M1 – Informatique

Université Paul Sabatier
31062 Toulouse Cedex 09

IAA – Introduction à l'Apprentissage Automatique

Travaux dirigés n°4 – Décision

I Approche bayésienne : frontière de décision simplifiée

Soient deux classes C1 et C2 équiprobables dans R^2, les observations de ces deux classes suivent une loi Gaussienne avec pour paramètres respectifs :

$\mu 1$ et $\mu 2$ et $\Sigma 1 \; et \; \Sigma 2$.

$$P(x / C1) = \frac{1}{2\pi |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^t \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)}$$

$$P(x / C2) = \frac{1}{2\pi |\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^t \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)}$$

Question 1 : On suppose que $\Sigma 1 = \Sigma 2 = \Sigma$

Exprimer la règle de décision par maximum de vraisemblance.

Sachant que pour décider de la classe C1, il faut que $\left(x^t - \frac{1}{2}\left(\mu_1{}^t + \mu_2{}^t\right)\right)\Sigma^{-1}\left(\mu_2 - \mu_1\right) > 0$, déterminer les observations correspondant à des cas éventuellement indécidables.

Question 2 : On a $\mu 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Sigma = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. Tracer la frontière de décision.

II Méthode des 'K plus proches voisins'

On considère dans le plan muni de la distance euclidienne les douze points suivants :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, x_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$x_9 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{10} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{11} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{12} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les quatre premiers points sont éléments de la classe ω_1, les quatre suivants sont éléments de la classe ω_2 et les quatre derniers sont éléments de la classe ω_3.

On cherche pour toute nouvelle observation X du plan à lui associer une des trois classes (décision = classe).

Question 1 : Rappeler la méthode du k plus proche voisin et les hypothèses que sous-entend cette méthode.

Question 2 : En prenant **k=4**, déterminer à quelle classe appartient le point X = $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Justifier (graphe + quelques calculs).

Question 3 : Dans le cas **k=1**, tracer les frontières de décision sur un graphe après avoir positionné les douze points. Expliquer la méthode de construction. A quelle classe appartient le point X ? Comparer les résultats pour K=4 et k=1.