机械波速-弦音背后的物理

制作：科学社团

弦中的机械波

当我们拨动琴弦时，高低不同的音符传入我们耳中，是什么决定了弦音的音高？

理论推导

设弦内在 t 时，x 米处高度为 h

受到的垂直拉力为 $T_\perp = \frac{\partial h}{\partial x}T$

长度为 dx 的弦受到的合力为 $F = \frac{\partial T_\perp}{\partial x}\cdot dx = T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dx$

根据牛顿第二定律：$F = ma = (\lambda dx)\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$

于是 $T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dx = \lambda\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}dx \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{T}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$

$h = A\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\cdot\omega x + \omega t + \theta_0\right)$

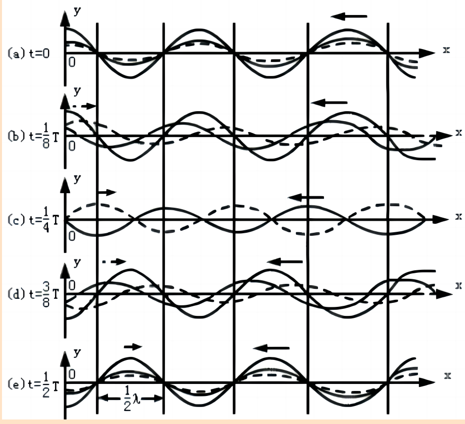
取最低共振频率n=1

驻波

两个频率相同，振幅相同，传播方向相反的正弦波线性叠加的产物

三角函数和差化积后可看作振幅被位置限制，只随时间震动的波

在驻波的波节振幅为0，当弦的两端被限制住时，产生的波为驻波



波数 k=$\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\cdot\omega$

波速 $v = \frac{\omega}{\kappa} = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$

驻波可以被看成两个频率相同，振幅相同，方向相反的正弦波的线性叠加。

对于驻波：$h = A\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\cdot\omega x + \omega t\right) - A\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\cdot\omega x - \omega t\right) = -2A\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\cdot\omega x\right)\sin(\omega t)$

根据驻波的特性，当 x 取 0 和 L 时，h=0

因此 $\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\cdot\omega t = n\pi$

故 $\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}}$

T:拉力	x:横轴距离
λ:线密度	ω:角频率
θ_0:相位角	n:任意正整数
L:有效弦长	

实验测量

实验流程：

1.用电子秤测出弦的质量m，将弦的一头固定，另一头绑在测力计上，用米尺测出有效弦长L。

2.拉弹簧测力计直到弦被拉直并记录弹簧测力计上面的数值T。

3.在弦的1/2位置轻轻拨动，保证它发出的声音能被检测到即可，尽可能避免压缩波和泛音的出现。

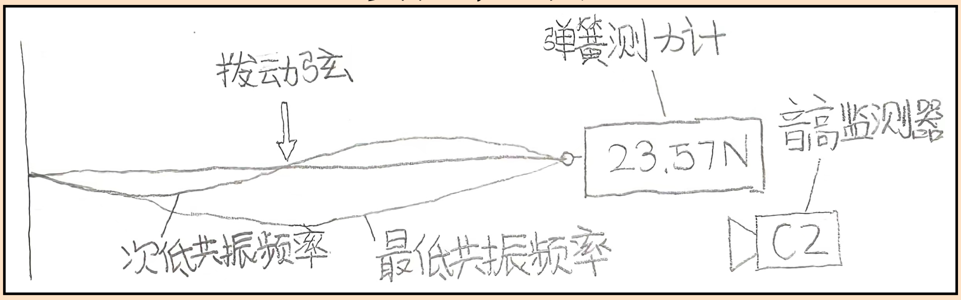
4.用手机调音器软件测出音高，使用国际音高频率表计算频率f。

以一组实验数据为例，T=23.57N L=87.6cm m=1.52g

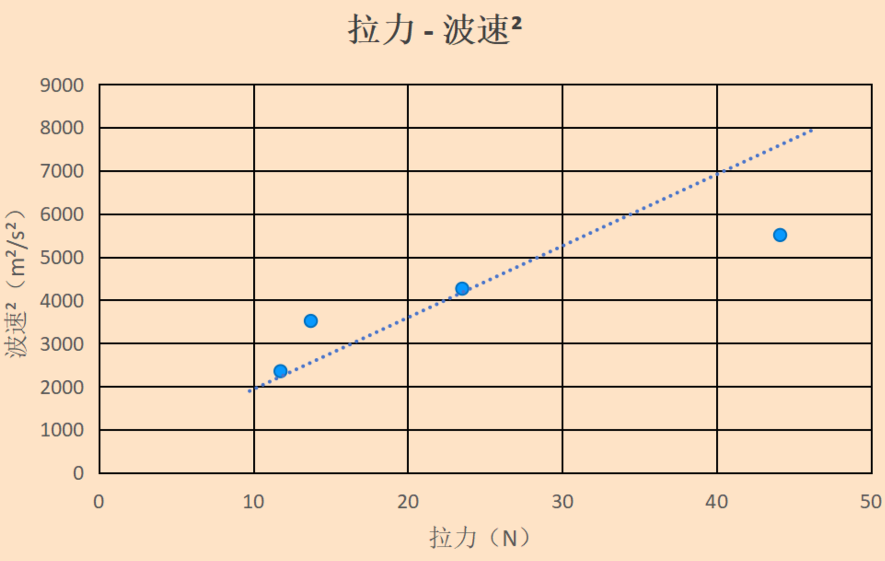
λ=m/L=1.74g/m 理论频率f=(1/2L)sqrt(T/λ)=66.52Hz

测量得出最低共振音高为C2，对应频率为66Hz，与预测值吻合

实验布置图



为了增加实验数据的可信度，实验被重复了40次，其中拉力T取12.01N, 13.42N, 23.57N, 44.05N分别重复了10次实验。其中23组实验数据为最低共振频率，其余为泛音



有效弦长一定为驻波波长的整数倍，sn=L　n为任意正整数

在最低共振频率下 n=1，波长等于有效弦长 s=L

波速$c = sf = L\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}$　$\boxed{c^2 = \frac{T}{4\lambda}}$

带入数值，得 $c^2=144(m/kg)\cdot T$

将23组取最低共振频率的实验数据与理论预测进行对比，得到

$\boxed{\text{标准差仅为}1349(m/s)^2}$

误差分析：泛音

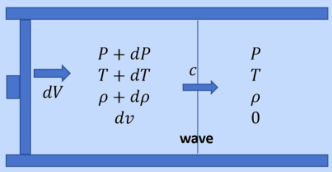
一种音乐现象，指拨动弦之后产生的杂音，即声波中处于非最低共振频率的振幅分量。其波长为最低波长的整数分之一，频率为最低频率的整数倍，因此音高更高。在实验中，有17组数据为泛音

T=13.42N时各个频率的声波被检测到的次数

	频率	音高	次数
最低共振频率(n=1)	60Hz	B1	4
n=2	120Hz	B2	6
n=3	180Hz	F2	0

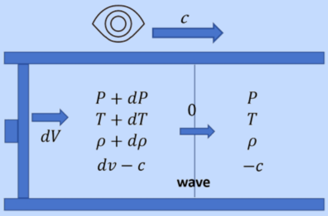
空气中的机械波

当我们拨动琴弦后数毫秒，音符才传入我们耳中，是什么决定了弦音的速度?



- 声波传播速度假设为c
- 波前 (右侧) 为没受到干扰的空气 P 压强；T 温度；ρ 密度；0 速度
- 波后 (左侧) 为已受到干扰的空气 $P+dP$ 压强；$T+dT$ 温度；$\rho+d\rho$ 密度；dv 速度

现在我们转换坐标系，从地面坐标系转换到跟随声波的惯性系



注意这里只有速度的变化

1. 进出物质量守恒

$$n_{in}=n_{out}\Rightarrow m_{in}=m_{out}$$
$$\frac{d}{dt}(m_{in})=\frac{d}{dt}(m_{out})$$
$$\rho S(-c)=(\rho+d\rho)S(dv-c)$$

化简并忽略高阶无穷小量

$$\boxed{c\cdot d\rho=\rho\cdot dv}$$

2. 动量定理 (牛顿第二定律微分形式)

$$\sum F=\frac{dp}{dt}$$
$$F_{右}-F_{左}=\frac{d}{dt}(mv)$$
$$\begin{cases} F_{右}-F_{左}=PS-(P+dP)S \\ \frac{d}{dt}(mv)=\rho Sc(-c)-\rho Sc(dv-c) \end{cases}$$

带入并化简

$$\boxed{dP=\rho\cdot c\cdot dv}$$

3. 理想气体近似

$$U=f(T)^{[1]}\Rightarrow\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$
$$C_P=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P=\left(\frac{\partial(U+PV)}{\partial T}\right)_P$$
$$C_V=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial(U+PV)}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$
$$C_P-C_v=\left(\frac{\partial(U+PV)}{\partial T}\right)_P-\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

化简得:

$$C_P-C_V=P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

根据理想气体状态方程 $PV=nRT$:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{nR}{P}$$

因此,

$$\boxed{C_P-C_V=nR}$$

4. 绝热系统近似

$$\begin{cases} dU+PdV=0 \\ PV=nRT \\ C_P-C_V=C_v\left(\frac{C_P}{C_{arr}}-1\right)=nR \end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases} C_VdT=-PdV \\ PdV+VdP=nRdT \\ C_P-C_V=(\gamma-1)C_V=nR \end{cases}$$
$$PdV+VdP=(\gamma-1)C_VdT=(1-\gamma)PdV$$

化简得:

$$\frac{dP}{P}+\gamma\frac{dV}{V}=0$$

因此,

$$PV^{\gamma}=const\Rightarrow P\rho^{-\gamma}=const$$

两边求导

$$\rho^{-\gamma}dP-P\gamma\rho^{-r-1}d\rho=0$$

化简得到:

$$\boxed{\frac{dP}{d\rho}=\gamma\frac{P}{\rho}}$$

$$\boxed{c=\sqrt{\frac{dP}{d\rho}}}$$

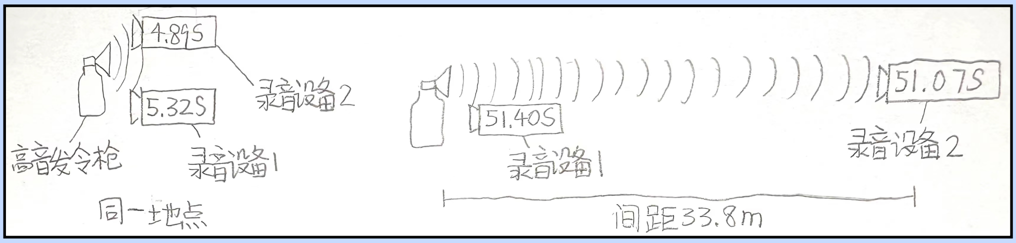
$$\boxed{c=\sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}}=\sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}}$$

$$\gamma=1.40$$
$$P=1.03525*10^5\ Pa$$
$$\rho=1.225\ kg\cdot m^{-3}$$

实验测量

实验流程:
1.启动两个录音设备，它们可以记录时间和声音，这里我们使用的是苹果手机的语音备忘录。
2.时间校准—在同一地点使用高压发令枪发出巨大的声音，录音设备会同时检测到声音，对比录音中监测到声音的时间即可消除录音设备记录时间的误差。
3.测量声速—将两个录音设备间隔L(米)，保证两者连线内无遮挡物，在一个录音设备所在地点使用高压发令枪发出声音，近处的录音设备会立刻检测到声音，而远处的录音设备会在t(秒)后检测到声音。

实验布置图



-以一组实验数据为例，时间校准阶段时录音设备检测到响声的时间分别为：5.32s/4.89s，而它们是同时检测到响声的，说明第二个录音设备的计时器相对第一个录音设备的计时器提前了5.32s-4.89s=0.43s
-而在将它们间隔L=33.8m后再记录检测到响声的时间，分别为：51.40s/51.07s。时间差为：51.40s-51.07s=0.33s 去除设备计时器错位的影响后，净时间为：t=0.43s-0.33s=0.10s
于是实验声速为v=L/t=33.8m/0.10s=338(m/s)

为了增加实验数据的可信度，实验被重复了24次，其中距离L取33.8m-62.8m分别重复了12次实验。为避免录音设备有故障或误差，我们使用两组录音设备分别重复了12次实验。最终对24组数据计算平均值和标准差。平均值为266m/s 标准差为74.4m/s，实际声速340m/s在实验声速的一个标准差内，验证了实验数据的信度较高。

最终测得:

实验声速	实验标准差	实际声速	理论声速
266m/s	74.4m/s	340m/s	344m/s

制作：张惟行、刘子杰、邓家旗