

基于单位四元数的四旋翼无人直升机几何控制

安宏雷¹, 李杰¹, 马宏绪¹, 陈克伟²

1. 国防科学技术大学机电工程与自动化学院, 长沙 410072

E-mail: eric_nudt@163.com

2. 装甲兵工程学院控制工程系, 北京 100072

E-mail: chenkewei03@163.com

摘要: 四旋翼无人直升机具有悬停飞行的能力, 可垂直起降, 在军用和民用领域中都有广泛的应用前景。几何控制中流形概念的引入一方面通过抛弃局部坐标的使用避免了算法奇异性, 另一方面也为控制问题的求解提供了一种独特的视角。本文基于单位四元数建立了四旋翼无人直升机的全局动力学模型, 提出的新的四旋翼位置稳定控制算法。这一在微分几何框架下设计的算法不存在传统算法的奇异性问题, 同时由于应用了单位四元数, 使得算法相比传统的基于姿态矩阵的控制算法更加简洁、快速、易于实现。

关键词: 单位四元数, 四旋翼, 几何控制

Quaternion Based Geometric Control of Quadrotor UAV

AN Honglei¹, LI Jie¹, MA Hongxu¹, CHEN Kewei²

1. College of Electro-Mechanical Engineering & Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410072, China

E-mail: eric_nudt@163.com

2. Department of Control Engineering, Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, China

E-mail:

Abstract: Quadrotor with the ability of hovering and vertical take-off and landing (VTOL) has a great potential for applications in military and civil fields. Algorithm singularity is avoided by introducing the concept of manifold in geometric control which provides unique insights to control theory that cannot be obtained from dynamic models represented using local coordinates. In this paper, the dynamics of the quadrotor are expressed globally based on quaternion algebra. A new stabilizing method with hierarchical control structure is proposed. The proposed method avoids the problem of algorithm singularity in the frame of geometric control and show compactness and brevity by introducing quaternion algebra.

Key Words: Quaternion, Quadrotor, Geometric Control

1 引言

无人垂直起降 (VTOL) 飞行器具有“伪静态”飞行 (悬停和近悬停状态) 能力, 从其概念诞生之日起就受到了极大关注。由于其独特的飞行特性, 垂直起降飞行器可以应用于室内和户外的各种任务中。与传统垂直起降飞行器相比, 如直升机, 四旋翼具有更大的推力重量比 (Thrust Weight Ratio) 和更简单的机械结构, 是一种极具潜力的垂直起降无人飞行器, 激发了研究人员极大的兴趣和热情。

四旋翼飞行器是一个典型的欠驱动系统, 具有6自由度输出 (3自由度姿态和3自由度位置), 但仅仅使用4自由度输入 (4个螺旋桨的推力)。为了实现对四旋翼飞行器的控制, 各种线性算法[1]和非线性算法[2-4]都先后被应用到其控制器的设计中。由于四旋翼飞行器的欠驱动特性, 这些算法中大多采用了分层结构。由于四旋翼飞行器是一个具有强非线性和耦合的系统, 传统的控制方法往往仅在悬停假设条件下有效, 因此许多文献都致力于改善四旋翼飞行器的控制性能。这方面的努力主要有两个方向: 一是从构建更

为复杂准确的四旋翼飞行器动力学方程出发来消除不确定因素的影响[5]; 二是使用高等非线性控制理论对控制器进行分析与设计[6]。但这两个方向的努力仍然面临着算法奇异性无法消除和算法复杂度上升的困难。

近年来, 几何控制方法[7]开始被引入到飞行控制系统的设计中。四旋翼飞行器的姿态空间 $SO(3)$ 是一个流形, 描述这一流形的参数主要有姿态矩阵、罗德里格斯参数 (角度/特征轴参数) 和欧拉参数 (单位四元数) [9]。其中, 单位四元数代数为描述 $SO(3)$ 提供了一个简洁和有力的框架。早在上世纪90年代, 研究人员就把单位四元数应用在卫星姿态控制[8]和机器人操作臂的控制[10]中, 取得了很好的效果。流形概念的应用一方面通过抛弃局部坐标的使用避免了算法奇异性, 另一方面也为控制问题的求解提供了一种独特的视角。

本文在微分几何的框架下分析和设计四旋翼飞行器的稳定控制器。第二部分首先讨论了单位四元数

运动学，这是四旋翼飞行器建模和控制分析的基础。第三部分建立了四旋翼飞行器在位形流形上的动力学全局表达式。表达式中使用单位四元数描述姿态，因此在大范围机动时不会出现奇异性。第四部分基于分层控制策略和单位四元数，在文[8,11]中姿态控制算法的基础上设计了四旋翼飞行器的位置稳定控制器。与使用姿态矩阵的传统几何控制相比，本文提出的算法更加简洁，易于实现。第五部分给出的仿真结果表明整个控制算法有效实现了四旋翼飞行器的位置稳定控制。

2 单位四元数运动学

定义：一个单位四元数 \bar{q} 是一个模恒为一的复数，可以被看作单位球面 S^3 上的点：

$$\bar{q} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (1)$$

令 \bar{v} 表示其向量部分，即 $\bar{v} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ，则单位四元数可写为下面的形式

$$\bar{q} = [a_0, \bar{v}] \quad (2)$$

给定一个单位四元数，该单位四元数与旋转变换有如下对应关系：

$$R(a_0, \bar{v}) = (a_0^2 - \bar{v}^T \bar{v})I + 2a_0 S(\bar{v}) + 2\bar{v}\bar{v}^T \quad (3)$$

其中

$$S(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

注意到， $R(a_0, \bar{v}) = R(-a_0, -\bar{v})$ ，因此单位四元数表示的单位球面 S^3 是 $SO(3)$ 的双覆盖。使用单位四元数的角度形式将更清楚的看到这一问题。欧拉定理表明，空间中任意一个旋转变换都可以通过绕一个特征轴 \bar{n} （单位矢量）旋转一个角度 θ 得到，该变换对应的单位四元数为：

$$\bar{q} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\bar{n}) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

可以直观的看到，一个绕一个特征轴 \bar{n} 旋转一个角度 θ 的变换总可以通过绕特征轴 $-\bar{n}$ 反向旋转 $2\pi - \theta$ 实现。

单位四元数的共轭运算为：

$$\bar{q}^* = (a_0, -\bar{v}) \quad (5)$$

给定两个单位四元数 $\bar{q}_1 = (a_{01}, \bar{v}_1)$ 和 $\bar{q}_2 = (a_{02}, \bar{v}_2)$ ，定义单位四元数乘法 \otimes ：

$$\bar{q}_1 \otimes \bar{q}_2 = \begin{bmatrix} a_{01}a_{02} - \bar{v}_1^T \bar{v}_2 \\ a_{01}\bar{v}_2 + a_{02}\bar{v}_1 + S(\bar{v}_1)\bar{v}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

单位四元数乘法与旋转矩阵乘法是等价的。若 \bar{q}_1 和 \bar{q}_2 分别对应 $SO(3)$ 中的旋转矩阵 R_1 和 R_2 ，有如下对应关系：

$$R_1 R_2 \Leftrightarrow \pm \bar{q}_1 \otimes \bar{q}_2$$

$$R_1 \bar{v} \Leftrightarrow \bar{q}_1 \otimes \bar{v} \otimes \bar{q}_1^*$$

$$\text{其中，} \bar{v} = (0, \bar{v}^T)^T$$

当物体以角速度向量 \bar{w} 旋转时，以单位四元数表示的物体姿态变化的时间导数由四元数传导法则（Quaternion Propagation Rule）给出：

$$\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \bar{q} \otimes \bar{w} \quad (7)$$

3 动力学模型

为了建立四旋翼飞行器系统的动力学方程，必须首先建立坐标系。本文使用两个坐标系，即惯性坐标系和体坐标系。如图1所示，体坐标系 $O_b - X_b Y_b Z_b$ 中心位于飞行器十字梁的交叉处， X 轴方向指向一号螺旋桨， Z 轴方向垂直十字梁平面， Y 轴与 Z 轴和 X 轴成右手坐标系。

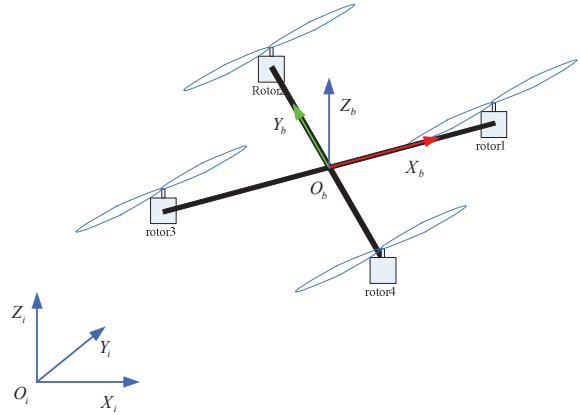


图1 四旋翼飞行器坐标系

四旋翼飞行器动力学模型的建立基于三个假设：首先，飞行器除螺旋桨高速旋转外，其余均固连在一起，而螺旋桨质量很轻可以忽略不计，因此假设飞行器机体是一个刚体；其次，不考虑飞行器机构设计和安装的微小误差，认为飞行器机体是对称分布的；最后，假设四旋翼飞行器进行低速飞行，不考虑强风对飞行器的阻力。

基于刚体假设，可以基于牛顿-欧拉方程和四元数运动学建立下面的数学模型，用以验证控制器的有效性：

$$\begin{aligned} m\dot{\bar{v}}_b &= \bar{q}^* \otimes (m\bar{g}) \otimes \bar{q} + \bar{F} - \bar{w}_b \times \bar{v}_b \\ I\dot{\bar{w}}_b &= \bar{M} - \bar{w}_b \times (I\bar{w}_b) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{p}} &= \bar{q} \otimes \bar{v}_b \otimes \bar{q}^* \\ \dot{\bar{q}} &= \frac{1}{2} \bar{q} \otimes \bar{w}_b\end{aligned}\quad (9)$$

模型中 \bar{p} 表示体坐标系中心在惯性坐标系中的位置矢量, \bar{q} 则表示体坐标系的姿态四元数。 \bar{v}_b 和 \bar{w}_b 分别为体坐标系下的速度和角速度。 \bar{F} 表示除重力外飞行器受到的合外力, 而 \bar{M} 则表示飞行器受到的合外力矩。

由第二个假设, 四旋翼飞行器四个螺旋桨的推力 $f_i (i=1,2,3,4)$ 与在机体坐标系下表示的等效推力 f 和力矩 $M_i (i=1,2,3)$ 有如下关系:

$$\begin{bmatrix} f \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & d & 0 & -d \\ -d & 0 & d & 0 \\ -c_{\tau f} & c_{\tau f} & -c_{\tau f} & c_{\tau f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, d 为螺旋桨距质心的距离, $c_{\tau f}$ 为螺旋桨的力矩/推力比率。

在第三个假设下, 我们的模型中没有包含低速下为微小量的空气动力项, 平移动力学中的 \bar{F} 项仅包含四个螺旋桨的合成推力, 而转动动力学中的 \bar{M} 项除包含了三轴控制力矩 M_1, M_2, M_3 之外只有螺旋桨旋转产生的陀螺效应力矩:

$$\bar{F} = \bar{F}_{thrust} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} - \sum I_r (\bar{w}_b \times \bar{e}_3) \Omega_i \quad (12)$$

其中, I_r 为螺旋桨的旋转惯量, Ω_i 为第 i 个螺旋桨的转速。

考虑到飞行器的低速特性, 螺旋桨推力的动力学使用下面的简化方程

$$f_i = c_f \Omega_i^2 \quad (13)$$

$$\tau_i = c_\tau \Omega_i^2$$

式中, c_τ 和 c_f 为常数项系数。

4 控制器设计

由于四旋翼飞行器是一个欠驱动系统, 具有6个运动自由度的同时仅具有4个控制输入, 因此仅能对其中的4个自由度进行控制。一个可行的选择是控制飞行器的3自由度平移运动以及偏航角。本文为了达到简化控制算法的目的, 利用四旋翼飞行器全向飞行

的能力, 将偏航角固定为0, 采用分层控制思想设计位置稳定控制器。控制器结构如图2所示。

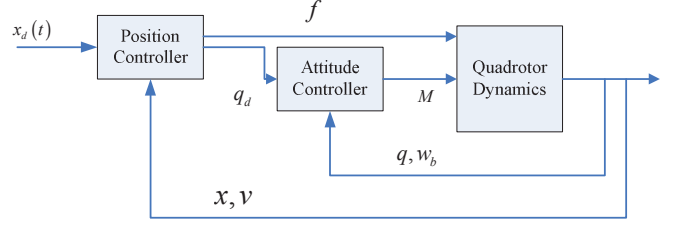


图2 控制器结构

由四旋翼飞行器的动力学模型可以知道, 飞行器的平移动力学与推力的大小和方向均有关, 推力的大小 f 可以直接控制, 但推力是由螺旋桨提供的, 其方向始终与螺旋桨平面垂直, 因此推力方向与飞行器的姿态直接相关。对一个给定的平移运动命令矢量 \bar{x}_d , 首先在位置控制环中确定期望推力的大小 f 和期望姿态 \bar{q}_d 。因为四旋翼飞行器可以实现全向飞行, 因此本文在确定期望姿态时默认偏航角为0来简化期望姿态获取算法。

2.1 姿态控制器

定义姿态和角速度误差:

$$\begin{aligned}\bar{q}_e &= \bar{q}_d^* \otimes \bar{q} \\ \bar{w}_e &= \bar{w}_d - \bar{w}_b\end{aligned} \quad (14)$$

前面讲到, 单位四元数空间是 $SO(3)$ 的双覆盖, 因此单位四元数表示姿态误差可能出现标量部分为负 ($\cos(\theta_e/2) < 0$) 的情况, 即 $\pi < \theta_e \leq 2\pi$ 。物理上, 沿一个空间转轴旋转一个角度 θ 与沿此轴反向旋转 $2\pi - \theta$ 是等效的, 因此当出现这种情况时, 可直接将四元数表示的误差转换成其等效表示。

本文借鉴文[13]思想, 引入指示参数:

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{如果 } q_0 \geq 0 \\ -1 & \text{如果 } q_0 < 0 \end{cases}$$

记 $\tilde{q}_e = \lambda \bar{q}_e$, 则设计姿态控制算法为:

$$u = \bar{w}_b \times (I \bar{w}_b) - ((K_q J) \tilde{q}_e - (K_w J) \bar{w}_e) \quad (15)$$

上述算法使用单位四元数误差和角速度误差计算控制量, 没有使用欧拉角等局部坐标, 因而在本质上避免了姿态算法奇异性的出现。

2.2 位置控制器

定义位置和速度误差:

$$\begin{aligned}\bar{p}_e &= \bar{p}_d - \bar{p} \\ \bar{v}_e &= \bar{v}_d - \bar{v}\end{aligned} \quad (16)$$

根据位置和速度误差以及给定的控制参数, 得到推力:

$$\vec{F}_{thrust} = k_p \vec{p}_e + k_v \vec{v}_e + mg \quad (17)$$

其中, 推力的大小由推力矢量 F_{thrust} 的模确定

$$f = \|\vec{F}_{thrust}\| \quad (18)$$

根据需要的推力方向可以确定期望姿态, 如图 3。

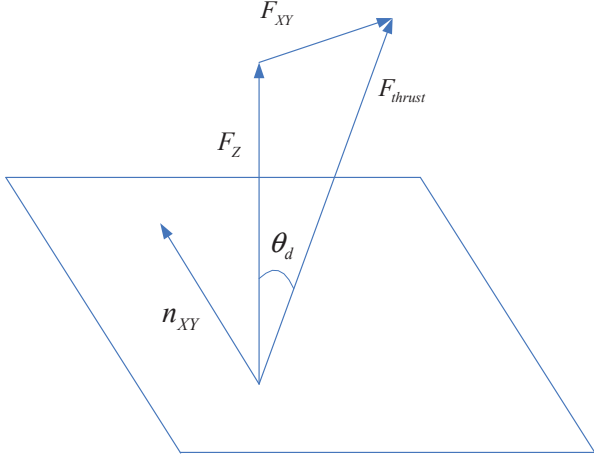


图 3 期望姿态获取

默认偏航角为 0 时, 期望姿态总可以由平衡态 $(1, 0, 0, 0)$ 绕处于 $X-Y$ 平面上的转轴 \vec{n}_{XY} 旋转角度 θ_d 得到。转轴矢量 $\vec{n}_{XY} = (n_x, n_y, 0)$ 与推力矢量 \vec{F}_{thrust} 在 $X-Y$ 平面上的分量垂直, 因此

$$\vec{n}_{XY} = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{F}_{XY}}{\|\vec{e}_3 \times \vec{F}_{XY}\|} \quad (19)$$

在计算旋转角度 θ_d 时, 如果直接使用余切变换

$$\theta_d = \arctan\left(\frac{\|\vec{F}_{XY}\|}{F_z}\right) \quad (20)$$

当 $F_z = 0$ 时会遇到计算奇异问题。同时考虑到

$\|F_{XY}\| \in [0, \infty)$, 因此直接使用下式

$$\theta_d = \arctan\left(\frac{\|\vec{F}_{XY}\|}{mg}\right) \quad (21)$$

这样, 期望姿态可以表示为

$$\vec{q}_d = (\cos(\theta_d / 2) \quad \sin(\theta_d / 2) * \vec{n}_{XY}) \otimes \vec{q}_0 \quad (22)$$

其中, $\vec{q}_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ 。

可以注意到, 由于没有使用局部坐标, 因此整个算法中不存在坐标变换的内容, 在一定程度上简化了计算。

5 实例验证

选取飞行器的质量、惯量参数为:

$$m = 1.11 \text{ kg}$$

$$J = \begin{bmatrix} 8.942 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 9.458 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 7.787 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

取初始位置和姿态为:

$$\vec{p}_{start} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\vec{q}_{start} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

选取目标位置为:

$$\vec{p}_{end} = (1 \quad 1 \quad 0)$$

设定控制参数:

$$K_p = 1 \quad K_v = 2.5 \quad K_q = 15 \quad K_w = 10$$

在 MATLAB\Simulink 环境中进行仿真, 结果如图 4 和图 5 所示, 飞行器从 $X-Y$ 平面的 $(0, 0)$ 位置几乎以直线趋向目标点 $(1, 1)$ 位置, 并最终稳定悬停在目标点。图 5 给出了四元数姿态和位置变量的仿真结果, 显示了算法的有效性。

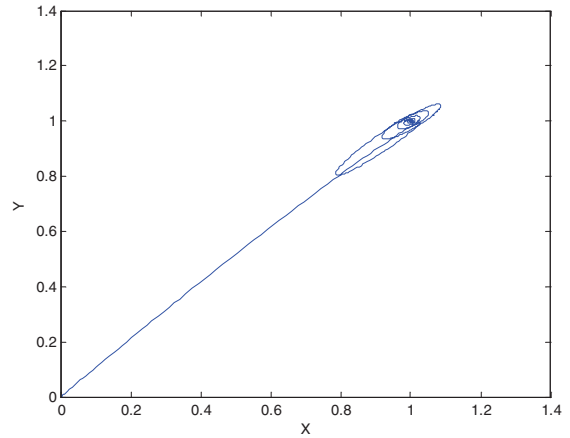


图 4 飞行器 X-Y 平面轨迹

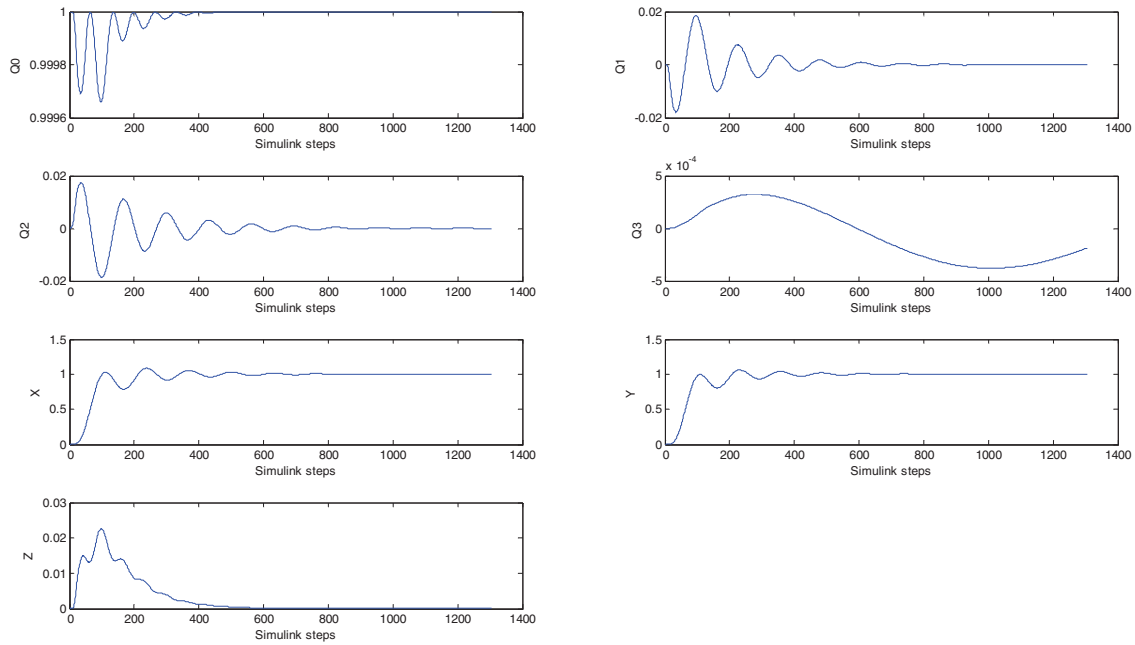


图5 各变量仿真结果

6 结论

本文基于单位四元数建立了四旋翼无人直升机的全局动力学方程, 设计了稳定控制器。提出的控制算法一方面克服了传统控制算法的计算奇异性, 算法在整个 $SE(3)$ 空间中有效; 另一方面与使用姿态矩阵的几何控制算法相比, 提出的算法更加简洁, 计算量更少, 易于实现。

参考文献

- [1] Bouabdallah, S., A. Noth, and R. Siegwart, PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor.
- [2] Madani, T. and A. Benallegue. backstepping control for a quadrotor helicopter. in Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2006. Beijing, China.
- [3] Das, A., K. Subbarao, and F. Lewis, dynamic inversion with zero-dynamics stabilisation for quadrotor control. IET Control Theory and Applications, 2009. 3(3): p. 303-314.
- [4] Lee, D., H.J. Kim, and S. Sastry, feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2009. 7(3)
- [5] Huang, H., et al., aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering, in 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2009: Kobe, Japan.
- [6] Al-Younes, Y.M., M.A. Al-Jarrah, and A.A. Jhemi. linear vs. nonlinear control techniques for a quadrotor vehicle. in 7th International Symposium on Mechatronics and its

Applications. 2010. Sharjah, UAE.

- [7] Lee, T., M. Leok, and N.H. Mcclamroch, geometric tracking control of a quadrotor UAV on $SE(3)$. 2010.
- [8] Wie, B., H. Weiss, A. Arapostathis, Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations, Journal of Guidance. 1989. 12(3).
- [9] Aspragathos, N. A. and J. K. Dimitros, a comparative study of three methods for robot kinematics, IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics. 1998 28(2).
- [10] Campa, R., K. Camarillo, Lina Arias, kinematic modeling and control of robot manipulators via unit quaternions: application to a spherical wrist, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control, San Diego, CA, USA. 2006
- [11] 韩大鹏, 李群框架下任务空间运动控制的若干关键问题研究, 国防科学技术大学博士论文, 湖南长沙, 2008