Recherche Opérationnelle

La **recherche opérationnelle** peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible. (notion d'optimisation)

Les problèmes que la R.O. peut aider à résoudre sont:

-soit stratégiques (on peut citer le choix d'investir ou pas, le choix d'une implantation, le dimensionnement d'une flotte de véhicules ou d'un parc immobilier…)

-soit opérationnels (notamment l'ordonnancement, la gestion de stock, l'affectation de moyens (humains ou matériels) à des tâches, les prévisions de ventes…).

Recherche Opérationnelle

Applications principales : une liste incomplète !

- dans l'industrie du pétrole : commande de la marche des raffineries (distillation, reformage, craquage), compositions ou de mélanges de produits.
- industries métallurgiques (alliages)
- dans l'industrie alimentaire (mélanges)
- plannings (rotation d'équipages, etc.) dans les compagnies de transport aérien, ferroviaire, urbain.
- planification (par ex. en agriculture)
- banque composition des portefeuilles.

Recherche Opérationnelle

Quelques applications dans le domaine de l'informatique:

- choix de la localisation et du nombre de serveurs à mettre en place,
- capacité de stockage,
- puissance de calcul et du débit du réseau,
- choix d'une architecture informatique (application centralisée / distribuée, traitements en temps réel ou en différé, réseau maillé ou en étoile, etc.),
- ordonnancement dans les systèmes d'exploitation.

Recherche Opérationnelle

- Dans ce cours, 3 parties:
- Optimisation linéaire ->programmation linéaire :
  - pour résoudre très efficacement les problèmes dans lesquels les variables sont continues.
  - Lorsqu'il y a des variables discrètes, optimisation linéaire et méthodes arborescentes peuvent être combinées.
- Ordonnancement (théorie des graphes)
- Théorie des jeux

Optimisation linéaire

Définition de l'optimisation

La science cherchant *à analyser et à résoudre* analytiquement ou numériquement les *problèmes* qui consistent à déterminer le *meilleur élément* d'un ensemble, au sens d'un *critère quantitatif* donné

Un problème : Question que l'on se pose liée à une situation ?

Analyser et résoudre : Comprendre le problème puis proposer une ou des solutions pour répondre au problème

Critère quantitatif : Toutes les solutions n'ont pas la même importance

Meilleur élément : Chercher la solution la plus intéressante

Optimisation linéaire

L'optimisation et la recherche opérationnelle

- Prendre des décisions : choix à faire/décider
  - organiser un plan, contrôler les opérations
  - allouer des ressources, ranger des tâches
  - définir des chemins ou des tournées
- En optimisant un critère (ou objectif) : but cherché du problème
- Et en respectant des contraintes : restrictions liées au problème

Quelques exemples simples

- Organiser sa journée de travail pour finir à temps chaque tâche
- Plannifier ses dépenses pour répondre à ses principaux besoins
- Trouver le plus court chemin entre son appartement et l'université

But recherché de l'optimisation

Trouver la meilleure solution réalisable pour un problème donné

Optimisation linéaire

Problème d'optimisation : problème de la forme
$$\min / \max\{f(x) : x \in \mathcal{S}\}$$

Variable de décision : élément $x \in \mathbb{R}^n$ représentant une inconnu

Région réalisable : ensemble des solutions (affectation de valeur à x) vérifiant les contraintes du problème $\rightsquigarrow$ ensemble $\mathcal{S}$

Solution réalisable : solution vérifiant les contraintes du problème
$$x \text{ est réalisable} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{S}$$

Critère à optimiser : fonction objectif $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$

Solution optimale : meilleur solution réalisable selon l'objectif f
$$x^* \in \mathcal{S} \text{ est optimale} \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

But recherché de l'optimisation

Etant donné $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, trouver $x^* \in \mathcal{S}$ tel que $f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{S}$

La Programmation linéaire

Exemple introductif

Une usine fabrique deux produits A et B à partir de deux composants C1 et C2.
La fabrication de A nécessite 1 composant C1 et 2 composants C2.
Celle de B nécessite 1 composant C1 et 1 composant C2.
L'usine dispose de 7 composants C1 et de 9 composants C2.

La marge unitaire sur le produit A est de 3K€ et elle est de 2 K€ sur le produit B.
Déterminer le programme de fabrication qui maximise la marge totale (marge totale = prix de vente – prix de revient).

	Produit A	Produit B	Contraintes
Composant C1	1	1	7
Composant C2	2	1	9
Marge unitaire	3	2	

Mathématisation du problème

But : Déterminer le couple (x,y) de façon à maximiser la ***marge totale*** Z=3x+2y en respectant les contraintes sur C1 et C2. Avec x le nombre de produits A et y le nombre de produits B.

Contraintes de positivité :
$x \geq 0$ et $y \geq 0$ car x et y sont des quantités

Contraintes en ressources disponibles :
$x + y \leq 7$
$2x + y \leq 9$

On obtient ainsi le ***programme linéaire*** écrit sous forme canonique suivant :

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$
$$x + y \leq 7$$
$$2x + y \leq 9$$
$$(Max) Z = 3x + 2y$$

Mathématisation du problème

On a affaire à un programme linéaire lorsqu'on a modélisé un problème à l'aide de variables réelles positives ou nulles $x_j \ (j = 1,\ldots,n)$ de sorte que :

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$ i = 1, ... , m , c'est-à-dire m contraintes linéaires.

$x_j \geq 0$ j = 1, ... , n , c'est-à-dire n contraintes «de positivité ».

MAX $\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j = Z$ c'est-à-dire optimiser une fonction linéaire, nommée « fonction économique »

Les a_{ij} sont des coefficients techniques, issus du processus étudié ; les b_i représentent le plus souvent les seuils d'activité ou des quantités de ressources disponibles.
les c_j sont des bénéfices ou des coûts issus de la comptabilité.

Rentabilité de la programmation linéaire

- Comme souvent en Recherche Opérationnelle, l'emploi de la P.L. permet d'optimiser des systèmes et de réaliser des économies de l'ordre de 5 à 10% (parfois plus !) sur le coût de fonctionnement du système.
- Parfois ce pourcentage est bien moindre : ainsi l'optimisation de l'achat de pneumatiques pour équiper des véhicules neufs chez un grand constructeur automobile avait permis une économie de 0,5% sur un coût mensuel de 12 millions d'euros soit 600 000 €/mois … Ce qui couvrait largement le salaire de l'ingénieur auteur de l'étude pendant toute sa vie professionnelle !
- Il n'est pas rare qu'une optimisation à l'aide de la P.L. permette des gains annuels représentant 200 à 300 fois le coût de l'étude. Les « retours sur investissement » se comptent plus souvent en semaines ou en mois, qu'en années…

Dimension des problèmes résolus en programmation linéaire

On considère que des PL comportant m = 1 000 contraintes et n = 3 000 variables sont de dimension courante (pour l'algorithme du simplexe vu dans ce cours).

On parle de gros problèmes à partir de m = 5 000 contraintes et n = 10 000 variables.
De très gros PL ont été résolus opérationnellement : un PL avec m = 30 000 et n = 300 000 pour la gestion intégrée de la firme américaine NABISCO, et à la NASA n = 35 000 et m = 512 000.

Pour une compagnie aérienne, un problème avec n = 5 500 000 variables (mais seulement m=850 contraintes) a aussi été résolu.

Avec des PL dont les données ont des structures particulières, on a pu même dépasser les 10 000 000 variables !

Résolution géométrique

Au tableau

Résolution géométrique

- Idée de la résolution

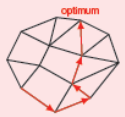
Remarque

Contraintes et objectif linéaire $\Rightarrow$ existence d'un optimum sur un point extrême de la région réalisable

Donc, il suffit d'examiner les points extrêmes

Idée de résolution

Passer de points extrêmes en points extrêmes jusqu'à l'optimum



Résolution géométrique

- Définition géométrique d'un sommet

Caractérisation des points extrêmes

- se situent à l'intersection d'au moins n hyperplans
- caractérisés par n variables nulles (originales ou d'écart)

solution dégénérée : intersection de plus de n hyperplans

Idée "naïve" de résolution : énumération de tous les points extrêmes ?

1. Choisir n hyperplans puis mettre les n variables associées à zéro
2. Résoudre le système linéaire restant à m variables et m équations

Remarques sur le système linéaire

- le système linéaire n'a pas forcément de solutions
- et s'il possède une solution, elle n'est pas forcément réalisable

Deux points extrêmes voisins ne diffèrent que sur un hyperplan

Résolution géométrique

- Vision géométrique de la solution

Règle de pivotage : passer d'un point extrême à point extrême voisin

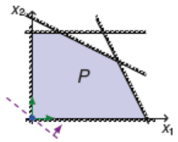
- règle de pivotage : choisir deux hyperplans qui vont pivoter

Résolution géométrique

- Vision géométrique de la solution

Règle de pivotage : passer d'un point extrême à point extrême voisin

- règle de pivotage : choisir deux hyperplans qui vont pivoter



Idée du simplexe

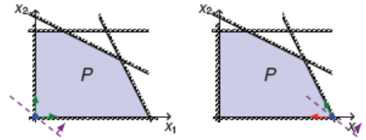
1. partir d'un point extrême $x^{(0)}$ de la région réalisable
2. déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente
   s'il en existe pas, $x^{(k)}$ est optimale
3. se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême suivant $x^{(k+1)}$
   s'il n'existe pas, le problème est non borné ; sinon revenir au pas 2

Résolution géométrique

- Vision géométrique de la solution

Règle de pivotage : passer d'un point extrême à point extrême voisin

- règle de pivotage : choisir deux hyperplans qui vont pivoter



Idée du simplexe

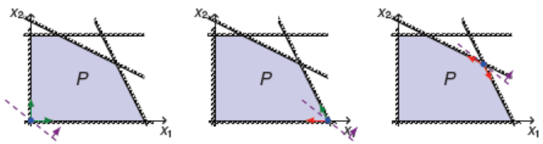
1. partir d'un point extrême $x^{(0)}$ de la région réalisable
2. déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente
   s'il en existe pas, $x^{(k)}$ est optimale
3. se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême suivant $x^{(k+1)}$
   s'il n'existe pas, le problème est non borné ; sinon revenir au pas 2

Résolution géométrique

- Vision géométrique de la solution

Règle de pivotage : passer d'un point extrême à point extrême voisin

- règle de pivotage : choisir deux hyperplans qui vont pivoter



Idée du simplexe

1. partir d'un point extrême $x^{(0)}$ de la région réalisable
2. déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente
   s'il en existe pas, $x^{(k)}$ est optimale
3. se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême suivant $x^{(k+1)}$
   s'il n'existe pas, le problème est non borné ; sinon revenir au pas 2

Limites de la résolution géométrique

Le raisonnement géométrique est toujours praticable pour n = 2 variables, à la rigueur pour n = 3. Cependant les problèmes industriels, nous l'avons vu, peuvent comporter des milliers de variables, voire bien davantage !
Toutefois on peut démontrer que:

L'optimum d'un programme linéaire, s'il existe, est réalisé au moins en un sommet du polyèdre.

Ceci pourrait inciter à ENUMERER les sommets du polyèdre…

MAIS pour n variables et m contraintes explicites, il y a $C^{n}_{m+n} = \frac{(m+n)}{n!m!}$ sommets possibles. Cette valeur croissant très vite avec m et n, l'énumération est impraticable pour des problèmes de taille industrielle. Ainsi pour un petit PL comportant m = 20 contraintes et n = 30 variables il y a $4{,}7129.10^{13}$ sommets possibles : même en calculant un million de sommets par seconde il faudrait un an et demi pour résoudre en ordinateur ce tout petit problème : prohibitif…

Représentation algébrique

Il est exclu d'envisager une résolution géométrique au delà de 3 variables.

La démarche va consister à donner une REPRESENTATION ALGEBRIQUE des sommets du polyèdre des solutions admissibles.

Représentation algébrique

Au tableau

Algorithme du simplexe

- **Mise en œuvre**
- **Dégénérescence sur tableau (interprétation / à la résolution graphique)**
- **Comment mettre un pb sous la forme max ou min quand inéquations dans les 2 sens**

- **Résolution d'un problème de minimisation par la méthode du dual**

Problème primal - Problème dual

Problème Primal :

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s. c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & \forall i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & \forall j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Problème Dual :

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} y_i b_i & \\ \text{s. c.} & \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j, & \forall j = 1, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & \forall i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Les programmes linéaires vont toujours de paires !!

Voir exemple au tableau

La programmation linéaire en nombre entiers

- Au tableau