Elaborazione di Segnali e Immagini

Matteo Iervasi

Indice

1 Introduzione

1.1 Che cos'è un segnale?

Si definisce **segnale** una qualsiasi grandezza fisica che varia nel tempo e trasporta informazione. In generale esistono diversi tipi di segnali, ma in natura sono quasi sempre casuali e continui.

Una prima grossa suddivisione della teoria dei segnali si basa sul tipo di segnale: i segnali **deterministici**, di cui è possibile predire il valore in un qualunque istante a piacere, e i segnali **stocastici** o **aleatori**, il cui valore non è prevedibile, ma su cui è possibile ottenere soltanto delle proprietà statistiche. Altra suddivisione è quella in segnali **continui** e **discreti**, ai quali si associano rispettivamente le comunicazioni *analogiche* e le comunicazioni *digitali*.

Parte della teoria dei segnali è profondamente connessa con la **teoria dei sistemi**, in quanto molti segnali transitano come input in sistemi che elaborano ovvero trasformano il segnale in ingresso restituendo in uscita un certo output.

1.2 Che cos'è un sistema?

Possiamo definire un **sistema** (dinamico) come un modello matematico che rappresenta un oggetto che evolve nel tempo.

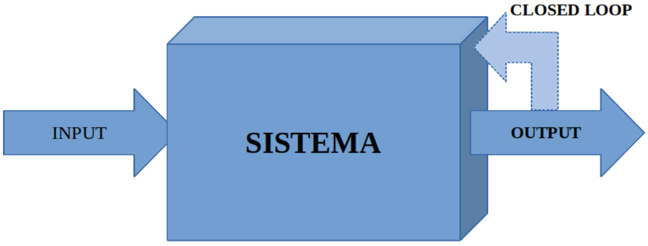


Figura 1: Schema di un sistema

1.3 Classificazione dei segnali

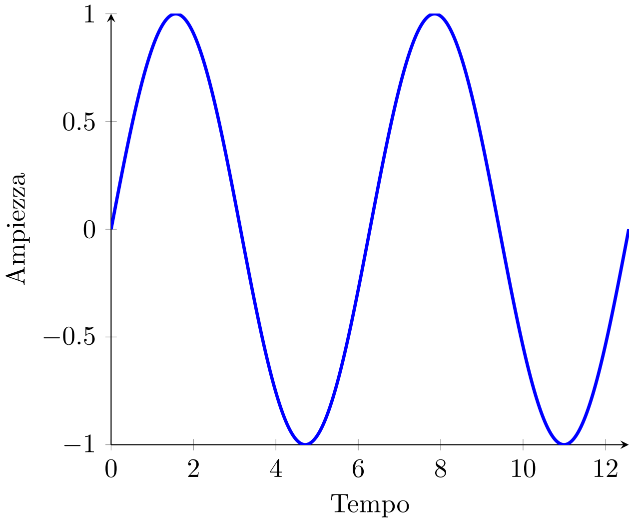
Come accennato prima, possiamo suddividere i segnali in diverse categorie:

- Analogici - Digitali
- Continui nel tempo - Discreti nel tempo
- Periodici - Aperiodici
- Deterministici - Casuali
- Segnali di energia - Segnali di potenza
- ...

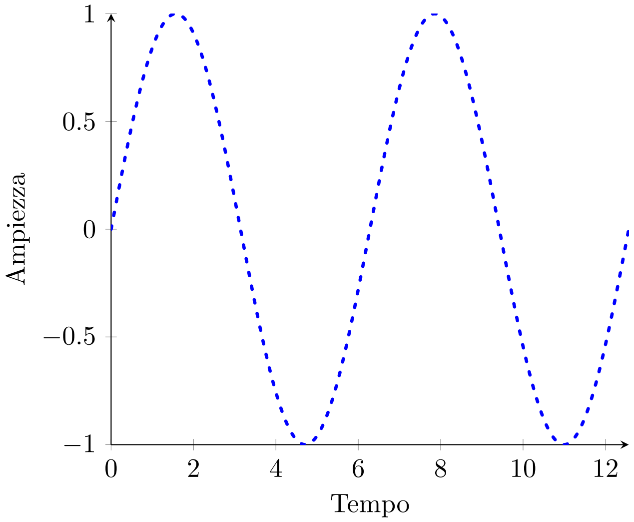
È importante notare come le suddivisioni sopra elencate non siano esclusive tra loro, ci sono ad esempio segnali di potenza periodici, analogici e casuali, ecc.

1.3.1 Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

Un segnale si definisce **a tempo continuo** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri reali, ed è quindi specificato per ogni reale.

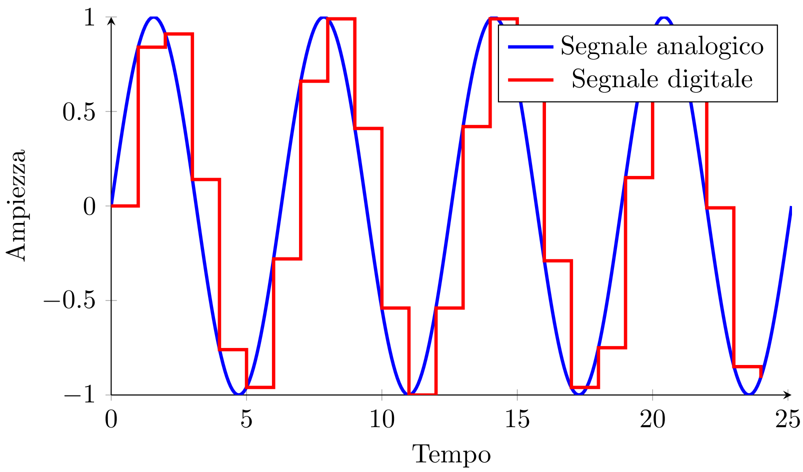


Un segnale si definisce **discreto** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri naturali, ed è quindi specificato per valori discreti.



1.3.2 Segnali analogici e digitali

Se parlando del dominio abbiamo i segnali a tempo continuo e a tempo discreto, possiamo distinguere i segnali analogici e digitali guardando i valori assunti dal codominio. Quando l'ampiezza di un segnale può assumere qualsiasi valore in un intervallo continuo, parliamo di **segnale analogico**, viceversa quando assume solo un insieme finito di valori parliamo di **segnale digitale**. In quest'ultimo caso il segnale si dice "*quantizzato*".



1.3.3 Segnali periodici e aperiodici

Un segnale è periodico se esiste una costante positiva T_0 tale che

$$f(t + T_0) = f(t) \qquad \forall t$$

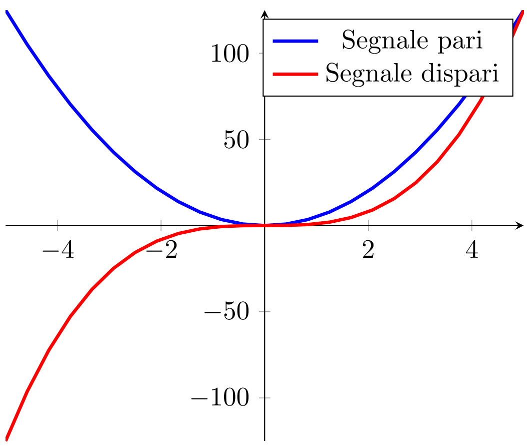
Il più piccolo valore di T_0 che soddisfa questa relazione è chiamato **periodo** della funzione. Un segnale periodico rimane invariato quando viene spostato nel tempo.

1.3.4 Segnali causali e non causali

I segnali **causali** assumono il valore 0 per $x < 0$, viceversa i segnali **anti-causali** valgono 0 per $x \geq 0$. I segnali **non causali** sono segnali il cui valore è diverso da 0 da ambo i lati.

1.3.5 Segnali pari e dispari

Un segnale **pari** è un qualsiasi segnale f tale che $f(t) = f(-t)$. Questi segnali sono facilmente riconoscibili in quanto simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Un segnale **dispari** invece segue la relazione $f(t) = -f(-t)$.



Qualsiasi segnale può essere riscritto come composizione di segnali pari e dispari:

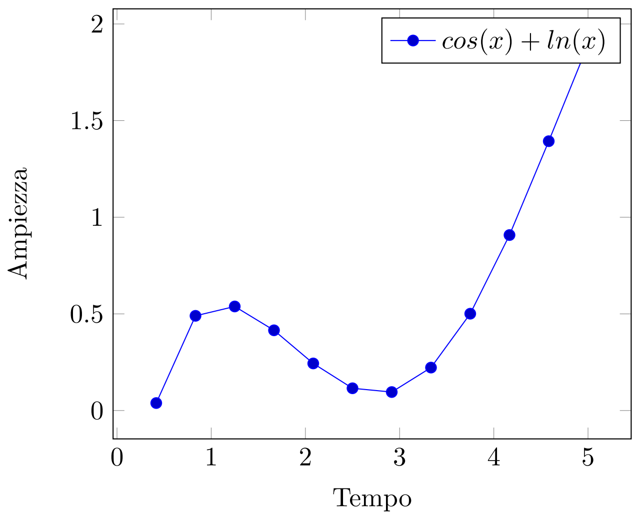
$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}(f(t)+f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t)-f(-t)) \\
f_e(t) &= \frac{1}{2}(f(t)+f(-t)) \qquad \text{even component} \\
f_o(t) &= \frac{1}{2}(f(t)-f(-t)) \qquad \text{odd component} \\
f(t) &= f_e(t) + f_o(t)
\end{aligned}
$$

Alcune proprietà delle funzioni pari e dispari:

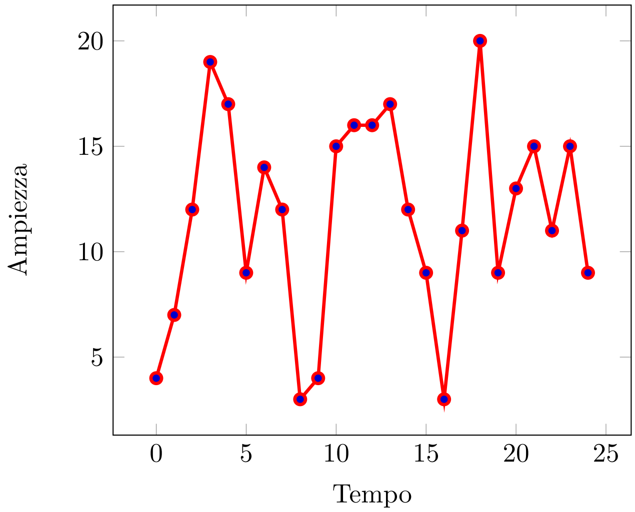
- Funzione pari $\times$ Funzione dispari $=$ Funzione dispari
- Funzione dispari $\times$ Funzione dispari $=$ Funzione pari
- Funzione pari $\times$ Funzione pari $=$ Funzione pari
- Area di una funzione pari:
  $\int_{-a}^{a} f_e(t)dt = 2\int_{0}^{a} f_e(t)dt$
- Area di una funzione dispari:
  $\int_{-a}^{a} f_o(t)dt = 0$

1.3.6 Segnali deterministici e probabilistici

Un segnale **deterministico** è un segnale la cui *descrizione fisica* è nota a priori, per cui è possibile prevedere in ogni istante il valore del segnale mediante una formula matematica, una regola o una tabella. Per questo motivo è anche possibile calcolare i valori futuri dai valori passati senza alcuna incertezza sui valori di ampiezza.



Un segnale **probabilistico** invece è un segnale i cui valori di ampiezza non possono essere previsti con precisione, ma per i quali è solo possibile descrivere una probabilità, spesso basandosi sulla media di altri valori.



1.4 Caratteristiche dei segnali

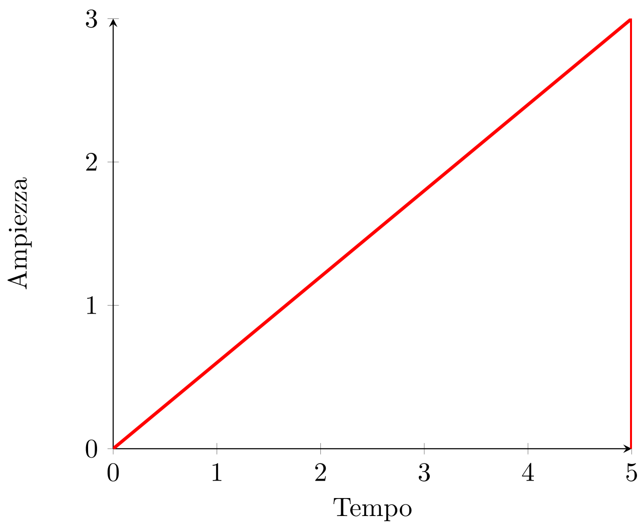
Si definisce segnale di **lunghezza finita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *finito* di valori della variabile indipendente.

$$f = f(t), \quad \forall t : t_1 \leq t \leq t_2$$
$$\text{dove} \qquad t_1 > -\infty, t_2 < +\infty$$

Si definisce segnale di **lunghezza infinita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *infinito* di valori della variabile indipendente.

$$f(t) = sin(\omega t)$$

La **dimensione** di un segnale indica la larghezza o la forza di esso. Useremo il concetto di *norma* per quantificare questa nozione sia per segnali a tempo continuo che discreto.
L'area sotto la curva del segnale rappresenta **l'energia**.



L'**energia** di un segnale si calcola come:

$$E_f = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando $0 < E_f < +\infty$ il segnale è detto **di energia**.

La **potenza** di un segnale si calcola come:

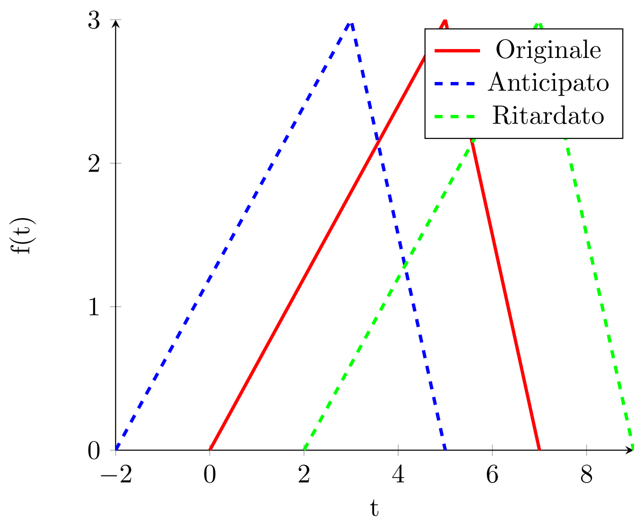
$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando $0 < P_f < +\infty$ il segnale è detto **di potenza**.

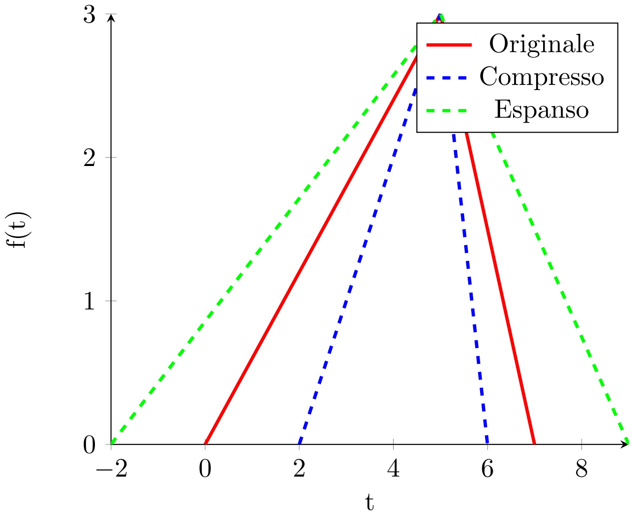
La radice quadrata della potenza è detto **valore efficace**. Esso costituisce un parametro molto importante nella teoria dei segnali, alla base per esempio della definizione del **rapporto segnale/rumore**. Possono esistere segnali per i quali né l'energia né la potenza sono finiti. Tuttavia nella pratica i segnali hanno energia finita, per cui sono segnali di energia (risulta impossibile generare un vero e proprio segnale di potenza, in quanto questo richiederebbe durata infinita ed energia infinita).

1.5 Operazioni sui segnali

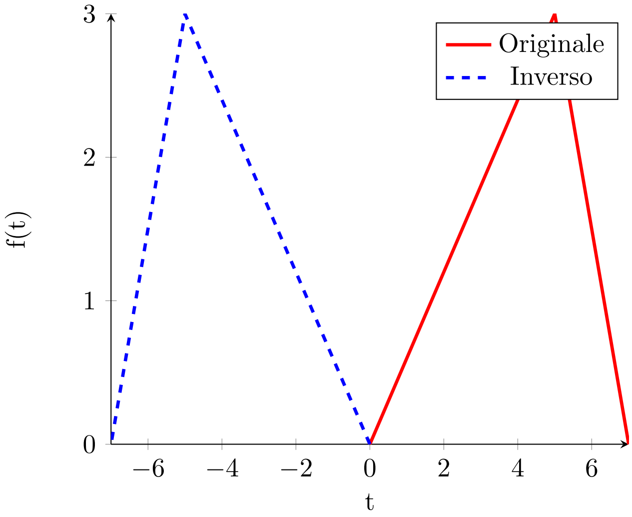
- **Spostamento**: Anticipo o ritardo di un segnale



- **Scala**: Compressione o espansione di un segnale nel tempo



- **Inversione**: Simmetria rispetto all'asse verticale



1.6 Funzioni utili

- Funzione gradino unitaria

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Funzione rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < 0 \\ \frac{t}{t_0} & \text{if} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{if} \quad t > t_0 \end{cases}$$

- Impulso unitario

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Funzione esponenziale

$$f(t) = Ae^{j\omega t}$$

Di seguito elenchiamo alcune delle proprietà fondamentali della funzione *impulso unitario*.

- Moltiplicazione di una funzione per l'impulso

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$
$$\phi(t)\delta(t-T) = \phi(T)\delta(t-T)$$

- Proprietà del campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(0)\delta(t)dt = \phi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \phi(0)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t-T)dt = \phi(T)$$

  L'area sotto la curva ottenuta dal prodotto dell'impulso traslato di T e la funzione $\varphi(t)$ è il valore ottenuto dalla funzione $\varphi(t)$ per $t = T$

- L'integrale dell'impulso è la funzione gradino

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$$

  Quindi

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

1.7 Sistemi lineari

Un sistema è caratterizzato da **input**, **output** e da un **modello matematico** del sistema. L'**analisi** di un sistema prevede di determinare l'output di un sistema dato l'input, mentre l'operazione inversa è la **sintesi** o **progettazione**.

Come per i segnali, anche i sistemi possono essere classificati in varie categorie:

- Lineari - Non lineari
- A parametri costanti - Parametri che cambiano nel tempo
- Istantanei (senza memoria) - Dinamici (con memoria)

- Causali - Non causali
- A tempo continuo - A tempo discreto
- Analogici - Digitali
- ...

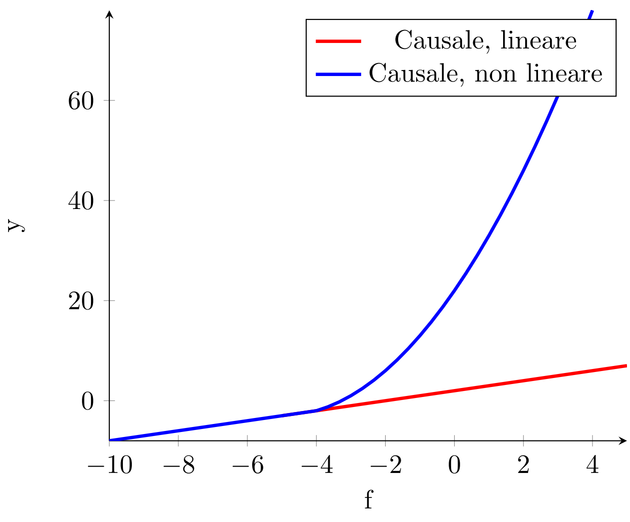
1.7.1 Proprietà dei sistemi lineari

Elenchiamo di seguito alcune proprietà dei sistemi lineari:

- **Additività**
  $f_1 \to y_1$ e $f_2 \to y_2$ allora $f_1 + f_2 \to y_1 + y_2$
- **Omogeneità**
  $f_1 \to y_1$ allora $a_1 \times f_1 \to a_1 \times y_1$
- **Sovrapposizione**
  $a_1 \times f_1 + a_2 \times f_2 \to a_1 \times y_1 + a_2 \times y_2$

1.7.2 Risposta libera e risposta forzata

La **risposta libera** di un sistema è la sua risposta quando l'ingresso è nullo. L'output di un sistema per $t \geq 0$ è il risultato di due cause indipendenti: le **condizioni iniziali** del sistema al tempo $t = 0$ e l'input $f(t)$ per $t \geq 0$. Grazie alla *linearità* la risposta totale del sistema è la **somma** della risposta libera e della risposta forzata. Nella realtà abbiamo sistemi che sono lineari solo *localmente*, che in genere rispondo linearmente a piccoli segnali e non linearmente a grandi segnali.



I sistemi i cui parametri *non* cambiano nel tempo vengono detti **tempo invarianti**. Per questi sistemi se l'input viene ritardato di T secondi, l'output rimane identico a prima, ma ritardato di T.

I sistemi **istantanei** (senza memoria) sono quelli in cui l'output al tempo t dipende esclusivamente dall'input al tempo t. Se l'output dipende dagli eventi passati, il sistema viene definito **dinamico** (un sistema con memoria). Un sottogruppo dei sistemi dinamici sono i sistemi con **memoria finita**, per i quali l'output al tempo t è completamente determinato dai segnali in input per gli ultimi T istanti (il sistema ha quindi una memoria di capacità massima T).

2 Analisi dei sistemi a tempo continuo

Quando si studia un sistema, uno degli scopi più comuni è ricostruire le equazioni che lo regolano, permettendoci quindi di calcolare l'output del sistema dato un preciso input. Uno degli strumenti fondamentali per questo scopo è la **risposta impulsiva** del sistema, che caratterizza completamente il comportamento di un sistema lineare tempo invariante.

Per fare ciò occorrono due cose: la **risposta libera** e la **risposta forzata**. Ricordiamo che trattandosi di sistemi lineari, valgono le proprietà di *additività*, *omogeneità* e *sovrapposizione*.

Un sistema lineare tempo invariante (LTI) può essere descritto da un'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) \\ = \; & b_m\frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}} + ... + b_1\frac{df}{dt} + b_0 f(t) \end{aligned}$$

dove tutti i coefficienti a_i e b_i sono costanti.

2.1 Calcolo della risposta libera

Riscriviamo l'equazione differenziale che descrive un sistema LTI usando una notazione più compatta:

$$\begin{aligned} & (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y(t) \\ = \; & (b_m D^m + b_{m-1}D^{m-1} + ... + b_1 D + b_0)f(t) \end{aligned}$$

dove $D = \frac{d}{dt}$.

La risposta libera si calcola ponendo $f(t) = 0$:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y_0(t) = 0$$

Questa equazione ci dice che una combinazione lineare di $y_0(t)$ e delle sue n derivate successive è 0 per *tutti* gli istanti t. Ciò è possibile solamente *se e solo se* $y_0(t)$ e tutte le derivate successive sono della stessa forma. Solo la funzione esponenziale $e^{\lambda t}$ ha questa proprietà.

Quindi assumiamo che la soluzione sia $y_0(t) = ce^{\lambda t}$, quindi

$$Dy_0 t = \frac{dy_0}{dt} = c\lambda e^{\lambda t}$$

$$D^2 y_0 t = \frac{d^2 y_0}{dt^2} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$...$$

$$D^n y_0 t = \frac{d^n y_0}{dt^n} = c\lambda^n e^{\lambda t}$$

sostituendo all'indietro, otteniamo

$$c(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Naturalmente $ce^{\lambda t}$ è anch'essa una soluzione dell'equazione. Notiamo che il polinomio di sopra è uguale all'altro con λ che sostituisce D. Quindi, può essere espresso come

$$Q(\lambda) = 0$$

e quando $Q(\lambda)$ è espresso in forma fattorizzata, possiamo riscrivere l'equazione così:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) = 0.$$

Chiaramente λ ha n soluzioni: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, di conseguenza abbiamo n possibili soluzioni: $c_1e^{\lambda_1 t}, c_2e^{\lambda_2 t}, ..., c_ne^{\lambda_n t}$, con $c_1, c_2, ..., c_n$ costanti arbitrarie. Possiamo mostrare che una soluzione generale è data dalla somma di queste n soluzioni:

$$y_0(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + ... + c_ne^{\lambda_n t}$$

dove $c_1, c_2, ..., c_n$ sono costanti.

Il polinomio che abbiamo trovato si chiama **polinomio caratteristico** del sistema, e l'equazione $Q(\lambda) = 0$ è chiamata **equazione caratteristica**. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sono le radici dell'equazione caratteristica. Gli esponenziali $e^{\lambda_i t} \quad (i = 1, 2, ..., n)$ sono i **modi caratteristici** (o **modi naturali**) del sistema. C'è quindi un modo caratteristico per ogni radice, e la risposta libera è una combinazione lineare dei modi caratteristici.