Recherche opérationnelle

Support de cours M1 pour la partie FLOTS (F. Bannay - Année 2013-2014)

La recherche opérationnelle se situe au confluent des mathématiques discrètes [1] et de l'informatique théorique (Dijkstra était informaticien).

- *Théorie des graphes* : raisonner sur des dessins (sommets et arcs).
- *Recherche opérationnelle* : méthodes pour élaborer de meilleurs décisions dans des problèmes d'organisation. Elle tire son nom des applications militaires dont elle est issue, elle s'attaque à trois types de problèmes *combinatoire* (trouver une solution optimale parmi un grand nombre de solutions [2]), *aléatoire* (trouver une solution optimale en présence d'incertitude [3]) ou *concurrentiel* (trouver une solution optimale en prenant en compte les agissements d'autres décideurs [4]) [13].

Les thèmes abordées dans ce cours appartiennent à l'optimisation combinatoire et à la théorie des graphes : les flots et les programmes de transport.

Bref historique : la théorie des graphes a commencé a être étudiée par Euler (1736) avec le problème des ponts de Königsberg. Puis en 1914, König travaille sur les graphes biparti et propose un théorème sur les *couplages* parfaits. D'autre part en 1835, Kirchhoff établit une modélisation des circuits électriques, introduit les notions de tension, courant. Ce n'est qu'en 1956 que ces travaux donnent naissance à la *théorie des flots* dans un graphe (théorème de Ford-Fulkerson liant le flot maximum et la coupe minimum). La théorie des flots s'applique aux problèmes de couplage et sera à l'origine de la *programmation linéaire* (algorithme du Simplexe). Les travaux sur les couplages donneront naissance à la *théorie de la complexité* : c'est Edmonds en 1965 qui introduit la notion d'algorithme polynomial pour caractériser l'efficacité de son algorithme de couplage, ce qui pousse Cook à montrer l'existence de problème NP-complet (SAT) cette découverte se fait en même temps en Russie : Levin étudiant de Kolmogorov en 1971 montre que le problème de pavage (tiling problem) est NP-complet.

Les principaux documents qui ont servi à réaliser ce cours sont le support de cours de Serge Nogarède [11], celui d'Annie Astié-Vidal [1], celui de Mme Laudet[9] et les livres [2, 10, 8, 6] et l'encyclopédie en ligne wikipedia [14, 13].

---

1. dans le sens où la notion de continuité n'intervient pas. Les objets étudiés en mathématiques discrètes sont des ensembles dénombrables comme celui des entiers. Les mathématiques discrètes incluent habituellement la logique (et l'étude du raisonnement), la combinatoire, les théories des ensembles, des nombres, des graphes, de l'information, de la calculabilité et de la complexité.

2. Exemple typique : déterminer où installer 5 centres de distribution parmi 30 sites d'implantation possibles, de sorte que les coûts de transport entre ces centres et les clients soient minimum. L'énumération des solutions 30 x 29 x 28 x 27 x 26 / (5x4x3x2) = 142 506 doit être évitée.

3. Exemple typique : connaissant la distribution aléatoire du nombre de personnes entrant dans une administration en une minute et la distribution aléatoire de la durée de traitement pour une personne, déterminer le nombre minimum de guichets à ouvrir pour qu'une personne ait moins de 5% de chances de devoir attendre plus de 15 minutes.

4. Exemple typique : fixer une politique de prix de vente, sachant que les résultats d'une telle politique dépendent de la politique que les concurrents adopteront.

Chapitre 1

Flots et réseaux de transport

Les problèmes que l'on va aborder dans ce chapitre consistent à organiser de façon optimale sous diverses contraintes, les mouvements de certaines quantités d'un bien dans un réseau.

Étant donné un réseau aux arcs valués par des capacités, le problème du flot maximal consiste à faire circuler la plus grande quantité possible entre deux points du réseau sans excéder les capacités des arcs. (La théorie à l'origine était développée pour gérer la circulation du courant dans des circuits électriques.) Beaucoup d'applications : quelques exemples

- création d'itinéraires de délestage. Connaissant les capacités des tronçons routiers en véhicules par heure, l'organisation d'itinéraires de délestage entre deux villes permettant de supporter le plus grand nombre de véhicules par heure est un problème de flot maximal. Ce problème est similaire à celui des taxis de la Marne (septembre 1914) : faire arriver le plus de véhicule à un endroit donné en une période de temps donnée, étant donnés les stocks de taxis en différentes villes, les capacités des routes, les capacités de stationnement en chaque ville, le réseau routier, la vitesse possible. Ce problème fait intervenir en plus la configuration du réseau routier et le temps de parcours entre chaque ville.

- organisation du traffic maritime : étant donnés des ports de départ ayant chacun des stocks d'une marchandise donnée et des ports d'arrivés ayant chacun des demandes pour cette marchandise, trouver un déplacement de ces marchandises permettant de faire arriver le maximum de marchandises.

- structuration et dimensionnement optimal d'un réseau de communication : problème de permettre un flot maximum de données pour un cout minimum de la réalisation des jonctions de capacité suffisante entre les différents points du réseau.

- affectation tâches-machines, sac à dos, open-pit mining, fermeture maximale, selection pb ...

I Cycles, flux et flots

Soit $G = (X = \{x_1, \ldots x_n\}, U = \{u_1, \ldots u_m\})$ un graphe orienté où X est un ensemble de sommets et U un ensemble d'arcs (un arc représentant un lien orienté entre deux sommets) où $\forall i \in [\![1, m]\!], u_i \in X \times X$.

Définition 1 (Chemin, Chaîne) *Un* chemin *est une suite d'au moins deux sommets* $(s_1, \ldots s_p)$ *telle que* $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, (s_i, s_{i+1}) *est un arc* ($\in U$). *Pour supprimer toute ambigüité, un chemin est représenté par la séquence de ses arcs.*

Une chaîne *est une suite de au moins deux sommets* $(s_1, \ldots s_p)$ *telle que* $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, (s_i, s_{i+1}) *ou* (s_{i+1}, s_i) *est un arc* ($\in U$).

Un chemin ou une chaîne sont dits simples *si leurs arcs sont tous différents, il sont élémentaires si leurs sommets sont tous différents. La longueur d'un chemin ou d'une chaîne est son nombre d'arc. (Par définition, un chemin ou une chaîne de longueur O n'existe pas.)*

Définition 2 (Vecteur cycle) *Un* cycle μ *est une chaîne* ***simple*** *dont les extrémités coincident. Le* vecteur cycle $\mu = (\mu^1, \ldots, \mu^m)$ *de* $\mathbb{Z}^m$ *associé au cycle* μ *est défini par*

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si l'arc } u_i \text{ n'apparaît pas dans le cycle} \\ 1 & \text{si l'arc } u_i \text{ est utilisé dans le sens de parcours du cycle} \\ -1 & \text{si l'arc } u_i \text{ est utilisé dans le sens opposé} \end{cases}$$

Étant donné un ensemble de sommets A, *on désigne par* $\omega^+(A)$ *l'ensemble des arcs incidents à* A *vers l'extérieur (sortants), et par* $\omega^-(A)$ *l'ensemble des arcs incidents à* A *vers l'intérieur (entrants) et l'on pose* $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$. *Si* $\omega(A)$ *est non vide il est appelé* cocycle *de* A.

Un cycle est différent d'un circuit : un circuit correspond à un chemin simple dont les extrémités coincident (l'orientation des arcs est prise en compte). Un circuit ou un cycle sont dits *élémentaires* si tous les sommets parcourus à part le sommet extrémité terminale (qui est égal au sommet origine) sont différents.

Définition 3 (Flot) *Un* flot *sur un graphe est un vecteur* $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ *de* $\mathbb{Z}^m$ *tel que le nombre* $\varphi_i = \varphi(u_i)$ *est appelé* flux *dans l'arc* u_i *et qui vérifie la* loi de Kirchhoff *ou* loi de conservation du flux *en chaque sommet du graphe :*

$$\forall x \in X, \sum_{u_i \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u_i) = \sum_{u_i \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u_i) \qquad \textit{(loi de Kirchhoff)}$$

Le flux φ_i dans l'arc u_i peut être assimilé à la quantité de véhicules (de liquide, d'information) parcourant l'arc u_i dans le sens de son orientation si $\varphi_i > 0$ ou dans le sens inverse si $\varphi_i < 0$. La loi de Kirchhoff impose qu'en tout sommet le flux entrant soit égal au flux sortant.

Propriété 1

– *Toute combinaison linéaire de flot sur G définit un flot sur G*
– *Le vecteur nul de $\mathbb{Z}^m$ est un flot sur tout graphe G (dit "flot nul")*
– *Tout vecteur cycle de G est un flot sur G*

L'ensemble Φ des flots sur G est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^m$ non-vide (il contient toujours le flot nul) et est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Z}^m$.

Propriété 2 *φ est un flot sur G ssi*

$$\forall \emptyset \subset A \subset X, \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi(u) \qquad \textit{(loi de Kirchhoff généralisée)}$$

II Flots compatibles dans un Réseau de transport

Définition 4 (réseau de transport) *Un* réseau de transport *est un graphe orienté connexe $R = (X, U = \{u_1, \dots u_m\})$ avec*
– *un sommet sans prédecesseur appelé* entrée *(ou source) noté s ($\Gamma^-(s) = \emptyset$)*
– *et un sommet sans suivant appelé* sortie *(ou puits) noté t ($\Gamma^+(t) = \emptyset$)*
– *et une application $c : U \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ qui à chaque arc u associe sa capacité $c(u) \geq 0$.*
On y adjoint un arc u_0 (fictif) $u_0 = (t, s)$ de capacité infinie qui sera appelé arc de retour.

Définition 5 (flot compatible) *Un* flot compatible *ou encore* réalisable *sur un réseau $R = (X, U)$ avec $\mid U \mid = m$ est un vecteur φ de $\mathbb{Z}^{m+1}$ tel que :*
– *φ est un flot sur $R \cup \{u_0\}$: $\forall x \in X$, $\sum_{u \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u)$*
– *φ est compatible avec les capacités : $\forall u \in U, \quad 0 \leq \varphi(u) \leq c(u)$*
La valeur *du flot est le flux qui traverse l'arc de retour ou encore le flux sortant de la source ou encore le flux arrivant à la sortie : $\varphi(u_0) = \sum_{u \in \omega^+(\{s\})} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(\{t\})} \varphi(u)$*

Si $\varphi(u) = c(u)$ on dit que l'arc u est *saturé.*
Un flot est dit de *valeur maximale* s'il maximise cette valeur $v(\varphi)$ dans l'ensemble de tous les flots réalisables (un tel flot n'est pas nécessairement unique).

Remarque *Un tel flot existe toujours, un algorithme permettant d'obtenir un tel flot lorsque les capacités sont des rationnels est décrit dans le paragraphe suivant.*

II.1 Théorème de la coupe

Une coupe correspond à une partition des sommets en deux sous-ensembles tels que la source soit dans l'un et la destination dans l'autre. Plus formellement,

Définition 6 (coupe) *Une* coupe *séparant s et t est un ensemble d'arcs (co-cycle) $\omega^+(A) = \{u = (i, j) \in U, i \in A, j \in X \setminus A\}$ où $A \subset X$ avec $s \in A$ et $t \notin A$. La* capacité *$\mathcal{C}$ de la coupe est la somme des capacités des arcs de la coupe : $\mathcal{C}(\omega^+(A)) = \sum_{u \in \omega^+(A)} c(u)$.*

Remarque *Le retrait dans un réseau R de tous les arcs d'une coupe supprime tous les chemins de s à t.*

Théorème 1 (de la coupe) *Pour tout flot φ compatible sur R et pour toute coupe $\omega^+(A)$ séparant s et t la valeur du flot est inférieure à la capacité de cette coupe :*

$$v(\varphi) \leq \mathcal{C}(\omega^+(A))$$

Ceci est vrai pour toute coupe donc même quand on considère une coupe de capacité minimale. Puisque c'est vrai aussi pour tout flot compatible, c'est vrai pour un flot de valeur maximum.

II.2 Algorithme de Ford-Fulkerson

Définition 7 (capacités résiduelles) *Soit φ un flot réalisable dans le réseau R, on appelle* capacités résiduelles *d'un arc (x, y) étant donné un sens de parcours de l'arc, les quantités $r^+(x, y) = c(xy) - \varphi(x, y)$ (sens direct) et $r^-(x, y) = \varphi(x, y)$ (sens opposé), ces quantités représentent les modifications maximales possibles du flot φ sur l'arc (x, y) : $r^+(x, y)$ la plus grande augmentation et $r^-(x, y)$ la plus grande diminution.*

L'algorithme de Ford-Fulkerson (1955) [7] utilise un principe de marquage relatif à un flot compatible φ. On peut prendre comme flot compatible le flot nul si on n'a pas mieux.

Définition 8 (Principe de marquage de Ford-Fulkerson) *On marque l'entrée s du réseau, puis*

x étant un sommet marqué , y est marquable à partir de x ssi

$$y \textit{ n'est pas marqué et } \begin{cases} \exists u = (x, y) \in R \textit{ et } \varphi(u) < c(u) & \textit{marquage direct} \\ \exists u = (y, x) \in R \textit{ et } \varphi(u) > 0 & \textit{marquage indirect}(u \neq u_0) \end{cases}$$

Remarque *Notons qu'on ne considère pas l'arc u_0 pour le marquage, par convention u_0 n'appartient pas à R, c'est un arc fictif ajouté pour les besoins du calcul (pour que l'on puisse parler de "flot").*

Propriété 3 *Si à la fin de la procédure de marquage*

1. *on parvient à marquer la sortie t du réseau alors on peut augmenter la valeur du flot de ε calculée comme suit : soit ch la chaîne d'origine s ayant permis de marquer t, cette chaîne est appelée* chaîne augmentante, *et soit ch^+ les arcs de ch participant aux marquages directs et ch^- les arcs de ch participant aux marquages indirects, $\varepsilon = \min(\min_{u \in ch^+} r^+(u), \min_{u \in ch^-} r^-(u)) = \min(\min_{u \in ch^+} c(u) - \varphi(u), \min_{u \in ch^-(u)} \varphi(u))$. Le nouveau flot est obtenu en augmentant de ε le flux sur les arcs de ch^+ et en diminuant de ε sur les arcs de ch^-.*
2. *on ne parvient pas à marquer la sortie alors le flot est maximum*

D'après la preuve (vue en TD) de la propriété précédente, dans le cas où on parvient à marquer la sortie, on peut augmenter la valeur du flot de la valeur ε calculée sur la chaîne μ des sommets marqués allant de s à t en prenant $\varepsilon = \min_{u \in \mu} r(u)$ (le minimum des capacités résiduelles). On augmente donc la valeur du flot de ε sur tous les arcs de μ pris dans le bon sens et on la diminue de ε pour tous les arcs de μ pris dans le sens inverse.

LE COURS 1 S'EST ARRÊTÉ LÀ.

Dans le cas où on ne peut pas marquer la sortie alors le flot est maximum et l'ensemble des sommets marqués définit une *coupe* de capacité égale à la valeur de ce flot, ceci permet d'obtenir le théorème du flot maximum de Ford-Fulkerson :

Théorème 2 (Théorème du flot maximum (Ford Fulkerson 1957)) *Soit F la famille*[1] *des flots réalisables et K la famille des coupes dans un réseau de transport,*

$$Max_{\varphi \in F} \varphi(u_0) = \min_{\omega^+(A) \in K} \mathcal{C}(\omega^+(A))$$

La valeur maximum du flot est égale à la capacité minimum d'une coupe.

Il peut arriver qu'en choisissant mal les chemins on ait besoin de refaire le marquage Maxflot fois (où Maxflot est la valeur du flot), du coup l'algo de FF n'est pas polynomial $O(n.Maxflot)$:

Dinic en 1970 [4], puis Edmond et Karp en 1972 [5] ont montré que l'algo de FF devient polynomial si la recherche des chemins de s à t se fait en largeur d'abord (plus courts chemins en nombre d'arcs). La complexité de l'algorithme a ensuite été réduite par Dinic et Karzamov en 1974 $O(n^3)$. Cette complexité a continué à décendre récemment (2006) avec l'utilisation de structures de données plus performantes.

II.3 Graphe d'écart

Définition 9 (graphe d'écart) *Le graphe d'écart $G_R(\varphi) = (X, U_\varphi, r_\varphi)$ associé à un réseau de transport $R = (X, U, c)$ et à un flot compatible φ de R est défini par :*

$$(x,y) \in U_\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in U \text{ et } \varphi(x,y) < c(x,y) & \text{avec } r(x,y) = c(x,y) - \varphi(x,y) \\ (y,x) \in U \text{ et } \varphi(y,x) > 0 & \text{avec } r(x,y) = \varphi(y,x) \end{cases}$$

1. Une famille indexée par un ensemble I d'éléments de E est une application de I dans E, à tout élément de l'ensemble de départ on associe un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée : image, une application est toujours définie (mais ce n'est pas le cas pour une fonction qui a un domaine de définition (fonction : chaque élément de depart a au plus un element dans l'arrivée))

En d'autres termes $(x, y) \in U_\varphi$ si et seulement si y est marquable à partir de x dans le marquage de Ford-Fulkerson relatif à φ, associe à chaque arc une pondération égale à sa capacité résiduelle. Même remarque que précédemment par convention $u_0 \notin R$, donc u_0 ne génère pas d'arcs dans le graphe d'écart.

Propriété 4 *Il existe une chaîne élémentaire de s à t FF-marquable relativement à φ dans R ssi il existe un chemin élémentaire de s à t dans $G_R(\varphi)$.*

Conséquences :
- un flot compatible de R est maximum s'il n'existe pas dans $G_R(\varphi)$ de chemin de s à t
- étant donné un flot compatible φ de R, de valeur $\varphi(u_0)$, l'existence d'un chemin élémentaire ν_G de s à t dans $G_R(\varphi)$ permet de définir un nouveau flot compatible φ' de R, par la formule $\varphi' = \varphi + \varepsilon\mu'$, où
  - $\mu' = \nu_R \cup \{u_0\}$ est le cycle de R constitué de la chaîne ν_R des arcs correspondant à ceux du chemin ν_G prolongée par l'arc u_0 et considéré dans le sens de parcours de u_0 et
  - $\varepsilon = \min_{u \in \nu_G} r(u)$. On a bien ε égal au minimum des capacités résiduelles.

La valeur du flot φ' est égale à $\varphi(u_0) + \varepsilon$.