Chapitre 3

Introduction à la théorie des jeux

pb combinatoire, aléatoire, concurrentiel.

I Définitions de base

Définition 1 (Jeu à deux personnes à somme nulle) *Le gain d'un joueur est égal à ce que son adversaire perd.*

Définition 2 (Matrice des gains) *La matrice des gains M d'un jeu à deux personnes et à somme nulle permet de représenter les coups du joueur 1 sur les lignes et les coups du joueur 2 sur les colonnes. Le terme a_{ij} est par convention le gain du joueur 1 dans le cas où le joueur 1 joue le coup i et le joueur 2 le coup j.*

Définition 3 (Stratégie pure/mixte) *Un joueur utilise une* stratégie pure *s'il utilise le même coup à chaque tour. Il utilise une* stratégie mixte*, s'il choisit un coup au hasard de façon à ce que chaque coup soit utilisé un nombre prédéfini de fois (appelé fréquence).*

Une stratégie du joueur 1 sera représenté par le vecteur (en ligne) des fréquences associées à chaque coup (pour le joueur 2 on representera ce vecteur en colonne) tel que la somme des fréquences de tous les coups vaut 1.

Définition 4 (Valeur du jeu) *C'est la moyenne des gains obtenus sur un certain nombre de tours, si on connait les stratégies $s1$ du joueur 1 et $s2$ du joueur 2 on obtient : $V = s1.M.s2$*

II Réduction par dominance

Définition 5 (Critère Minimax/Résolution d'un jeu) *Un joueur utilise un critère Minimax s'il choisit une stratégie qui minimise les effets des meilleurs coups de son adversaire.* Résoudre un jeu *revient à trouver une stratégie optimale.*

Principes fondamentaux de la théorie des jeux : lors de l'analyse d'un jeu, on fait les deux hypothèses suivantes :

1. chaque joueur choisit le coup qui lui apporte le meilleur gain.
2. chaque joueur sait que son adversaire choisit le coup qui lui apporte le meilleur gain.

Définition 6 *Un coup* domine *un autre coup si tous les gains possibles pour ce coup sont plus avantageux pour le joueur que ceux de l'autre coup.*

La ligne n domine la ligne m de la matrice des gains si chaque gain de la ligne n est supérieur ou égal *à son correspondant sur la ligne m.*

La colonne n domine la colonne m si chaque gain de la colonne n est inférieur ou égal *à son correspondant dans m.*

Si deux lignes/colonnes sont égales elles se dominent mutuellement. Une ligne ou colonne en domine strictement *une autre si l'une domine l'autre et elles ne sont pas égales.*

En suivant les principes de la théorie des jeux on peut éliminer les lignes et les colonnes dominées itérativement. En cas d'égalité on peut choisir d'éliminer n'importe laquelle des deux. Ce processus s'appelle **"réduction par dominance"**.

Notons que tous les jeux ne se réduisent pas tous par dominance à une matrice 1×1.

Définition 7 (point selle) *Un* point selle *est un état dans lequel le gain est minimum pour la ligne et maximum pour la colonne. Pour les trouver on entoure les gains minimaux par ligne et on encadre les gains maximaux par colonne, les points selles sont entourés et encadrés à la fois.*

Propriété 1 *Un jeu est* strictement déterminé *s'il admet au moins un point selle. Les jeux strictement déterminés satisfont :*

1. *Tous les points selles ont le même gain.*
2. *Choisir la ligne et la colonne comportant un point selle donne une stratégie minimax pour chacun des joueurs. Le jeu est résolu via l'utilisation de ces stratégies pures.*

La valeur *d'un jeu strictement déterminé est celle du point selle. Un jeu* équitable *a une valeur zéro il est dit* biaisé *sinon.*

III Résolution par programmation linéaire

Avant de commencer, chercher des points selles. Si on en trouve un, le jeu est résolu ; les stratégies optimales sont les stratégies pures qui passent par le point selle. Sinon :

1. réduire la matrice des gains par dominance
2. poser et résoudre le programme linéaire permettant de trouver les stratégies optimales et la valeur du jeu :
   (a) exprimer la solution avec un programme linéaire pour le joueur 2

(b) résoudre

(c) en déduire la valeur g du jeu et par dualité les fréquences optimales de jeu des stratégies pour le joueur 1.

Considérons le jeu suivant :

		J2		
		A	B	C
	1	-1	2	1
J1	2	1	-2	2
	3	3	4	-3

Détermination de la stratégie optimale c'est-à-dire des fréquences les plus favorables pour chacun des joueurs. Soit $p1$ $p2$ $p3$ les fréquences des coups 1, 2 et 3 optimales pour le joueur 1, et $q1$ $q2$ $q3$ les fréquences des coups A, B et C optimales pour le joueur 2.

A cherche à gagner le plus possible, il doit donc trouver une stratégie qui lui fait gagner au moins g. Ce qui se traduit par :

maximiser g sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcl}
-p1 & + & p2 & + & 3p3 & \geq & g \quad \text{(si J2 joue A)}\\
2p1 & - & 2p2 & + & 4p3 & \geq & g \quad \text{(si J2 joue B)}\\
p1 & + & 2p2 & - & 3p3 & \geq & g \quad \text{(si J2 joue C)}\\
p1 & + & p2 & + & p3 & = & 1 \quad \text{(ce sont des fréquences ramenées à l'unité)}\\
p1, & & p2, & & p3 & \geq & 0 \quad \text{(ce sont des fréquences donc } \geq 0)
\end{array}$$

ou encore pour le point de vue de J2 :

minimiser g sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcrcrcl}
-q1 & + & 2q2 & + & q3 & \leq & g \quad \text{(si J1 joue 1)}\\
q1 & - & 2q2 & + & 2q3 & \geq & g \quad \text{(si J1 joue 2)}\\
3q3 & + & 4q2 & - & 3q3 & \geq & g \quad \text{(si J1 joue 3)}\\
q1 & + & q2 & + & q3 & = & 1 \quad \text{(ce sont des fréquences ramenées à l'unité)}\\
q1, & & q2, & & q3 & \geq & 0 \quad \text{(ce sont des fréquences donc } \geq 0)
\end{array}$$

(c'est le programme dual du premier)

Bibliographie

[1] A. Astié-Vidal. Support du cours de recherche opérationnelle, Maîtrise Informatique M1, 2007.

[2] C. Berge. *Graphes et Hypergraphes*. Dunod, Paris, 1969.

[3] R. Busacker and P. Gowen. A procedure for determining minimal-cost network flow patterns. Technical Report ORO-15, Operational Research Office, John Hopkins University, 1961.

[4] E. A. Dinic. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation. *Soviet Math. Doklady*, 11 :1277–1280, 1970.

[5] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2) :248–264, 1972. doi :10.1145/321694.321699.

[6] R. Faure, B. Lemaire, and C. Picouleau. *Précis de Recherche Opérationnelle*. Dunod, Paris, 2000.

[7] L. Ford and D. Fulkerson. A simplex algorithm finding maximal networks flows and an application to the hitchock problem. *Rand Report Rand Corporation*, dec 1955.

[8] P. Lacomme, C. Prins, and M. Servaux. *Algorithmes de graphes*. Eyrolles, 2003.

[9] R. Laudet. Support du cours de graphes, Licence Informatique, Université Paul Sabatier, 1989.

[10] J. McHugh. *Algorithmic graph theory*. Prentice-Hall International Editions, 1990.

[11] S. Nogarède. Support du cours de recherche opérationnelle, Licence 3, IUP STRI, 2007.

[12] B. Roy. *Algèbre moderne et théorie des graphes*. Dunod, Paris, 1969.

[13] Wikipédia. Recherche opérationnelle. *Wikipédia, l'encyclopédie libre*, page `http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Recherche_op%C3%A9rationnelle&oldid=17837831`, 2007. [En ligne ; Page disponible le 14-août-2007].

[14] Wikipédia. Théorie des graphes. *Wikipédia, l'encyclopédie libre*, page `http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9orie_des_graphes&oldid=19614031`, 2007. [En ligne ; Page disponible le 14-août-2007].