DAA Problem Set

Franco Hernández Piloto C411

December 2024

1 Demostración de que Conjunto Dominante es NP-completo

1.1 Definición de Conjunto Dominante

Dado un k, decidir si existe un conjunto dominante de tamaño k o menor. Un conjunto dominante es aquel conjunto de vértices de un grafo donde para todo vértice que no está en dicho conjunto se cumple que al menos uno de los vértices adyacentes a él pertenece al conjunto dominante.

1.2 Demostración de que es NP

Dado un conjunto dominante válido, se itera por cada vértice y se comprueba si pertenece al conjunto dominante o alguno de sus adyacentes pertenece al conjunto dominante en tiempo polinomial.

1.3 Reducción usando Vertex Cover NP-completo

Sea C un vertex cover de tamaño k. Demostraremos que existe un D, conjunto dominante, en G de tamaño k + (cantidad de vértices con grado 0).

Asumamos que existe un vértice x tal que ninguno de sus vértices adyacentes pertenece a C y él mismo no está en C:

- Como C es un vertex cover, cubre todas las aristas.
- Sea $\langle u, x \rangle$ una arista que contiene a x. Como u pertenece a C ya que dicha arista está cubierta por el vertex cover C, llegamos a una contradicción ya que existiría un vértice u adyacente a x y que pertenece a C.

Luego, todo vértice cuyo grado sea mayor que 0 y no pertenezca a C, tiene al menos un vértice adyacente a él que pertenece a C.

Sea el conjunto D formado por todos los vértices que están en el vertex cover C. Al agregarle todos los vértices con grado 0, tendríamos un conjunto dominante ya que todo vértice de G que no está en D, tiene al menos un adyacente que sí está en D.

Luego existe un conjunto dominante D de tamaño k más la cantidad de vértices con grado 0. Por lo tanto, como es NP y NP-hard, es NP-completo.

2 Demostración de Clique NP-completo

2.1 Demostración de que Clique es NP

Dado el conjunto de vértices del clique, verificar por cada uno si todos los otros vértices del clique son sus adyacentes se realiza en tiempo polinomial $O(n^2)$, donde n es el tamaño del clique. Luego, es NP.

2.2 Reducción usando Conjunto Independiente NP-completo

Sea I un conjunto independiente en grafo $G = (V, E)$ de tamaño k. Sea $G' = (V, E')$ donde E' son todas las aristas que no están en E, ya que no hay aristas entre los vértices de I en G. Luego, en G' cada par de vértices en I está conectado por una arista formando un clique en G'. Por lo tanto, como es NP y NP-hard, es NP-completo.