Appunti di Elaborazione di Segnali e Immagini

Matteo Iervasi

Indice

1 Introduzione

1.1 Che cos'è un segnale?

Si definisce **segnale** una qualsiasi grandezza fisica che varia nel tempo e trasporta informazione. In generale esistono diversi tipi di segnali, ma in natura sono quasi sempre casuali e continui.

Una prima grossa suddivisione della teoria dei segnali si basa sul tipo di segnale: i segnali **deterministici**, di cui è possibile predire il valore in un qualunque istante a piacere, e i segnali **stocastici** o **aleatori**, il cui valore non è prevedibile, ma su cui è possibile ottenere soltanto delle proprietà statistiche. Altra suddivisione è quella in segnali **continui** e **discreti**, ai quali si associano rispettivamente le comunicazioni *analogiche* e le comunicazioni *digitali*.

Parte della teoria dei segnali è profondamente connessa con la **teoria dei sistemi**, in quanto molti segnali transitano come input in sistemi che elaborano ovvero trasformano il segnale in ingresso restituendo in uscita un certo output.

1.2 Che cos'è un sistema?

Possiamo definire un **sistema** (dinamico) come un modello matematico che rappresenta un oggetto che evolve nel tempo.

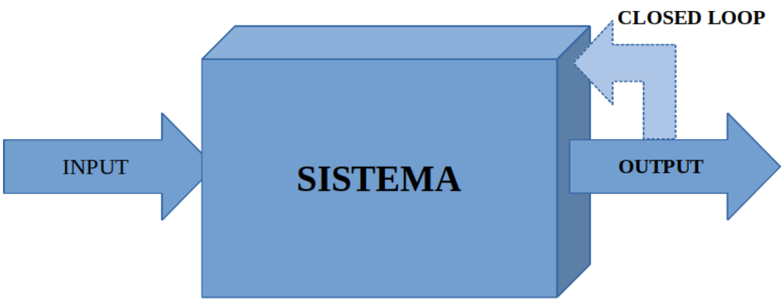

Figura 1.1: Schema di un sistema

1.3 Classificazione dei segnali

Come accennato prima, possiamo suddividere i segnali in diverse categorie:

- Continui nel tempo - Discreti nel tempo

- Analogici - Digitali
- Periodici - Aperiodici
- Causali e non causali
- Pari e dispari
- Deterministici - Casuali
- Segnali di energia - Segnali di potenza
- ...

È importante notare come le suddivisioni sopra elencate non siano esclusive tra loro, ci sono ad esempio segnali di potenza periodici, analogici e casuali, ecc.

1.3.1 Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

Un segnale si definisce **a tempo continuo** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri reali, ed è quindi specificato per ogni reale. Viceversa si definisce **discreto** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri naturali, ed è quindi specificato per valori discreti.

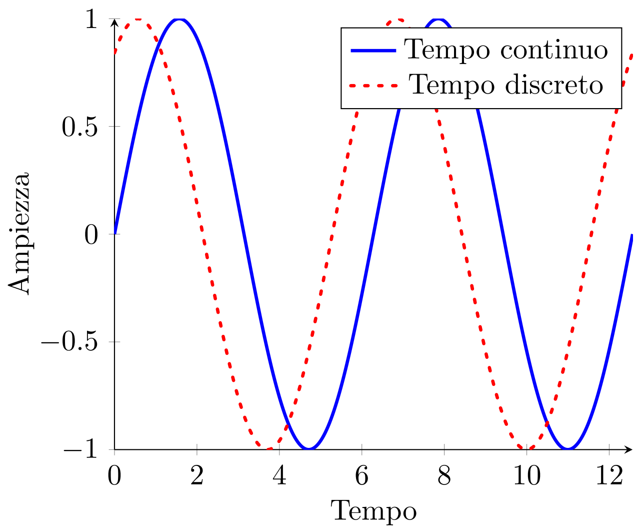

Figura 1.2: Due segnali sinusoidali, uno continuo e l'altro discreto

1.3.2 Segnali analogici e digitali

Se parlando del dominio abbiamo i segnali a tempo continuo e a tempo discreto, possiamo distinguere i segnali analogici e digitali guardando i valori assunti dal codominio. Quando l'ampiezza di un segnale può assumere qualsiasi valore in un intervallo continuo, parliamo di segnale **analogico**, viceversa quando assume solo un insieme finito di valori parliamo di segnale **digitale**. In quest'ultimo caso il segnale si dice "*quantizzato*".

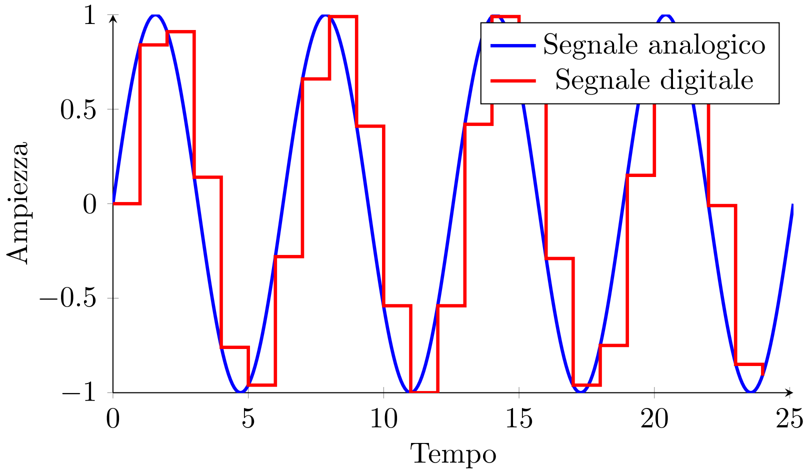

Figura 1.3: Confronto fra segnale analogico e digitale

1.3.3 Segnali periodici e aperiodici

Un segnale è **periodico** se esiste una costante positiva T_0 tale che

$$f(t + T_0) = f(t) \qquad \forall t$$

Il più piccolo valore di T_0 che soddisfa questa relazione è chiamato **periodo** della funzione. Un segnale periodico rimane invariato quando viene spostato nel tempo. Un esempio è la funzione seno, che ha un periodo di 2π (si veda la figura 1.2).

1.3.4 Segnali causali e non causali

I segnali **causali** assumono il valore 0 per $x < 0$, viceversa i segnali **anti-causali** valgono 0 per $x \geq 0$. I segnali **non causali** sono segnali il cui valore è diverso da 0 ambo i lati.

1.3.5 Segnali pari e dispari

Un segnale **pari** è un qualsiasi segnale f tale che $f(t) = f(-t)$. Questi segnali sono facilmente riconoscibili in quanto simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Un segnale **dispari** invece segue la relazione $f(t) = -f(-t)$.

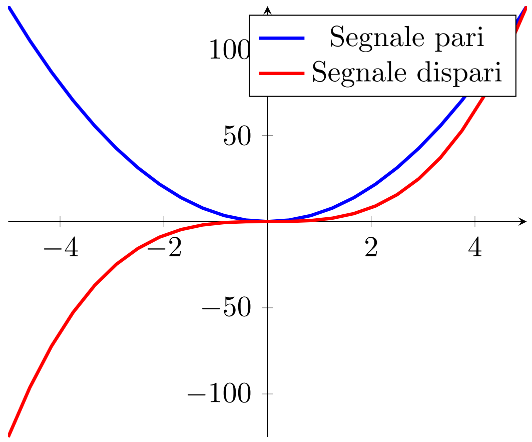

Figura 1.4: x^2 è un segnale pari, x^3 è dispari

Qualsiasi segnale può essere riscritto come composizione di segnali pari e dispari:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \\
f_e(t) &= \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \qquad \text{even component} \\
f_o(t) &= \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \qquad \text{odd component} \\
f(t) &= f_e(t) + f_o(t)
\end{aligned}$$

Alcune proprietà delle funzioni pari e dispari:

- Funzione pari · Funzione dispari = Funzione dispari
- Funzione dispari · Funzione dispari = Funzione pari
- Funzione pari · Funzione pari = Funzione pari
- Area di una funzione pari:
  $\int_{-a}^{a} f_e(t)dt = 2\int_0^a f_e(t)dt$
- Area di una funzione dispari:
  $\int_{-a}^{a} f_o(t)dt = 0$

1.3.6 Segnali deterministici e probabilistici

Un segnale **deterministico** è un segnale la cui *descrizione fisica* è nota a priori, per cui è possibile prevedere in ogni istante il valore del segnale mediante una formula matematica, una regola o una tabella. Per questo motivo è anche possibile calcolare i valori futuri dai valori passati senza alcuna incertezza sui valori di ampiezza. Un segnale **probabilistico** invece è un segnale i cui valori di ampiezza non possono essere previsti con precisione, ma per i quali è solo possibile descrivere una probabilità, spesso basandosi sulla media di altri valori.

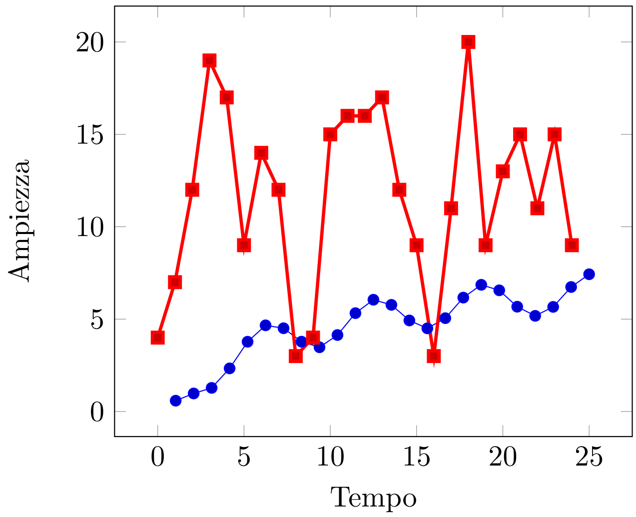

Figura 1.5: Il grafico blu è deterministico, il rosso è probabilistico

1.4 Caratteristiche dei segnali

Si definisce segnale di **lunghezza finita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *finito* di valori della variabile indipendente.

$$f = f(t), \quad \forall t : t_1 \leq t \leq t_2$$
$$\text{dove} \qquad t_1 > -\infty, t_2 < +\infty$$

Si definisce segnale di **lunghezza infinita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *infinito* di valori della variabile indipendente.

$$f(t) = sin(\omega t)$$

La **dimensione** di un segnale indica la larghezza o la forza di esso. Useremo il concetto di *norma* per quantificare questa nozione sia per segnali a tempo continuo che discreto. L'area sotto la curva del segnale rappresenta **l'energia**.

L'**energia** di un segnale si calcola come:

$$E_f = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando $0 < E_f < +\infty$ il segnale è detto **di energia**.

La **potenza** di un segnale si calcola come:

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando $0 < P_f < +\infty$ il segnale è detto **di potenza**.

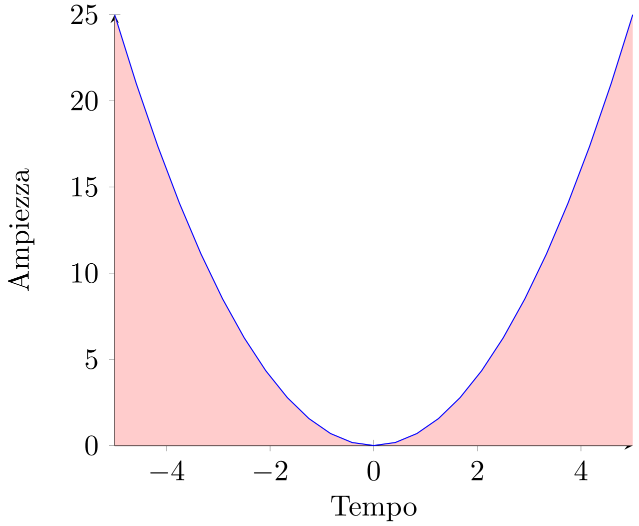

Figura 1.6: Energia del segnale

La radice quadrata della potenza è detto **valore efficace**. Esso costituisce un parametro molto importante nella teoria dei segnali, alla base per esempio della definizione del **rapporto segnale/rumore**. Possono esistere segnali per i quali né l'energia né la potenza sono finiti. Tuttavia nella pratica i segnali hanno energia finita, per cui sono segnali di energia (risulta impossibile generare un vero e proprio segnale di potenza, in quanto questo richiederebbe durata infinita ed energia infinita).

1.5 Operazioni sui segnali

- **Spostamento**: Anticipo o ritardo di un segnale
- **Scala**: Compressione o espansione di un segnale nel tempo
- **Inversione**: Simmetria rispetto all'asse verticale

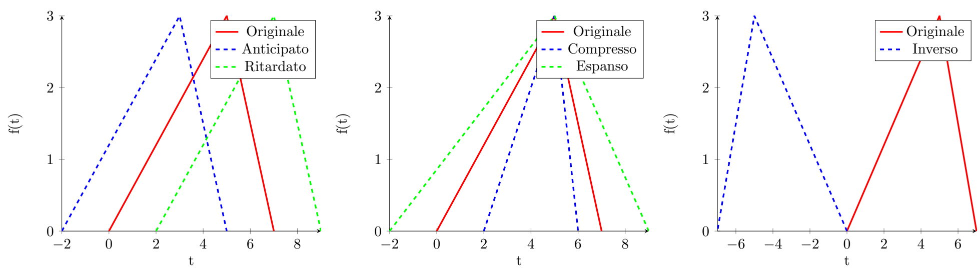

Figura 1.7: Spostamento, scala ed inversione

1.6 Funzioni utili

- Funzione gradino unitaria

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Funzione rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < 0 \\ \frac{t}{t_0} & \text{if} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{if} \quad t > t_0 \end{cases}$$

- Funzione esponenziale

$$f(t) = Ae^{j\omega t}$$

- Impulso unitario

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Di seguito elenchiamo alcune delle proprietà fondamentali della funzione *impulso unitario.*

- Moltiplicazione di una funzione per l'impulso

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$
$$\phi(t)\delta(t-T) = \phi(T)\delta(t-T)$$

- Proprietà del campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(0)\delta(t)dt = \phi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \phi(0)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t-T)dt = \phi(T)$$

L'area sotto la curva ottenuta dal prodotto dell'impulso traslato di T e la funzione $\varphi(t)$ è il valore ottenuto dalla funzione $\varphi(t)$ per $t = T$

- L'integrale dell'impulso è la funzione gradino

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

1.7 Sistemi lineari

Un sistema è caratterizzato da **input**, **output** e da un **modello matematico** del sistema. L'**analisi** di un sistema prevede di determinare l'output di un sistema dato l'input, mentre l'operazione inversa è la **sintesi** o **progettazione**. Come per i segnali, anche i sistemi possono essere classificati in varie categorie:

- Lineari - Non lineari
- A parametri costanti - Parametri che cambiano nel tempo
- Istantanei (senza memoria) - Dinamici (con memoria)
- Causali - Non causali
- A tempo continuo - A tempo discreto
- Analogici - Digitali
- ...

1.7.1 Proprietà dei sistemi lineari

Elenchiamo di seguito alcune proprietà dei sistemi lineari:

- **Additività**
  $f_1 \to y_1$ e $f_2 \to y_2$ allora $f_1 + f_2 \to y_1 + y_2$
- **Omogeneità**
  $f_1 \to y_1$ allora $a_1 \cdot f_1 \to a_1 \cdot y_1$
- **Sovrapposizione**
  $a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 \to a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2$

1.7.2 Risposta libera e risposta forzata

La **risposta libera** di un sistema è la sua risposta quando l'ingresso è nullo. L'output di un sistema per $t \geq 0$ è il risultato di due cause indipendenti: le **condizioni iniziali** del sistema al tempo $t = 0$ e l'**input** $f(t)$ per $t \geq 0$. Grazie alla *linearità* la risposta totale del sistema è la **somma** della risposta libera e della risposta forzata. Nella realtà abbiamo sistemi che sono lineari solo *localmente*, che in genere rispondo linearmente a piccoli segnali e non linearmente a grandi segnali.

I sistemi i cui parametri *non* cambiano nel tempo vengono detti **tempo invarianti**. Per questi sistemi se l'input viene ritardato di T secondi, l'output rimane identico a prima, ma ritardato di T.

I sistemi **istantanei** (senza memoria) sono quelli in cui l'output al tempo t dipende esclusivamente dall'input al tempo t. Se l'output dipende dagli eventi passati, il sistema viene definito **dinamico** (un sistema con memoria). Un sottogruppo dei sistemi dinamici

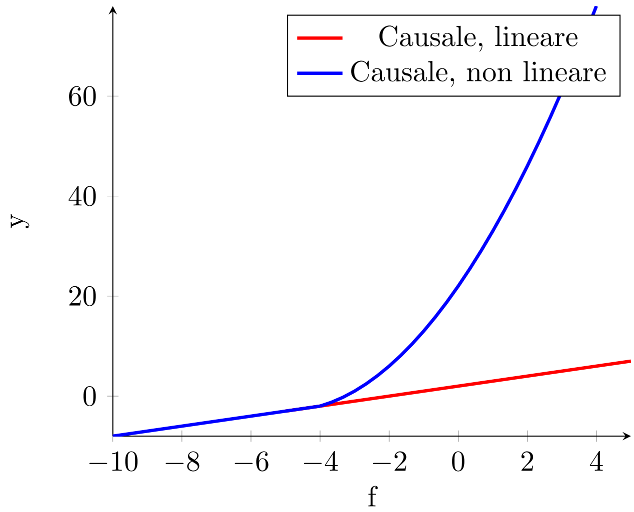

Figura 1.8: Differenza tra un lineare e un non lineare

sono i sistemi con **memoria finita**, per i quali l'output al tempo t è completamente determinato dai segnali in input per gli ultimi T istanti (il sistema ha quindi una memoria di capacità massima T).

2 Analisi dei sistemi a tempo continuo

Quando si studia un sistema, uno degli scopi più comuni è ricostruire le equazioni che lo regolano, permettendoci quindi di calcolare l'output del sistema dato un preciso input. Uno degli strumenti fondamentali per questo scopo è la **risposta impulsiva** del sistema, che caratterizza *completamente* il comportamento di un sistema lineare *tempo invariante*.

Per il calcolo della risposta impulsiva ci serve prima la **risposta libera**. Ricordiamo che trattandosi di sistemi lineari, valgono le proprietà di *additività*, *omogeneità* e *sovrapposizione*.

Un sistema lineare tempo invariante (LTI) può essere descritto da un'equazione differenziale:

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

in forma compatta

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \tag{2.1}$$

(nella pratica, m è sempre minore di n).

2.1 Risposta libera e risposta forzata

Nei sistemi lineari il principio di sovrapposizione stabilisce in particolare che è possibile scomporre l'uscita come la somma della risposta libera più la risposta forzata, quindi possiamo dividere il segnale di uscita $v(t)$ come:

$$v(t) = \begin{cases} u(t) \neq 0, c.i. = 0 \\ u(t) = 0, c.i. \neq 0 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione differenziale 2.1 in corrispondenza ad uno specifico ingresso e ad una specifica scelta delle c.i. può essere sempre ottenuta come somma di una soluzione dell'omogenea ad essa associata

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0 \tag{2.2}$$

e di una soluzione particolare della 2.1. L'equazione omogenea viene definita la **risposta libera** del sistema ($u(t) = 0$, $c.i. \neq 0$); la soluzione particolare a partire da $u(t) \neq 0$, $c.i. = 0$ è invece detta **risposta forzata**.

All'equazione differenziale omogenea associamo un'equazione algebrica detta **equazione caratteristica** del sistema:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0, \quad s \in C$$

Se $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sono le $r \leq n$ soluzioni distinte dell'equazione caratteristica, e $\mu_1, ..., \mu_r \in \mathbb{N}$ rappresentano le rispettive molteplicità, ogni soluzione dell'omogenea, in particolare la risposta libera, può essere espressa nella forma:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \tag{2.3}$$

per opportuni $c_{i,l} \in \mathbb{C}$. Le soluzioni dell'omogenea del tipo $e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}, t \in \mathbb{R}$, vengono dette **modi naturali**.

2.2 Stabilità

Supponiamo $\lambda \in \mathbb{R}$. Per $t \to +\infty$ l'esponenziale $e^{\lambda t}$ (e quindi il modo elementare $m(t) = \frac{t^l}{l!}, t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \text{se } \lambda > 0 & \text{diverge} \\ \text{se } \lambda = 0 & \begin{cases} \text{se } l = 0 & \text{limitato (o semplicemente stabile)} \\ \text{se } l > 0 & \text{divergente} \end{cases} \\ \text{se } \lambda < 0 & \text{converge} \end{cases}$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, il modo elementare $m(t) = \frac{t^l}{l!}, t \in \mathbb{R}$ è:

- convergente a zero per $t \to \infty \iff \mathbb{R}(\lambda) < 0$
- limitato (o semplicemente stabile) $\iff \mathbb{R}(\lambda) \leq 0$ e $l = 0$
- divergente per $t \to \infty$ in tutti gli altri casi

Un sistema è **asintoticamente stabile** se, per ogni scelta delle condizioni iniziali, l'evoluzione libera del sistema converge a zero asintoticamente, ovvero

$$\lim_{t \to +\infty} v_l(t) = 0$$

In altri termini un sistema è asintoticamente stabile *se e solo se* tutti i modi naturali $e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!}$ sono convergenti, ovvero se e solo se $Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$.

Inoltre un sistema è **BIBO stabile** (*"Bounded Input - Bounded Output"*) se, a partire da condizioni iniziali nulle, risponde (in evoluzione forzata) con uscita limitata ad ogni segnale di ingresso limitato. In altri termini se $v(0^-) = 0$, allora per ogni segnale $u(t), t \in \mathbb{R}$, nullo per $t < 0$, per il quale $\exists M_u$ *t.c.* $|u(t)| < M_u \ \forall t \geq 0$, la corrispondente uscita $v(t) = v_f(t)$ soddisfa $|v(t)| < M_v \ \forall t \geq 0$, per un opportuno M_v.

2.3 Risposta impulsiva

La risposta impulsiva di un sistema è la sua uscita quando è soggetto ad un ingresso a **delta di Dirac**; viene utilizzata per descrivere la **risposta in frequenza** di un sistema dinamico ad una perturbazione generica. La delta di Dirac vista come "funzione" contiene equamente tutte le frequenze, e si presta particolarmente bene allo studio teorico nel *dominio della frequenza* di un sistema lineare.

Il comportamento ingresso-uscita di un sistema dinamico lineare stazionario (LTI) è *completamente* caratterizzato dalla sua risposta impulsiva, la cui trasformata di Laplace viene detta **funzione di trasferimento** del sistema LTI.

La **risposta impulsiva**, che denoteremo con $h(t)$, si calcola come:

$$h(t) = d_0\delta(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right) \delta_{-1}(t) \tag{2.4}$$

Notiamo che la risposta impulsiva contiene la risposta libera, ovvero tutti i modi naturali del sistema dopo l'impulso. Il termine $d_0\delta(t)$ è non nullo se $m = n$ e indica il termine impulsivo. La risposta libera viene moltiplicata per la funzione gradino in modo da "tagliare" tutto ciò che c'era prima di $t = 0$ e garantire che le c.i. a $t = 0^-$ siano nulle.

2.4 Integrale di convoluzione

Date le funzioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, definiamo **integrale di convoluzione** di v_1 e v_2 la funzione definita come:

$$[v_1 * v_2](t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\tau) v_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t - \tau) v_2(\tau) d\tau \tag{2.5}$$

L'integrale di convoluzione gode delle seguenti proprietà:

- **Proprietà commutativa**:
  $f_1(t) \cdot f_2(t) = f_2(t) \cdot f_1(t)$
- **Proprietà distributiva**:
  $f_1(t) \cdot [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) \cdot f_2(t) + f_1(t) \cdot f_3(t)$
- **Proprietà associativa**:
  $f_1(t) \cdot [f_2(t) \cdot f_3(t)] = [f_1(t) \cdot f_2(t)] \cdot f_3(t)$
- **Spostamento**:
  $f_1(t) \cdot f_2(t) = c(t) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t - T) = c(t - T) \wedge f_1(t - T) \cdot f_2(t) = c(t - T) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f_1(t - T_1) \cdot f_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2)$
- **Moltiplicazione con l'impulso**:
  $f(t) \cdot \delta(t) = f(t)$

- **Proprietà della lunghezza**:
  se le lunghezze di $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono rispettivamente T_1 e T_2 allora la lunghezza di $f_1(t) \cdot f_2(t) = T_1 + T_2$.

La risposta in uscita del sistema 2.1 inizialmente a riposo, di risposta impulsiva $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$ in corrispondenza ad un segnale di ingresso $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ se esiste è espressa nella forma:

$$v(t) = [h * u](t) = \int_{0^-}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t^+} h(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$