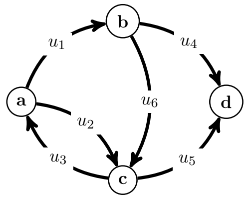
# Feuille de TD 1 : Problèmes de flots

## I Cycles, cocycles et flots

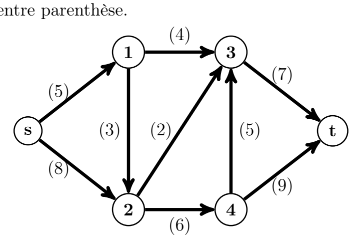
On considère le graphe ci-contre.




1. Définir 6 cycles élémentaires distincts et décrivez les vecteurs cycles associés.
2. Donnez des exemples de cocycles. Combien de cocycles distincts peut-on définir ?
3. Donnez trois exemples de flots sur ce graphe.
4. Montrez les propriétés suivantes :
   – Le vecteur nul de $\mathbb{Z}^m$ est un flot sur tout graphe $G$ (dit "flot nul")
   – Toute combinaison linéaire de flot sur $G$ définit un flot sur $G$
   – Tout vecteur cycle de $G$ est un flot sur $G$ (on vérifiera d'abord que les 6 cycles élémentaires définissent des flots puis on montrera le cas général).
5. On considère $A = \{a, b\}$ et le flot $\varphi = (3, 0, 3, 2, -2, 1)$. Calculez $\omega^+(A)$ et $\omega^-(A)$. Puis $\sum_{u\in\omega^+(A)} \varphi(u)$ et $\sum_{u\in\omega^-(A)} \varphi(u)$. Que constatez-vous, quelle loi justifie ce résultat ?

## II Les coupes

Soit le réseau suivant avec les capacités indiquées entre parenthèse.




1. Donnez des exemples de coupe avec leur capacité.
2. Quelle est la coupe de capacité minimum ?
3. Donnez un exemple de flot dans ce graphe.
4. On va montrer le théorème de la coupe :

   **Théorème 1 (de la coupe)** *Pour tout flot $\varphi$ compatible sur $R$ et pour toute coupe $C$ séparant $s$ et $t$ la valeur du flot $v(\varphi)$ est inférieure à la capacité de cette coupe $\mathcal{C}(C)$*

   $$v(\varphi) \leq \mathcal{C}(C)$$

   a. Soit $\varphi$ un flot compatible sur $R$ et soit $C$ une coupe. Par définition, $C = \omega^+(A)$ où $A$ est un ensemble de sommets vérifiant certaines conditions. Préciser les conditions sur $A$ et écrire la loi de conservation du flux généralisée sur $A$ pour le flot $\varphi$.

   b. l'arc de retour $u_0$ fait-il partie d'un des ensembles $\omega^+(A)$ ou $\omega^-(A)$ ? en tenir compte pour réécrire l'équation précédente

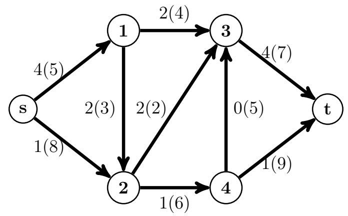


   c. Écrire les inégalités qui expriment que $\varphi$ est un flot compatible.

   d. En déduire, le théorème 1 de la coupe.

   e. On considère le flot suivant, les flux de ce flot sont indiquées sur les arcs suivies par les capacités de ces arcs indiquées entre parenthèse. On appelle *capacité résiduelle* la modification maximale possible du flot sur un arc selon le sens de parcours : pour chaque arc (x,y)
   – la capacité résiduelle $r^+(x, y)$ correspond à un sens de parcours direct et vaut $r^+(x, y) = capa(x, y) - \varphi(x, y)$
   – et la capacité résiduelle $r^-(x, y)$ correspond au sens de parcours opposé à l'arc (sens indirect) et vaut $r^-(x, y) = \varphi(x, y)$.

   Faîtes un tableau donnant pour chaque arc (x,y) la capacité résiduelle $r^+(x, y)$ et la capacité résiduelle $r^-(x, y)$.




   f. Recherche d'un flot maximum pour ce réseau :

      (a) Utiliser le marquage de FordFulkerson pour trouver une chaîne augmentante de $s$ à $t$, on notera $\mu$ la chaîne augmentante de $s$ à $t$ à laquelle on ajoute l'arc $u_0$. Décrivez le vecteur cycle associé à $\mu$ dans un tableau.

      (b) Calculez $\varepsilon = min_{u\in\mu} r(u)$ où $r(u)$ est la capacité résiduelle dans l'arc $u$ avec $r(u) = r^+(u)$ si $u$ a été utilisé dans un marquage direct, c'est-à-dire que $u$ est dans le sens de $\mu$ et $r(u) = r^-(u)$ si $u$ a été utilisé pour un marquage indirect et est donc à l'envers dans $\mu$.

      (c) Montrez que $\varphi_1 = \varphi + \varepsilon.\mu$ est un flot compatible de valeur supérieure à $\varphi$.

      (d) Réitérez les étapes précédentes jusqu'à ce que le flot courant $\varphi_k$ ne permette plus de marquer la sortie . Soit $A$ l'ensemble des sommets que l'on peut marquer. Montrer que tous les arcs du cocycle sortant de $A$, $\omega^+(A)$, sont saturés. Montrer que tous les arcs du cocycle entrant en $A$ ont un flux nul sauf l'arc de retour $u_0$. En déduire que $\varphi_k(u_0) = capa(\omega^+(A))$ et donc que $\varphi_k$ est maximum. Notez que l'on vérifie bien le théorème de Ford et Fulkerson (MaxFlow=MinCut) :

      **Théorème 2 (Théorème du flot maximum (Ford Fulkerson 1957))** *Soit $F$ la famille*[1] *des flots réalisables et $K$ la famille des coupes dans un réseau de transport,*

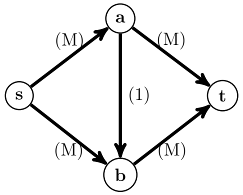
      $$Max_{\varphi\in F}\varphi(u_0) = \min_{\omega^+(A)\in K} \mathcal{C}(\omega^+(A))$$

      *La valeur maximum du flot est égale à la capacité minimum d'une coupe.*

1. Une famille indexée par un ensemble I d'éléments de E est une application de I dans E, à tout élément de l'ensemble de départ on associe un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée : image, une application est toujours définie (mais ce n'est pas le cas pour une fonction qui a un domaine de définition (fonction : chaque élément de depart a au plus un element dans l'arrivée))

## III Choix des chaînes augmentantes

Il peut arriver qu'en choisissant mal les chaînes augmentantes, on ait besoin de refaire le marquage de Ford-Fulkerson un grand nombre de fois.
On considère le graphe ci-contre (Edmonds et Karp 1972 [EK72]).




1. Quelle est la valeur du flot maximum ?
2. Montrez qu'en choisissant les chaînes augmentantes d'une certaine façon, on peut avoir à faire $2M$ étapes de marquage avant d'obtenir un flot maximum. Ce qui rend l'algorithme dépendant de la valeur du flot, et donc non polynomial.

**Remarque 1** *Dinic en 1970 [Din70], puis Edmond et Karp en 1972 [EK72] ont montré que l'algo de FF devient polynomial si la recherche des chemins de s à t se fait en largeur d'abord (plus courts chemins en nombre d'arcs). La complexité de l'algorithme a ensuite été réduite par Dinic et Karzamov en 1974* $O(n^3)$. *Cette complexité a continué à descendre récemment (2006) avec l'utilisation de structures de données plus performantes.*

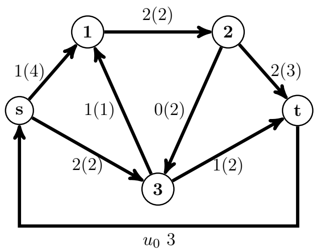
## IV Graphe d'écart

**Définition 1 (graphe d'écart)** *Le graphe d'écart* $G_R(\varphi) = (X, U_\varphi, r_\varphi)$ *associé à un réseau de transport* $R = (X, U, c)$ *et à un flot compatible* $\varphi$ *de* $R$ *est défini par :*

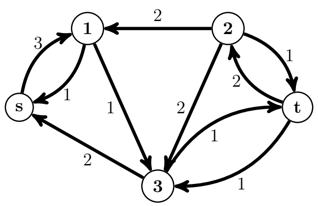
$$(x,y) \in U_\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in U \ \text{ et } \varphi(x,y) < c(x,y) & \text{avec } r(x,y) = c(x,y) - \varphi(x,y) \\ (y,x) \in U \ \text{ et } \varphi(y,x) > 0 & \text{avec } r(x,y) = \varphi(y,x) \end{cases}$$

En d'autres termes $(x,y) \in U_\varphi$ si et seulement si $y$ est marquable à partir de $x$ dans le marquage de Ford-Fulkerson relatif à $\varphi$, associe à chaque arc une pondération égale à sa capacité résiduelle. Même remarque que précédemment par convention $u_0 \notin R$, donc $u_0$ ne génère pas d'arcs dans le graphe d'écart. Exemple :

Réseau $R$ initial avec son flot $\varphi$



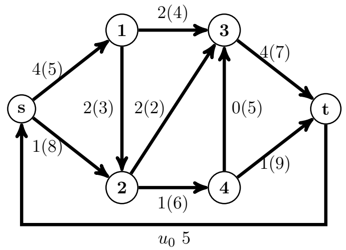

Graphe d'écart $G_R(\varphi)$



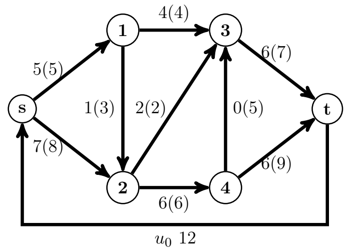



1. Dessinez les graphes d'écart associé au réseau suivant pour les deux flots proposés.

réseau avec flot $\varphi_0$




réseau avec flot $\varphi_1$




2. Existe-t'il un chemin de s à t dans les deux graphes d'écart ? Que peut-on en déduire ?

## V Chateaux d'eau

On considère 2 chateaux d'eau A et B alimentant 3 villages C, D et E. Le chateau d'eau A peut être alimenté avec 50 litres par secondes, et B avec 80 litres par secondes. Le village C a besoin au maximum de 70 l/s, D de 30 l/s et E de 30 l/s. Les capacités des canalisations sont les suivantes en l/s :

| canalisation | AC | AD | BD | BE |
|---|---|---|---|---|
| capacité en l/s | 40 | 20 | 50 | 20 |

1. On cherche une répartition de l'eau qui satisfasse au mieux ces contraintes, exprimer ce problème en termes de flot.
2. Le vecteur $\varphi$ suivant est-il un flot compatible ? Quelle est sa valeur ?

| canalisation | sA | sB | AC | AD | BD | BE | Ct | Dt | Et |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | 50 | 30 | 30 | 20 | 10 | 20 | 30 | 30 | 20 |

3. Déterminer un flot maximum grâce à l'algorithme de Ford-Fulkerson.
4. Tous les villages pourront-ils subvenir à leurs besoins ?

## VI Modélisation : Lorsque dîner est un problème !

Trois familles A,B et C souhaitent diner ensemble. Mais pour développer leurs affinités, elles aimeraient qu'à chaque table, il y ait au plus **deux** membres de chaque famille. Supposons que la famille **A possède 5 membres**, la famille **B 6** et la famille **C 8**. La salle de réception comporte 4 tables (T1, T2, T3 et T4) de **5 places** chacune. Montrer que ce problème peut se formuler comme un problème de recherche de flot maximum dans un réseau que vous dessinerez (vous préciserez les capacités des arcs du réseau sur le graphe, vous expliquerez pourquoi trouver un plan de table correspond à un flot maximum dans ce réseau avec ces capacités précises).

**On ne demande pas de résoudre le problème mais seulement de le représenter.**

## VII Modélisation : Comment réviser efficacement ?

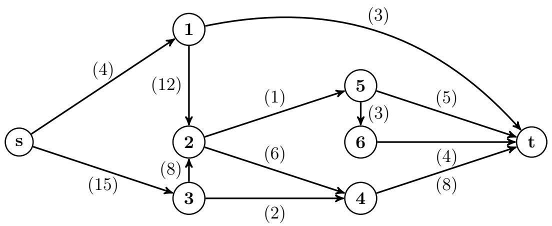
Cinq étudiants de Licence A, B, C, D et E passent un examen où ils n'ont le droit d'emporter que 6 feuilles chacun. Avant l'examen, les étudiants consultent trois étudiants de Master (X, Y et Z) à qui ils ont apporté des feuilles blanches. A peut fournir jusqu'à 15 feuilles blanches, B 4, C 10, D 7 et E 3. A et B ont fourni conjointement leurs feuilles à X et lui ont demandé de les remplir tandis que C et D ont fait la même démarche auprès de Y, l'étudiant E quant à lui a demandé à Z. Les étudiants X, Y et Z n'ont pas la même rapidité d'écriture : pendant la séance de révision, X peut réaliser 25 feuilles pendant que Y peut en écrire 18 et Z, 22. Une fois la rédaction effectuée X redonne les feuilles rédigées à A et B (on ne précise pas comment X effectue cette répartition), Y en redonne à C et D, et Z à E.

Formulez cette situation en problème de flots maximum dans un réseau que vous dessinerez afin de réaliser l'objectif que le plus de feuilles soient fournies aux étudiants tout en respectant les contraintes (un recomptage des feuilles pouvant être effectué en début d'épreuve). Pour chaque étudiant de Licence vous pouvez créer deux sommets : un sommet pour avant qu'il ait donné des feuilles blanches et un sommet pour après réception des feuilles rédigées, il faudra également créer d'autres sommets (à définir). Vous devrez mentionner **les capacités des arcs** et justifier qu'un flot maximum et compatible dans ce réseau décrirait une répartition des feuilles entre les étudiants qui répondrait aux contraintes.

(On ne demande pas de résoudre le problème mais simplement de le modéliser.)

## VIII Calcul de flot maximum

On considère le réseau de transport suivant muni des capacités entre parenthèses.




1. Justifiez que le vecteur $\varphi_0$ suivant est un **flot**, qui est **compatible** pour le réseau ci-dessus. Quelle est sa **valeur** ?

| (s,1) | (s,3) | (1,2) | (1,t) | (2,4) | (2,5) | (3,2) | (3,4) | (4,t) | (5,t) | (5,6) | (6,t) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 4 | 0 | 6 | 1 | 3 | 0 | 6 | 1 | 0 | 0 |

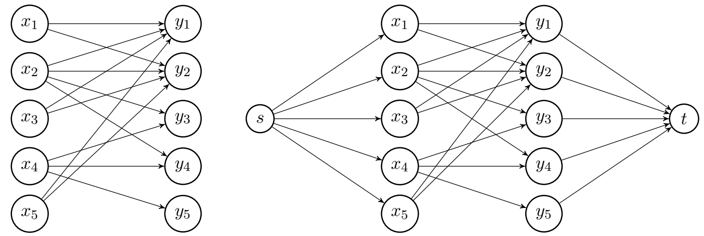
2. Donnez un flot maximum grâce à l'algorithme de Ford-Fulkerson en partant de ce flot. (Vous remplirez la grille ci-jointe en décrivant les vecteurs cycles $\mu_i$ associés successivement aux cycles composés d'une chaîne augmentante de $s$ à $t$ puis de l'arc de retour de $t$ vers $s$). Soit M cette valeur maximum.
3. Est-il possible de définir un flot maximal ayant un flux nul dans l'arc (1,2) ?
4. Indiquer une coupe de capacité minimum en précisant cette capacité.



5. Montrer que si l'on prend pour capacités $c'(u) = c(u)$ pour tout arc $u$ du réseau sauf $c'(1,t) = 4$, on peut mettre en évidence un flot de valeur $M+1$ ; et qu'il en est de même si l'on prend les capacités $c''(u) = c(u)$ pour tout $u$ sauf $c''(2,5) = 2$. En déduire que toute coupe $\omega^+(A)$ de capacité minimum (pour les capacités initiales) est telle que $A$ contient $s$, 1 et 2.

## IX Graphe biparti

Soit $\Gamma$ le graphe biparti (à gauche) et $R_\Gamma$ le réseau de transport biparti "associé" (à droite) dans lequel on suppose les capacités $c(u)$ toutes égales à 1.




1. Trouver un flot maximum $\varphi^*$ dans $R_\Gamma$.
2. Un couplage d'un graphe biparti est un ensemble d'arcs (ou d'arêtes) 2 à 2 non adjacent(e)s. Vérifier (et expliquer) que l'ensemble des arcs $u$ de $\Gamma$ en lesquels le flux $\varphi^*(u)$ est égal à 1 est un couplage de $\Gamma$. Ce couplage est-il de cardinal maximum ?

## Références

[Din70] E. A. Dinic. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation. *Soviet Math. Doklady*, 11 :1277–1280, 1970.

[EK72] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2) :248–264, 1972. doi :10.1145/321694.321699.