Mathematisches Seminar

Analysis und Algebra

Andreas Müller

3. Integralsatz

Inhalt

1. Motivation: Stammfunktion

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung besagt, dass Ableiten und Integrieren zueinander inverse Operationen sind:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \iff F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

Dies gilt auch wenn f komplexe Werte annimmt und von weiteren Variablen abhängt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^{x} f(\xi + iy)\, d\xi = f(x+iy) \qquad (1.1)$$

oder für die Variable y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^{y} f(x + i\eta)\, d\eta = f(x+iy). \qquad (1.2)$$

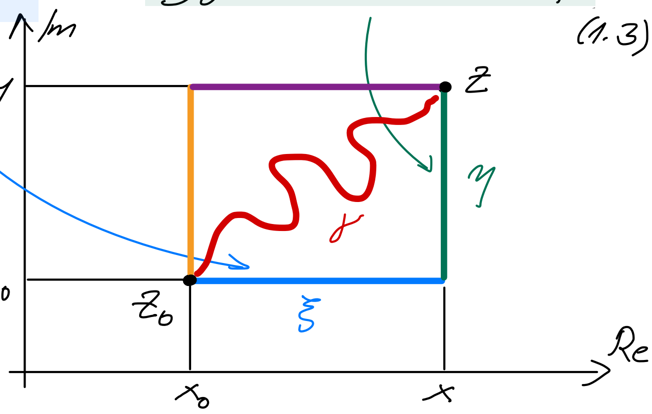
Durch Zusammensetzen kann man einen Hauptsatz in der Form

$$F(z) = \int_{x_0}^{x} f(\xi + iy)\, d\xi + i\int_{y_0}^{y} f(x+i\eta)\, d\eta \qquad (1.3)$$

$$\Updownarrow$$

$$F'(z) = f(z)$$

erwarten.



Schwierigkeiten:

① Definition: ist $\frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$?

② Alternativer Weg:  ?

③ Wegunabhängigkeit: beliebiger Weg γ?

2. Wegintegral

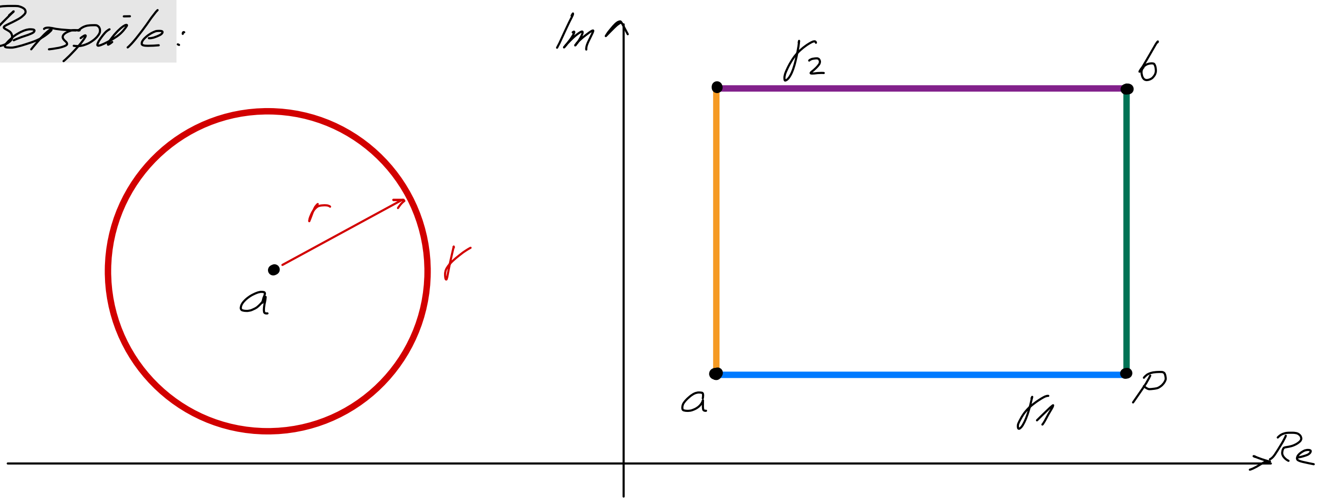
Ziel: allgemeine Definition für Integrale der Art (1.3)

Definition: Ein **Weg** von a nach b ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0,1] = I \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto \gamma(t)$$

Wir werden im Folgenden zusätzlich voraussetzen, dass γ mit Ausnahme weniger Punkte diff'bar ist

Beispiele:



Kreis: $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$

Rechteck:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} a + 2\,\mathrm{Re}(b-a) \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b - 2i\,\mathrm{Im}(b-a)(1-t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} a + 2i\,\mathrm{Im}(b-a)\,t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b - 2\,\mathrm{Re}(b-a)(1-t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Kontrolle:

$$\gamma_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} a + \cancel{2}\,\mathrm{Re}(b-a) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} & = p \\ b + 2\,\mathrm{Im}(b-a) \cdot \frac{1}{2} & = p \end{cases} \quad \checkmark$$

und analog für γ_2 $\bigcirc$

Definition: f eine stetig komplexe Funktion, γ eine differenzierbare Kurve, dann heisst

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$

das **Integral von f entlang γ** oder **Kurvenintegral**.

Das Wegintegral hängt nicht von der Parametrisierung ab: ist $s \longmapsto t(s)$, $s \in I$, eine Parametertransformation, dann ist das mit Parameter s berechnete Kurvenintegral

$$\int_\delta f(z)\,dz = \int_0^1 f(\delta(s))\,\dot\delta(s)\,ds \quad \text{mit } \delta(s) = \gamma(t(s))$$

Kettenregel

$$= \int_0^1 f(\gamma(t(s)))\,\dot\gamma(t(s))\,\underbrace{\dot t(s)\,ds}_{dt}$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Beispiel: Weg $\gamma = re^{2\pi i t}$ (Kreis um 0 mit Radius r)
$f(z) = z^n$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \overbrace{\left(re^{2\pi i t}\right)^n}^{(\gamma(t))^n}\,\overbrace{2\pi i\, re^{2\pi i t}}^{\dot\gamma(t)}\,dt$$

$$= 2\pi i\, r^{n+1}\int_0^1 e^{2\pi i(n+1)t}\,dt$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \circ$$

3. Wegintegral entlang eines Rechtecks

Der Weg γ_1 von Seite 3 zusammen mit (1.2) zeigt, dass

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = f(z)$$

andererseits zeigt der Weg γ_2 zusammen mit (1.1) dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = f(z)$$

Wenn man zeigen kann, dass die beiden Integrale gleich sind, dann folgt, dass das Wegintegral eine "gute" Stammfunktion von $f(z)$ ist.

Wir berechnen die Differenz $\Delta = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

$$\Delta = \int_{\operatorname{Re} a}^{\operatorname{Re} b} f(\underbrace{t + i \operatorname{Im} a}_{\gamma(t)})\,dt + \int_{\operatorname{Im} a}^{\operatorname{Im} b} f(\underbrace{\operatorname{Re} b + is}_{\gamma(s)})\underbrace{i}_{\dot\gamma}\,ds$$

$$- \int_{\operatorname{Im} a}^{\operatorname{Im} b} f(\operatorname{Re} a + is)\,i\,ds - \int_{\operatorname{Re} a}^{\operatorname{Re} b} f(t + i \operatorname{Im} b)\,dt$$

$$= -\int_{\operatorname{Re} a}^{\operatorname{Re} b} f(t + i \operatorname{Im} b) - f(t + i \operatorname{Im} a)\,dt$$

$$+ i\int_{\operatorname{Im} a}^{\operatorname{Im} b} f(\operatorname{Re} b + is) - f(\operatorname{Re} a + is)\,ds$$

Idee: Differenz als Integral der Ableitung ausrechnen:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$\Delta = -\int_{\mathrm{Re}\,a}^{\mathrm{Re}\,b} \int_{\mathrm{Im}\,a}^{\mathrm{Im}\,b} \frac{\partial f}{\partial y}(t+is)\,ds\,dt$$

$$+\, i \int_{\mathrm{Im}\,a}^{\mathrm{Im}\,b} \int_{\mathrm{Re}\,a}^{\mathrm{Re}\,b} \frac{\partial f}{\partial x}(t+is)\,dt\,ds$$

$$= 2i \int_{\mathrm{Re}\,a}^{\mathrm{Re}\,b} \int_{\mathrm{Im}\,a}^{\mathrm{Im}\,b} \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)}(t+is)\,ds\,dt$$

$$= 2i \iint_R \underbrace{\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}}_{=0}\,dt\,ds = 0.$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} + i^2\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} + i\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{=0}\right) = 0 \quad \text{(CR)}$$

Wenn f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen: die inneren Klammern verschwinden. Es folgt $\Delta = 0$, d.h. die beiden Wegintegrale sind gleich.

Satz: Das Wegintegral (mit Weg γ_1 oder γ_2)

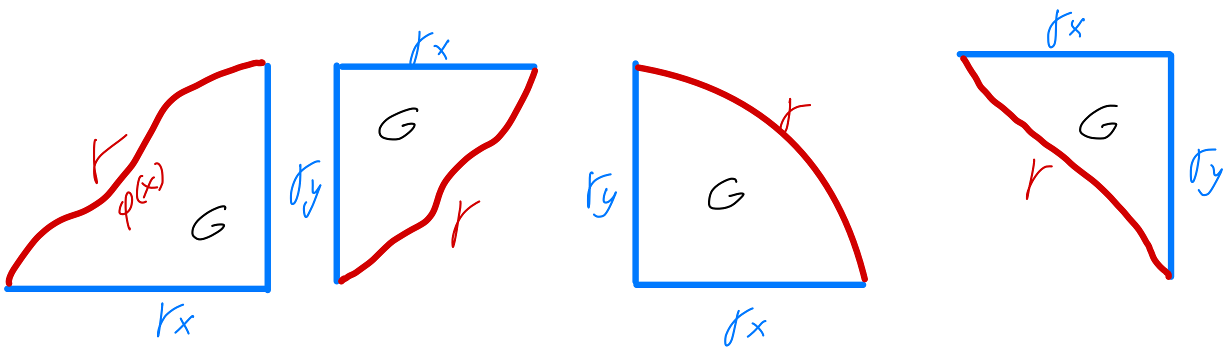
$$F(b) = \int_\gamma f(z)\,dz$$

ist eine holomorphe Stammfunktion von f

4. Wegunabhängigkeit

Wir wollen zeigen, dass das Wegintegral nicht nur für die Wege γ_1 und γ_2 gleich ist, sondern für **alle** Wege γ von a nach b.

<u>1. Schritt:</u> Dreiseitige Gebiete:



Rote Teile γ können auf 2 Arten beschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto x + i\varphi(x) \\ y \longmapsto \psi(y) + iy \end{array}\right\} \text{ inverse Fkt. } \left\{\begin{array}{l} \psi(\varphi(x)) = x \\ \varphi(\psi(y)) = y \end{array}\right.$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\operatorname{Re} a}^{\operatorname{Re} b} f(x+i\varphi(x))\,(1+i\varphi'(x))\,dx$$

$$= \int_{\operatorname{Re} a}^{\operatorname{Re} b} f(x+i\varphi(x))\,dx + i\int_{\operatorname{Re} a}^{\operatorname{Re} b} f(x+i\varphi(x))\,\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{dy}$$

$$= \int_{\operatorname{Re} a}^{\operatorname{Re} b} f(x+i\varphi(x))\,dx + i\int_{\operatorname{Im} a}^{\operatorname{Im} b} f(\psi(y)+iy)\,dy$$

In dieser Form enthält das Wegintegral keine Ableitungen von φ und ψ mehr.

2. Schritt: Differenzentrick wie bei einem Rechteck.

Unterschied: obere Grenze wird $\varphi(x)$ statt Im b

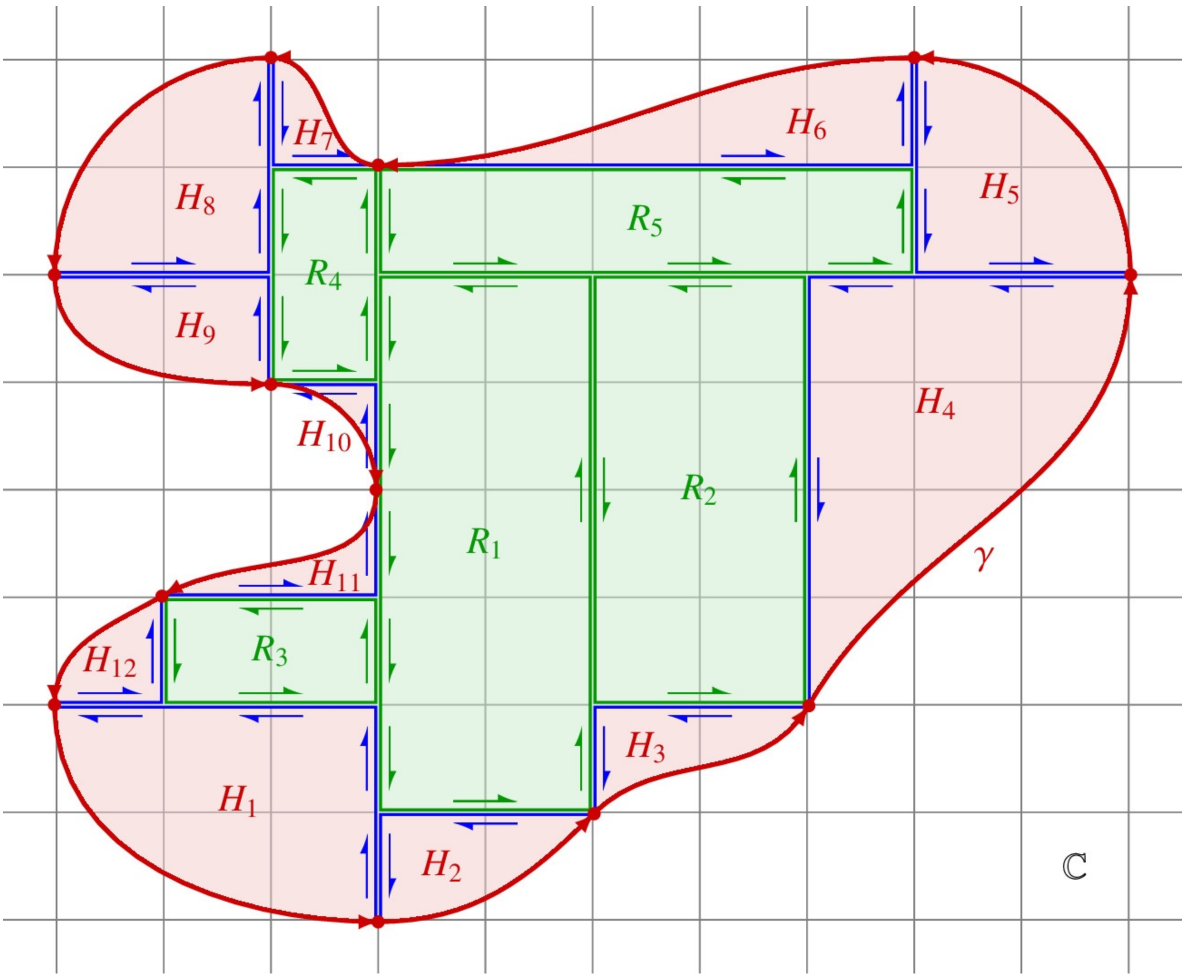
$$\int_{\mathrm{Im}\, a}^{\mathrm{Im}\, b} \ldots\ ds \rightsquigarrow \int_{\mathrm{Im}\, a}^{\varphi(x)} \ldots\ ds$$

d.h. es wird nur über das Gebiet G integriert.

3. Schritt: Von 2 Kurven berandetes Gebiet in Rechtecke und Dreiseite zerlegen. Wegintegrale im Inneren heben sich weg, d.h.

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2i \iint_G \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}_{=0}\, dt\, ds = 0$$

d.h. $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

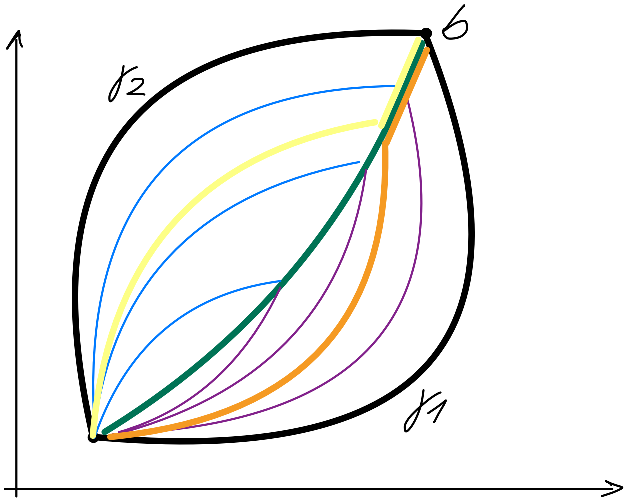


5. Der Cauchy-Integralsatz

Satz: f holomorph, γ ein zusammenziehbarer geschlossener Weg, dann gilt:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Beim Zusammenziehen wandert der Punkt b auf der grünen Kurve. Gleichzeitig wird γ_1 durch die violetten Kurven und γ_2 durch die blauen Kurven deformiert.

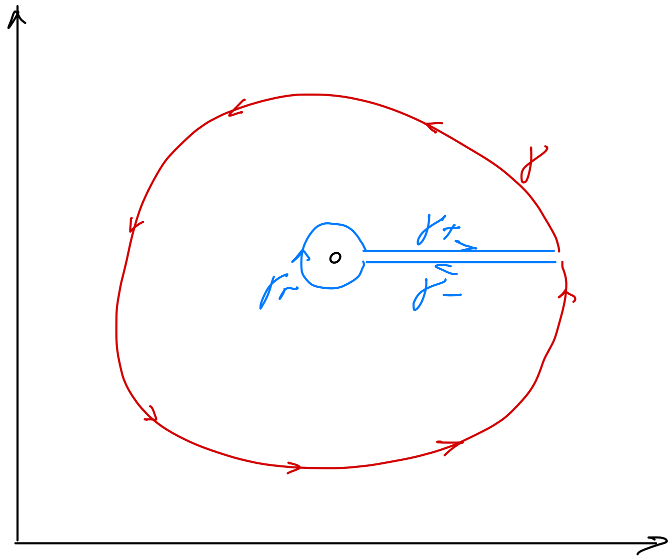


Die daraus zusammengesetzten gelben und orangen Kurven bilden eine Deformation von γ_1 in γ_2, daher sind die Wegintegrale gleich:

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz \qquad \square$$

Satz: f holomorph, γ ein Weg, der a im Gegenuhrzeigersinn umläuft. Dann gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$



Beweis: die zusammengesetzte Kurve in der Abbildung umläuft den Punkt a, wo der Integrand nicht definiert ist, nicht. Daher gilt:

$$0 = \int_{\text{zusammengesetzt}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

$$= \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz + \underbrace{\int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-}}_{=0} + \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

mit $\gamma_r(t) = a + re^{-2\pi i t}$ folgt

$$\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_0^1 \frac{f(a+re^{-2\pi i t})}{\cancel{r}\cancel{e^{-2\pi i t}}} \cancel{r}(-2\pi i)\cancel{e^{-2\pi i t}}\, dt$$

$$= -2\pi i \int_0^1 f(a+re^{-2\pi i t})\, dt.$$

Lässt man $r \to 0$ gehen, geht das Integral gegen $f(a)$, es folgt

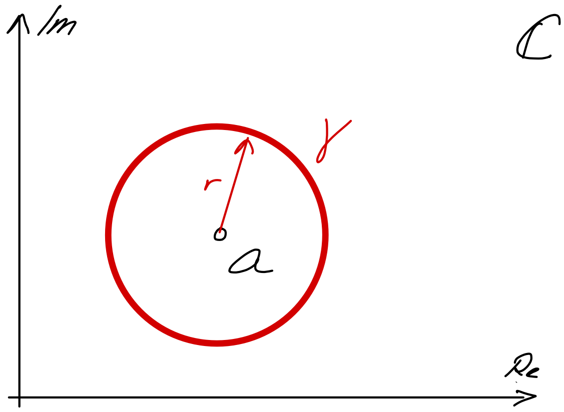
$$\oint \frac{f(z)}{z-a}\, dz = -\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i\, f(a)$$

$$\Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz. \qquad \square$$

Der Satz sagt also, dass eine holomorphe Funktion durch die Werte auf dem Rand des Gebietes vollständig bestimmt ist.

6. Mittelwerteigenschaft

Der Integralsatz gilt für eine holomorphe Funktion auch für einen Kreis um jeden beliebigen Punkt des Definitionsgebietes:



$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

Parametrisierung des Kreises: $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$.

$$f(a) = \frac{1}{\cancel{2\pi i}} \int_0^1 \frac{f(a+re^{2\pi i t})}{\cancel{re^{2\pi i t}}} \underbrace{\cancel{2\pi i}\, \cancel{re^{2\pi i t}}}_{\dot\gamma(t)}\, dt$$

$$= \int_0^1 f(a+re^{2\pi i t})\, dt. \qquad (6.1)$$

Dies ist das Integral der Werte auf dem roten Kreis. Es ist so normiert, dass

$$\int_0^1 1 \cdot dt = 1,$$

d.h. (6.1) ist der Mittelwert der Werte auf dem Kreis.

Satz: Eine holomorphe Funktion hat in jedem Punkt die Mittelwerteigenschaft: $f(a)$ ist der Mittelwert der Funktionswerte auf einem Kreis vom Radius r um a.

7. Maximum-/Minimum-Prinzip

Aus der Mittelwerteigenschaft für eine holomorphe Funktion folgt sofort auch das folgende Maximum-/Minimum-Prinzip. Ein solches kann natürlich nur für reelle Funktionen gelten, daher sei

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Für jeden Kreis γ um einen Punkt a gilt

$$\min\{u(\gamma(t))\} \leq u(a) = \int_0^1 u(a+re^{2\pi i t})\,dt \leq \max\{u(\gamma(t))\} \tag{7.1}$$

und analog für v. Es folgt:

Satz: Ist f eine holomorphe Funktion, dann haben Realteil $u(x,y)$ und Imaginärteil $v(x,y)$ kein Maximum oder Minimum im Inneren des Definitionsgebietes.

Beweis: Sei a ein Maximum von u, d.h. $u(a) \geq u(\gamma(t))$ für einen Kreis γ vom Radius r um a. Andererseits gilt nach (7.1)

$$u(\gamma(t)) \leq u(a) \leq \max\{u(\gamma(s)) \mid s \in I\} \tag{7.2}$$

für alle $t \in I$. Dies ist nur möglich wenn alle $\leq$ in (7.2) Gleichheiten sind. Dies wiederum bedeutet, dass $u = \text{const}$ ist, d.h. $u(a)$ ist kein Maximum $\square$

8. Holomorphe Funktionen sind glatt

Die Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

kann unter dem Integralzeichen abgeleitet werden.
Aus

$$\frac{d}{da}(z-a)^{-n} = -n\,(z-a)^{-n-1} \cdot (-1) = \frac{n}{(z-a)^{n+1}}$$

folgt

$$\frac{d^k}{da^k}\frac{1}{z-a} = \frac{k!}{(z-a)^{k+1}} \qquad (8.1)$$

und damit auch

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) \frac{d^k}{da^k} \frac{1}{z-a}\, dz \\ &\overset{(8.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) \frac{k!}{(z-a)^{k+1}}\, dz \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz. \qquad (8.2) \end{aligned}$$

Die Formel (8.2) beweist den folgenden Satz

Satz: Eine holomorphe Funktion $f(z)$ ist beliebig oft stetig differenzierbar.

Definition: Eine Funktion heisst **glatt**, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist.