

# **Appunti di Elaborazione di Segnali e Immagini**

Matteo Iervasi

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Che cos'è un segnale? . . . . .	3
1.2	Che cos'è un sistema? . . . . .	3
1.3	Classificazione dei segnali . . . . .	3
1.3.1	Segnali a tempo continuo e a tempo discreto . . . . .	4
1.3.2	Segnali analogici e digitali . . . . .	4
1.3.3	Segnali periodici e aperiodici . . . . .	5
1.3.4	Segnali causali e non causali . . . . .	5
1.3.5	Segnali pari e dispari . . . . .	5
1.3.6	Segnali deterministici e probabilistici . . . . .	6
1.4	Caratteristiche dei segnali . . . . .	7
1.5	Operazioni sui segnali . . . . .	8
1.6	Funzioni utili . . . . .	9
1.6.1	Proprietà dell'impulso unitario . . . . .	9
1.7	Sistemi lineari . . . . .	10
1.7.1	Proprietà dei sistemi lineari . . . . .	11
1.7.2	Caratteristiche generali . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Analisi dei sistemi a tempo continuo</b>	<b>12</b>
2.1	Risposta libera . . . . .	12
2.2	Risposta impulsiva . . . . .	13
2.3	Stabilità . . . . .	14
2.4	Integrale di convoluzione . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Analisi di Fourier</b>	<b>16</b>
3.1	Correlazione incrociata . . . . .	16
3.1.1	Autocorrelazione . . . . .	17
3.2	Serie di Fourier . . . . .	17

# 1 Introduzione

## 1.1 Che cos'è un segnale?

Si definisce **segnale** una qualsiasi grandezza fisica che varia nel tempo e trasporta informazione. In generale esistono diversi tipi di segnali, ma in natura sono quasi sempre casuali e continui.

Una prima grossa suddivisione della teoria dei segnali si basa sul tipo di segnale: i segnali **deterministici**, di cui è possibile predire il valore in un qualunque istante a piacere, e i segnali **stocastici** o **aleatori**, il cui valore non è prevedibile, ma su cui è possibile ottenere soltanto delle proprietà statistiche. Altra suddivisione è quella in segnali **continui** e **discreti**, ai quali si associano rispettivamente le comunicazioni *analogiche* e le comunicazioni *digitali*.

Parte della teoria dei segnali è profondamente connessa con la **teoria dei sistemi**, in quanto molti segnali transitano come input in sistemi che elaborano ovvero trasformano il segnale in ingresso restituendo in uscita un certo output.

## 1.2 Che cos'è un sistema?

Possiamo definire un **sistema** (dinamico) come un modello matematico che rappresenta un oggetto che evolve nel tempo.

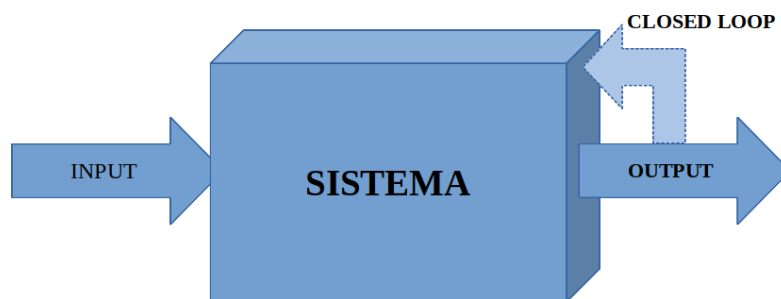


Figura 1.1: Schema di un sistema

## 1.3 Classificazione dei segnali

Come accennato prima, possiamo suddividere i segnali in diverse categorie:

- Continui nel tempo - Discreti nel tempo

- Analogici - Digitali
- Periodici - Aperiodici
- Causali e non causali
- Pari e dispari
- Deterministici - Casuali
- Segnali di energia - Segnali di potenza
- ...

È importante notare come le suddivisioni sopra elencate non siano esclusive tra loro, ci sono ad esempio segnali di potenza periodici, analogici e casuali, ecc.

### 1.3.1 Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

Un segnale si definisce **a tempo continuo** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri reali, ed è quindi specificato per ogni reale. Viceversa si definisce **discreto** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri naturali, ed è quindi specificato per valori discreti.

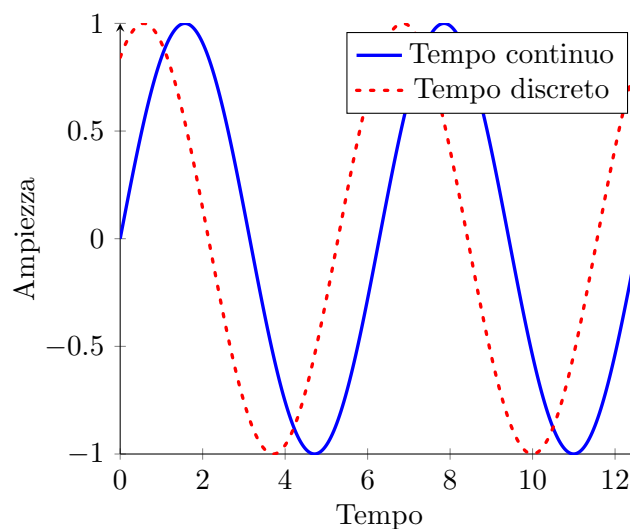


Figura 1.2: Due segnali sinusoidali, uno continuo e l'altro discreto

### 1.3.2 Segnali analogici e digitali

Se parlando del dominio abbiamo i segnali a tempo continuo e a tempo discreto, possiamo distinguere i segnali analogici e digitali guardando i valori assunti dal codominio. Quando

l'ampiezza di un segnale può assumere qualsiasi valore in un intervallo continuo, parliamo di segnale **analogico**, viceversa quando assume solo un insieme finito di valori parliamo di segnale **digitale**. In quest'ultimo caso il segnale si dice "quantizzato".

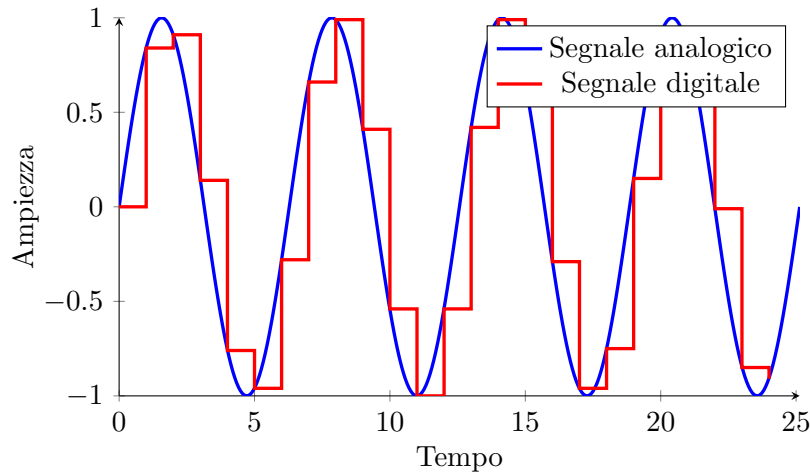


Figura 1.3: Confronto fra segnale analogico e digitale

### 1.3.3 Segnali periodici e aperiodici

Un segnale è **periodico** se esiste una costante positiva  $T_0$  tale che

$$f(t + T_0) = f(t) \quad \forall t$$

Il più piccolo valore di  $T_0$  che soddisfa questa relazione è chiamato **periodo** della funzione. Un segnale periodico rimane invariato quando viene spostato nel tempo. Un esempio è la funzione seno, che ha un periodo di  $2\pi$  (si veda la figura 1.2).

### 1.3.4 Segnali causali e non causali

I segnali **causali** assumono il valore 0 per  $x < 0$ , viceversa i segnali **anti-causali** valgono 0 per  $x \geq 0$ . I segnali **non causali** sono segnali il cui valore è diverso da 0 ambo i lati.

### 1.3.5 Segnali pari e dispari

Un segnale **pari** è un qualsiasi segnale  $f$  tale che  $f(t) = f(-t)$ . Questi segnali sono facilmente riconoscibili in quanto simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Un segnale **dispari** invece segue la relazione  $f(t) = -f(-t)$ .

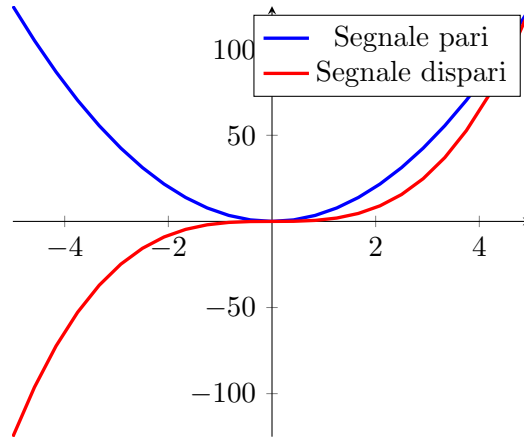


Figura 1.4:  $x^2$  è un segnale pari,  $x^3$  è dispari

Qualsiasi segnale può essere riscritto come composizione di segnali pari e dispari:

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

$$f_e(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \quad \text{even component}$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \quad \text{odd component}$$

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

Alcune proprietà delle funzioni pari e dispari:

- Funzione pari  $\cdot$  Funzione dispari = Funzione dispari
- Funzione dispari  $\cdot$  Funzione dispari = Funzione pari
- Funzione pari  $\cdot$  Funzione pari = Funzione pari
- Area di una funzione pari:  
 $\int_{-a}^a f_e(t) dt = 2 \int_0^a f_e(t) dt$
- Area di una funzione dispari:  
 $\int_{-a}^a f_o(t) dt = 0$

### 1.3.6 Segnali deterministici e probabilistici

Un segnale **deterministico** è un segnale la cui *descrizione fisica* è nota a priori, per cui è possibile prevedere in ogni istante il valore del segnale mediante una formula matematica, una regola o una tabella. Per questo motivo è anche possibile calcolare i valori futuri dai valori passati senza alcuna incertezza sui valori di ampiezza. Un segnale **probabilistico** invece è un segnale i cui valori di ampiezza non possono essere previsti con precisione, ma per i quali è solo possibile descrivere una probabilità, spesso basandosi sulla media di altri valori.

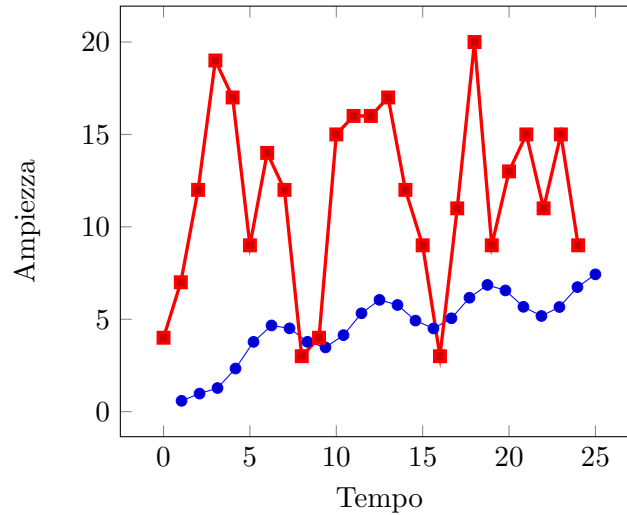


Figura 1.5: Il grafico blu è deterministico, il rosso è probabilistico

## 1.4 Caratteristiche dei segnali

Si definisce segnale di **lunghezza finita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *finito* di valori della variabile indipendente.

$$f = f(t), \quad \forall t : t_1 \leq t \leq t_2$$

dove  $t_1 > -\infty, t_2 < +\infty$

Si definisce segnale di **lunghezza infinita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *infinito* di valori della variabile indipendente.

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

La **dimensione** di un segnale indica la larghezza o la forza di esso. Useremo il concetto di *norma* per quantificare questa nozione sia per segnali a tempo continuo che discreto. L'area sotto la curva del segnale rappresenta **l'energia**.

L'**energia** di un segnale si calcola come:

$$E_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando  $0 < E_f < +\infty$  il segnale è detto **di energia**.

La **potenza** di un segnale si calcola come:

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando  $0 < P_f < +\infty$  il segnale è detto **di potenza**.

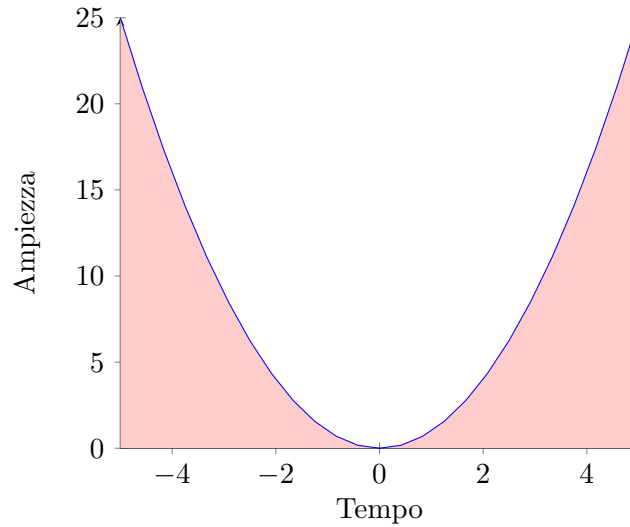


Figura 1.6: Energia del segnale

La radice quadrata della potenza è detto **valore efficace**. Esso costituisce un parametro molto importante nella teoria dei segnali, alla base per esempio della definizione del **rapporto segnale/rumore**. Possono esistere segnali per i quali né l'energia né la potenza sono finiti. Tuttavia nella pratica i segnali hanno energia finita, per cui sono segnali di energia (risulta impossibile generare un vero e proprio segnale di potenza, in quanto questo richiederebbe durata infinita ed energia infinita).

## 1.5 Operazioni sui segnali

- **Spostamento:** Anticipo o ritardo di un segnale
- **Scala:** Compressione o espansione di un segnale nel tempo
- **Inversione:** Simmetria rispetto all'asse verticale

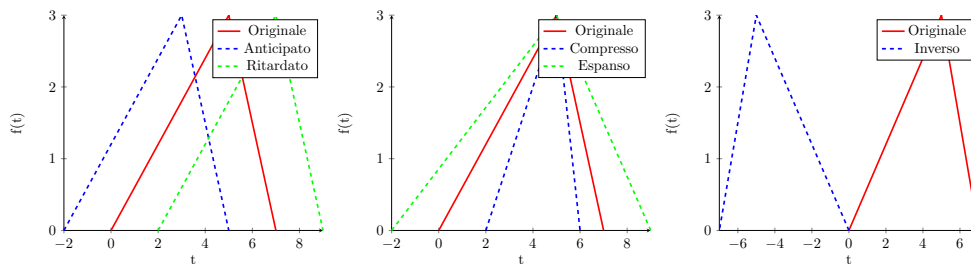


Figura 1.7: Spostamento, scala ed inversione



## 1.6 Funzioni utili

- Funzione gradino unitaria

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Funzione rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \frac{t}{t_0} & \text{if } 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{if } t > t_0 \end{cases}$$

- Funzione esponenziale

$$f(t) = Ae^{j\omega t}$$

- Impulso unitario

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

### 1.6.1 Proprietà dell'impulso unitario

Di seguito elenchiamo alcune delle proprietà fondamentali della funzione *impulso unitario*.

- Moltiplicazione di una funzione per l'impulso

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T)$$

- Proprietà del campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(0)\delta(t) dt = \phi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t - T) dt = \phi(T)$$

L'area sotto la curva ottenuta dal prodotto dell'impulso traslato di T e la funzione  $\phi(t)$  è il valore ottenuto dalla funzione  $\phi(t)$  per  $t = T$

- L'integrale dell'impulso è la funzione gradino

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t)$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

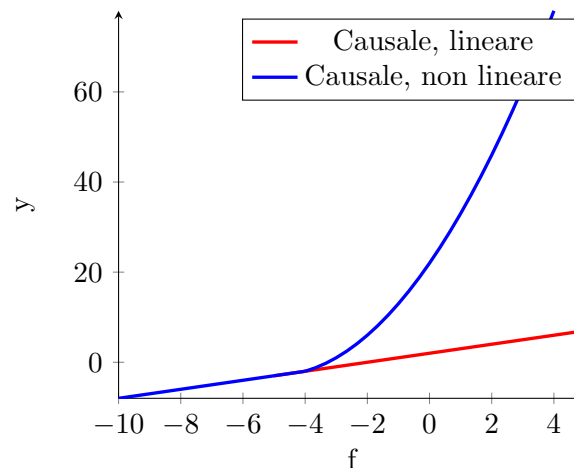
## 1.7 Sistemi lineari

Un sistema è caratterizzato da **input**, **output** e da un **modello matematico** del sistema. L'**analisi** di un sistema prevede di determinare l'output di un sistema dato l'input, mentre l'operazione inversa è la **sintesi** o **progettazione**. Come per i segnali, anche i sistemi possono essere classificati in varie categorie:

- Lineari - Non lineari
- A parametri costanti - Parametri che cambiano nel tempo
- Istantanei (senza memoria) - Dinamici (con memoria)
- Causali - Non causali
- A tempo continuo - A tempo discreto
- Analogici - Digitali
- ...

I sistemi i cui parametri *non* cambiano nel tempo vengono detti **tempo invarianti**. Per questi sistemi se l'input viene ritardato di  $T$  secondi, l'output rimane identico a prima, ma ritardato di  $T$ .

I sistemi **istantanei** (senza memoria) sono quelli in cui l'output al tempo  $t$  dipende esclusivamente dall'input al tempo  $t$ . Se l'output dipende dagli eventi passati, il sistema viene definito **dinamico** (un sistema con memoria). Un sottogruppo dei sistemi dinamici sono i sistemi con **memoria finita**, per i quali l'output al tempo  $t$  è completamente determinato dai segnali in input per gli ultimi  $T$  istanti (il sistema ha quindi una memoria di capacità massima  $T$ ).



Di seguito ci occuperemo solamente dei sistemi lineari, anche se è bene ricordare che nella realtà abbiamo sistemi che sono lineari solo *localmente*, i quali in genere rispondo *linearmente* a piccoli segnali e *non linearmente* a grandi segnali.

### 1.7.1 Proprietà dei sistemi lineari

Elenchiamo di seguito alcune proprietà dei sistemi lineari:

- **Additività**

$f_1 \rightarrow y_1$  e  $f_2 \rightarrow y_2$  allora  $f_1 + f_2 \rightarrow y_1 + y_2$

Se più fattori determinano l'output del sistema, allora l'effetto di questi fattori può essere trattato separatamente considerando gli altri uguali a zero

- **Omogeneità**

$f_1 \rightarrow y_1$  allora  $a_1 \cdot f_1 \rightarrow a_1 \cdot y_1$

Per un fattore arbitrario  $a$  (reale o immaginario), qualora la causa fosse moltiplicata per  $a$  allora anche l'effetto lo sarà

- **Sovrapposizione**

$a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 \rightarrow a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2$

Combinazione delle proprietà precedenti

### 1.7.2 Caratteristiche generali

L'output di un sistema per  $t \geq 0$  è il risultato di due cause indipendenti: le **condizioni iniziali** del sistema al tempo  $t = 0$  e l'**input**  $f(t)$  per  $t \geq 0$ . Grazie alla *linearità* la **risposta totale** del sistema può essere scomposta nella **somma** della **risposta libera** (detta anche risposta **zero-input**) e della **risposta forzata** (detta anche risposta **zero-state**). La risposta zero-input è dovuta alle condizioni iniziali del sistema con input  $f(t) = 0$  e la risposta zero-state è dovuta al segnale in ingresso  $f(t)$  per  $t \geq 0$  e condizioni iniziali *nulle* a  $t = 0$ . Se l'input può essere espresso come la somma di componenti, anche l'output potrà essere calcolato come la somma delle risposte di ogni singola componente, grazie alla proprietà dell'additività.

## 2 Analisi dei sistemi a tempo continuo

Quando si studia un sistema, uno degli scopi più comuni è ricostruire le equazioni che lo regolano, permettendoci quindi di calcolare l'output del sistema dato un preciso input. Uno degli strumenti fondamentali per questo scopo è la **risposta impulsiva** del sistema, che caratterizza *completamente* il comportamento di un sistema lineare *tempo invariante*.

Per il calcolo della risposta impulsiva ci serve prima la **risposta libera**. Ricordiamo che trattandosi di sistemi lineari, valgono le proprietà di *additività*, *omogeneità* e *sovrapposizione*.

Un sistema lineare tempo invariante (LTI) può essere descritto da un'equazione differenziale:

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

in forma compatta

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad (2.1)$$

(nella pratica,  $m$  è sempre minore di  $n$ ).

### 2.1 Risposta libera

Nei sistemi lineari il principio di sovrapposizione stabilisce in particolare che è possibile scomporre l'uscita come la somma della risposta libera più la risposta forzata, quindi possiamo dividere il segnale di uscita  $v(t)$  come:

$$v(t) = \begin{cases} u(t) \neq 0, c.i. = 0 \\ u(t) = 0, c.i. \neq 0 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione differenziale 2.1 in corrispondenza ad uno specifico ingresso e ad una specifica scelta delle c.i. può essere sempre ottenuta come somma di una soluzione dell'omogenea ad essa associata

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0 \quad (2.2)$$

e di una soluzione particolare della 2.1. L'equazione omogenea viene definita la **risposta libera** del sistema ( $u(t) = 0, c.i. \neq 0$ ); la soluzione particolare a partire da  $u(t) \neq 0, c.i. = 0$  è invece detta **risposta forzata**.

All'equazione differenziale omogenea associamo un'equazione algebrica detta **equazione caratteristica** del sistema:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sono le  $r \leq n$  soluzioni distinte dell'equazione caratteristica (chiamate **radici caratteristiche del sistema**), e  $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{N}$  rappresentano le rispettive molteplicità, ogni soluzione dell'omogenea, in particolare la risposta libera, può essere espressa nella forma:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \quad (2.3)$$

per opportuni  $c_{i,l} \in \mathbb{C}$ . Le soluzioni dell'omogenea del tipo  $e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}, t \in \mathbb{R}$ , vengono dette **modi naturali** (o **modi caratteristici**). Per ogni radice caratteristica c'è un modo caratteristico e la risposta libera altro non è che una combinazione lineare dei modi caratteristici del sistema.

## 2.2 Risposta impulsiva

La risposta impulsiva di un sistema è la sua uscita quando è soggetto ad un ingresso a **delta di Dirac**; viene utilizzata per descrivere la **risposta in frequenza** di un sistema dinamico ad una perturbazione generica. La delta di Dirac vista come “funzione” contiene equamente tutte le frequenze, e si presta particolarmente bene allo studio teorico nel *dominio della frequenza* di un sistema lineare.

Il comportamento ingresso-uscita di un sistema dinamico lineare stazionario (LTI) è *completamente* caratterizzato dalla sua risposta impulsiva, la cui trasformata di Laplace viene detta **funzione di trasferimento** del sistema LTI.

La **risposta impulsiva**, che denoteremo con  $h(t)$ , si calcola come:

$$h(t) = d_0 \delta(t) + \left( \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right) \delta_{-1}(t) \quad (2.4)$$

Notiamo che la risposta impulsiva contiene la risposta libera, ovvero tutti i modi naturali del sistema dopo l'impulso. Il termine  $d_0 \delta(t)$  è non nullo se  $m = n$  e indica il termine impulsivo. La risposta libera viene moltiplicata per la funzione gradino in modo da “tagliare” tutto ciò che c'era prima di  $t = 0$  e garantire che le c.i. a  $t = 0^-$  siano nulle. In virtù della causalità del sistema,  $h(t)$  è nulla per  $t < 0$ . La risposta impulsiva (ristretta all'intervallo  $[0, +\infty)$ ) rappresenta anche la **risposta forzata** del sistema in corrispondenza all'impulso unitario in ingresso, ovvero l'uscita del sistema osservato su  $\mathbb{R}_+$  con condizioni iniziali nulle in  $0^-$  e  $u(t) = \delta(t)$ .

## 2.3 Stabilità

Supponiamo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Per  $t \rightarrow +\infty$  l'esponenziale  $e^{\lambda t}$  (e quindi il modo elementare  $m(t) = \frac{t^l}{l!}, t \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} \text{se } \lambda > 0 & \text{diverge} \\ \text{se } \lambda = 0 & \begin{cases} \text{se } l = 0 & \text{limitato (o semplicemente stabile)} \\ \text{se } l > 0 & \text{divergente} \end{cases} \\ \text{se } \lambda < 0 & \text{converge} \end{cases}$$

Se  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il modo elementare  $m(t) = \frac{t^l}{l!}, t \in \mathbb{R}$  è:

- convergente a zero per  $t \rightarrow \infty \iff \Re(\lambda) < 0$
- limitato (o semplicemente stabile)  $\iff \Re(\lambda) \leq 0$  e  $l = 0$
- divergente per  $t \rightarrow \infty$  in tutti gli altri casi

Un sistema è **asintoticamente stabile** se, per ogni scelta delle condizioni iniziali, l'evoluzione libera del sistema converge a zero asintoticamente, ovvero

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_l(t) = 0$$

In altri termini un sistema è asintoticamente stabile *se e solo se* tutti i modi naturali  $e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$  sono convergenti, ovvero se e solo se  $\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$ .

Inoltre un sistema è **BIBO stabile** (*"Bounded Input - Bounded Output"*) se, a partire da condizioni iniziali nulle, risponde (in evoluzione forzata) con uscita limitata ad ogni segnale di ingresso limitato. In altri termini se  $v(0^-) = 0$ , allora per ogni segnale  $u(t), t \in \mathbb{R}$ , nullo per  $t < 0$ , per il quale  $\exists M_u$  t.c.  $|u(t)| < M_u \quad \forall t \geq 0$ , la corrispondente uscita  $v(t) = v_f(t)$  soddisfa  $|v(t)| < M_v \quad \forall t \geq 0$ , per un opportuno  $M_v$ .

## 2.4 Integrale di convoluzione

Date le funzioni  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , definiamo **integrale di convoluzione** di  $v_1$  e  $v_2$  la funzione definita come:

$$[v_1 * v_2](t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\tau) v_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t - \tau) v_2(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

L'integrale di convoluzione gode delle seguenti proprietà:

- **Proprietà commutativa:**  
 $f_1(t) \cdot f_2(t) = f_2(t) \cdot f_1(t)$
- **Proprietà distributiva:**  
 $f_1(t) \cdot [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) \cdot f_2(t) + f_1(t) \cdot f_3(t)$

- **Proprietà associativa:**

$$f_1(t) \cdot [f_2(t) \cdot f_3(t)] = [f_1(t) \cdot f_2(t)] \cdot f_3(t)$$

- **Spostamento:**

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = c(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t - T) = c(t - T) \wedge f_1(t - T) \cdot f_2(t) = c(t - T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(t - T_1) \cdot f_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2)$$

- **Moltiplicazione con l'impulso:**

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(t)$$

- **Proprietà della durata:**

se le durate di  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  sono rispettivamente  $T_1$  e  $T_2$  allora la durata di  $f_1(t) \cdot f_2(t) = T_1 + T_2$ .

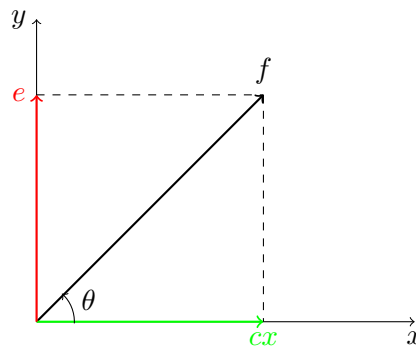
La risposta in uscita del sistema 2.1 inizialmente a riposo, di risposta impulsiva  $h(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  in corrispondenza ad un segnale di ingresso  $u(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  se esiste è espressa nella forma:

$$v(t) = [h * u](t) = \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t^+} h(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

### 3 Analisi di Fourier

Possiamo considerare i segnali come dei **vettori**, per i quali quindi valgono le normali **operazioni vettoriali**. Richiamiamo alcune definizioni:

- La **componente** di un vettore è la proiezione di un vettore su un altro.
- Dati 2 vettori  $f$  ed  $x$ , definiamo il **prodotto scalare**  $f \cdot x = |f||x| \cos \theta$ .
- Dalla definizione di prodotto scalare definiamo la **norma** di  $f$  come il prodotto scalare di  $f$  con se stesso  $f^2 = f \cdot f$ .
- La **proiezione ortogonale** di un vettore su un altro corrisponde al prodotto scalare dei due vettori



La proiezione ortogonale di un vettore  $f$  su un vettore  $x$  approssima  $f$  con la sua componente lungo  $x$ . Il concetto di componente vettoriale e ortogonalità può essere esteso ai segnali. Notiamo che

$$f(t) \simeq cx(t) \quad \text{con } t \in [t_1, t_2]$$

e l'errore  $e$  di questa approssimazione è:

$$e(t) = \begin{cases} f(t) - cx(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 3.1 Correlazione incrociata

La **correlazione incrociata** rappresenta la misura di similitudine di due segnali come funzione di uno spostamento o traslazione temporale applicata ad uno di essi.



Considerando due segnali a valori reali  $x$  e  $y$  che differiscono solamente per uno spostamento sull'asse  $t$ , si può calcolare la correlazione incrociata per mostrare di quanto  $y$  deve essere anticipato per renderlo identico ad  $x$ . La formula essenzialmente anticipa il segnale  $y$  lungo l'asse  $t$ , calcolando l'integrale del prodotto per ogni possibile valore dello spostamento. Quando i due segnali coincidono, il valore di  $(x * y)$  è massimizzato, poiché quando le forme d'onda sono allineate, esse contribuiscono solo positivamente al computo dell'area.

Discorso simile per i segnali complessi, considerando due complessi  $x$  e  $y$ , prendere il coniugato di  $x$  assicura che le forme d'onda allineate con componenti immaginarie contribuiscano positivamente al computo dell'integrale.

Per due segnali di *energia finita*  $x$  ed  $y$  la correlazione incrociata è definita come:

$$R_{xy}(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)y(t + \tau)d\tau \quad (3.1)$$

dove  $x^*$  indica il *complesso coniugato* di  $x$ . La correlazione incrociata è simile alla convoluzione (2.5) tra due segnali, ma a differenza di quest'ultima, che comporta l'inversione temporale di un segnale, il suo spostamento ed il prodotto per un altro segnale, la correlazione comporta solamente lo spostamento ed il prodotto.

### 3.1.1 Autocorrelazione

Un'**autocorrelazione** è la correlazione incrociata di un segnale con se stesso. Per un segnale di *energia finita*  $x$  l'autocorrelazione è definita come:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(t + \tau)d\tau \quad (3.2)$$

## 3.2 Serie di Fourier

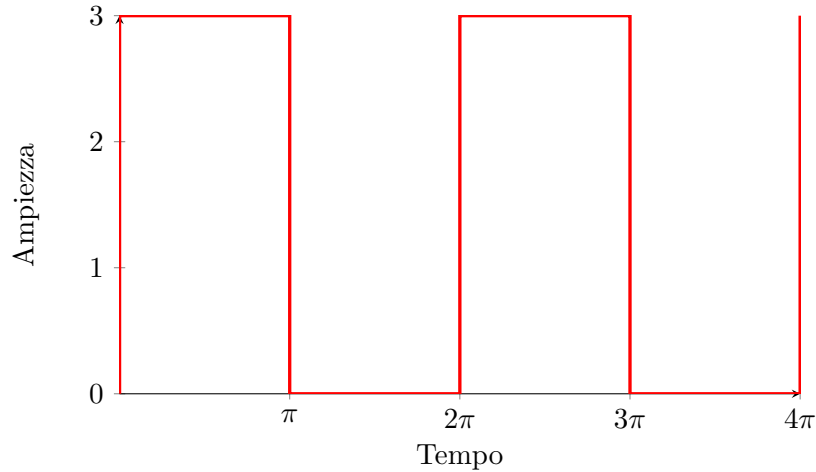
La **serie di Fourier** è una rappresentazione di una *funzione periodica* mediante una combinazione lineare di funzioni sinusoidali. In generale, un *polinomio trigonometrico* è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita sul campo reale del tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} \quad (3.3)$$

dove  $a_n$  e  $b_n$  sono numeri reali,  $c_n$  complessi e  $n$  è intero.

Per capire bene questa serie, spieghiamo con un esempio. Prendiamo quindi una funzione periodica e proviamo a calcolare passo per passo la sua serie di Fourier. Come funzione scegliamo la funzione *onda quadra*, che ha un periodo di  $2\pi$ . Come ampiezza scegliamo 3.

$$f(t) = \begin{cases} 3 & 2\pi t < t < 2\pi t + \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Vogliamo scrivere la funzione come somma di seni e coseni (più la costante iniziale), della forma:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t) + \dots \\ + b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t) + \dots$$

Per trovare  $a_0$ , integriamo nel periodo della funzione (portando già fuori le costanti):

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = a_0 \int_0^{2\pi} dt \\ + a_1 \int_0^{2\pi} \cos(t) dt + \dots + a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt \\ + b_1 \int_0^{2\pi} \sin(t) dt + \dots + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt$$

Ma  $\int_0^{2\pi} a_n \cos(nt)$  e  $\int_0^{2\pi} b_n \sin(nt)$ , per  $\forall n \in \mathbb{N}$ , valgono 0. Quindi rimane solo il termine di  $a_0$ . Risolvendo l'integrale otteniamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

Per trovare  $a_n$ , moltiplichiamo prima tutta l'espressione per  $\cos(nt)$ :

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = a_0 \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt \\ + a_1 \int_0^{2\pi} \cos(t) \cos(nt) dt + \dots + a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(nt) dt \\ + b_1 \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(nt) dt + \dots + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cos(nt) dt$$

### 3 Analisi di Fourier

Ora, integrando notiamo che tutti i termini si annullano, tranne il termine  $a_n \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)$ , dal quale ricaviamo che:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Proseguiamo con un procedimento simile per trovare l'espressione che calcola  $b_n$ , moltiplicando per il  $\sin(nt)$ . Otteniamo:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Possiamo procedere con il calcolo della serie di Fourier per la nostra funzione onda quadra. Calcoliamo per primo il termine  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} 3 dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0 dt \right) = \frac{3}{2}$$