103

Biegung elastischer Stäbe

Leander Flottau
leander.flottau@tu-dortmund.de

Jan Gaschina
jan.gaschina@tu-dortmund.de

Durchführung: 15.06.2021 Abgabe: 22.06.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Experiment wird das Elastizitätsmodul von vier verschiedenen Metallen anhand ihrer Durchbiegung bestimmt. Dabei wird sowohl eine ein, als auch eine beidseitige Einspannung verwendet.

2 Theorie

Wenn auf einen Körper eine Kraft wirkt, kann dieser mit einer Verformung einhergehen. Die Kraft bezogen auf die Oberfläche, auf die sie wirkt wird als Spannung bezeichnet, wobei zwischen Normal- und Schubspannung unterschieden wird. Erstere ist die Komponente, die senkrecht zur Oberfläche steht, letzere die tangentiale, also oberflächenparallele Komponente der Kraft. In der Regel ist die Spannung bei hinreichend kleiner Deformation $\Delta L/L$ proportional zu selbiger.

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

Dieser Zusammenhang ist das Hooksche Gesetz. Die Proportionalitätskonstante E des Hookschen Gesetzes wird als Elastizitätsmodul bezeichnet und ist ein Materialspezifische Wert.

2.1 Durchbiegung bei einseitiger Einspannung

Wenn an einem einseitig eingespannten Stab der Länge L eine Kraft F auf die in Abbildung **??** gezeigte Weise angreift, führt dies zu einer Auslenkung des Stabes aus der horizontalen. Diese sogenannte Biegung ist abhängig vom Abstand zur Aufhängung, bildet also eine Funktion $D(x)$ die experimentell untersucht werden kann. Aus dieser lässt sich anschließend das Elastizitätsmodul bestimmen. Durch die Kraft F entsteht am Punkt x ein Drehmoment

$$M_F = F(L - x)$$

Dieses führt dazu, dass die oberen Schichten des Stabes gestreckt und die unteren gestaucht werden, während in der Mitte eine neutrale Faser existiert, welche nicht verformt wird. Aus dieser Streckung bzw. Stauchung resultieren Schubspannungen oberhalb und Druckspannungen unterhalb der neutralen Faser. Die von ihnen verursachten Drehmomente sind entgegengesetzt gleich und lassen sich durch Integration über die Gesamte Querschnittsfläche Q gemäß

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dy$$

berechnen. Das innere Drehmoment der Spannungen wirkt dem äußeren entgegen, bis sie sich ausgleichen. Daher lässt sich aus $M_F = M_\sigma$ die Durchbiegung $D(x)$ bestimmen:

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \tag{2}$$

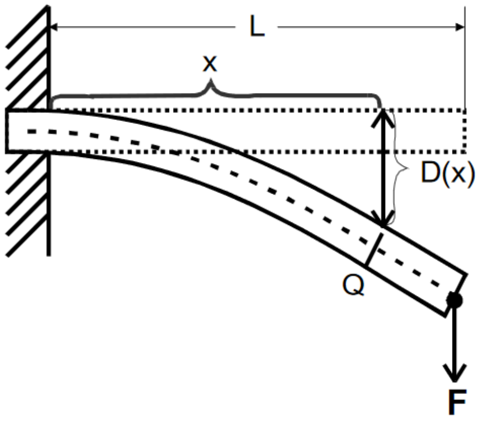

Abbildung 1: Biegung bei einseitiger Einspannung

Wobei mit I das Flächenträgheitsmoment bezeichnet wird.

2.2 Durchbiegung bei beidseitiger Einspannung

Neben der soeben diskutierten einseitigen Einspannung, kann das Elastizitätsmodul auch bestimmt werden, indem der Stab beidseitig eingespannt wird und eine Kraft in der Mitte angreift, wie es in Abbildung **??** dargestellt ist. Auch in diesem Fall wirkt ein äußeres Drehmoment. Dieses beträgt für die eine hälfte des Stabes $(0 \leq x \leq L/2)$

$$M_F = -\frac{F}{2}x$$

und dementsprechend für die andere hälfte $(L/2 \leq x \leq L)$

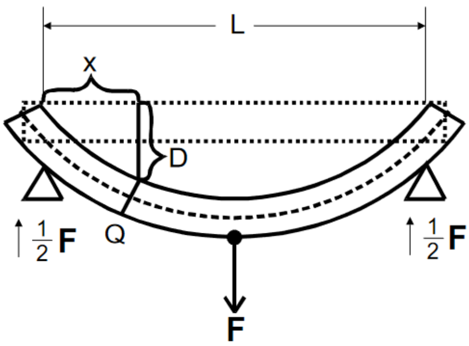

Abbildung 2: Biegung bei beidseitiger Einspannung

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x).$$

Daraus lässt sich mit einer Rechnung analog zu der vorherigen erneut die Durchbiegung in Abhängigkeit vom Abstand bestimmen. Diese beträgt

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3) \tag{3}$$

für den Bereich $0 \leq x \leq L/2$ und

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \tag{4}$$

im anderen Bereich $L/2 \leq x \leq L$.

3 Auswertung

In Diesen Kapitel sollen die Aufgenommenen Daten ausgewertet werden

3.1 Bestimmung von Materialeigenschaften

Für den Versuch stehen vier Metallstäbe, zwei runde und zwei Eckige, zur verfügung. diese wurden jeweils gewogen und ausgemessen die Ergebnisse sind in **??** zu sehen. Die Dichte ρ berechnet sich, mit Länge L und Durchmesser d, für die runden Stäbe über:

$$\rho = \frac{4m}{d^2L}$$

und für die eckigen Stäbe, mit Seitenlängen a und b über:

$$\rho = \frac{m}{abL}$$

der Messfehler berechnet sich dann über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_x = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_2}^2 + ... + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2} \tag{5}$$

Tabelle 1: In der Tabelle sind die Eigenschaften der benutzten Metallstäbe zu sehen.

Nr.	Farbe	m /g	L /cm	d /mm	a /mm	b /mm	ρ / $\frac{\text{t}}{\text{m}^3}$
1	golden	(378.1±0.1)	(57.5±0.1)	(10±0.05)	-	-	(8.37±0.09)
2	braun	(356.0±0.1)	(58.0±0.1)	(10±0.05)	-	-	(7.82±0.08)
3	silbergrau	(166.9±0.1)	(60.0±0.1)	-	(10±0.05)	(10±0.05)	(2.783±0.028)
4	rötlich	(535.6±0.1)	(60.1±0.1)	-	(10±0.05)	(10±0.05)	(8.91±0.09)

Anhand der Dichte und der Farbe kann recht sicher gesagt werden das es sich bei Stab eins um Messing, bei Stab zwei um Eisen, bei Stab drei um Aluminum und bei Stab vier um Kupfer handelt.

3.1.1 Flächenträgheitsmoment der runden Stäbe

Messing und Eisen Liegen als runde Stäbe vor, das entsprechende Flächenträgheitsmoment I berechent sich mit dem Durchmesser d des Stabes aus **??** über:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Damit ergibt sich für den Messingstab:

$$I_{Mes} = (4.91 \pm 0.10) \times 10^{-10} \mathrm{m}^4$$

und für den Eisenstab:

$$I_{Fe} = (4.91 \pm 0.10) \times 10^{-10} \mathrm{m}^4$$

Der Fehler setzt sich mit der Gaußschen-Fehlerfortplanzung **??** fort.

3.1.2 Flächenträgheitsmoment der eckigen Stäbe

Sowohl der Aluminium- als auch der Kupferstab liegen als eckige Stäbe vor, ihr Trägheitsmoment berechnet sich mit den Seitenlängen a und b aus **??** über:

$$I = \frac{ab^3}{12}$$

damit folgt für den Aluminiumstab:

$$I_{Al} = (8.33 \pm 0.17) \times 10^{-10} \mathrm{m}^4$$

und für den Kupferstab:

$$I_{Cu} = (8.33 \pm 0.17) \times 10^{-10} \mathrm{m}^4$$

der Fehler berechnet sich auch hier wieder über **??**.

3.2 Einseitig eingespannter Stab

In diesem Kapitel wird des Elastizitätsmodul E mit einem nur einseitig eingespannten Stab bestimmt. Dazu wird eine Masse $m = (0.3781 \pm 0.1)$kg an das Ende des Stabes bei $L = 0{,}54\,\mathrm{m}$ gehängt und an zehn stellen die Absenkung des Stabes gemessen. In **??** ist das Ergebnis der Messung dargestellt. Da das Maß der Absenkung nicht linear verläuft wurde sie nicht gegen x sondern gegn den Term $(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ aufgetragen. Anschließend wird mithilfe der python matplotlib Bibliothek je eine lineare Ausgleichsgrade der Form $f(x) = a{*}x{+}b$ für jeden Stab berechenet. Die berechneten Parameter sind in **??** dargestellt.

Die Elastizitätsmodule ergeben sich durch Vergleich der funktion der Ausgleichsgraden mit **??** zu:

$$E = \frac{mg}{2Ia} \tag{6}$$

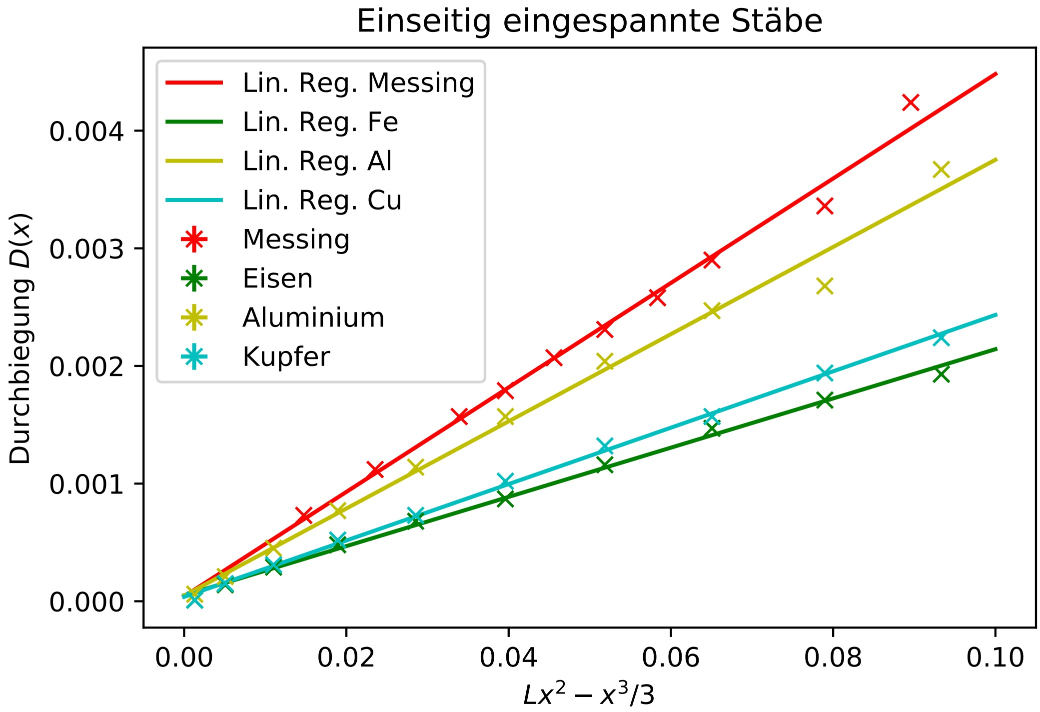

Abbildung 3: Absenkung eines einseitig eingespannten Stabes.

Tabelle 2: In der Tabelle sind die Parameter der Ausgleichsgraden dargestellt.

Nr.	Material	a /m^2	b /m
1	Messing	(0.0444 ±0.0015)	(0.0000 ±0.0001)
2	Eisen	(0.0209 ±0.0005)	(0.0001 ±0.0000)
3	Aluminium	(0.0371 ±0.0013)	(0.0000 ±0.0001)
4	Kupfer	(0.0240 ±0.0004)	(0.0000 ±0.0000)

mit der Steigung a der Ausgleichsgraden aus **??**. Es ergeben sich also folgende Elastizitätsmodule:

$$E_{Mes} = (102.0 \pm 4.0)\text{GPa}$$
$$E_{Fe} = (216.0 \pm 7.0)\text{GPa}$$
$$E_{Al} = (71.0 \pm 2.9)\text{GPa}$$
$$E_{Cu} = (111.2 \pm 2.8)\text{GPa}$$

3.3 Beidseitig eingespannter Stab

Das Elastizitätsmodul kann auch berechnet werden wenn der Stab beidseitig eingepannt wird und die Masse in der Mitte bei $L/2 = 0{,}275\,\text{m}$ angehängt wird. Im Folgenden wird die linke Seite des Stabes aufgelegt und die rechte Seite eingespannt. Die Absenkungen der linken Seite werden in **??** gegen den Term $3L^2x - 4x^3$ und die rechte Seite in **??** gegen den Term $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2 - L^3$ aufgetragen. Analog zu **??** werden Ausgleichsgraden durch die Punkte gelegt die zugehörigen Parameter sind in **??** dargestellt.

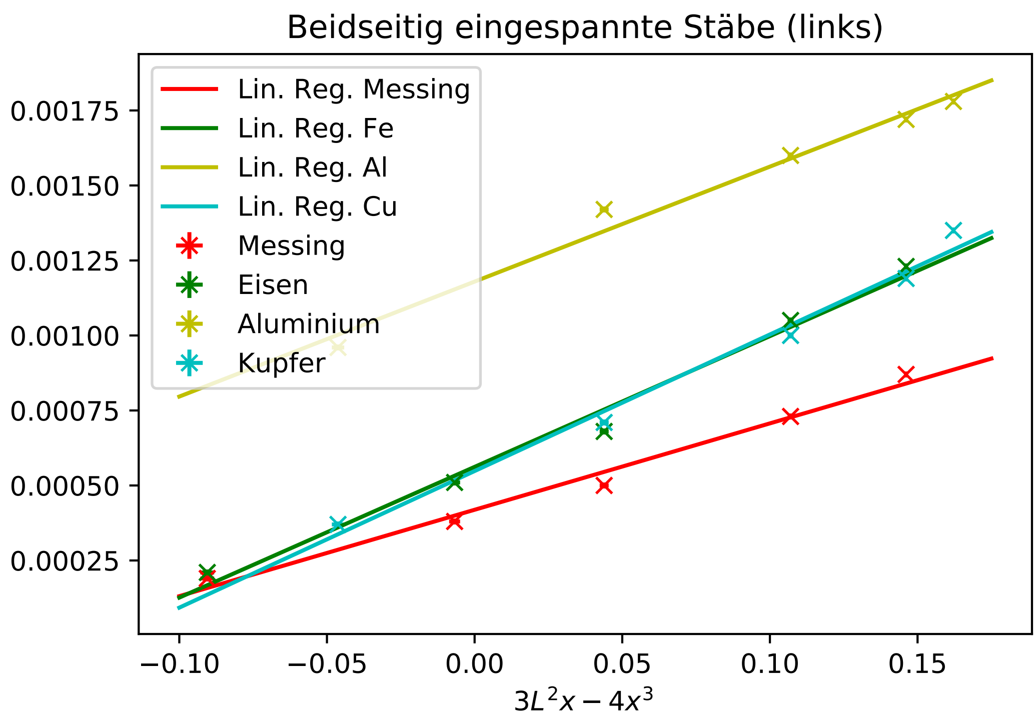

Abbildung 4: Absenkung der linken Seite eines beidseitig eingespannten Stabes.

Nun kann ein Vergleich analog zu **??** angestellt werden welcher zur Formel zur berechnung des Elastizitätsmoduls führt. Sie lautet:

$$E = \frac{mg}{48Ia}$$

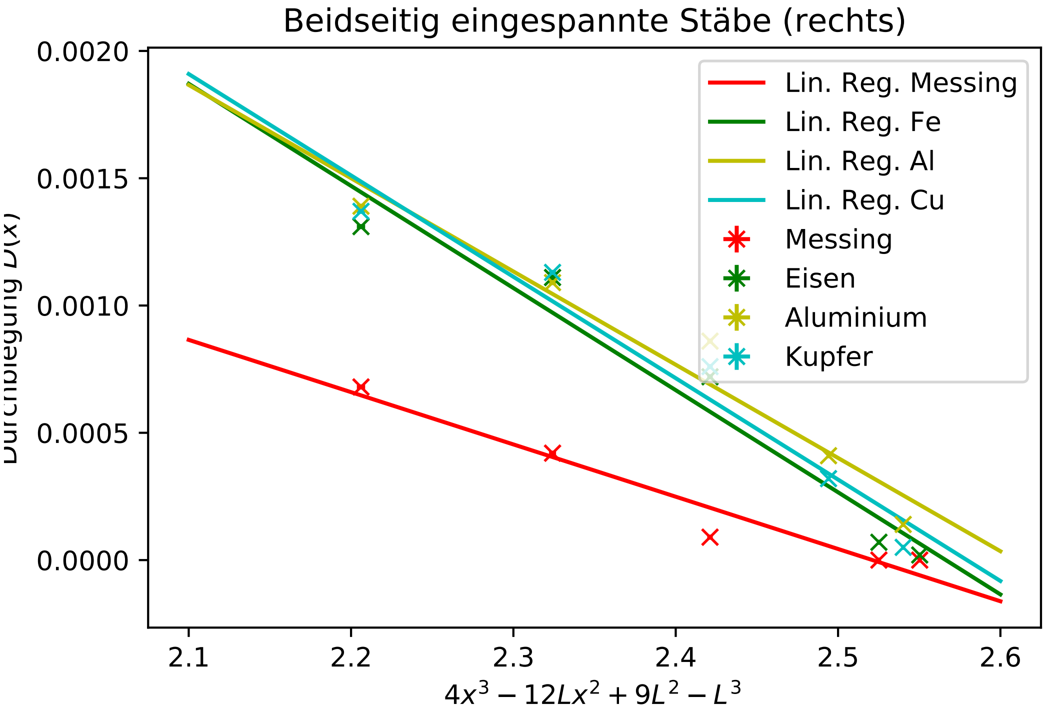

Abbildung 5: Absenkung der rechten Seite eines beidseitig eingespannten Stabes.

Tabelle 3: In der Tabelle sind die Parameter der Ausgleichsgraden dargestellt.

Nr.	Material	a_{links} /m^2	b_{links} /m	a_{rechts} /m^2	b_{rechts} /m
1	Messing	(0.0029 ±0.0002)	(0.0004 ±0.0000)	(0.0020 ±0.0002)	(0.0051 ±0.0006)
2	Eisen	(0.0044 ±0.0003)	(0.0006 ±0.0000)	(0.0040 ±0.0005)	(0.0102 ±0.0012)
3	Aluminium	(0.0038 ±0.0003)	(0.0012 ±0.0000)	(0.0036 ±0.0004)	(0.0095 ±0.0011)
4	Kupfer	(0.0046 ±0.0003)	(0.0005 ±0.0000)	(0.0039 ±0.0005)	(0.0102 ±0.0012)

Dabei wird für Messing eine Masse von $m = (2.859 \pm 0.0001)$kg und für die anderen drei Materialien eine Masse von $m = (4.298 \pm 0.0001)$kg angehängt. Das führt zu den in **??** dargestellten Ergebnissen. Der jeweils zugehörige Fehler berechnet sich über **??**.

Tabelle 4: In der Tabelle sind die berechneten Elastizitätsmodule eines beidseitig aufliegenden Stabes aufgeführt.

Nr	Material	E_{links} /GPa	E_{rechts} /GPa
1	Messing	(413±30)	(580±80)
2	Eisen	(411±29)	(450±60)
3	Aluminium	(275±22)	(290±40)
4	Kupfer	(231±16)	(265±34)

3.4 Vergleich der Elastizitätsmodule

In **??** sind die auf beide Arten berechneten Elastizitätsmodule dargestellt. Sie weichen untereinander stark ab. Mögliche Gründe dafür sind in **??** zu finden.

Tabelle 5: In der Tabelle sind alle berechneten Elastizitätsmodule dargestellt.

Nr	Material	$E_{einseitig}$ /GPa	E_{links} /GPa	E_{rechts} /GPa
1	Messing	(102.0±4.0)	(413±30)	(580±80)
2	Eisen	(216.0±7.0)	(411±29)	(450±60)
3	Aluminium	(71.0 ±2.9)	(275±22)	(290±40)
4	Kupfer	(111.2±2.8)	(231±16)	(265±34)

4 Diskussion

5 Literatur

1. TU-Dortmund, V103 Biegung elastischer Stäbe

6 Anhang

Auf den nächsten Seiten sind die Originalmesswerte zu finden.