# I Résolution géométrique

Au tableau

# II Méthode algébrique du simplexe

Une usine fabrique deux produits A et B à partir de deux composants C1 et C2.
La fabrication de A nécessite 1 composant C1 et 2 composants C2.
Celle de B nécessite 1 composant C1 et 1 composant C2.
L'usine dispose de 7 composants C1 et de 9 composants C2.

La marge unitaire sur le produit A est de 3K€ et elle est de 2 K€ sur le produit B.
Déterminer le programme de fabrication qui maximise la marge totale (marge totale = prix de vente – prix de revient).

| | Produit A | Produit B | Contraintes |
|---|---|---|---|
| Composant C1 | 1 | 1 | 7 |
| Composant C2 | 2 | 1 | 9 |
| Marge unitaire | 3 | 2 | |

## Mathématisation du problème

Déterminer le couple (x,y) de façon à maximiser la ***marge totale*** Z=3x+2y en respectant les contraintes sur C1 et C2. Avec x le nombre de produits A et y le nombre de produits B.

**Contraintes de positivité :**
$x \geq 0$ et $y \geq 0$ car x et y sont des quantités

**Contraintes en ressources disponibles :**

$x + y \leq 7$

$2x + y \leq 9$

On obtient ainsi le ***programme linéaire*** écrit sous forme canonique suivant :

$x \geq 0, y \geq 0$

$x + y \leq 7$

$2x + y \leq 9$

$(Max)Z = 3x + 2y$

## Etape 1 : Ecrire le programme sous forme standard

Remplacer les inégalités par des égalités en introduisant des ***variables d'écart*** $e_i$ positives.
D'où le **système 1** à 2 équations et 4 inconnues.

$$\boxed{\begin{array}{l} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0 \\ x + y + e_1 = 7 \\ 2x + y + e_2 = 9 \\ (Max)Z = 3x + 2y \end{array}}$$

Pour détermine une solution, on va fixer 2 valeurs. Les variables prenant la valeur 0 sont des ***variables hors base*** et celles obtenues par la résolution du système seront appelées ***variables de la base***.

## Etape 2 : Application de la méthode du simplexe au programme sous forme standard

Nous avons une **solution 1**

$x = 0$, $y = 0$, $e_1 = 7$, $e_2 = 9$
x et y sont les variables hors base et $e_1$ et $e_2$ les variables de la base car non nulles
Pour cette solution, on a $Z = 3 * 0 + 2 * 0 = 0$

### 1ère itération

Le but est d'augmenter la valeur de Z , donc augmenter la valeur de x ou y.
On choisit x car son augmentation dégagera une marge supérieure à celle de y.
Donc on pose y = 0 et on cherche la valeur max de x qui satisfasse les contraintes.
On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + e_1 = 7 \\ 2x + e_2 = 9 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e_1 \geq 0 \\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ 9 - 2x \geq 0 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} x \leq 7 \\ x \leq \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

d'où la **solution 2**

$x = \frac{9}{2}$, $y = 0$, $e_1 = \frac{5}{2}$, $e_2 = 0$

et $Z = 3 * \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

y et $e_2$ sont les variables hors base car nulles et x et $e_1$ sont les variables de la base.

### 2ème itération

Si tous les coefficients de Z sont <= 0 alors on a atteint l'**optimum**.
Sinon, on répète le processus en exprimant Z en fonction des variables hors base.
On choisit la variable hors base ayant le plus grand coefficient positif dans l'expression de Z.

On utilisera la seconde équation pour exprimer x en fonction des variables hors base y et $e_2$ soit $2x + y + e_2 = 9$

On a donc $x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}e_2 + \frac{9}{2}$

En remplaçant x par sa valeur dans le système 1

$$\begin{aligned}
&x \geq 0,\ y \geq 0 \\
&e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0 \\
&x + y + e_1 = 7 \\
&2x + y + e_2 = 9 \\
&(Max)Z = 3x + 2y
\end{aligned}$$

on obtient le **système 2**

$$\boxed{\begin{aligned}
&x \geq 0,\ y \geq 0 \\
&e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0 \\
&-\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}e_2 + \frac{9}{2} + y + e_1 = 7 \\
&2x + y + e_2 = 9 \\
&(Max)Z = 3\left(-\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}e_2 + \frac{9}{2}\right) + 2y
\end{aligned}}$$

On obtient après simplification un système équivalent à :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}y + e_1 - \frac{1}{2}e_2 = \frac{5}{2} \\
&2x + y + e_2 = 9 \\
&(Max)Z = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}e_2 + \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

En examinant les coefficients de Z, on constate qu'en augmentant $e_2$, Z baisserait (car coefficient négatif). Il faut donc augmenter y et maintenir $e_2$ nul.

D'où, en remplaçant $e_2$ par 0 dans le système 2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + e_1 = \frac{5}{2} \\ 2x + y = 9 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} e1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y \\ x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} e_1 \geq 0 \\ e_2 \geq 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{5}{2} - \frac{1}{2}y \geq 0 \\ \frac{9}{2} - \frac{1}{2}y \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} y \leq 5 \\ y \leq 9 \end{cases}$$

On a ainsi une **solution 3**

| |
|---|
| x = 2 , y = 5 , $e_1$ = 0 , $e_2$ = 0<br><br>et Z=3*2+2*5=16 |

**Vérification de l'optimum** :

x et y sont les variables de la base et $e_1$ et $e_2$ sont les variables hors base.

On utilisera la première équation pour exprimer y en fonction des variables hors base $e_1$ et $e_2$ soit : $\frac{1}{2}y + e_1 - \frac{1}{2}e_2 = \frac{5}{2}$

On en déduit : y = $-2e_1+e_2+5$

on exprime Z en fonction des variables hors base $e_1$ et $e_2$

On avait $Z = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}e_2 + \frac{27}{2}$

En remplaçant y par sa valeur, il vient :

$$Z = \frac{1}{2}\left(-2e_1 + e_2 + 5\right) - \frac{3}{2}e_2 + \frac{27}{2}$$

soit $Z = -e_1 - e_2 + 16$

| |
|---|
| Comme tous les coefficients de Z sont négatifs ou nuls, la solution 3 est optimale.<br><br>Le programme qui maximise la marge Z est une production de 2 produits A et de 5 produits B. La totalité des composants C1 et C2 ont été consommés. (car $e_1$ =0 et $e_2$ =0).<br><br>On a donc : x = 2 , y = 5 , $e_1$ = 0 , $e_2$ = 0<br><br>et Z=3*2+2*5=16 |

# III Mise en œuvre informatique : algorithme du simplexe par la méthode des tableaux

Etape1 : Ecrire le programme sous forme standard

**Système 1**

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \\ x + y + e_1 = 7 \\ 2x + y + e_2 = 9 \\ (\mathrm{Max})Z = 3x + 2y + 0\, e_1 + 0\, e_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \\ 1.x + 1.y + 1.e_1 + 0.e_2 = 7 \\ 2x + 1.y + 0.e_1 + 1.e_2 = 9 \\ (\mathrm{Max})Z = 3x + 2y + 0\, e_1 + 0\, e_2 \end{cases}$$

Etape2 : Dresser le tableau initial associé au système 1

| Hors base<br>Dans la base | x | y | $e_1$ | $e_2$ | Contraintes | Rapports |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 7 | |
| $e_2$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 9 | |
| Z | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |

Lecture du tableau : $e_1$= 7, $e_2$=9, x=0, y=0 et Z =0 (la valeur de Z sera négative ou nulle : donc lire l'opposé)

**Solution 1**

$x = 0, y = 0, e_1 = 7, e_2 = 9$

x et y sont les variables hors base et $e_1$ et $e_2$ les variables de la base car non nulles

Pour cette solution, on a Z = 3 * 0 + 2 * 0 =0

1ère itération

On aura atteint l'optimum quand tous les coefficients de Z seront négatifs ou nuls.

On va chercher le **pivot** qui indiquera **la variable sortante et la variable entrante**. La colonne du pivot correspond au coefficient de Z le plus positif : 3 dans notre cas. La variable entrante associée à cette colonne est x. La colonne 1 est donc celle du pivot. Pour déterminer la ligne du pivot, il faut faire le **rapport des contraintes sur les coefficients de la colonne** 1 et **choisir la ligne obtenant le plus petit rapport positif**. Le pivot se trouve à l'intersection de la 1ere colonne et de la seconde ligne. **Le pivot est 2.**

| Hors base<br>Dans la base | x | y | $e_1$ | $e_2$ | Contraintes | Rapports |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 7 | 7/1 |
| $e_2$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 9 | 9/2 |
| Z | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |

| Hors base / Dans la base | **Variable entrante** | y | $e_1$ | $e_2$ | Contraintes | Rapports |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 7 | 7/1 |
| **Variable sortante** | **pivot** | 1 | 0 | 1 | 9 | **Plus petit rapport positif** |
| Z | **Coeff le plus positif** | 2 | 0 | 0 | 0 | |

**Règles de modification du tableau (<u>à appliquer dans cet ordre)</u>**

1) Diviser la ligne du pivot par le pivot. Donc ici, diviser la ligne 2 par la valeur 2.
2) Remplacer tous les éléments de la colonne du pivot autre que le pivot par 0 (ici colonne 1).
3) Chaque fois que la ligne du pivot croise une colonne en 0, il faut recopier intégralement la colonne. Inversement, chaque fois que la colonne du pivot croise une ligne en 0, il faut recopier intégralement la ligne.

D'où :

| Hors base / Dans la base | x | y | $e_1$ | $e_2$ | Contraintes |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | ? | 1 | ? | ? |
| x | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 9/2 |
| Z | 0 | ? | 0 | ? | ? |

Pour compléter le tableau, il faut appliquer la **méthode du rectangle** permettant de calculer la nouvelle valeur remplaçant b :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ p & c \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} p & c \\ a & b \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} b & a \\ c & p \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} c & p \\ b & a \end{vmatrix}$$

b est remplacé par $b - \frac{ac}{p}$

Le tableau devient donc :

| Hors base / Dans la base | x | y | $e_1$ | $e_2$ | Contraintes | Rapports |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 1/2 | 1 | -1/2 | 5/2 | |
| x | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 9/2 | |
| Z | 0 | 1/2 | 0 | -3/2 | -27/2 | |

**Solution 2**

$x = 9/2$ , $y = 0$ , $e_1 = 0$ , $e_2 = 5/2$

e2 et y sont les variables hors base et $e_1$ et x les variables de la base car non nulles

Pour cette solution, on a Z = 3 * 9/2 + 2 * 0 =27/2

## 2ème itération

L'optimum n'est pas atteint.

Le coefficient le plus positif de Z est ½. Donc la colonne 2 est celle du pivot et y est la variable entrante. La ligne 1 est celle du pivot (car + petit rapport) et $e_1$ est la variable sortante. Le pivot est ½.

D'où le tableau :

| Hors base<br>Dans la base | x | y | $e_1$ | $e_2$ | Contraintes | Rapports |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 1/2 | 1 | -1/2 | 5/2 | 5 (+ petit rapport) |
| x | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 9/2 | 9 |
| Z | 0 | 1/2 | 0 | -3/2 | -27/2 | |

En appliquant les règles ci-dessus, on obtient :

| Hors base<br>Dans la base | x | y | $e_1$ | $e_2$ | Contraintes | Rapports |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | 2 | -1 | 5 | |
| x | 1 | 0 | -1 | 1 | 2 | |
| Z | 0 | 0 | -1 | -1 | -16 | |

## 3ème itération

L'optimum est atteint et la solution optimale est :

**Solution 3**

$x = 2$ , $y = 5$ , $e_1 = 0$ , $e_2 = 0$

et Z=3*2+2*5=16