Exercices de RO : Programmation linéaire

I : Résolution graphique

Exercice 1: minimisation

Min (R)=$3x_1+4x_2$
S/C
$x_1 + x_2 >= 9$
$x_1 - x_2 <= 9$
$x_1 + 3x_2 >= 17$
$x_1 >= 3$
$x_2 <= 10$
x_1 et x_2 positifs

Exercice 2 : Solutions particulières

Question : Résoudre par la méthode graphique les deux programmes linéaires suivants :

P1 Max(R) = 12x + 10y
Sous les contraintes
x>=5
4x + y <=4
x+y <= 2
x et y positifs

P2 Max(R) = 12x + 10y
sous les contraintes

4x + y >=4
x+y >= 2
x et y positifs

Exercice 3 : dualité

Soit le programme linéaire suivant :
Min (R)= 5a +20b +10c
Avec les contraintes suivantes :
a + 10b + 2c >=1
a + 5b + 3c >=2
a, b et c positifs

1) Donner le primal du programme linéaire
2) Résoudre le primal par la méthode graphique
3) Résoudre le primal par la méthode du simplex (tableaux)
4) En déduire la solution du programme dual

II : Modélisation et résolution graphique et simplex

Exercice 4 : maximisation

Une brasserie A produit 2 types de bière pour lesquels elle utilise 3 matières première : maïs, houblon et malt.

Le tableau ci-dessous résume les données du problème.

	Maîs	Houblon	Malt	Bénéfice
Bière blonde	2,5kg	125g	17,5kg	65 écus
Bière brune	7,5kg	125g	10kg	115 écus
Quantités disponibles	240kg	5kg	595kg	

Pour fabriquer 1 tonneau de bière blonde, le brasseur utilise 2,5kg de maîs, 125g de houblon et 17,5kg de malt. La fabrication de ce tonneau lui rapporte alors un bénéfice de 65 écus. Le tableau se lit de manière analogue pour la bière brune.

1) déterminer graphiquement la fabrication optimale du brasseur.
2) Même question avec la méthode du simplex.
3) Une brasserie concurrente (notée B) demande au brasseur A de lui vendre 50% de son stock de houblon (et ce, bien entendu, avant que la fabrication déterminée au 1) ne soit lancée). A quel prix minimum A devra t-il lui vendre cette quantité de houblon ?

Exercice 5 : maximisation

Pour produire des pièces de fonte, une entreprise dispose d'une fonderie et d'un atelier de mécanique.

	Fonderie	Atelier
Pièces de type 1	6 tonnes chaque heure	12 tonnes chaque heure
Pièces de type 2	5 tonnes chaque heure	15 tonnes chaque heure
	On dispose de 100mn de temps d'œuvre pour la fonderie	On dispose de 45mn de temps d'œuvre pour l'atelier

La consommation en énergie et les recettes par tonne sont données dans le tableau suivant :

	Energie	Recette par tonne
Une tonne de pièces de type 1	14kW/h	2000€
Une tonne de pièces de type 2	30kW/h	3000€
Quantités disponibles	210kW/h	

Question : Combien de tonnes de pièces de chaque type faut-il fabriquer pour maximiser la recette ? (Résoudre graphiquement)

Exercice 6 : minimisation

Pour l'alimentation de bétail d'une exploitation de 1000 têtes, il faut chaque jour les éléments suivants (en kg et par animal) : X=0.10, Y=0.14, Z=0.15, T=0.24

Ces éléments sont présentés dans les aliments A et B (par quintal) avec les compositions suivantes :

	X	Y	Z	T
A	10%	20%	30%	40%
B	35%	20%	15%	30%

A et B sont achetés à 500 F le quintal pour A et à 800 F le quintal pour B.

Question : Comment nourrir correctement les 1000 têtes tout en minimisant le coût d'achat ? Modéliser et résoudre ce problème graphiquement.

Exercice 7:
Afin de s'implanter sur le marché, l'entreprise Pizza-Domicile fait la vente sur place de 3 types de pizzas à prix très bas, la Royale, la Margarita, et la Spéciale. Cependant cette offre n'est proposée que dans la mesure des stocks d'ingrédients disponibles. Le tableau ci-dessous dresse la liste des quantités d'ingrédients (en grammes) que doivent contenir ces 3 pizzas :

Ingrédients (en g)	gruyère	jambon	champignons	lardons
Royale	40	50	20	
Margarita	20		40	30
Spéciale	50	60	20	40

D'autre part, afin de limiter la demande le patron ne veut pas, pour ces promotions, utiliser plus de 3000 g de gruyère, 3100 g de jambon, 2000 g de champignons et 1000 g de lardons. Les bénéfices réalisés sur ces pizzas sont de 1 €, 2 € et 2 € respectivement sur la Royale, la Margarita et la Spéciale.

On cherche à connaître quelles sont les quantités de pizzas de chaque type qu'il doit fabriquer pour maximiser son bénéfice sur cette promotion.

1) Ecrire le programme linéaire primal correspondant sans le résoudre. On notera x1, x2, x3, les quantités de pizzas Royale, Margarita, et Spéciale.

2) Ecrire le programme linéaire dual sans le résoudre.

Exercice 8 :
On reprend l'énoncé de l'exercice 1 mais en ne considérant que les 2 types de pizzas Royale et Margarita.

Résoudre graphiquement le problème de façon à trouver les quantités optimales de chacun des types de pizzas qui maximisent le gain.

Exercice 9:
Le propriétaire d'un hôtel décide de faire un certain nombre d'aménagements afin de décrocher une étoile au guide LEBONDODO. Pour cela toutes les chambres doivent comporter une douche ou une salle de bains, mais la proportion de chambres n'étant équipée que d'une douche ne doit pas dépasser 25%. Une chambre peut être aménagée avec un lit double (2 couchages) ou un lit double et un lit simple (3 couchages). Cependant, vu la taille des chambres actuelles, seulement 50% de celles-ci pourraient contenir 3 couchages. La quasi-totalité des clients seront des curistes et optent donc en général pour une pension complète. Les heures d'ouverture des thermes obligent le restaurant de l'hôtel à n'envisager qu'un service unique fixé à midi trente. La salle de restaurant ne pouvant accueillir que 100 personnes, cela a bien sûr des conséquences sur le nombre de chambres à proposer. On

suppose qu'en période de cure l'hôtel est systématiquement rempli.

1) Ecrire sans le résoudre le programme linéaire qui permettra de déterminer le nombre de chambres de chaque type que devra aménager le propriétaire afin de maximiser son bénéfice. Les tarifs des chambres en euros sont donnés ci-dessous:

	2 couchages	3 couchages
Douche	40	55
Salle de bains	45	60

On notera respectivement x_1, x_2, x_3, x_4, le nombre de chambres à 2 couchages avec douche, à 2 couchages avec salle de bains, à 3 couchages avec douche, à 3 couchages avec salle de bains.

2) La résolution du problème précédent par la méthode du simplexe conduit au tableau final suivant:

B \ HB	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	C
t_1	1	0	9/8	1/8	1	0	1/8	25/2
t_2	0	0	5/4	5/4	0	1	1/4	25
x_2	1	1	3/2	3/2	0	0	1/2	50
D	-5	0	-25/2	-15/2	0	0	-45/2	-2250

Donner la solution du problème. Ecrire le programme dual du problème précédent et donner sa solution.

3) Pour des questions de coût, la solution précédente ne convient pas à l'hôtelier. Il impose donc à son programme la contrainte supplémentaire que 30 chambres maximum pourront être équipées de salle de bains. La résolution de ce nouveau problème conduit au tableau ci-dessous:

B \ HB	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	t_4	C
x_1	1	0	0	0	2/3	-1/5	1/5	-1/3	10
x_4	0	0	0	1	2/3	1	0	2/3	20
x_3	0	0	1	0	-2/3	-1/5	1/5	-2/3	0
x_2	0	1	0	0	-2/3	-1	0	1/3	10
D	0	0	0	0	0	4	-19	-5	-2050

Terminer les calculs pour donner la ou les solutions de ce programme linéaire.

Exercice 10: Mise sous forme standart (introduction de variables artificielles et méthode du grand M)
Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode des tableaux.
En TD, on posera le 1er tableau et on résoudra le problème en TP.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 3 \\ \qquad 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ (\max) Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{array}\right\}$$

Exercice 11:
Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} x1 + x2 + x3 + x4 \leq 12 \\ 3x1 + 2x2 + 3x3 + x4 \leq 5 \\ 2x1 + x2 + x3 + 4x4 \leq 7 \\ xi \geq 0 \ (i = 1,...,4) \\ (\max)\ Z = 5x1 + 4x2 + 3x3 + x4 \end{array}$$

1) Résoudre ce programme par la méthode du simplex.
2) Donner sans calcul, les résultats du programme dual correspondant.
3) Montrer qu'une des inéquations du programme primal est redondante. Tenant compte de ce fait, simplifier le programme dual.

PROGRAMMATION LINEAIRE EN NOMBRES ENTIERS

Exercice 12 : Programmation Linéaire en nombres entiers : méthode « Branch and bound »
Un camion peut transporter une charge maximale de 14tonnes de 4 marchandises différentes. Les poids de chacune des marchandises sont respectivement 4,6, 8 et 10 tonnes. Enfin le bénéfice attendu de la vente de chacune des marchandises après son transport vaut respectivement : 2000, 2700, 3600 et 4400 euros. Déterminer le chargement du camion permettant de maximiser le bénéfice.

Exercice 13 : Cutting stock problem
On dispose d'un nombre illimité de barres de longueur 10. On veut découper ces barres pour obtenir des petites barres. Ainsi on veut obtenir :
32 petites barres de longueur 7
15 petites barres de longueur 5
46 petites barres de longueur 4
52 petites barres de longueur 3

Formuler ce problème sous forme de programme linéaire en variables entières de façon à minimiser les chutes. (Les petites barres produites en trop sont comptées comme chutes).