

# Elaborazione di Segnali e Immagini

Matteo Iervasi

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Che cos'è un segnale? . . . . .	2
1.2	Che cos'è un sistema? . . . . .	2
1.3	Classificazione dei segnali . . . . .	2
1.3.1	Segnali a tempo continuo e a tempo discreto . . . . .	3
1.3.2	Segnali analogici e digitali . . . . .	3
1.3.3	Segnali periodici e aperiodici . . . . .	4
1.3.4	Segnali causali e non causali . . . . .	4
1.3.5	Segnali pari e dispari . . . . .	4
1.3.6	Segnali deterministici e probabilistici . . . . .	5
1.4	Caratteristiche dei segnali . . . . .	6
1.5	Operazioni sui segnali . . . . .	7
1.6	Funzioni utili . . . . .	8
1.7	Sistemi lineari . . . . .	9
1.7.1	Proprietà dei sistemi lineari . . . . .	10
1.7.2	Risposta libera e risposta forzata . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Analisi dei sistemi a tempo continuo</b>	<b>11</b>
2.1	Calcolo della risposta libera . . . . .	11
2.2	Calcolo della risposta impulsiva . . . . .	12

# 1 Introduzione

## 1.1 Che cos'è un segnale?

Si definisce **segnale** una qualsiasi grandezza fisica che varia nel tempo e trasporta informazione. In generale esistono diversi tipi di segnali, ma in natura sono quasi sempre casuali e continui.

Una prima grossa suddivisione della teoria dei segnali si basa sul tipo di segnale: i segnali **deterministici**, di cui è possibile predire il valore in un qualunque istante a piacere, e i segnali **stocastici** o **aleatori**, il cui valore non è prevedibile, ma su cui è possibile ottenere soltanto delle proprietà statistiche. Altra suddivisione è quella in segnali **continui** e **discreti**, ai quali si associano rispettivamente le comunicazioni *analogiche* e le comunicazioni *digitali*.

Parte della teoria dei segnali è profondamente connessa con la **teoria dei sistemi**, in quanto molti segnali transitano come input in sistemi che elaborano ovvero trasformano il segnale in ingresso restituendo in uscita un certo output.

## 1.2 Che cos'è un sistema?

Possiamo definire un **sistema** (dinamico) come un modello matematico che rappresenta un oggetto che evolve nel tempo.

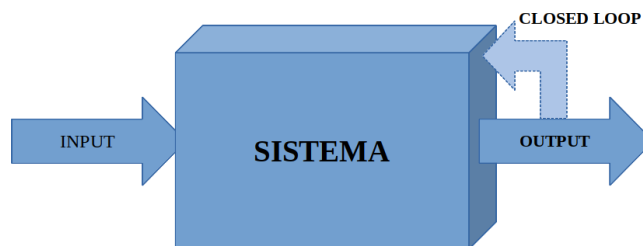


Figura 1: Schema di un sistema

## 1.3 Classificazione dei segnali

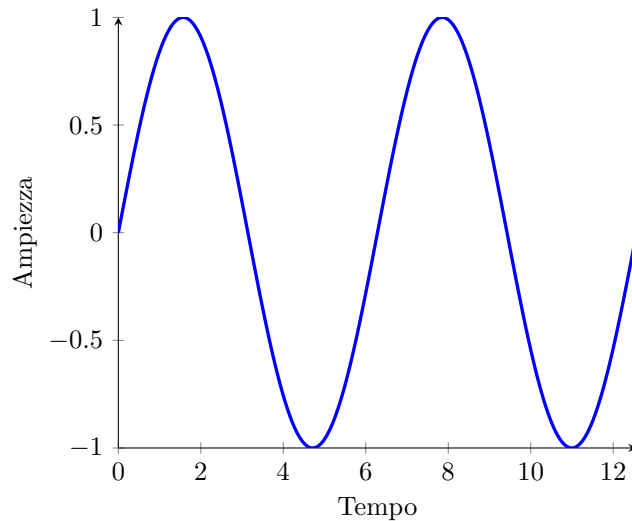
Come accennato prima, possiamo suddividere i segnali in diverse categorie:

- Analogici - Digitali
- Continui nel tempo - Discreti nel tempo
- Periodici - Aperiodici
- Deterministici - Casuali
- Segnali di energia - Segnali di potenza
- ...

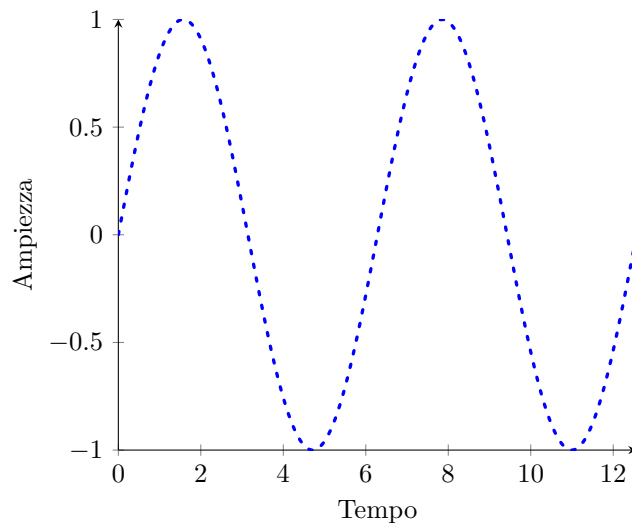
È importante notare come le suddivisioni sopra elencate non siano esclusive tra loro, ci sono ad esempio segnali di potenza periodici, analogici e casuali, ecc.

### 1.3.1 Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

Un segnale si definisce **a tempo continuo** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri reali, ed è quindi specificato per ogni reale.

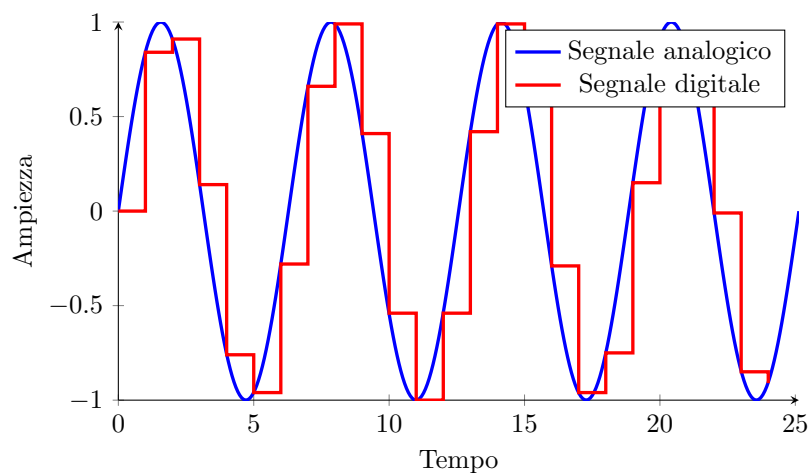


Un segnale si definisce **discreto** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri naturali, ed è quindi specificato per valori discreti.



### 1.3.2 Segnali analogici e digitali

Se parlando del dominio abbiamo i segnali a tempo continuo e a tempo discreto, possiamo distinguere i segnali analogici e digitali guardando i valori assunti dal codominio. Quando l'ampiezza di un segnale può assumere qualsiasi valore in un intervallo continuo, parliamo di **segnale analogico**, viceversa quando assume solo un insieme finito di valori parliamo di **segnale digitale**. In quest'ultimo caso il segnale si dice "*quantizzato*".



### 1.3.3 Segnali periodici e aperiodici

Un segnale è periodico se esiste una costante positiva  $T_0$  tale che

$$f(t + T_0) = f(t) \quad \forall t$$

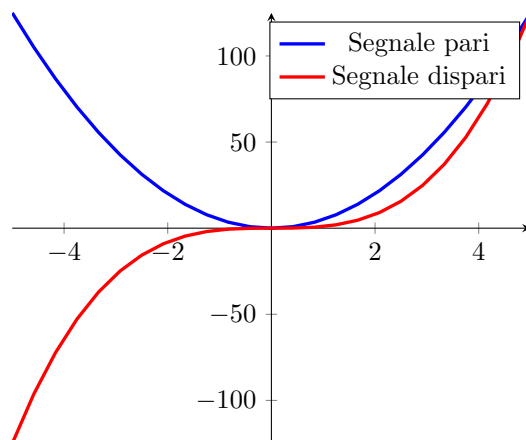
Il più piccolo valore di  $T_0$  che soddisfa questa relazione è chiamato **periodo** della funzione. Un segnale periodico rimane invariato quando viene spostato nel tempo.

### 1.3.4 Segnali causali e non causali

I segnali **causali** assumono il valore 0 per  $x < 0$ , viceversa i segnali **anti-causali** valgono 0 per  $x \geq 0$ . I segnali **non causali** sono segnali il cui valore è diverso da 0 da ambo i lati.

### 1.3.5 Segnali pari e dispari

Un segnale **pari** è un qualsiasi segnale  $f$  tale che  $f(t) = f(-t)$ . Questi segnali sono facilmente riconoscibili in quanto simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Un segnale **dispari** invece segue la relazione  $f(t) = -f(-t)$ .



Qualsiasi segnale può essere riscritto come composizione di segnali pari e dispari:

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

$$f_e(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \quad \text{even component}$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \quad \text{odd component}$$

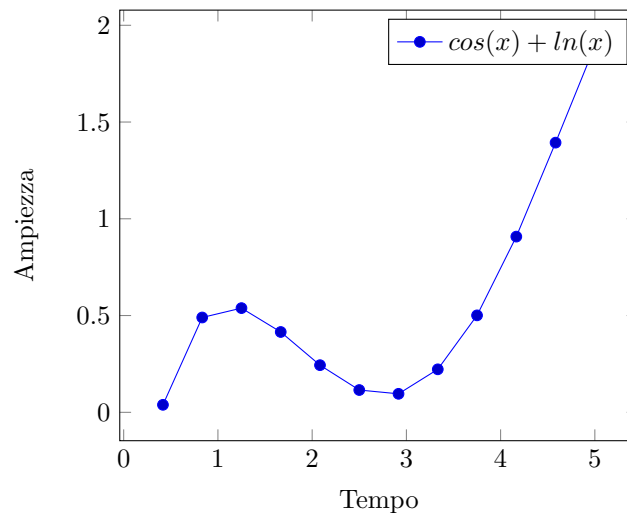
$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

Alcune proprietà delle funzioni pari e dispari:

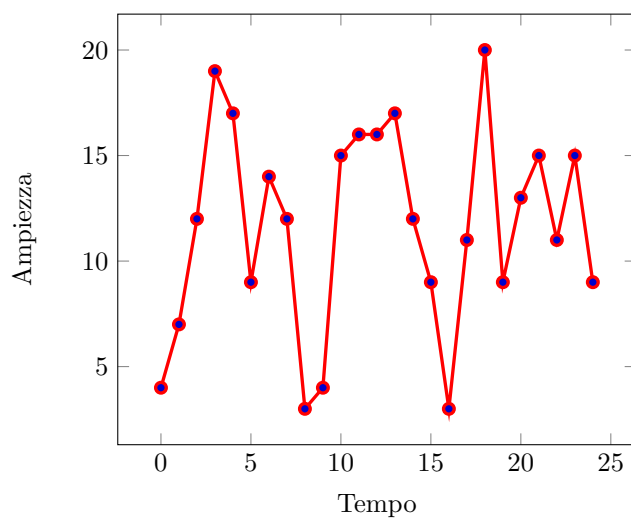
- Funzione pari  $\times$  Funzione dispari = Funzione dispari
- Funzione dispari  $\times$  Funzione dispari = Funzione pari
- Funzione pari  $\times$  Funzione pari = Funzione pari
- Area di una funzione pari:  
 $\int_{-a}^a f_e(t) dt = 2 \int_0^a f_e(t) dt$
- Area di una funzione dispari:  
 $\int_{-a}^a f_o(t) dt = 0$

### 1.3.6 Segnali deterministici e probabilistici

Un segnale **deterministico** è un segnale la cui *descrizione fisica* è nota a priori, per cui è possibile prevedere in ogni istante il valore del segnale mediante una formula matematica, una regola o una tabella. Per questo motivo è anche possibile calcolare i valori futuri dai valori passati senza alcuna incertezza sui valori di ampiezza.



Un segnale **probabilistico** invece è un segnale i cui valori di ampiezza non possono essere previsti con precisione, ma per i quali è solo possibile descrivere una probabilità, spesso basandosi sulla media di altri valori.



## 1.4 Caratteristiche dei segnali

Si definisce segnale di **lunghezza finita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *finito* di valori della variabile indipendente.

$$f = f(t), \quad \forall t : t_1 \leq t \leq t_2$$

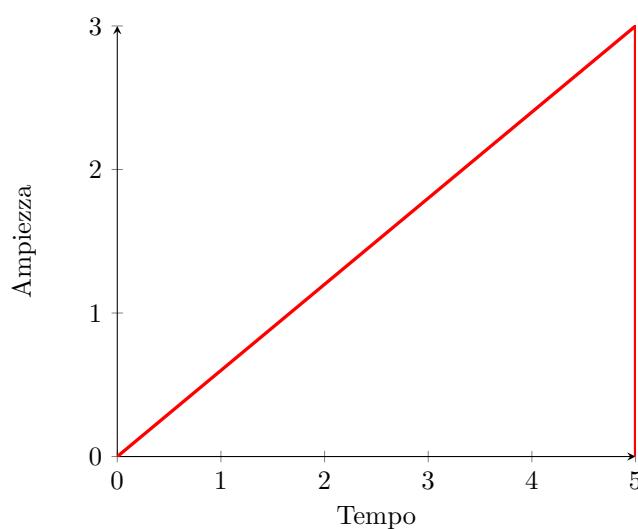
dove  $t_1 > -\infty, t_2 < +\infty$

Si definisce segnale di **lunghezza infinita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *infinito* di valori della variabile indipendente.

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

La **dimensione** di un segnale indica la larghezza o la forza di esso. Useremo il concetto di *norma* per quantificare questa nozione sia per segnali a tempo continuo che discreto.

L'area sotto la curva del segnale rappresenta l'**energia**.



L'**energia** di un segnale si calcola come:

$$E_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando  $0 < E_f < +\infty$  il segnale è detto **di energia**.

La **potenza** di un segnale si calcola come:

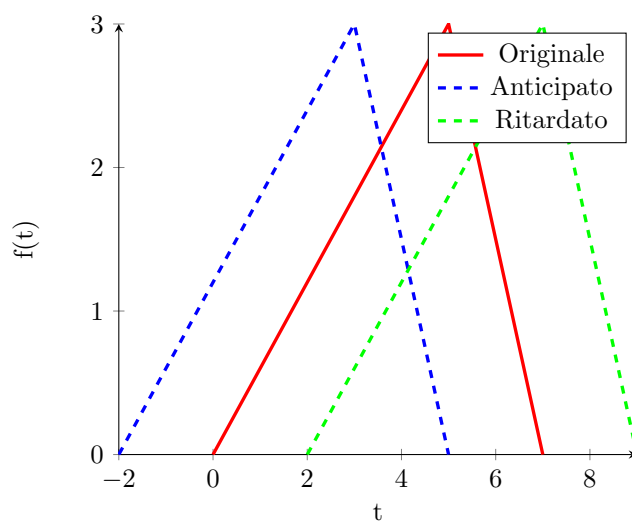
$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando  $0 < P_f < +\infty$  il segnale è detto **di potenza**.

La radice quadrata della potenza è detto **valore efficace**. Esso costituisce un parametro molto importante nella teoria dei segnali, alla base per esempio della definizione del **rapporto segnale/rumore**. Possono esistere segnali per i quali né l'energia né la potenza sono finiti. Tuttavia nella pratica i segnali hanno energia finita, per cui sono segnali di energia (risulta impossibile generare un vero e proprio segnale di potenza, in quanto questo richiederebbe durata infinita ed energia infinita).

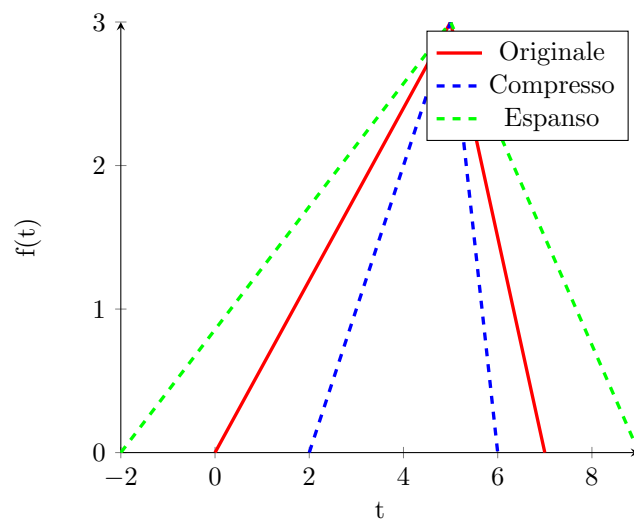
## 1.5 Operazioni sui segnali

- **Spostamento:** Anticipo o ritardo di un segnale

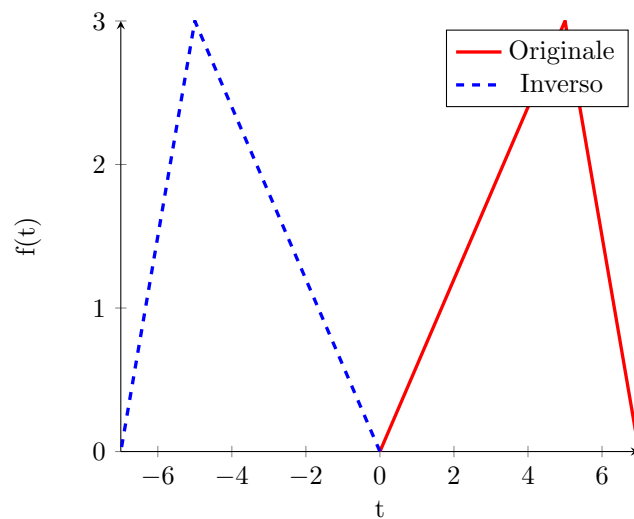


- **Scala:** Compressione o espansione di un segnale nel tempo





- **Inversione:** Simmetria rispetto all'asse verticale



## 1.6 Funzioni utili

- Funzione gradino unitaria

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Funzione rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \frac{t}{t_0} & \text{if } 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{if } t > t_0 \end{cases}$$

- Impulso unitario

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Funzione esponenziale

$$f(t) = Ae^{j\omega t}$$

Di seguito elenchiamo alcune delle proprietà fondamentali della funzione *impulso unitario*.

- Moltiplicazione di una funzione per l'impulso

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T)$$

- Proprietà del campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(0)\delta(t) dt = \phi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t - T) dt = \phi(T)$$

L'area sotto la curva ottenuta dal prodotto dell'impulso traslato di T e la funzione  $\varphi(t)$  è il valore ottenuto dalla funzione  $\varphi(t)$  per  $t = T$

- L'integrale dell'impulso è la funzione gradino

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t)$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

## 1.7 Sistemi lineari

Un sistema è caratterizzato da **input**, **output** e da un **modello matematico** del sistema. L'**analisi** di un sistema prevede di determinare l'output di un sistema dato l'input, mentre l'operazione inversa è la **sintesi** o **progettazione**.

Come per i segnali, anche i sistemi possono essere classificati in varie categorie:

- Lineari - Non lineari
- A parametri costanti - Parametri che cambiano nel tempo
- Istantanei (senza memoria) - Dinamici (con memoria)

- Causali - Non causali
- A tempo continuo - A tempo discreto
- Analogici - Digitali
- ...

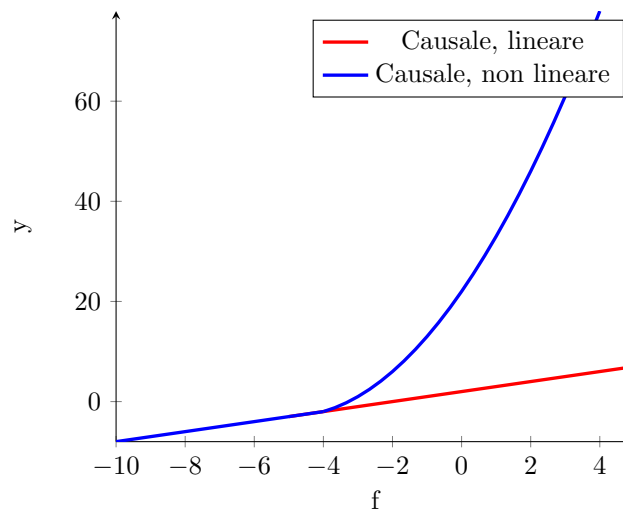
### 1.7.1 Proprietà dei sistemi lineari

Elenchiamo di seguito alcune proprietà dei sistemi lineari:

- **Additività**  
 $f_1 \rightarrow y_1$  e  $f_2 \rightarrow y_2$  allora  $f_1 + f_2 \rightarrow y_1 + y_2$
- **Omogeneità**  
 $f_1 \rightarrow y_1$  allora  $a_1 \times f_1 \rightarrow a_1 \times y_1$
- **Sovrapposizione**  
 $a_1 \times f_1 + a_2 \times f_2 \rightarrow a_1 \times y_1 + a_2 \times y_2$

### 1.7.2 Risposta libera e risposta forzata

La **risposta libera** di un sistema è la sua risposta quando l'ingresso è nullo. L'output di un sistema per  $t \geq 0$  è il risultato di due cause indipendenti: le **condizioni iniziali** del sistema al tempo  $t = 0$  e l'input  $f(t)$  per  $t \geq 0$ . Grazie alla *linearità* la risposta totale del sistema è la **somma** della risposta libera e della risposta forzata. Nella realtà abbiamo sistemi che sono lineari solo *localmente*, che in genere rispondono linearmente a piccoli segnali e non linearmente a grandi segnali.



I sistemi i cui parametri *non* cambiano nel tempo vengono detti **tempo invarianti**. Per questi sistemi se l'input viene ritardato di  $T$  secondi, l'output rimane identico a prima, ma ritardato di  $T$ .

I sistemi **istantanei** (senza memoria) sono quelli in cui l'output al tempo  $t$  dipende esclusivamente dall'input al tempo  $t$ . Se l'output dipende dagli eventi

passati, il sistema viene definito **dinamico** (un sistema con memoria). Un sottogruppo dei sistemi dinamici sono i sistemi con **memoria finita**, per i quali l'output al tempo  $t$  è completamente determinato dai segnali in input per gli ultimi  $T$  istanti (il sistema ha quindi una memoria di capacità massima  $T$ ).

## 2 Analisi dei sistemi a tempo continuo

Quando si studia un sistema, uno degli scopi più comuni è ricostruire le equazioni che lo regolano, permettendoci quindi di calcolare l'output del sistema dato un preciso input. Uno degli strumenti fondamentali per questo scopo è la **risposta impulsiva** del sistema, che caratterizza completamente il comportamento di un sistema lineare tempo invariante.

Per il calcolo della risposta impulsiva ci serve prima la **risposta libera**. Ricordiamo che trattandosi di sistemi lineari, valgono le proprietà di *additività*, *omogeneità* e *sovrapposizione*.

Un sistema lineare tempo invariante (LTI) può essere descritto da un'equazione differenziale:

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

in forma compatta

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

Nella pratica,  $m$  è sempre minore di  $n$ .

### 2.1 Calcolo della risposta libera

Nella teoria dei sistemi dinamici, la **risposta libera** o risposta ad ingresso nullo di un sistema dinamico, anche detta “risposta libera nello stato” in quanto interessa le variabili di stato del sistema, è la sua risposta quando l'ingresso è nullo, in modo che il comportamento del sistema dipende soltanto dalle condizioni iniziali. Nei sistemi lineari il principio di sovrapposizione stabilisce in particolare che è possibile scomporre l'uscita come la somma della risposta libera più la risposta forzata, quindi possiamo dividere il segnale di uscita  $v(t)$  come:

$$v(t) = \begin{cases} u(t) \neq 0, c.i. = 0 \\ u(t) = 0, c.i. \neq 0 \end{cases}$$

La risposta libera si calcola come:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0$$

All'equazione differenziale omogenea associamo un'equazione algebrica detta **equazione caratteristica** del sistema:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sono le  $r \leq n$  soluzioni distinte dell'equazione caratteristica, e  $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{N}$  rappresentano le rispettive molteplicità, ogni soluzione dell'omogenea, in particolare la risposta libera, può essere espressa nella forma:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$$

per opportuni  $c_{i,l} \in \mathbb{C}$ . Le soluzioni dell'omogenea del tipo  $e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , vengono dette **modi naturali**.

## 2.2 Calcolo della risposta impulsiva

La risposta impulsiva di un sistema è la sua uscita quando è soggetto ad un ingresso a **delta di Dirac**; viene utilizzata per descrivere la **risposta in frequenza** di un sistema dinamico ad una perturbazione generica. La delta di Dirac vista come “funzione” contiene equamente tutte le frequenze, e si presta particolarmente bene allo studio teorico nel dominio della frequenza di un sistema lineare.

Il comportamento ingresso-uscita di un sistema dinamico lineare stazionario (LTI) è completamente caratterizzato dalla sua risposta impulsiva, la cui trasformata di Laplace viene detta funzione di trasferimento del sistema LTI.

La risposta impulsiva, che denoteremo con  $h(t)$ , si calcola come:

$$h(t) = d_0 \delta(t) + \left( \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right) \delta_{-1}(t)$$

Notiamo che la risposta impulsiva contiene la risposta libera, ovvero tutti i modi naturali del sistema dopo l'impulso. Il termine  $d_0 \lambda(t)$