106

Gekoppelte Pendel

Leander Flottau
leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.2020 Abgabe: 15.12.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Bei dem im Folgenden beschriebenen Doppelpendel-Versuch werden gekoppelte Schwingungen unter verschiedenen Anfangsbedingungen untersucht. Dafür wird unter den jeweiligen Bedingungen die Periodendauer zweier durch eine Feder gekoppelter Pendel gemessen, um schließlich den Kopplungsgrad der Feder feststellen zu können.

2 Theorie

2.1 harmonische Schwingungen

Zunächst wird ein einfaches Fadenpendel mit reibungsfreier Aufhängung, einem Faden der Länge l welcher als masselos angenommen wird und einer Punktmasse m. Nach der Anfangsauslenkung wird das Pendel vom tangentialen Anteil der Gewichtskraft $F = mgsin(\varphi)$ beschleunigt. Daraus erhält man mit der Kleinwinkelnäherung $sin(\varphi) = \varphi$ für kleine Auslenkungen die homogene Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + w^2\varphi = 0, w = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1}$$

Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillator mit der allgemeinen Lösung $\varphi(t) = acos(wt + \phi)$ mit der Amplitude a und der Phase ϕ. Aus ihr folgt, dass die Kreisfrequenz und damit die Periodendauer T unabhängig von der Auslenkung und der Masse des Pendels ist ($w = \frac{2\pi}{T}$). Die DGL des harmonischen Oszillators lässt sich auch durch Drehmomente ausdrücken:

$$J\ddot{\varphi} + D_p\varphi, w = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2}$$

Mit der Winkelrichtgröße D_p und dem Trägheitsmoment J.

2.2 DGL der gekoppelten Schwingung

Für zwei Pendel in Masse und Länge identische Pendel, die mit einer Feder gekoppelt werden, wirkt durch die Feder auf jedes der beiden Pendel ein zusätzliches Drehmoment $M_1 = D_F(\varphi_2 - \varphi_1)$ bzw. $M_2 = D_F(\varphi_1 - \varphi_2)$ welches von der Differenz der Auslenkwinkel abhängt. Daraus lässt sich ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen mit den harmonischen Schwingungen der Pendel um das zusätzliche, durch die Feder verursachte Drehmoment ergänzt herleiten

$$J\ddot{\varphi}_1 + D\varphi_1 = D_F(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{3}$$

$$J\ddot{\varphi}_2 + D\varphi_2 = D_F(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4}$$

Dieses System lässt sich durch entsprechende Wahl der Winkel entkoppeln. Die resultierenden entkoppelten DGLs ergeben wieder zwei harmonischen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen w_1 und w_2 und den Auslenkungen α_1 und α_2.

Abhängig von den Anfangsbedingungen $\alpha(t=0)$ und $\dot{\alpha}(t=0)$, ergeben sich unterschiedliche Schwingungen. Qualitativ lassen sich drei wesentliche Arten von Schwingungen für die gekoppelten Pendel unterscheiden (Im folgenden wird jeweils von zwei identischen Pendeln ausgegangen).

- Gleichsinnige Schwingung:
  Eine Gleichsinnige Schwingung liegt vor, wenn beide Pendel eine identische Anfangsauslenkung haben. Für eine Gleichsinnige liegt also die Anfangsbedingung: $\alpha_1(t=0) = \alpha_2(t=0)$ vor. Bei einer gleichsinnigen Schwingung entfällt das von der Feder ausgeübte Drehmoment (da $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$), daher ergibt sich für beide Pendel einfach wieder die DGL des ungestörten harmonischen Oszillator und die Pendel verhalten sich wie im ungekoppelten Zustand. Für die Kreisfrequenz der gleichsinnigen Schwingung gilt daher:

  $$w_+ = w = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5}$$

  Daraus ergibt sich für die Periodendauer der gleichsinnigen Schwingung:

  $$T_+ = \frac{2\pi}{w_+} \implies T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6}$$

- Gegensinnige Schwingung:
  Im Falle der Gegensinnigen Schwingung werden die beiden Pendel betraglich gleich, jedoch entgegengesetzt ausgelenkt. Es gilt also die Anfangsbedingung $\alpha_1(t=0) = -\alpha_2(t=0)$. Unter diesen Anfangsbedingungen übt die Kopplungsfeder auf die Pendel zu jedem Zeitpunkt jeweils eine gleich große entgegengesetzte Kraft aus, woraus eine symmetrische Pendelbewegung resultiert. Für die Kreisfrequenz der Gegensinnigen Schwingung gilt:

  $$w_- = \sqrt{\frac{g+2K}{l}} \tag{7}$$

  und somit für die Periodendauer

  $$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2K+g}} \tag{8}$$

  mit dem Kopplungsgrad K der Feder.

- Gekoppelte Schwingung:
  Im Falle der gekoppelten Schwingung befindet sich eines der Pendel in Ruhelage, während das andere um einen beliebigen Winkel (im Rahmen der Kleinwinkelnäherung) ausgelenkt wird. Es gilt also die Anfangsbedingung: $\alpha_1(t=0) = 0, \alpha_2(t=0) \neq 0$ bzw. $\alpha_2(t=0) = 0, \alpha_1(t=0) \neq 0$. In diesem Fall wird die Gesamtenergie des Systems mit Hilfe der Feder immer wieder Periodisch von einem Pendel auf das andere

übertragen. Das anfangs maximal ausgelenkte Pendel gibt also über die Feder seine Energie unter Abnahme der Amplitude an das andere Pendel ab dessen Amplitude sich dementsprechend erhöht. Das zweite Pendel erreicht genau dann die maximale Auslenkung, wenn das erste stillsteht, also der Energieübertrag vollständig ist. Die Periodendauer eines Zyklus dieser Energieübertragung, also die Dauer zwischen zwei Stillständen eines Pendels, wird als Schwebung bezeichnet.
Die Schwebungsdauer T_S und Kreisfrequenz der Schwebung w_S können mithilfe der Schwingungsdauern der gleich- und gegensinnigen Schwingungen T_+ und T_- berechnet werden. Mit diesen ergibt sich die Schwebungsdauer zu

$$T_S = \frac{T_+ T_-}{T_+ - T_-} \tag{9}$$

bzw. für w_S

$$w_S = w_+ - w_-. \tag{10}$$

Weiterhin lässt sich aus der gekoppelten Schwingung der Kopplungsgrad der Feder bestimmen:

$$K = \frac{w_-^2 - w_+^2}{w_-^2 + w_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{11}$$

3 Versuchsdurchführung

3.1 Versuchsaufbau

Der Versuchapparat, der auf dem Foto gezeigt wird, besteht aus zwei Pendeln mit verschiebbaren Pendelmassen der Masse $m = 1kg$. Die effektive Länge der Pendel wird von der Aufhängung zum Mittelpunkt der Massen gemessen. Die Aufhängung besteht aus zwei spitzen in einer keilförmigen Nut, um Reibung zu minimieren. Weiterhin wird zur Bestimmung der Periodendauern eine Stoppuhr verwendet. Die Pendel werden mit einer Feder mit Kopplungsgrad K verbunden.

3.2 Durchführung

Zunächst müssen die Pendel auf eine einheitliche Länge gebracht werden. Anschließend werden für beide Pendel jeweils einmal die Periodendauer gemessen und verglichen, um größere Abweichungen auszuschließen. Anschließend wurden zunächst für beide Pendel einzeln im ungekoppelten Zustand eine Messreihe zur Dauer der Eigenschwingung durchgeführt. Dies geschah indem die Pendel jeweils zehn mal ausgelenkt wurden, um mithilfe der Stoppuhr die Zeit zu messen, die das Pendel für fünf vollständige Schwingungen benötigt. Dadurch kann die Messabweichung der Periodendauer gering gehalten werden. Anschließend wurden die Pendel durch die Feder verbunden und dem gleichen Schema folgend die Periodendauer der gleichsinnigen Schwingung T_+ gemessen.
Danach wurde, ebenfalls in eine Reihe mit 10 Messungen, die Periodendauer der gegensinnigen Schwingung gemessen. Um zu gewährleisten, dass die Auslenkwinkel übereinstimmen

Abbildung 1: Versuchsaufbau

wurden entsprechende Markierungen verwendet.
Zuletzt wurde eine gekoppelte Schwingung betrachtet. Dafür wurde zehnmal die Dauer für fünf Perioden eines der beiden Pendel bei anfänglichem Stillstand des anderen gemessen. Außerdem wurde zehn mal die Zeit gemessen die das Pendel, das sich zu Begin in Ruhe befindet, benötigt um wieder in Ruheposition zu gelangen, also die Dauer einer vollständigen Schwebung. Danach wurden die Pendel auf eine neue Länge justiert und alle zuvor beschriebenen Messreihen nach identischem Schema wiederholt.

4 Messwerte

In den folgenden beiden Tabellen sind alle Messwerte aufgelistet. Diese Tabellen bilden diesen Basis für alle Mittelwertberechnungen in den folgenden Kapiteln.

Tabelle 1: Daten für ein Pendel mit L=0,5m

T_1[s]	T_2[s]	T_+[s]	T_-[s]	T_S[s]	T[s]
7,38	7,25	7,22	7,09	37,72	6,75
7,34	7,43	7,12	7,19	37,16	6,72
7,44	7,44	7,03	7,15	37,25	6,85
7,44	7,31	7,38	7,00	37,75	6,72
7,06	7,19	7,25	7,03	36,03	6,84
7,32	7,13	7,25	7,22	37,03	6,97
7,63	7,13	7,44	7,31	37,22	6,93
7,18	7,34	7,31	7,07	38,94	6,93
7,13	7,35	7,19	7,00	36,38	6,94
7,22	7,25	7,28	7,22	37,81	6,88

Tabelle 2: Daten für ein Pendel mit L=0,75m

T_1[s]	T_2[s]	T_+[s]	T_-[s]	T_S[s]	T[s]
8,34	8,44	8,28	8,25	61,16	8,31
8,31	8,31	8,43	8,06	61,40	8,50
8,50	8,40	8,47	8,22	65,59	8,28
8,53	8,37	8,54	8,18	63,69	8,72
8,41	8,47	8,44	8,31	63,81	8,44
8,32	8,37	8,28	8,16	64,15	8,35
8,40	8,41	8,60	8,22	64,53	8,25
8,43	8,40	8,38	8,31	64,03	8,41
8,37	8,50	8,44	8,09	64,12	8,22
8,37	8,41	8,29	8,16	64,25	8,37

5 Auswertung

In diesem Kapitel werden alle Mittelwerte und deren Fehler berechnet. Dazu wurde Python Numpy benutzt. Diese Mittelwerte sind die anzunehmenden, fehlerbehafteten Größen.

5.1 Schwingungsdauern T_1 und T_2 der freischwingenden Pendel

Die Schwingungsdauern T_1 und T_2 sind die Schwingungsdauern des linken bzw. des rechten Pendels ohne das beide mit einer Feder gekoppelt sind.

5.1.1 Schwingungsdauern für die Pendellänge $L = 0,5m$

Die Schwingungsdauern T_1 und T_2 ergeben sich aus dem mit (1) berechneten Mittelwerten zusammen mit deren über (2) berechneten Fehlern der Mittelwerte zu:

$$T_1 = 7.31 \pm 0.05s$$
$$T_2 = 7.282 \pm 0.034s$$

5.1.2 Schwingungsdauern für die Pendellänge $L = 0,75m$

Die Schwingungsdauern T_1 und T_2 ergeben sich aus dem mit (1) berechneten Mittelwerten zusammen mit deren über (2) berechneten Fehlern der Mittelwerte zu:

$$T_1 = 8.398 \pm 0.022s$$
$$T_2 = 8.408 \pm 0.016s$$

5.2 Schwingungsdauer T_+ für gleichphasige Schwingungen

T_+ ist die Schwingungsdauer für zwei mit einer Feder gekoppelte Pendel die gleichohasig schwingen.

5.2.1 Schwingungsdauer für $L = 0,5m$

Die Fehlerbehaftete Größe der Schwingungsdauer T_+ ist der Mittlewert nach (1) zusammen mit dessen Fehler nach (2):

$$7.25 \pm 0.04s$$

5.2.2 Schwingungsdauer für $L = 0,75m$

$$8.415 \pm 0.033s$$

5.3 Schwingungsdauer $T\_$ für gegenphasige Schwingungen

$T\_$ ist die Schwingungsdauer für zwei mit einer Feder gekoppelten Pendel die gegenphasig schwingen.

5.3.1 Schwingungsdauer $T\_$ für $L = 0,5m$

$$7.128 \pm 0.032s$$

5.3.2 Schwingungsdauer $T_$für $L = 0,75m$

$$8.196 \pm 0.025s$$

5.4 Schwingungsdauer T und Schwebungsdauer T_S

Die Schwingungsdauer T ist die Schwingungsdauer eines gekoppelten Pendels. Die Schwebungsdauer T_S ist die Zeit die ein Pendel braucht um vom Stillstand über eine Schwingungsperiode bis zum erneuten Stillstand benötigt.

5.4.1 Schwingungsdauer T

Die Schwingungsdauer T ist die Verknüpfung aus dem Mittelwert und dessen Fehler. Dieser Wert lautet für ein 0,5m Pendel:

$$6.853 \pm 0.028s$$

und für ein 0,75m Pendel:

$$8.38 \pm 0.04s$$

5.4.2 Schwebungsdauer T_S

Auch die Schwebungsdauer ist der Mittelwert und sein Fehler. Für ein 0,5m Pendel hat sie die Größe:

$$37,33 \pm 0.24s$$

und für ein 0,75m Pendel:

$$63,7 \pm 0,4s$$

5.5 Berechnung des Kopplungsgrades K

Der Kopplungsgrad ist eine spezifische Größe der Feder. Er berechnet sich mit der Formel aus der Versuchsanleitung über:

$$K = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2}$$

Mit folgenden Werten für ein 0,5m Pendel:

$$T_+ = 7.25 \pm 0.04s$$
$$T\_ = 7.128 \pm 0.032s$$

folgt:

$$K = 0.017 \pm 0.007$$

Mit diesen Werten für das 0,75m Pendel:

$$T_+ = 8.415 \pm 0.033s \; T_- = 8.196 \pm 0.025s$$

folgt:

$$K = 0.026 \pm 0.005$$

5.6 Vergleich von berechneter und gemessener Schwebungsdauer T_S

Die Schwebungsdauer berechnet sich laut Versuchsanleitung über:

$$T_S = \frac{T_+ * T_-}{T_+ - T_-}$$

Mit folgenden Werten für ein 0,5m Pendel:

$$T_+ = 7.25 \pm 0.04s$$
$$T_- = 7.128 \pm 0.032s$$

folgt:

$$T_{S_{theorie}} = (4.3 \pm 1.7) * 10^2 s$$

und für das 0,75m Pendel folgt:

$$T_+ = 8.415 \pm 0.033s$$
$$T_- = 8.196 \pm 0.025s$$
$$\Rightarrow T_{S_{theorie}} = (2.5 \pm 0.6) * 10^2 s$$

Die errechneten Schwebungsdauern sind weit größer als die gemessenen.

5.7 Verwendete statistische Formeln

Der Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0} x_i \quad (1)$$

Die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Der Fehler des Mittelwertes:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

Für alle Rechnungen wurden die Python Funktionen numpy.meam() und numpy.std().

6 Diskussion

Für die Genauigkeit der jeweiligen Messwerte und gegebenenfalls die Abweichung von den idealen Werten sind eine Reihe von Faktoren maßgeblich verantwortlich.
Zum einen sorgen die Näherungen die beispielsweise für den harmonischen Oszillator angenommen wurden für Ungenauigkeiten im Hinblick auf die tatsächlich gemessenen Werte. Denn der Zusammenhang $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ vernachlässigt den Luftwiderstand und damit den Dämpfungsterm der Differentialgleichung. Im realen System tritt eine gedämpfte Schwingung auf, bei der die Periodendauern der späteren Umläufe bereits geringer als der ideale Wert sind, weshalb der Realwert vom idealen Wert abweicht. Dies fällt besonders bei den sich stark von einander unterscheidenden Schwebungsdauern $T_S$auf. Außerdem sorgt die Kleinwinkelnäherung für einen weiteren Unsicherheitsfaktor, da diese für größere Anfangsauslenkungen des Pendels ungenauer wird.
Zum anderen sind durch die nicht-elektronische Datenaufnahme eine Reihe von menschlichen Faktoren zu berücksichtigen.
Aufgrund der Tatsache, dass die Umlaufzeit per Hand gestoppt wird, ergibt sich die Problematik, dass der exakte Punkt des maximalen Auslenkwinkels bzw. im Falle der Schwebungsdauer der Ruheposition mit bloßem Auge kaum exakt bemessen werden kann. Auch existiert bei dieser Methodik natürlich eine geringfügige Verzerrung der Messergebnisse durch die jeweilige Verzögerung der Reaktionszeit des Stoppenden. Zuletzt muss für die Messreihen für gleich- bzw. gegensinnige Schwingungen beachtet werden, dass die manuell eingestellten Anfangswinkel nicht exakt übereinstimmen, und damit die Periodendauern von denen der idealen gleich- oder gegensinnigen Schwingungen abweichen. Auch hebt sich die Reihe für die Periodendauer der Schwebung von den restlichen Messungen ab, da die Große Periodendauer nur einen vollständigen Umlauf erlaubt. Dennoch fällt auch auf, das sich die Fehler, des über verschiedene Messwerte berechneten Kopplungswertes K, überschneiden, das spricht für Messwerte die der Realität nahe kommen.

7 Literatur

1. TU Dortmund Versuch 106 Gekoppelte Pendel

8 Anhang

Auf den nächsten beiden Seiten folgen Kopien der Originalmesswerte.