Лабораторна робота № 3

Тема: ПРОВЕДЕННЯ ТРЬОХФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ.

Мета: провести дробовий трьохфакторний експеримент. Скласти матрицю планування, знайти коефіцієнти рівняння регресії, провести 3 статистичні перевірки.

Завдання на лабораторну роботу

1. Скласти матрицю планування для дробового трьохфакторного експерименту. Провести експеримент в усіх точках факторного простору, повторивши N експериментів, де N – кількість експериментів (рядків матриці планування) в усіх точках факторного простору – знайти значення функції відгуку У. Значення функції відгуку знайти у відповідності з варіантом діапазону, зазначеного далі (випадковим чином).

$y_{\max} = 200 + x_{ср\ max}$;

$y_{\min} = 200 + x_{ср\ min}$

де $x_{cp\max} = \dfrac{x_{1\max} + x_{2\max} + x_{3\max}}{3}$, $x_{cp\min} = \dfrac{x_{1\min} + x_{2\min} + x_{3\min}}{3}$

2. Знайти коефіцієнти лінійного рівняння регресії. Записати лінійне рівняння регресії.

3. Провести 3 статистичні перевірки.

4. Написати комп'ютерну програму, яка усе це виконує.

Таблиця 1

№$_{варианта}$	X_1		X_2		X_3	
	min	max	min	max	min	max
101	-10	50	20	60	50	55
102	20	70	-20	40	70	80
103	-20	30	30	80	30	45
104	15	45	-25	10	45	50
105	-30	20	15	50	20	35
106	10	40	25	45	40	45
107	-5	15	-15	35	15	30
108	-30	0	-35	10	0	20
109	-20	15	10	60	15	35
110	-25	-5	-30	45	-5	5
111	10	60	-70	-10	60	70
112	-40	20	-35	15	20	25
113	-15	30	5	40	5	25
114	-25	75	25	65	25	40

115	10	50	-20	60	-20	20
116	-10	50	-20	60	-20	5
117	20	70	25	65	25	35
118	-20	30	5	40	5	10
119	15	45	-35	15	-35	-5
120	-30	20	-70	-10	-70	-40
121	10	40	-30	45	-30	-10
122	-5	15	10	60	10	20
123	-30	0	-25	10	-25	-5
124	-20	15	-15	35	-15	-10
125	-25	-5	25	45	25	30
126	10	60	15	50	15	20
127	-40	20	-25	10	-25	-10
128	-15	30	30	80	30	35
129	-25	75	-20	40	-20	-15
130	10	50	20	60	20	25
131	-10	35	5	50	-15	30
132	10	25	5	30	-10	20
133	-15	30	-20	10	-5	30
134	5	20	-5	30	-10	25
135	-10	15	-10	20	-15	5
201	-10	50	-20	40	-20	-15
202	20	70	30	80	30	35
203	-20	30	-25	10	-25	-20
204	15	45	15	50	15	30
205	-30	20	25	45	25	30
206	10	40	-15	35	-15	5
207	-5	15	-35	10	-35	-10
208	-30	0	10	60	10	35
209	-20	15	-30	45	-30	-15
210	-25	-5	-70	-10	-25	-5
211	10	60	-35	15	10	15
212	-40	20	5	40	-40	-20
213	-15	30	25	65	-15	-5
214	-25	75	-20	60	-25	-10
215	10	50	-20	60	10	15
216	-10	50	25	65	-10	15
217	20	70	5	40	20	45
218	-20	30	-35	15	-20	5
219	15	45	-70	-10	15	30
220	-30	20	-30	45	-30	-15
221	10	40	10	60	10	15
222	-5	15	-25	10	-5	20
223	-30	0	-15	35	-30	-25
224	-20	15	25	45	-20	-15
225	-25	-5	15	50	-25	-15
226	10	60	-25	10	10	15

227	-40	20	30	80	-40	-25
228	-15	30	-20	40	-15	-5
229	-25	75	20	60	-25	-5
230	10	50	-15	45	10	15
231	15	25	-10	5	-30	-15
232	-10	10	-60	-45	-55	-30
233	-65	-45	-45	-20	25	50
234	-30	-10	-60	-35	-30	-15
235	-5	20	-40	-30	20	30
301	-10	50	20	60	-10	5
302	20	70	-15	45	20	35
303	-20	30	-20	40	-20	-10
304	15	45	30	80	15	45
305	-30	20	-25	10	-30	-15
306	10	40	15	50	10	30
307	-5	15	25	45	15	45
308	-30	0	-15	35	-30	35
309	-20	15	-35	10	10	20
310	-25	-5	10	60	-5	60
311	10	60	-30	45	-30	45
312	-40	20	-70	-10	-20	20
313	-15	30	-35	15	-25	5
314	-25	75	5	40	15	25
315	10	50	25	65	50	65
316	-10	50	-20	60	50	55
317	-10	50	20	60	-10	10
318	20	70	-15	45	20	35
319	-20	30	20	60	-20	-5
320	15	45	-15	45	15	20
321	-30	20	-20	40	-30	-15
322	10	40	30	80	10	20
323	-5	15	-25	10	15	45
324	-30	0	15	50	-30	35
325	-20	15	25	45	10	20
326	-25	-5	-15	35	-5	60
327	10	60	-35	10	-30	45
328	-40	20	10	60	-20	20
329	-15	30	-30	45	-25	5
330	-25	75	-70	-10	15	25
331	-10	10	-60	-50	-70	-55
332	-25	-10	-5	5	25	40
333	-75	-60	10	20	-70	-60
334	-70	-60	-45	-35	-55	-40
335	-25	-15	-75	-50	-75	-60
401	10	50	-35	15	50	65
402	-10	50	5	40	50	55
403	-15	30	-35	15	-25	5

404	-25	75	5	40	15	25
405	10	50	25	65	50	65
406	-10	50	-20	60	50	55
407	-10	50	20	60	-10	-5
408	20	70	-15	45	20	25
409	-20	30	20	60	-20	-5
410	15	45	-15	45	15	20
411	-30	20	-20	40	-30	-20
412	10	40	30	80	10	20
413	20	60	-5	15	-25	-5
414	-15	45	-30	0	10	60
415	-20	40	-20	15	-40	20
501	30	80	-25	-5	-15	30
502	-25	10	10	60	-25	75
503	15	50	-40	20	10	50
504	25	45	-15	30	-10	50
505	-15	35	-25	75	-15	30
506	-35	10	10	50	-25	75
507	10	60	-10	50	10	50
508	-30	45	20	70	-10	50
509	-70	-10	-20	30	-10	50
510	-35	15	15	45	20	70
511	5	40	-30	20	-20	30
512	-35	15	10	40	-25	-5
513	5	40	-5	15	-15	-10
514	-70	-10	-30	0	25	30
515	-35	15	-20	15	15	20
516	5	40	-25	-5	-25	-10
517	-35	15	10	60	30	35
518	5	40	-40	20	-20	-15
519	25	65	-15	30	20	25
520	-20	60	-25	75	-20	-15
601	20	60	10	50	30	35
602	-15	45	-10	50	-25	-20
603	20	60	-10	50	15	30
604	-15	45	20	70	25	30
605	-20	40	-20	30	25	45
606	30	80	15	45	-15	35
607	-5	15	-20	40	-35	10
608	-30	0	30	80	10	60
609	-20	30	-25	10	-25	-20
610	15	45	15	50	15	30
611	-30	20	25	45	25	30
612	10	40	-15	35	-15	5
613	-5	15	-35	10	-35	-10
614	-30	0	10	60	10	35
615	-20	15	-30	45	-30	-15

616	-25	-5	-70	-10	-25	-5
617	10	60	-35	15	10	15
618	-30	0	-25	10	50	55
619	-20	15	-15	35	70	80
620	-25	-5	25	45	30	45
701	10	60	15	50	45	50
702	-40	20	-25	10	20	35
703	-15	30	30	80	40	45
704	-25	75	-20	40	15	30
705	10	50	20	60	0	20
706	-10	50	-20	40	15	35
707	20	70	30	80	-5	5
708	-20	30	-25	10	60	70
709	10	60	-35	10	-30	45
710	-40	20	10	60	-20	20

Порядок виконання роботи

1. Вибрати з таблиці варіантів і записати в протокол інтервали значень для x_1, x_2, x_3 Обчислити і записати для x_1, x_2, x_3 значення, відповідні кодованим +1; -1 значенням факторів $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$

2. Скласти матрицю планування для дробового трьохфакторного експерименту з використанням додаткового (фіктивного) нульового фактору ($\overline{x_0}$ =1) та заповнити таблицю нормованими значеннями $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$.

	$\overline{x_0}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	y_{i1}	y_{i2}	…	y_{ij}	…	y_{im}
1										
2										
3										
4										

Також скласти таблицю з натуральних значень факторів.

3. Провести експеримент в усіх точках (знайти значення функції відгуку y). Значення функції відгуку знайти у відповідності діапазону.

$y_{\min} = 200 + x_{\text{ср max}}$;

$y_{\max} = 200 + x_{\text{ср min}}$.

4. Рівняння регресії буде мати вигляд: $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$

Розрахувати коефіцієнти регресії для натуральних та нормованих значень.

5. Перевірити однорідність дисперсії за критерієм Кохрена, нуль-гіпотезу за критерієм Стьюдента та адекватність моделі за критерієм Фішера.

Зміст звіту

1.Результати підготовки (матриця планування);

2.Результати виконання роботи (п. 3,4).

Контрольні запитання

1. Що називається дробовим факторним експериментом?
2. Для чого потрібно розрахункове значення Кохрена?
3. Для чого перевіряється критерій Стьюдента?
4. Чим визначається критерій Фішера і як його застосовувати?

Теоретичні відомості

1. ДРОБОВИЙ ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

У деяких випадках немає необхідності проводити повний факторний експеримент (ПФЕ). Якщо буде використовуватися лінійна регресія, то можливо зменшити кількість рядків матриці ПФЕ до кількості коефіцієнтів регресійної моделі. Кількість дослідів слід скоротити, використовуючи для планування так звані регулярні дробові репліки від повного факторного експерименту, що містять відповідну кількість дослідів і зберігають основні властивості матриці планування – це означає дробовий факторний експеримент (ДФЕ). Репліка, що включає тільки половину експериментів ПФЕ, називається напівреплікою, що включає четверту частину дослідів - чвертьреплікою і т. д.

Дробовий факторний експеримент відповідає всім властивостям повного факторного експерименту. При ПФЕ і ДФЕ використовується кількість рівнів 2, так як нормовані значення факторів в матриці планування приймають два значення -1 або 1.

Кількість факторів K	Кількість невідомих коефіцієнтів	Кількість дослідів в повному факторному експерименті	Кількість дослідів в дробовому факторному експерименті.
2	3	4	2
3	4	8	4
4	5	16	8
5	6	32	16
6	7	64	32

Тобто дробовий факторний експеримент містить у собі $2^{к-1}$ (де k-кількість факторів) дослідів, які під час знаходження коефіцієнтів для лінійної моделі можуть повністю не використовуватися. Загалом ДФЕ дозволяє знайти $2^к$ коефіцієнтів регресії при $2^к$ базисних функціях (для планів більш високого порядку).

Матриця планування ПФЕ при k = 3 (k-кількість факторів)

	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$
1	-1	-1	-1
2	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1
4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	-1	+1	-1
7	+1	-1	-1
8	+1	+1	+1

Графічна інтерпретація матриці планування ПФЕ – куб (рис.1):

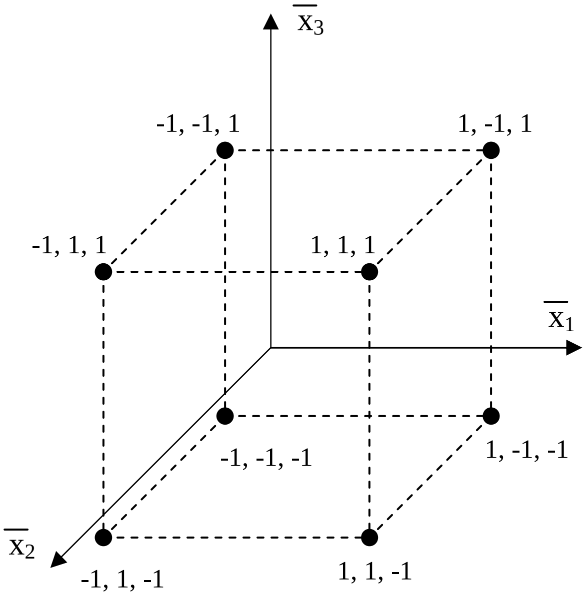

Рис. 1. Графічна інтерпретація матриці планування ПФЕ

Можна використовувати верхню і нижню половину матриці планування при ПФЕ (рядки 1-4, 5-8).
Матриця планування ДФЕ при k = 3 (k-кількість факторів).

	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$
1	-1	-1	-1
2	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1
4	+1	+1	-1

Для зручності деяких розрахунків та виводі формул у матрицю нормованих значень вводять ще один додатковий фіктивний фактор x_0, із постійним нормованими значенням +1.

	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$
1	+1	-1	-1	-1
2	+1	-1	+1	+1
3	+1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1

2.ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ ПФЕ

Після проведення дослідів в усіх точках факторного простору ми повинні знайти коефіцієнти рівняння регресії. Це можна виконати, скориставшись методом найменших квадратів, подібно до того, як описано у попередній лабораторній роботі №2. Згідно цього методу рішення знаходиться як мінімум суми квадратів відхилень теоретичних значень від експериментальних y_i.

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow min$$

де:

$$\hat{y} = \phi(x_1, \ldots x_k, \; b_0, b_1, \ldots b_k)$$

N – кількість точок планування експерименту (рядків матриці планування)

k – кількість факторів.

Коефіцієнти b_0, b_1, … b_k можна знайти виходячи з того, що у точці мінімуму $\boldsymbol{E}$ часткові похідні по b_0, b_1, … b_k мають дорівнювати нулю. У нашому випадку k=3. Знаходимо часткові похідні для $\boldsymbol{E}$ і прирівнюємо їх до нуля. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (\phi_i - y_i) * \dfrac{\partial \phi_i}{\partial b_0} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} (\phi_i - y_i) * \dfrac{\partial \phi_i}{\partial b_1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} (\phi_i - y_i) * \dfrac{\partial \phi_i}{\partial b_2} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} (\phi_i - y_i) * \dfrac{\partial \phi_i}{\partial b_3} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

де $\varphi_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i}$

Часткові похідні для φ_i по невідомих коефіцієнтах b0,b1,b2, b3 дорівнюють

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_0} = 1$$
$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_1} = x_{1i}$$
$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_2} = x_{2i} \qquad (2)$$
$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_3} = x_{3i}$$

Підставимо значення (2) у систему рівнянь (1).

Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} - y_i) * 1 = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} - y_i) * x_{1i} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} - y_i) * x_{2i} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N}(b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} - y_i) * x_{3i} = 0 \end{cases}$$

Або:

$$\begin{cases} N\, b_0 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i})b_1 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i})b_2 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i})b_3 = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i})b_0 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i}^2)b_1 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i}x_{1i})b_2 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i}x_{1i})b_3 = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \\ (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i})b_0 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i})b_1 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i}^2)b_2 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i}x_{2i})b_3 = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_{2i} \\ (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i})b_0 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i})b_1 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i})b_2 + (\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i}^2)b_3 = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_{3i} \end{cases}$$

Поділимо кожне рівняння на *N*:

$$\begin{cases} b_0 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i})b_1 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i})b_2 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i})b_3 = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \\ (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i})b_0 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i}^2)b_1 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i}x_{1i})b_2 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i}x_{1i})b_3 = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \\ (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i})b_0 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i})b_1 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i}^2)b_2 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i}x_{2i})b_3 = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_{2i} \\ (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i})b_0 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i})b_1 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i})b_2 + (\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_{3i}^2)b_3 = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} y_i x_{3i} \end{cases} \quad (3)$$

Введемо позначення:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{1i} = m_{x1} \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{2i} = m_{x2} \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{3i} = m_{x3} \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = m_y$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\,x_{2i} = a_{12} \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\,x_{3i} = a_{13} \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}\,x_{3i} = a_{23}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 = a_{11} \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 = a_{22} \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{3i}^2 = a_{33}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\,x_{1i} = a_1 \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\,x_{2i} = a_2 \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\,x_{3i} = a_3$$

Запишемо систему рівнянь (3) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} b_0 + m_{x1}\, b_1 + m_{x2}\, b_2 + m_{x3}\, b_3 = m_y \\ m_{x1}\, b_0 + a_{11}\, b_1 + a_{21}\, b_2 + a_{31}\, b_3 = a_1 \\ m_{x2}\, \mathrm{b}_0 + a_{12}\, b_1 + a_{22}\, b_2 + a_{32}\, b_3 = a_2 \\ m_{x3}\, b_0 + a_{13}\, b_1 + a_{23}\, b_2 + a_{33}\, b_3 = a_3 \end{cases} \qquad (4)$$

Зазначимо, що $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$.

Ми отримали систему лінійних рівнянь з коефіцієнтами регресії в якості невідомих. Для розв'язання цієї системи рівнянь скористаємося методом Крамера:

$$\mathrm{b}_0 = \frac{\begin{vmatrix} m_y & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \mathrm{b}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_y & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_1 & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_2 & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\mathrm{b}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_y & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_1 & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_2 & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \mathrm{b}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_y \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_1 \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_2 \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Такий спосіб знаходження коефіцієнтів b_i може бути використаний для регресії натуральних значень факторів X_i. Коефіцієнти рівняння регресії для нормованих факторів можна обчислювати набагато простіше, якщо врахувати деякі особливості матриць плану. Як для матриці ПФЕ так і для розглянутих вище матриць ДФЕ мають місце властивості:

1. Симетричність плану відносно центру експерименту - сума кодованих значень для будь-якого вектора, стовпця дорівнює нулю:

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{x_{ij}} = 0 \qquad (i = \overline{1,k})$$

де: k – кількість факторів, N – кількість експериментів.

2.Нормування плану – сума квадратів значень для будь-якого вектора, стовпця дорівнює *N:*

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{x_{ij}}^{2} = N$$

3. Ортогональність – сума попарних добутків елементів будь-яких різних стовпців дорівнює 0:

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{x}_{pi}\,\overline{x}_{qi} = 0$$

Тоді система рівнянь (3) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \\ b_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \\ b_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i x_{2i} \\ b_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i x_{3i} \end{cases}$$

Такий "діагональний" вигляд головної матриці системи фактично означає її вирішення

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$b_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i x_{pi}$$

де: p = 1,2, . . .k.

Таким чином, знаходження коефіцієнтів рівняння регресії можна виконувати спочатку для натуральних а потім переходити до нормованих значень, а можливо навпаки – від коефіцієнтів нормованих потім знаходити коефіцієнти регресії натуральних значень.

Для переходу від рівняння регресії від натуральних к нормованим значенням можна скористатися співвідношеннями, які вже наводилися у лабораторній роботі №1.

$$\overline{x} = \frac{x - x_0}{x_{max} - x_0}$$

де: $x_0 = \dfrac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$

3.ПЕРЕВІРКА ОДНОРІДНОСТІ ДИСПЕРСІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ КОХРЕНА

1. Знайти $\overline{y}_j \left(j = \overline{1, N} \right)$ середнє арифметичне у рядка.
2. $\overline{y}_j = \frac{1}{m} \sum_{g=1}^{m} y_{jg} \left(j = \overline{1, N} \right) \left(g = \overline{1, m} \right)$

   m – кількість дослідів; кількість вимірів у за однією і тією ж самою комбінації факторів.

   N – кількість експериментів (рядків матриці планування).

3. Знайти

$$S^2\{y_j\} = \frac{1}{m} \sum_{g=1}^{m} \left(\overline{y}_j - y_{jg} \right)^2,$$

де $y_{jk} \left(j = \overline{1, N} \right) \left(g = \overline{1, m} \right)$,

$$\overline{y}_j = \frac{1}{m} \sum_{g=1}^{m} y_{jg} \left(j = \overline{1, N} \right) \left(g = \overline{1, m} \right)$$

m – кількість дослідів; кількість вимірів у за однією і тією ж самою комбінації факторів

N – кількість експериментів (рядків матриці планування)

4. Знайти максимальну дисперсію серед усіх дисперсій у рядках

$$S^2_{\max}\{y_j\} = \max[S^2\{y_j\}](j = \overline{1, N})$$

де N – кількість експериментів (рядків матриці планування)

5. Обчислення коефіцієнту *Gp*. Коефіцієнт *Gp* показує, яку частку в загальній сумі дисперсій у рядках має максимальна з них:

$$Gp = \frac{S^2_{\max}\{y_j\}}{\sum_{j=1}^{N} S^2\{y_j\}}$$

де $S^2\{y_j\} = \frac{1}{m} \sum_{g=1}^{m} \left(\overline{y}_j - y_{jg} \right)^2$; $S^2_{\max}\{y_j\} = \max[S^2\{y_j\}](j = \overline{1, N})$

m – кількість дослідів; кількість вимірів у за однією і тією ж самою комбінації факторів

N – кількість експериментів.

6. Визначити ступені свободи f_1= m -1; f_2 = N.

m – кількість дослідів; кількість вимірів у за однією і тією ж самою комбінації факторів

N – кількість експериментів

7. Визначити рівень значимості (значення доповнення ймовірності до 1) q=1-p

8. За таблицею визначити Gт для прийнятого рівня значимості q і для чисел ступеня свободи відповідно чисельника f1 і знаменника f2. Для цього значення f1 знаходиться в горизонтальному заголовку таблиці (вибирається стовпчик), а f2 вибирається зліва у вертикальному заголовку таблиці (вибирається рядок) і на перетині отримуємо табличне значення Gт коефіцієнта Кохрена.

У випадку ідеальної однорідності дисперсій у рядках коефіцієнт Gp прямував би до значення 1/*N*, де *N* - кількість експериментів (кількість рядків у матриці планування). Якщо виконується умова Gp <Gт, то з обраним рівнем статистичної значимості q (з ймовірністю p = 1 - q) усі дисперсії у рядках визнаються однорідними.

Якщо Gp> Gт, то гіпотезу відкидають, тобто *m* недостатньо (*m* - кількість дослідів). Тоді необхідно збільшити кількість дослідів: *m* = *m* +1.

4.ПЕРЕВІРКА ЗНАЧУЩОСТІ КОЕФІЦІЄНТІВ ЗА КРИТЕРІЄМ СТЬЮДЕНТА

Якщо теоретичний коефіцієнт b_i = 0, це означає, що в апроксимуючому поліномі відповідний доданок (фактор) відсутній. Чим менше значення b_i, тим менше вплив відповідного фактора.

1. Оцінка генеральної дисперсії відтворюваності $S^2_в$, що характеризує точність одного виміру, є середня з усіх дисперсій у рядках.

$$S_B^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{S^2\{y_j\}}{N} \qquad (4.1)$$

де:

$$S^2\{y_j\} = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}\left(\overline{y}_j - y_{jg}\right)^2,$$

$$\overline{y}_j = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m} y_{jg} \quad \left(j = \overline{1,N}\right)\left(g = \overline{1,m}\right)$$

m – кількість дослідів; кількість вимірів у за однією і тією ж самою комбінації факторів.

N – кількість експериментів (рядків матриці планування)

2. Вважається, що статистична оцінка дисперсії при розрахунку будь-якого коефіцієнта однакова.

$$S^2\{\beta_s\} = \frac{S_B^2}{N \cdot m}, \qquad (4.2)$$

де $S_B^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{S^2\{y_j\}}{N}$

$$S\{\beta_s\} = \sqrt{S^2\{\beta_s\}}$$

3. Визначення оцінок коефіцієнтів

$$\beta_s = \frac{1}{N}\sum_{s=0}^{k} \overline{y}_j \overline{x}_{js} \qquad s = (0,k) \;\; j = (1,N) \qquad (4.3)$$

де k- кількість факторів

4. Знайдені таким чином коефіцієнти рівняння регресії необхідно оцінити на статистичну значимість. Оцінка проводитися за t-критерієм Стьюдента. Для кожного коефіцієнта β_s обчислюється коефіцієнт t_s

$$t_s = \frac{\left|\beta_s\right|}{S\{\beta_s\}} \;\; s = (0,k)$$

де k- кількість факторів,тобто перевіряється відхилення від нуля знайденої оцінки.
Коефіцієнти t_s визначаються для кожного коефіцієнта регресії, тобто їх k +1.

5. При вибраному рівні статистичної значимості (значення доповнення ймовірності до 1) q = 1-p за таблицями розподілу Стьюдента при заданій кількості ступенів свободи $f_3 = f_1 * f_2$ знаходять табличне значення коефіцієнта $t_{табл.}$

Знайдене табличне значення порівнюється з розрахунковим значенням коефіцієнта.

Якщо виконується нерівність $t_s < t_{табл}$, то приймається нуль-гіпотеза, тобто вважається, що знайдений коефіцієнт β_s є статистично незначущим і його слід виключити з рівняння регресії.
Якщо $t_s > t_{табл}$ то гіпотеза не підтверджується, тобто β_s – значимий коефіцієнт і він залишається в рівнянні регресії.

5.ПЕРЕВІРКА АДЕКВАТНОСТІ ЗА КРИТЕРІЄМ ФІШЕРА

Отримане рівняння регресії необхідно перевірити на адекватність досліджуваному об'єкту. Для цієї мети необхідно оцінити, наскільки відрізняються середні значення y вихідної величини, отриманої в точках факторного простору, і значення y, отриманого з рівняння регресії в тих самих точках факторного простору. Для цього використовують дисперсію адекватності.

Адекватність моделі перевіряють за F-критерієм Фішера, який дорівнює відношенню дисперсії адекватності до дисперсії відтворюваності:

$F_p = S^2_{ад} / S^2_{в}$,

де:

$$S^2_{ад} = \frac{m}{N-d}\sum_{j=1}^{N}[\hat{y}_j - \overline{y_j}]^2$$, де d –кількість значущих коефіцієнтів.

$\hat{y}_j$ – значення функції відгуку при підстановці X_j та отриманих коефіцієнтів b_i у рівняння регресії

$\overline{y_j}$ – середнє значення функції відгуку

$$S_B^2 = \sum_{j=1}^{N}\frac{S^2\{y_j\}}{N}$$

$$S^2\{y_j\} = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}\left(\overline{y}_j - y_{jg}\right)^2, \text{ де } y_{jk} \ \left(j=\overline{1,N}\right)\left(g=\overline{1,m}\right), \text{ де } \overline{y}_j = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m} y_{jg} \ \left(j=\overline{1,N}\right)\left(g=\overline{1,m}\right)$$

m – кількість дослідів; кількість вимірів y за однією й тією ж самою комбінації факторів

N – кількість експериментів (рядків матриці планування)

Знайдене шляхом розрахунку F_p порівнюють з табличним значенням $F_т$, що визначається при рівні значимості q та кількості ступенів свободи f4 = N - d і

f3 = f1 * f2

Якщо $F_p < F_т$ то отримана математична модель з прийнятим рівнем статистичної значимості q адекватна експериментальним даним.

G-розподіл Кохрена

Значення G*1000 в залежності від числа ступеня свободи F1,F2

рівень значимості q=0.05

F2\F1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8332	8159	8010	7880	7341	6602	5813	5000
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	9065	7679	6841	6287	5892	5598	5365	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	8412	6838	5981	5440	5063	4783	4564	4387	4241	4118	3645	3066	2513	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3185	3043	2926	2829	2462	2022	1616	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2299	2187	2098	2020	1737	1403	100	0833
15	4709	3346	2758	2419	2159	2034	1911	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1286	1216	1160	1113	0942	0743	0567	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	1737	1131	0895	0766	0682	0623	0583	0552	0520	0497	0411	0316	0234	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083

рівень значимості q=0.01

F2\F1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	9999	950	9794	9586	9373	9172	8988	8823	8674	7539	7949	7067	6062	5000
3	9933	9423	8831	8355	7933	7606	7335	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	9279	7885	6957	6329	5875	5531	5259	5037	4854	4697	4094	3351	2644	2000
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608	4401	4229	4048	3529	2858	2229	1667
7	8276	664	5685	5080	4659	4347	4105	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	7945	6162	5209	4627	4226	3932	3704	3522	3373	3248	2779	2214	1700	1250
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	6528	4751	3919	3428	3099	2861	2680	2535	2419	2320	1961	1535	1157	0833
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	4247	2871	2295	1970	1759	1608	1495	1406	1338	1283	1060	0810	0595	0417
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	2940	1951	1508	1281	1135	1033	0957	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	2151	1371	1069	0902	0796	0722	0668	0625	0594	0567	0461	0344	0245	0167
120	1252	0759	0585	0489	0429	0387	0357	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083

Розподіл Стьюдента

Значення t-критерію Стьюдента при рівні значимості q=0.05

Число ступенів свободи F3	Значення t-критерію
1	12.71
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
8	2.306
9	2.262
10	2.228
11	2.201
12	2.179
13	2.160
14	2.145
15	2.131
16	2.120
17	2.110
18	2.101
19	2.093
20	2.086
21	2.080
22	2.074
23	2.069
24	2.064
25	2.060
26	2.056
27	2.052
28	2.048
29	2.045
30	2.042
∞	1.960

Розподіл Фішера

Значення F-критерію Фішера при рівні значимості

q=0.05

F3	F4=1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.9	249.0	254.3
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0

Приклад виконання деяких фрагментів роботи:

1) Запишемо рівняння регресії:

$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$

2) Матриця планування експерименту.

N	$\overline{x_0}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	y_{i1}	y_{i2}	…	y_{ij}	…	y_{im}
1	1	-1	-1	-1						
2	1	-1	+1	+1						
3	1	+1	-1	+1						
4	1	+1	+1	-1						

3) Для розрахунку коефіцієнтів рівняння регресії для натуральних значень запишемо матрицю планування з відповідними натуралізованими значеннями факторів. Для прикладу оберемо x1min= -25, x1max=75, x2min=5, x2max=40, x3min=15, x3max=25, а також y_{min}=10; y_{max}=20.

Заповнимо матрицю планування для m = 3.

x1	x2	x3	Y1	Y2	Y3
-25	5	15	15	18	16
-25	40	25	10	19	13
75	5	25	11	14	12
75	40	15	16	19	16

4) Знайдемо середні значення функції відгуку за рядками:

$\overline{y}_1$ = (y_{11}+y_{12}+y_{13})/3=(15+18+16)/3=16.33

$\overline{y}_2$ = (y_{21}+y_{22}+y_{23})/3=(10+19+13)/3=14.0

$\overline{y}_3$ = (y_{31}+y_{32}+y_{33})/3=(11+14+12)/3=12.33

$\overline{y}_4$ = (y_{41}+y_{42}+y_{43})/3=(16+19+16)/3=17.0

mx1=(X11+X12+X13+X14)/4=(-25-25+75+75)/4=25
mx2=(X21+X22+X23+X24)/4=(5+5+40+40)/4=22.4
mx3=(X31+X32+X33+X34)/4=(-25-25+75+75)/4=20

my=($\overline{y}_1$+$\overline{y}_2$+$\overline{y}_3$+$\overline{y}_4$)/4=(16.33+14.0+12.33+17.0)/4=14.9

a1=(X11* $\overline{y}_1$+X12* $\overline{y}_2$ +X13* $\overline{y}_3$+X14* $\overline{y}_4$)/4=(-25*16.33+-25*14.0+75*12.33+75*17)/4=360.4

a2= (X21* $\overline{y}_1$+X22* $\overline{y}_2$ +X23* $\overline{y}_3$+X24* $\overline{y}_4$)/4 =(5*16.33+40*14.0+5*12.33+40*17)/4=345.8

a3= (X31* $\overline{y}_1$+X32* $\overline{y}_2$ +X33* $\overline{y}_3$+X34* $\overline{y}_4$)/4=(15*16.33+25*14.0+25*12.33+15*17)/4=290

a11=(X11*X11+X12*X12+X13*X13+X14*X14)/4=(25*25+25*25+75*75+75*75)/4=3125
a22=(X21*X21+X22*X22+X23*X23+X24*X24)/4=(5*5+40*40+5*5+40*40)/4=812.5
a33=(X31*X31+X32*X32+X33*X33+X34*X34)/4=(15*15+25*25+25*25+15*15)/4=425
a12=a21= (X11*X21+X12*X22+X13*X23+X14*X24)/4=(-25*5-25*40+75*5+75*40)/4=562.5
a13= a31=(X31*X31+X32*X32+X33*X33+X34*X34)/4=(-25*15-25*25+75*25+75*15)/4=500
a23= a32=(X31*X31+X32*X32+X33*X33+X34*X34)/4=(5*15+40*25+5*25+40*15)/4=450

$$b_0=\frac{\begin{vmatrix} m_y & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad b_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m_y & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_1 & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_2 & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$b_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_y & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_1 & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_2 & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad b_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_y \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_1 \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_2 \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Підставимо отримані значення

$$b_0=\frac{\begin{vmatrix} 14.9 & 25 & 22.4 & 20 \\ 360.4 & 3125 & 562.5 & 500 \\ 345.8 & 562.5 & 812.5 & 450 \\ 290 & 500 & 450 & 425 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 22.4 & 20 \\ 25 & 3125 & 562.5 & 500 \\ 22.4 & 562.5 & 812.5 & 450 \\ 20 & 500 & 450 & 425 \end{vmatrix}}=21.292 \quad b_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 14.9 & 22.4 & 20 \\ 25 & 360.4 & 562.5 & 500 \\ 22.4 & 345.8 & 812.5 & 450 \\ 20 & 290 & 450 & 425 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 22.4 & 20 \\ 25 & 3125 & 562.5 & 500 \\ 22.4 & 562.5 & 812.5 & 450 \\ 20 & 500 & 450 & 425 \end{vmatrix}}=-0.005$$

$$b_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 14.9 & 20 \\ 25 & 3125 & 360.4 & 500 \\ 22.4 & 562.5 & 345.8 & 450 \\ 20 & 500 & 290 & 425 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 22.4 & 20 \\ 25 & 3125 & 562.5 & 500 \\ 22.4 & 562.5 & 812.5 & 450 \\ 20 & 500 & 450 & 425 \end{vmatrix}}=0.033 \quad b_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 22.4 & 14.9 \\ 25 & 3125 & 562.5 & 360.4 \\ 22.4 & 562.5 & 812.5 & 345.8 \\ 20 & 500 & 450 & 290 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 22.4 & 20 \\ 25 & 3125 & 562.5 & 500 \\ 22.4 & 562.5 & 812.5 & 450 \\ 20 & 500 & 450 & 425 \end{vmatrix}}=-0.35$$

Запишемо отримане рівняння регресії:

y = 21,292 + (-0,005) * x1 + (0,033) * x2 + (-0,35) * x3

Зробимо перевірку (підставимо значення факторів з матриці планування і порівняємо результат з середніми значеннями функції відгуку за рядками):

21,292 + (-0,005) * -25 + (0,033) * 5 + (-0,35) * 15=16.33= $\overline{y}_1$

21,292 + (-0,005) * -25 + (0,033) * 40 + (-0,35) * 25=14.0= $\overline{y}_2$

21,292 + (-0,005) * 75 + (0,033) * 5 + (-0,35) * 25=12.33= $\overline{y}_3$

21,292 + (-0,005) * 75 + (0,033) * 40 + (-0,35) * 15=17= $\overline{y}_4$

5) Для проведення статистичних перевірок необхідно використовувати матрицю планування з нормованими значеннями факторів.

Заповнимо матрицю планування для m = 3.

$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_3$	Y1	Y2	Y3
1	-1	-1	-1	15	18	16
1	-1	1	1	10	19	13
1	1	-1	1	11	14	12
1	1	1	-1	16	19	16

Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Кохрена:

Знайдемо середні значення функції відгуку за рядками:

$\overline{y}_1$ = (y_{11}+y_{12}+y_{13})/3=(15+18+16)/3=16.33

$\overline{y}_2$ = (y_{21}+y_{22}+y_{23})/3=(10+19+13)/3=14.0

$\overline{y}_3$ = (y_{31}+y_{32}+y_{33})/3=(11+14+12)/3=12.33

$\overline{y}_4$ = (y_{41}+y_{42}+y_{43})/3=(16+19+16)/3=17.0

Знайдемо дисперсії по рядках:

$$S^2\{y_1\} = \frac{1}{3}((y_{11} - \overline{y_1})^2 + (y_{12} - \overline{y_1})^2 + (y_{13} - \overline{y_1})^2) =$$

$$= \frac{1}{3}((15 - 16.33)^2 + (18 - 16.33)^2 + (16 - 16.33)^2) = 1.56$$

$$S^2\{y_2\} = \frac{1}{3}((y_{21} - \overline{y_2})^2 + (y_{22} - \overline{y_2})^2 + (y_{23} - \overline{y_2})^2) =$$

$$= \frac{1}{3}((10 - 14)^2 + (19 - 14)^2 + (13 - 14)^2) = 14$$

$$S^2\{y_3\} = \frac{1}{3}((y_{31} - \overline{y_3})^2 + (y_{32} - \overline{y_3})^2 + (y_{33} - \overline{y_3})^2) =$$

$$= \frac{1}{3}((11 - 12.33)^2 + (14 - 12.33)^2 + (12 - 12.33)^2) = 1.54$$

$$S^2\{y_4\}=\frac{1}{3}((y_{41}-\overline{y_4})^2+(y_{42}-\overline{y_4})^2+(y_{43}-\overline{y_4})^2)=$$

$$=\frac{1}{3}((16-17.0)^2+(19-17.0)^2+(16-17.0)^2)=2$$

$$Gp=\frac{S^2_{\max}\{y_j\}}{\sum\limits_{j=1}^{4}S^2\{y_j\}}=\frac{14}{1.56+14+1.54+2}=0.73$$

f1=m-1=2 ; f2=N=4 Рівень значимості приймемо 0.05.

За таблицею в 4 рядку 2 стовпчику: Gт=0.7679,

Gp=0.73<Gт=0.7679 – Дисперсія однорідна.

Далі оцінимо значимість коефіцієнтів регресії згідно критерію Стьюдента

$$S_B^2=\sum_{j=1}^{N}\frac{S^2\{y_j\}}{N}=\frac{S^2\{y_1\}+S^2\{y_2\}+S^2\{y_3\}+S^2\{y_4\}}{N}=\frac{1.56+14+1.54+2}{4}=4.78$$

$$S^2\{\beta_s\}=\frac{S_B^2}{N\cdot m}=\frac{4.78}{4\cdot 3}=0.4$$

$$S\{\beta_s\}=\sqrt{S^2\{\beta_s\}}=\sqrt{0.4}=0.63$$

$$\beta_0=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{K}\overline{y}_s\overline{x}_{0s}=\frac{1}{4}(16.33*1+14.0*1+12.33*1+17*1)=15$$

$$\beta_1=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{K}\overline{y}_s\overline{x}_{1s}=\frac{1}{4}(16.33*(-1)+14.0*(-1)+12.33*1+17*1)=-0.25$$

$$\beta_1=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{K}\overline{y}_s\overline{x}_{2s}=\frac{1}{4}(16.33*(-1)+14.0*(1)+12.33*(-1)+17*1)=0.585$$

$$\beta_3=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{K}\overline{y}_s\overline{x}_{3s}=\frac{1}{4}(16.33*(-1)+14.0*(1)+12.33*1+17*(-1))=-1.75$$

$$t_0=\frac{|\beta_0|}{S\{\beta_s\}}=15/0.63=23.8$$

$$t_1=\frac{|\beta_1|}{S\{\beta_s\}}=0.25/0.63=0.396$$

$$t_2=\frac{|\beta_2|}{S\{\beta_s\}}=0.585/0.63=0.93$$

$$t_3=\frac{|\beta_3|}{S\{\beta_s\}}=1.75/0.63=2.78$$

f3=f1*f2 =(m-1)* N= 2*4=8 Отже, з таблиці слід вибрати значення з восьмого рядка: $t_{табл}$=2.306. Але бачимо, що $t_0,t_3>t_{табл.}$ $t_1,t_2< t_{табл.}$ Отже, b1, b2 коефіцієнти рівняння регресії приймаємо незначними при рівні значимості 0.05, тобто вони виключаються з рівняння.

y = 21,292 + (-0,35) * x3

$\hat{y}_1 =$ 21,292 + (-0,35) * 15=16.042

$\hat{y}_2 =$21,292 + (-0,35) * 25=12.54

$\hat{y}_3 =$21,292 + (-0,35) * 25=12.54

$\hat{y}_4 =$21,292 + (-0,35) * 15=16.042

Критерій Фішера

d- кількість значимих коефіцієнтів d=2

$f_4 = N – d=2$ і $f_3 = f_1*f_2=(m-1)*N=2*4=8$

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N-d}\sum_{j=1}^{N}[\hat{y}_j - \overline{y_j}]^2 = \frac{3}{4-2}((16.042-16.33)^2 + (12.54-14)^2 + (12.54-12.33)^2 + (16.042-17)^2) = 4.76$$

$F_р= S^2_{ад} / S^2_в =4.76/0.4=11.9$

$f_4 = N – d=2$ і $f_3 = f_1*f_2=(m-1)*N=2*4=8$

Fт вибираємо з таблиці 8 рядок 2 стовпець: Fт=4.5.

$F_р$=11.9>Fт=4.5.Отже, рівняння регресії неадекватно оригіналу при рівні значимості 0.05