Elaboration di Segnali e Immagini

Indice

1 Introduzione **2**
- 1.1 Che cos'è un segnale? 2
- 1.2 Che cos'è un sistema? 2
- 1.3 Classificazione dei segnali 2
  - 1.3.1 Segnali a tempo continuo e a tempo discreto 2
  - 1.3.2 Segnali analogici e digitali 3
  - 1.3.3 Segnali periodici e aperiodici 4
  - 1.3.4 Segnali causali e non causali 4
  - 1.3.5 Segnali pari e dispari 4
  - 1.3.6 Segnali deterministici e probabilistici 5
- 1.4 Caratteristiche dei segnali 6
- 1.5 Operazioni sui segnali 7
- 1.6 Funzioni utili 8
- 1.7 Sistemi lineari 9
  - 1.7.1 Sistemi lineari e non lineari 10

1 Introduzione

1.1 Che cos'è un segnale?

Si definisce **segnale** una qualsiasi grandezza fisica che varia nel tempo e trasporta informazione. In generale esistono diversi tipi di segnali, ma in natura sono quasi sempre casuali e continui.

Una prima grossa suddivisione della teoria dei segnali si basa sul tipo di segnale: i segnali **deterministici**, di cui è possibile predire il valore in un qualunque istante a piacere, e i segnali **stocastici** o **aleatori**, il cui valore non è prevedibile, ma su cui è possibile ottenere soltanto delle proprietà statistiche. Altra suddivisione è quella in segnali **continui** e **discreti**, ai quali si associano rispettivamente le comunicazioni *analogiche* e le comunicazioni *digitali*.

Parte della teoria dei segnali è profondamente connessa con la **teoria dei sistemi**, in quanto molti segnali transitano come input in sistemi che elaborano ovvero trasformano il segnale in ingresso restituendo in uscita un certo output.

1.2 Che cos'è un sistema?

Possiamo definire un **sistema** (dinamico) come un modello matematico che rappresenta un oggetto che evolve nel tempo.

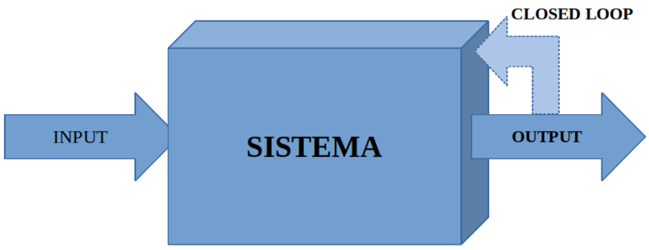


Figura 1: Schema di un sistema

1.3 Classificazione dei segnali

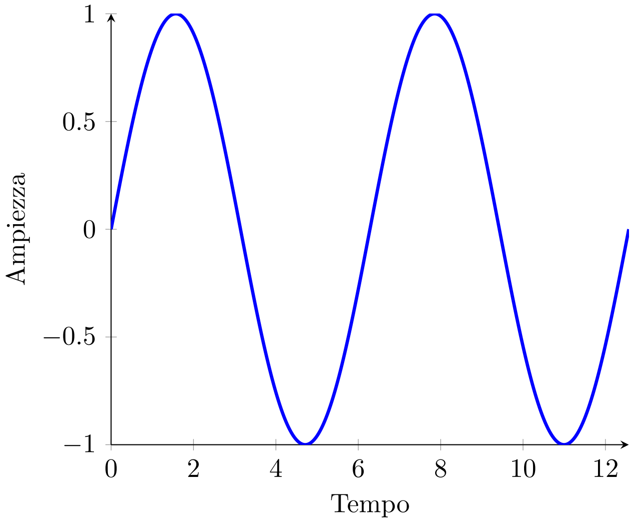
Come accennato prima, possiamo suddividere i segnali in diverse categorie:

- Analogici - Digitali
- Continui nel tempo - Discreti nel tempo
- Periodici - Aperiodici
- Deterministici - Casuali
- Segnali di energia - Segnali di potenza
- ...

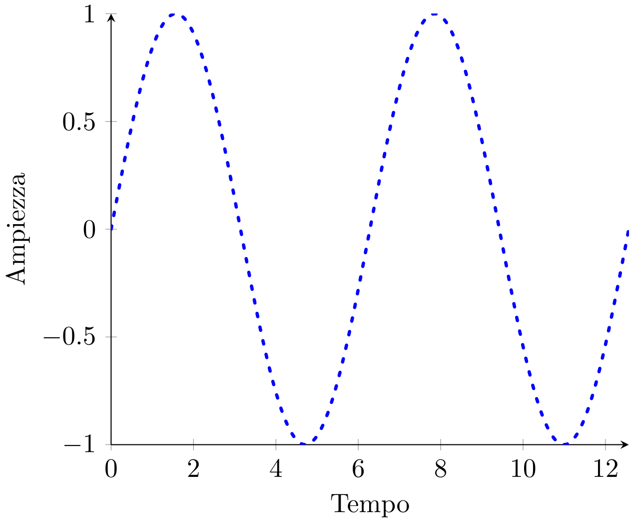
È importante notare come le suddivisioni sopra elencate non siano esclusive tra loro, ci sono ad esempio segnali di potenza periodici, analogici e casuali, ecc.

1.3.1 Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

Un segnale si definisce **a tempo continuo** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri reali, ed è quindi specificato per ogni reale.

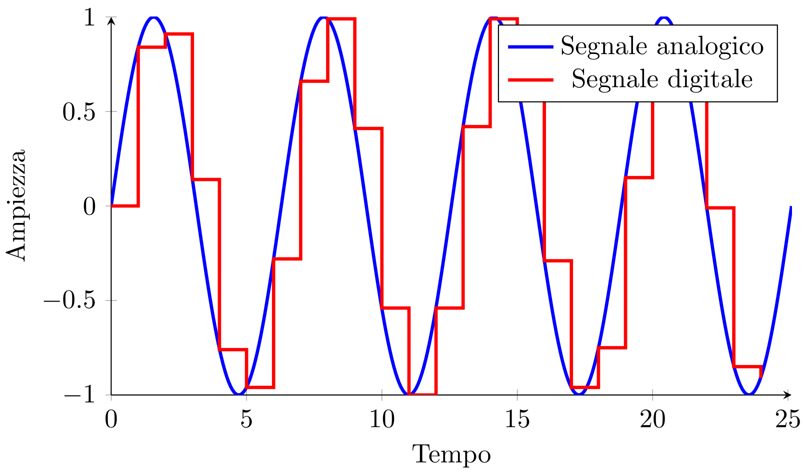


Un segnale si definisce **discreto** quando il suo dominio ha la stessa cardinalità dei numeri naturali, ed è quindi specificato per valori discreti.



1.3.2 Segnali analogici e digitali

Se parlando del dominio abbiamo i segnali a tempo continuo e a tempo discreto, possiamo distinguere i segnali analogici e digitali guardando i valori assunti dal codominio. Quando l'ampiezza di un segnale può assumere qualsiasi valore in un intervallo continuo, parliamo di **segnale analogico**, viceversa quando assume solo un insieme finito di valori parliamo di **segnale digitale**. In quest'ultimo caso il segnale si dice "*quantizzato*".



1.3.3 Segnali periodici e aperiodici

Un segnale è periodico se esiste una costante positiva T_0 tale che

$$f(t + T_0) = f(t) \qquad \forall t$$

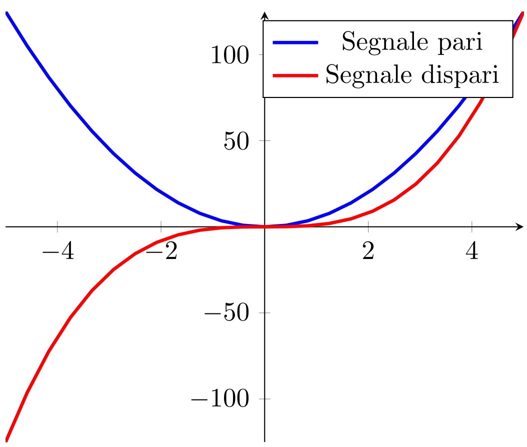
Il più piccolo valore di T_0 che soddisfa questa relazione è chiamato **periodo** della funzione. Un segnale periodico rimane invariato quando viene spostato nel tempo.

1.3.4 Segnali causali e non causali

I segnali **causali** assumono il valore 0 per $x < 0$, viceversa i segnali **anti-causali** valgono 0 per $x \geq 0$. I segnali **non causali** sono segnali il cui valore è diverso da 0 da ambo i lati.

1.3.5 Segnali pari e dispari

Un segnale **pari** è un qualsiasi segnale f tale che $f(t) = f(-t)$. Questi segnali sono facilmente riconoscibili in quanto simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. Un segnale **dispari** invece segue la relazione $f(t) = -f(-t)$.



Qualsiasi segnale può essere riscritto come composizione di segnali pari e dispari:

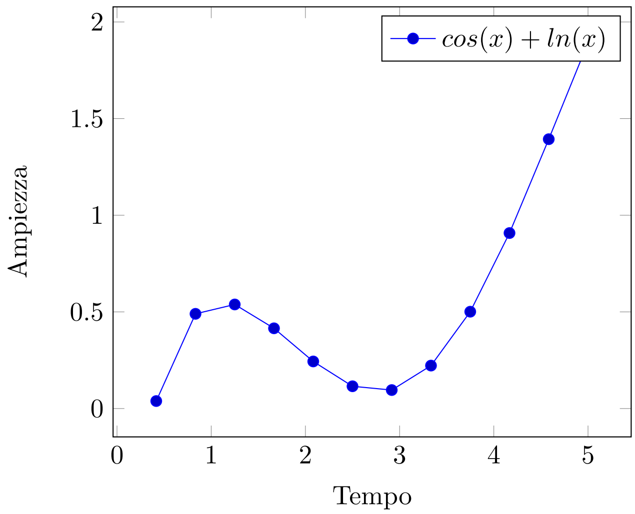
$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}(f(t)+f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t)-f(-t)) \\
f_e(t) &= \frac{1}{2}(f(t)+f(-t)) \qquad \text{even component} \\
f_o(t) &= \frac{1}{2}(f(t)-f(-t)) \qquad \text{odd component} \\
f(t) &= f_e(t) + f_o(t)
\end{aligned}
$$

Alcune proprietà delle funzioni pari e dispari:

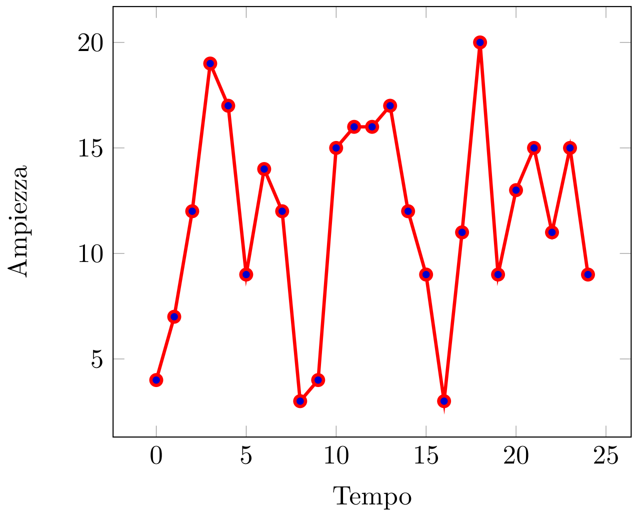
- Funzione pari $\times$ Funzione dispari = Funzione dispari
- Funzione dispari $\times$ Funzione dispari = Funzione pari
- Funzione pari $\times$ Funzione pari = Funzione pari
- Area di una funzione pari:
  $\int_{-a}^{a} f_e(t)dt = 2\int_0^a f_e(t)dt$
- Area di una funzione dispari:
  $\int_{-a}^{a} f_o(t)dt = 0$

1.3.6 Segnali deterministici e probabilistici

Un segnale **deterministico** è un segnale la cui *descrizione fisica* è nota a priori, per cui è possibile prevedere in ogni istante il valore del segnale mediante una formula matematica, una regola o una tabella. Per questo motivo è anche possibile calcolare i valori futuri dai valori passati senza alcuna incertezza sui valori di ampiezza.



Un segnale **probabilistico** invece è un segnale i cui valori di ampiezza non possono essere previsti con precisione, ma per i quali è solo possibile descrivere una probabilità, spesso basandosi sulla media di altri valori.



1.4 Caratteristiche dei segnali

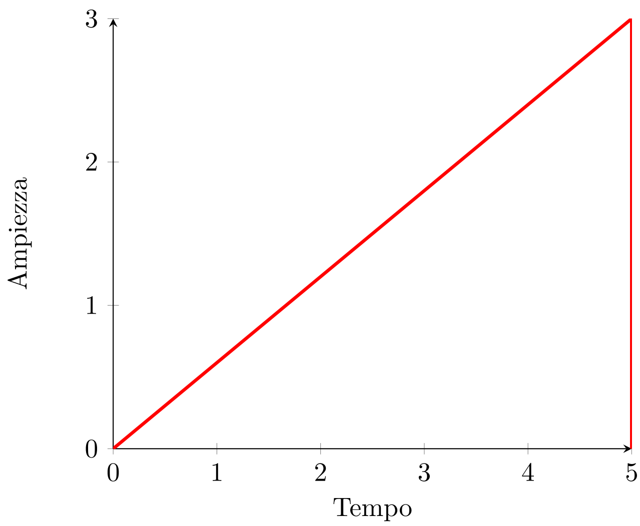
Si definisce segnale di **lunghezza finita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *finito* di valori della variabile indipendente.

$$f = f(t), \quad \forall t : t_1 \leq t \leq t_2$$
$$\text{dove} \qquad t_1 > -\infty, t_2 < +\infty$$

Si definisce segnale di **lunghezza infinita** un segnale i cui valori sono diversi da 0 per un intervallo *infinito* di valori della variabile indipendente.

$$f(t) = sin(\omega t)$$

La **dimensione** di un segnale indica la larghezza o la forza di esso. Useremo il concetto di *norma* per quantificare questa nozione sia per segnali a tempo continuo che discreto.
L'area sotto la curva del segnale rappresenta **l'energia**.



L'**energia** di un segnale si calcola come:

$$E_f = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando $0 < E_f < +\infty$ il segnale è detto **di energia**.

La **potenza** di un segnale si calcola come:

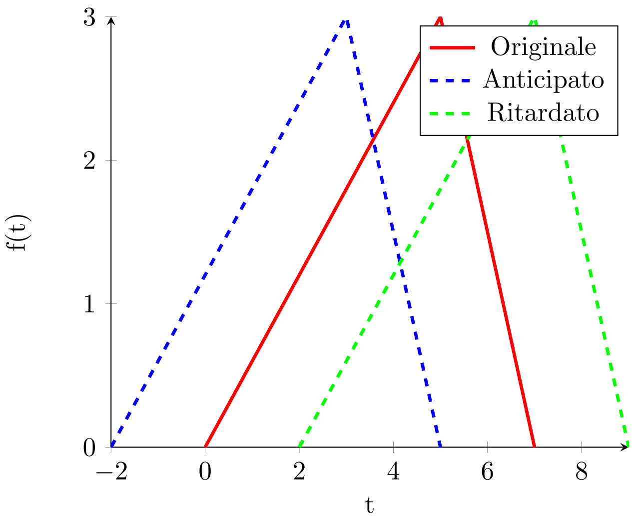
$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt$$

Quando $0 < P_f < +\infty$ il segnale è detto **di potenza**.

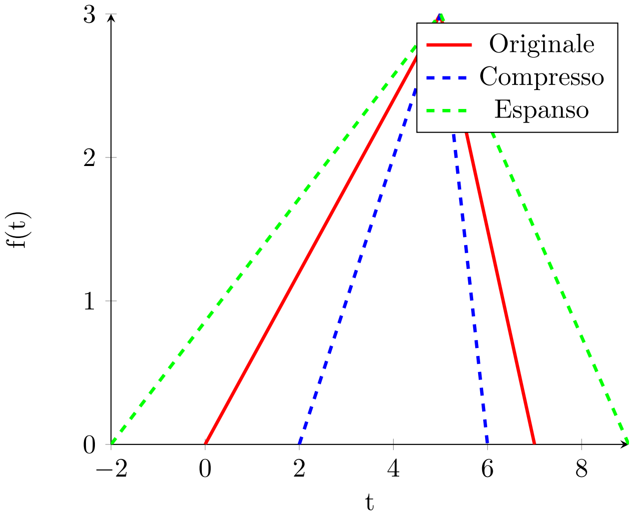
La radice quadrata della potenza è detto **valore efficace**. Esso costituisce un parametro molto importante nella teoria dei segnali, alla base per esempio della definizione del **rapporto segnale/rumore**. Possono esistere segnali per i quali né l'energia né la potenza sono finiti. Tuttavia nella pratica i segnali hanno energia finita, per cui sono segnali di energia (risulta impossibile generare un vero e proprio segnale di potenza, in quanto questo richiederebbe durata infinita ed energia infinita).

1.5 Operazioni sui segnali

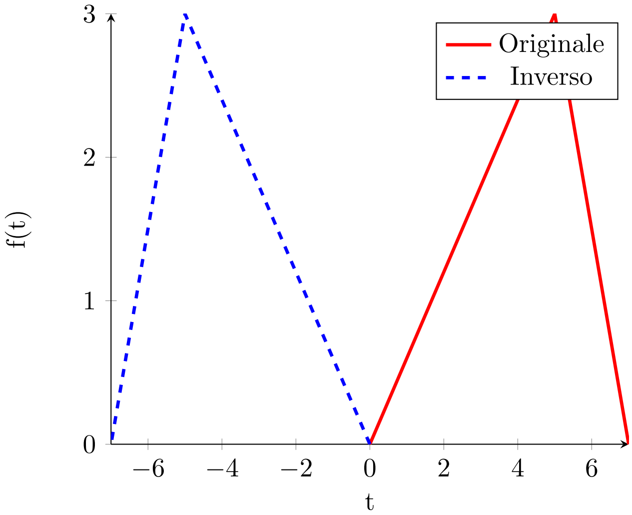
- **Spostamento**: Anticipo o ritardo di un segnale



- **Scala**: Compressione o espansione di un segnale nel tempo



- **Inversione**: Simmetria rispetto all'asse verticale



1.6 Funzioni utili

- Funzione gradino unitaria

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Funzione rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < 0 \\ \frac{t}{t_0} & \text{if} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & \text{if} \quad t > t_0 \end{cases}$$

- Impulso unitario

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Funzione esponenziale

$$f(t) = Ae^{j\omega t}$$

Di seguito elenchiamo alcune delle proprietà fondamentali della funzione *impulso unitario*.

- Moltiplicazione di una funzione per l'impulso

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$
$$\phi(t)\delta(t-T) = \phi(T)\delta(t-T)$$

- Proprietà del campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(0)\delta(t)dt = \phi(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \phi(0)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t-T)dt = \phi(T)$$

  L'area sotto la curva ottenuta dal prodotto dell'impulso traslato di T e la funzione $\varphi(t)$ è il valore ottenuto dalla funzione $\varphi(t)$ per $t = T$

- L'integrale dell'impulso è la funzione gradino

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$$

  Quindi

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

1.7 Sistemi lineari

Un sistema è caratterizzato da **input**, **output** e da un **modello matematico** del sistema. L'**analisi** di un sistema prevede di determinare l'output di un sistema dato l'input, mentre l'operazione inversa è la **sintesi** o **progettazione**.

Come per i segnali, anche i sistemi possono essere classificati in varie categorie:

- Lineari - Non lineari
- A parametri costanti - Parametri che cambiano nel tempo
- Istantanei (senza memoria) - Dinamici (con memoria)

- Causali - Non causali
- A tempo continuo - A tempo discreto
- Analogici - Digitali
- ...

1.7.1 Sistemi lineari e non lineari

Elenchiamo di seguito alcune proprietà dei sistemi lineari:

- **Additività**
  $f_1 \to y_1$ e $f_2 \to y_2$ allora $f_1 + f_2 \to y_1 + y_2$
- **Omogeneità**
  $f_1 \to y_1$ allora $a_1 \times f_1 \to a_1 \times y_1$
- **Superposizione**[1]
  $a_1 \times f_1 + a_2 \times f_2 \to a_1 \times y_1 + a_2 \times y_2$

[1] Non sono sicuro di come tradurre questa parola, la prof usa la parola "superposition"