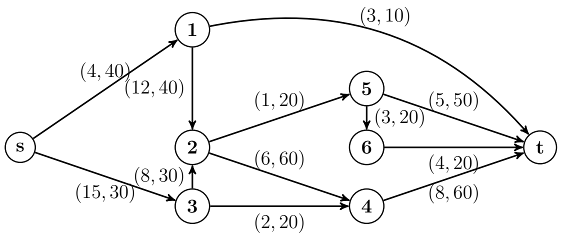
# Feuille de TD 2 : Flots compatibles de coût minimum

## I Suite de l'exercice VIII de la feuille 1

1. On considère que le passage d'une unité de flot dans chaque arc a maintenant un coût, ces **coûts unitaires** sont décrits ci-dessous :

| (s,1) | (s,3) | (1,2) | (1,t) | (2,4) | (2,5) | (3,2) | (3,4) | (4,t) | (5,t) | (5,6) | (6,t) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 30 | 40 | 10 | 60 | 20 | 30 | 20 | 60 | 50 | 20 | 20 |

Ce qui donne le graphe suivant (à chaque arc est associé un couple de nombres : le premier représente sa capacité, le second représente le coût unitaire de transport) :




(a) Calculez un chemin entre s et t de **coût minimal** par l'algorithme de votre choix (applicable), vous détaillerez l'exécution de l'algorithme et donnerez son nom.

(b) En déduire un flot $\varphi'_0$ de valeur 3 ayant un coût minimal parmi les flots compatibles de valeur 3 (remplissez la grille). Quel est son coût ?

(c) Donnez le graphe d'écart associé au flot $\varphi'_0$ (trouvé en b)) et calculez un chemin de s à t de coût minimal dans ce graphe par l'algorithme de votre choix (vous détaillerez le déroulement de l'algorithme et donnerez son nom).

(d) En déduire un flot $\varphi'_1$ de valeur 5 et de coût minimal parmi les flots de même valeur. (remplissez la grille). Quel est son coût ?

(e) On admet que le plus court chemin dans le graphe d'écart associé à $\varphi'_1$ est [s,3,2,5,6,t]. Donnez (dans la grille) le flot $\varphi'_2$ obtenu en augmentant au maximum le flux sur les arcs de ce chemin. Quel est son coût ?

(f) On admet que le plus court chemin dans le graphe d'écart associé à $\varphi'_2$ est [s,3,2,4,t], en déduire un flot maximum $\varphi'_3$ (donc de valeur M) et de coût minimum (vous le décrirez dans la grille et donnerez son coût).

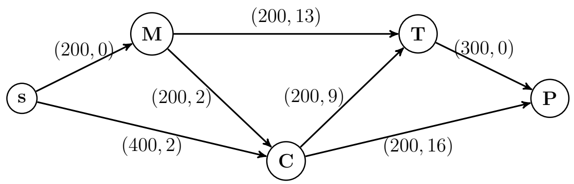
(g) *On admet que les seules coupes de capacité minimum (pour les capacités initiales $c(u)$) sont $\omega^+(\{s,1,2,3\})$ et $\omega^+(\{s,1,2,3,4\})$*. Dans quel arc doit-on augmenter d'une unité la capacité $c(u)$ pour obtenir un flot de valeur $M+1$ avec un coût minimum ? Calculez ce flot $\varphi'_4$ et ce coût (décrivez $\varphi'_4$ sur la grille).



## II Les fleurs c'est périssable

Un grossiste en fleurs assure leur transport depuis Mougins et Vallauris vers Paris. Ce transport est effectué par camionnettes de Vallauris à Cannes et de Mougins à Cannes ou Grasse, puis par train ou avion de Cannes à Paris et par train de Grasse à Paris. On désire étudier le transport global par semaine durant l'été de façon à envoyer un maximum de fleurs à Paris pour un coût minimal.
Les camionnettes disponibles à Vallauris permettent d'acheminer au plus 400 cartons par semaine vers Cannes au coût unitaire de 2$e$ ; celles de Mougins, 400 cartons, dont la moitié vers Grasse au coût unitaire de 3$e$ et l'autre moitié vers Cannes, au coût de 2$e$.
De plus, on doit limiter les envois par le train, trop lents, à 300 cartons dont 200 au plus depuis Cannes, le coût unitaire étant alors de 10$e$ de Grasse et de 9$e$ de Cannes. Par avion, le coût unitaire est de 16$e$ mais leur nombre ne permet pas d'expédier plus de 200 cartons de Cannes à Paris.
Enfin, la production de Mougins ne peut dépasser 200 cartons, celle de Vallauris étant toujours excédentaire.

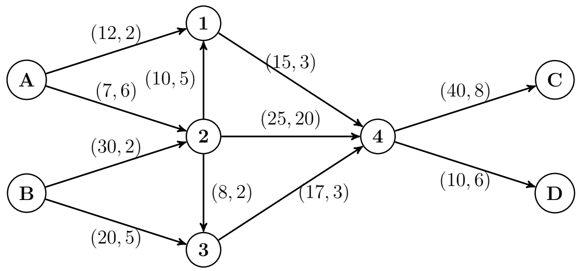
1. Tracer un graphe de 8 sommets représentant le problème : sommets à créer s (entrée), M, V, G, C et P pour les cinq villes, T et A pour train et avion. Valuer les arcs (x,y) par des couples $(c(x,y),\ \gamma(x,y))$, $c(x,y)$ indiquant la capacité de l'arc et $\gamma(x,y)$ le coût unitaire de transport associé ; pour certains arcs $c(x,y)$ pourra être infini.
2. Quelles sont les simplifications à faire pour aboutir au graphe G suivant ? Les justifier.




3. Déterminer un flot maximal de coût minimal sur ce graphe.

## III Budget d'une firme de véhicules

Une firme possède 20 véhicules dans la localité A et 15 véhicules dans la localité B. Elle désire en expédier dans deux villes C et D. Les routes praticables sont indiquées dans le réseau ci-dessous où les couples de nombres associés aux arcs représentent respectivement les capacités et les coûts unitaires.




1. Sachant que le budget prévu par la firme est de 186, déterminer le nombre maximum de véhicules qui pourront être expédiés en C et D, le trajet de ces véhicules, le nombre de ces véhicules qui quittent A et le nombre de ces véhicules qui arrivent en C.
2. Sachant que la firme désire expédier 28 véhicules, déterminer
   (a) le coût minimum de cette opération
   (b) le nombre de véhicules circulant sur les différentes routes.
3. La firme pourrait-elle expédier tous ses véhicules ?

**Algorithme 1:** Algorithme de recherche de plus courts-chemins de Moore

**Données** : $G$ : un graphe connexe orienté pondéré quelconque, $i_0$ : une racine de $G$
**Résultat** : soit détection d'un circuit de longueur $< 0$, soit pour chaque sommet $i \neq i_0$, $\lambda_i$ distance du plus court chemin de $i_0$ à $i$ et $v_i$ arc d'extr. $i$
**Variables** : $\Sigma$ : sommets à explorer, $i$ : sommet, $j$ : successeur de $i$ non encore exploré;
**pour** $i = 1$ *à* $n$ **faire** $\lambda_i \leftarrow \infty$;
$\lambda_{i_0} \leftarrow 0$ ; $\Sigma \leftarrow \{i_0\}$;
**tant que** $\Sigma \neq \emptyset$ **faire**
  sélectionner $i$ dans $\Sigma$ tel que $\lambda_i = \min_{j \in \Sigma} \lambda_j$ ;
  $\Sigma \leftarrow \Sigma \setminus \{i\}$;
  **pour** *tout* $j$ *de* $\Gamma^+(i)$ **faire**
    **si** $\lambda_i + l_{ij} < \lambda_j$ **alors**
      **si** *l'ajout de* $(i, j)$ *à* $\bigcup_{j \in X} v_j$ *crée un circuit* **alors** retourner "circuit négatif"
      **sinon**
        `/* ajustement de` $j$ `et mise à jour de l'arc d'extrémité` $j$ `*/`
        $\lambda_j \leftarrow \lambda_i + l_{ij}$ ; $v_j \leftarrow (i, j)$ ; $\Sigma \leftarrow \Sigma \cup \{j\}$;



# Annexe : algorithmes

**Algorithme 2:** Algorithme de recherche d'un flot maximum de coût minimum (Busacker et Gowen (1961)

**Données** : $R = (X, U, c, \gamma)$ : réseau de transport à capacité et à coût positifs d'entrée $s$ et de sortie $t$
**Résultat** : à l'étape $k$ un flot de coût minimum parmi les flots ayant même valeur $\varphi(u_0)$ que lui, à la fin $\varphi$ =flot maximum de coût minimum
**début**
  `/* Initialisation */`
  $\varphi \leftarrow (0, \ldots, 0)$ (flot nul);
  `/* Étape courante */`
  Construire le graphe d'écart $G_R(\varphi) = (X, U_\varphi, c_\varphi, \gamma_\varphi)$
  avec $\gamma_\varphi(u) = \begin{cases} \gamma(u) & \text{si } u \text{ même sens dans } U \text{ et } U_\varphi \\ -\gamma(u) & \text{sinon} \end{cases}$ ;
  **si** $\nexists$ *chemin* $[s, t]$ *dans* $G_R(\varphi)$ **alors**
    FIN : $\varphi$ est un flot maximum de coût minimum
  **sinon**
    déterminer un chemin $\nu_{st}$ élémentaire $st$-minimal de $(X, U_\varphi, \gamma_\varphi)$;
    $\varepsilon \leftarrow \min_{u \in \nu_{st}} c_\varphi(u)$;
    $\mu_{st} \leftarrow$ vecteur cycle de $(X, U)$ basé sur $\nu_{st}$ et $u_0$, de sens de parcours $u_0$;
    $\varphi \leftarrow \varphi + \varepsilon \mu_{st}$ `/* nouveau flot compatible */`
    $\gamma(\varphi) \leftarrow \gamma(\varphi) + \varepsilon.\gamma_\varphi(\nu_{st})$ `/* coût du nouveau flot */`

**Algorithme 3:** Algo de recherche d'un flot de coût minimum de valeur donnée (Klein)

**Données** : $R = (X, U, c, \gamma)$ : réseau de transport à capacité et à coût positifs d'entrée $s$ et de sortie $t$ et $\varphi$ un flot compatible sur $R \cup \{u_0\}$.
**Résultat** : un flot de coût minimum parmi les flots ayant même valeur $\varphi(u_0)$ que lui
Construire le graphe d'écart $G_R(\varphi) = (X, U_\varphi, c_\varphi, \gamma_\varphi)$
avec $\gamma_\varphi(u) = \begin{cases} \gamma(u) & \text{si } u \text{ même sens dans } U \text{ et } U_\varphi \\ -\gamma(u) & \text{sinon} \end{cases}$ ;
**tant que** $\exists$ *circuit de coût négatif dans* $G_R(\varphi)$ **faire**
  soit $k$ la capacité résiduelle minimale de ce circuit ;
  $\varphi \leftarrow \varphi + k.\mu$ ;
  construire le graphe d'écart $G_R(\varphi)$;

Variante : choisir de supprimer le circuit de coût moyen minimum où le coût moyen est le coût du circuit divisé par le nombre d'arcs du circuit. [1]
Détecter les circuits négatifs en utilisant un algorithme de plus court chemin ou partir d'une arborescence et considèrer qu'un arc n'y appartenant pas soit permet d'améliorer l'arborescence soit crée un circuit négatif (algorithme de Bennington).

1. Il faut un algo de complexité $O(nm)$ pour le trouver. Cela garanti un nombre max de $O(nm^2 logn)$ iterations. D'où un algo polynomial : $O(n^2m^3logn)$.