit lässt sich mit Gleichung 10 berechnen, da für unterschiedliche Magnetfeldflüsse unterschiedliche Hallspannungen gemessen werden ergibt sich auch eine Reihe von Anzahlen für Ladungsträger pro Volumen. Da es aber nur eine korrekte Zahl geben kann wird hier der Mittelwert nach Gleichung 17 und dessen Fehler nach Gleichung 19 angeben:

$$n = 6,26 \pm 0,35 \times 10^{27} \frac{1}{m^3}$$

5.2.2 Ladungsträger pro Atom z

Kupfer hat ein molares Volumen von etwa $7,11 \times 10^{-6} \frac{m^3}{mol}$, daraus folgt das ein Kubikmeter etwa $V_m = 14065 \text{ mol}$ enthält. Ein mol hat genau N_A Unterabschnitt 4.2 Atome. Die Anzahl der zur elektrischen Leitung nutzbaren Elektronen pro Atom ergibt sich also aus:

$$z = \frac{n}{N_A V_m}$$
$$\Rightarrow z = 0,74 \pm 0,04 \approx 1$$

Da z ganzzahlig sein muss wird Kupfer ein nutzbares Elektron pro Atom haben.

5.2.3 Die mittlere Flugzeit $\bar{\tau}$

Aus Gleichung 5 folgt für einen Runden Draht mit $Q = \frac{\pi d_D^2}{4}$ sofort:

$$\bar{\tau} = \frac{8m_0 L}{e_0^2 n R \pi d_D^2} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \bar{\tau} = (1.79 \pm 0.11) \times 10^{-12} s$$

5.2.4 Die mittlere Driftgeschwindigkeit \bar{v}_d

Mit Gleichung 3 und $j = 1000000 \frac{A}{m^2}$:

$$\bar{v}_d = -\frac{j}{ne_0}$$
$$\Rightarrow \bar{v}_d = -1,0 \pm 0,06 \times 10^{-3} \frac{m}{s}$$

5.2.5 Die Beweglichkeit μ

Nach der Rechenvorschrift Gleichung 15 folgt mit dem Ergebnis aus Unterunterabschnitt 5.2.3:

$$\mu = 0.158 \pm 0.009 \frac{A^2 s^3}{kg}$$

5.2.6 Die Totalgeschwindigkeit v

Die totale Driftgeschwindigkeit $|v|$ ergibt sich mit Gleichung 12 und dem Ergebnis aus Unterunterabschnitt 5.2.1 zu:

$$|v| = (6.60 \pm 0.12) \times 10^5 \frac{m}{s}$$

5.2.7 Die mittlere freie Wellenlänge \bar{l}

Die materialspezifische freie Wellenlänge ergibt sich über Gleichung 11 mit den Ergebnissen aus Unterunterabschnitt 5.2.6 und Gleichung 21 zu:

$$\bar{l} = (1.18 + / - 0.05) \times 10^{-6} m$$

5.3 Löcher- oder Elektronenleitung

In diesem Versuch wurde eine Kupferprobe untersucht, Kupfer ist bekanntermaßen ein Elektronenleiter, dies zeichnet sich durch eine ausgeprägte Hallspannung aus. Zudem hat die Hallspannung die für eine Elektronenleiter zu erwartende Richtung.

5.4 Flussdichte B des verwendeten Magneten

Der für die Messungen benutzte Elektromagnet wurde bezüglich der Feldstärke im Spalt des Eisenkernes vermessen. Dazu wurde ein Teslameter in diesen Spalt gehalten und der Spulenstrom I in 0,5 A bis zur maximalen Leistung der angeschlossenen Konstantstromquelle erhöht, anschließend wurde umgepolt und der Prozess wurde wiederholt. In diesem Diagramm Abbildung 3 sind ist der Spulenstrom I gegen die daraus resultierende Flussdichte B aufgetragen:

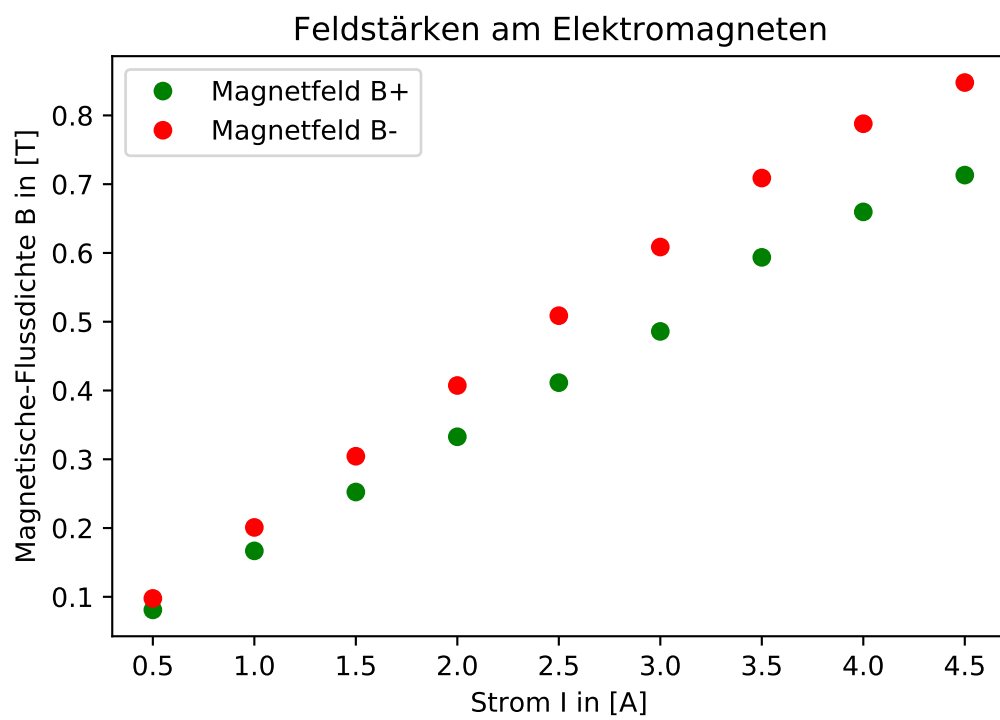


Abbildung 3: Flussdichte im Elektromagneten

6 Diskussion

Bei diesem Versuch kommt es auf hohe Präzision bei den Messungen an. Da die zu messenden Größen sehr klein sind, werden auch scheinbar unbedeutende Größen wie Übergangswiderstände zwischen Laborsteckern und den zugehörigen Buchsen relevant. Trotzdem sind die Messwerte und die daraus errechneten Größen durchaus realistisch und nah an Literaturwerten. Die Anzahl der zur elektrischen Leitung nutzbaren Elektronen Unterunterabschnitt 5.2.2 z liegt bedeutend näher an eins als an einer anderen Zahl damit lässt sich diese Zahl nicht "präzise" nennen, sie gibt jedoch einen eindeutigen Hinweis darauf das Kupfer nur über ein zur elektrischen Leitung nutzbaren Elektron verfügt. Die mittlere Flugzeit Unterunterabschnitt 5.2.3 liegt mit ihrer Größenordnung von 10^{-12} im Bereich von Größenordnungen die auch Literaturwerte von anderen Metallen aufweisen. Die mittlere Driftgeschwindigkeit Unterunterabschnitt 5.2.4 passt von der Größenordnung zu den Erwartungen, ist jedoch entgegen der Erwartung eine Negative Größe. Es ist anzunehmen das ein Vorzeichenfehler im Verlauf der Berechnungen passiert ist, welcher jedoch nicht sofort offen sichtbar ist. Die Beweglichkeit μ Unterunterabschnitt 5.2.5 hat einen annehmbaren und realistischen Wert. Die totale Geschwindigkeit v Unterunterabschnitt 5.2.6 passt von der Größe zur alltäglichen Erfahrung das sich elektrische Signale in Kupfer nahezu instantan ausbreiten. Die mittlere freie Wellenlänge Unterunterabschnitt 5.2.7 ist ebenfalls nahe an der anzunehmenden Größenordnung von etwa 10^{-5} bis 10^{-6} die für das von Kupfer ausgebildete fcc-Gitter zu erwarten ist. Ob es sich bei der Probe um ein Löcher- oder Elektronenleiter handelt Unterabschnitt 5.3 kann nur abgeschätzt werden, da die Messung der Hallspannung nur an einer einzelnen Probe durchgeführt wurde und daher keine Vergleichswerte vorliegen. Der verwendete Elektromagnet Unterabschnitt 5.4 verhält sich unter Änderung des Spulenstromes, wie in Abbildung 3 gut sichtbar nahezu linear, was für realistische Messwerte die Flussdichte betreffend spricht. Im ganzen betrachtet kann also von einem gelungen Experiment gesprochen werden auch wenn es einige Quellen für Messfehler gab und keine sich als präzise bezeichnen lässt.

7 Literatur

1. TU Dortmund, Versuch 311 Halleffekt
2. Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 2
3. Particle Data Group, Particle Physics Booklet

8 Anhang

Auf den nächsten beiden Seiten befinden sich die Scans der Orginalwerte.