



M1 – Informatique

Université Paul Sabatier  
31062 Toulouse Cedex 09

IAA – Introduction à l'Apprentissage Automatique

## Travaux dirigés n°2 – Partie Décision

## Fonctions discriminantes linéaires

**I Algorithme de descente du gradient**

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(u, v) = u^2 + v^2 + 1$$

Formaliser l'algorithme de descente de gradient pour rechercher le minimum de cette fonction à partir du point initial  $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et un pas  $\lambda_n$  égal à  $0,1/n$ . Calculer  $y_2, y_3, y_4$ . Conclure.

**II Hyperplan séparateur**

Soit un problème à 2 classes, sont donnés en apprentissage :

pour la classe (1) les points  $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

pour la classe (2) les points  $y_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $y_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**2.1** En notant les coordonnées d'un point de  $\mathbb{R}^2$ ,  $y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ , vérifier que la droite  $\Delta^*$ , d'équation  $-4y^1 - 2y^2 + 11 = 0$  sépare les deux classes.

**2.2** On pose  $\delta(y_1) = \delta(y_2) = 1$  et  $\delta(y_3) = \delta(y_4) = -1$ . Soit  $\Delta_1$ , la droite passant par les points  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Donner une équation de  $\Delta_1$ , telle qu'un minimum de points soit mal classé, au sens de  $\delta$ .

**2.3** Donner l'algorithme du perceptron (descente du gradient) qui permet d'atteindre une droite séparatrice des deux classes en prenant comme droite initiale  $\Delta_1$ .

**2.4** En prenant  $\lambda_n = 0.1$  (indépendant de  $n$ ), calculer les 3 premières droites obtenues par l'algorithme du gradient.

**2.5** Discussion.

### III Hyperplan séparateur et influence de $\lambda_n$

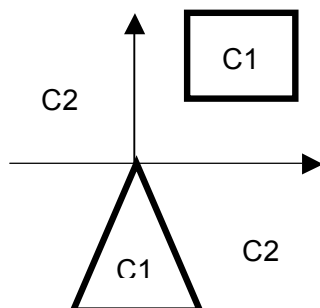
Dans un problème à deux classes dans  $\mathbb{R}^2$ , à la  $n$ ème itération de l'algorithme de descente du gradient, un seul point de l'ensemble d'apprentissage  $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est mal classé et la droite est caractérisée par  $\omega' = (1,1,1)$ . Faire un dessin, préciser les régions associées à chaque classe et à quelle classe **doit** appartenir  $y$ .

**3.1** Donner la droite obtenue à la  $(n+1)$ ème itération avec  $\lambda_n = 1$ , et celle obtenue à la  $(n+1)$ ème itération avec  $\lambda_n = 0.1$

**3.2** Dans chaque cas, indiquer si le point  $y$  est après la  $(n+1)$ ème itération bien classé.

### IV Initiation au perceptron multicouche

On désire construire un perceptron multicouche permettant d'obtenir les régions de décision suivantes dans  $\mathbb{R}^2$  (C1: classe 1, C2: classe 2):



Les coordonnées des sommets du carré sont  $(2,2)$ ,  $(4,2)$ ,  $(4,4)$  et  $(2,4)$ , celles du triangle sont  $(0,0)$ ,  $(2,-2)$  et  $(-2,-2)$ .

**4.1** Déterminer un ensemble de poids et offset d'un perceptron composé d'une seule couche de neurones formels, tel que la sortie soit égale à 1 lorsque l'observation est à l'intérieur du triangle et égale à -1 lorsque l'observation est à l'extérieur du triangle.

**4.2** Même question pour le carré.

**4.3** Donner alors la structure d'un perceptron multicouche (2 couches) répondant au problème.