

Лабораторна робота № 6

Проведення трьохфакторного експерименту при використанні рівняння регресії з квадратичними членами

Мета роботи: Провести трьохфакторний експеримент і отримати адекватну модель – рівняння регресії, використовуючи **рототабельний** композиційний план.

Завдання до лабораторної роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Вибрати з таблиці варіантів і записати в протокол інтервали значень x_1, x_2, x_3 . Обчислити і записати значення, відповідні кодованим значенням факторів +1; -1; + $\bar{1}$; - $\bar{1}$; 0 для $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$.
3. Значення функції відгуку знайти за допомогою підстановки в формулу:

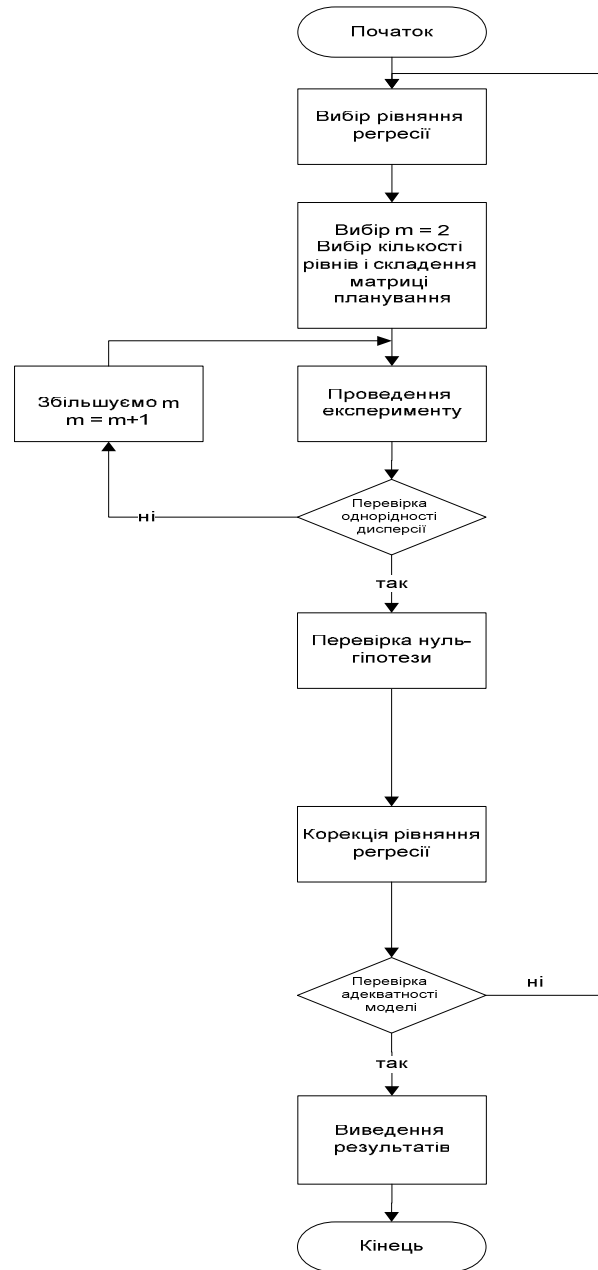
$$y_i = f(x_1, x_2, x_3) + \text{random}(10) - 5,$$

де $f(x_1, x_2, x_3)$ вибирається по номеру в списку в журналі викладача.

4. Провести експерименти і аналізуючи значення статистичних перевірок, отримати адекватну модель рівняння регресії. При розрахунках використовувати натуральні значення факторів.
5. Зробити висновки по виконаній роботі.

Алгоритм отримання адекватної моделі рівняння регресії

- 1) Вибір рівняння регресії (лінійна форма, рівняння з урахуванням ефекту взаємодії і з урахуванням квадратичних членів);
- 2) Вибір кількості повторів кожної комбінації ($m = 2$);
- 3) Складення матриці планування експерименту і вибір кількості рівнів (N)
- 4) Проведення експериментів;
- 5) Перевірка однорідності дисперсії. Якщо не однорідна – повертаємося на п. 2 і збільшуємо m на 1);
- 6) Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії. При розрахунку використовувати **натуральні** значення x_1, x_2 и x_3 .
- 7) Перевірка нуль-гіпотези. Визначення значимих коефіцієнтів;
- 8) Перевірка адекватності моделі рівняння оригіналу. При неадекватності – повертаємося на п.1, змінивши при цьому рівняння регресії;



Зміст звіту роботи

1. Результати підготовки до виконання лабораторної роботи.
2. Рівняння регресії для лінійної форми, рівняння з урахуванням ефекту взаємодії і з урахування квадратичних членів.
3. Результати статистичних перевірок:
 - а. Перевірка однорідності дисперсії за Кохреном.
 - б. Перевірка значимості коефіцієнтів регресії за Ст'юдентом.
 - с. Перевірка адекватності моделі оригіналу за критерієм Фішера.
4. Лістинг програми.
5. Висновки по виконанню роботи

Теоретичні відомості

1. Вибір кількості членів рівняння регресії

Спочатку завжди береться лінійна форма рівняння регресії. Якщо при статистичних перевірках гіпотеза про адекватність моделі рівняння регресії оригіналу не підтверджується, то необхідно додати нові члени ряду. В такому випадку слід враховувати ефект взаємодії. Рівняння регресії прийме вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k>j>i}}^k b_{ijk} x_i x_j x_k$$

Для $k = 3$:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3$$

Якщо гіпотеза про адекватність моделі знову не підтверджується, то слід додати квадратичні члени ряду:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k>j>i}}^k b_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_i^k b_{ii} x_i^2$$

Для $k = 3$:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2$$

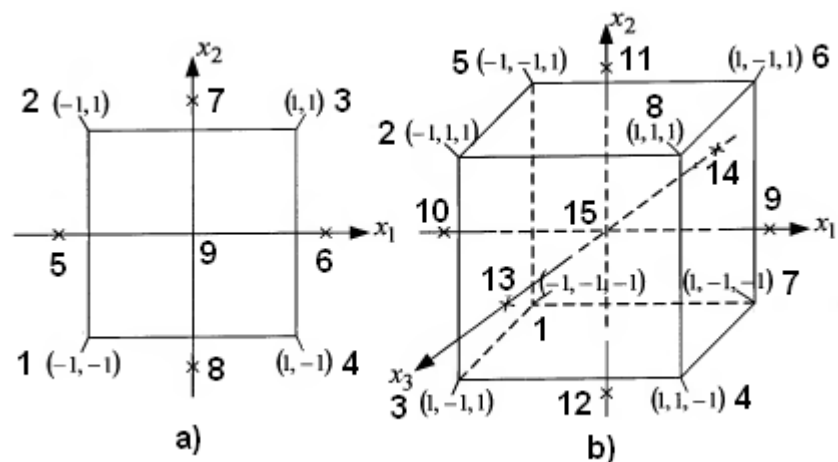
При цьому кількість невідомих коефіцієнтів рівняння більша, ніж число комбінацій для 2-рівневої системи при ПФЕ, при якій квадратичні члени неможливо розрізнити. Тому кількість рівнів збільшується до 5 шляхом додавання «зоряних» та «центральної» точок і використовуються так звані «композиційні плани».

Зоряні точки розташовані на осях кодової системи координат на відстані l від центру системи, де l – величина зоряного плеча (значення в кодованих одиницях).

На рисунку а) це точки 5, 6, 7, 8 для двох факторів і точки 9, 10, 11, 12, 13, 14 для трьох факторів на рисунку б).

Центральні точки – це точки з кодованими нульовими координатами. Наприклад, для трьохфакторного експерименту це точка (0;0;0). На рисунках нижче це точки 9 і 15.

Таким чином, використовуються 5 рівнів: +1; -1; + l ; - l ; 0



Властивості ортогональності та ротатабельності в композиційному плані не можуть виконуватися одночасно. Тому існує два види композиційних планів, в залежності від того, яка з цих двох властивостей виконується. Виконання тієї чи іншої властивості забезпечується певним вибором (розрахунком) l .

В цій лабораторній роботі розглянуто побудову центрального **ротатабельного** плану.

2. Розрахунок величини зоряного плеча для рототабельного центрального композиційного плану (РЦКП)

Як було сказано, розрахунок коефіцієнтів проводиться двома основними методами: в натуральних значеннях і в кодованих. В РЦКП властивість ортогональності не виконується, тому для кодованих значень спрощення формул незначні. Пропонується розраховувати коефіцієнти першим методом.

Всі зоряні точки знаходяться на однаковій відстані від центру експерименту, тому $l = \sqrt{k}$, де k – кількість факторів. Відповідно, для 3-факторного експерименту $l = 1.73$.

Таким чином, матриця планування при п'ятирівневому трьохфакторному експерименті з урахуванням квадратичних членів прийме вигляд:

N	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	y_i
1	-1	-1	-1	...
2	-1	-1	1	...
3	-1	1	-1	...
4	-1	1	1	...
5	1	-1	-1	...
6	1	-1	1	...
7	1	1	-1	...
8	1	1	1	...
9	-1.73	0	0	...
10	1.73	0	0	...
11	0	-1.73	0	...
12	0	1.73	0	...
13	0	0	-1.73	...
14	0	0	1.73	...

Примітка. При розрахунку коефіцієнтів рівняння регресії в даній лабораторній роботі використовуються **натуральні** значення факторів. Для того, щоб отримати значення факторів для зоряних точок і для нульової точки, необхідно використати формули з лабораторної роботи №1:

$$x_{0i} = \frac{x_{\max i} + x_{\min i}}{2} \quad \Delta x_i = x_{\max i} - x_{0i} = x_{0i} - x_{\min i} \quad x_i = \bar{x}_i \cdot \Delta x_i + x_{0i},$$

де \bar{x}_i - кодоване значення і-го фактору, $[x_{\max i}, x_{\min i}]$ - інтервал варіювання, заданий за варіантом.

Тоді, наприклад, для зоряної точки (-1,73; 0; 0) натуральні значення будуть:

$$x_1 = l \cdot \Delta x + x_0 = 1.73 \cdot \Delta x_1 + x_{01} \quad x_2 = 0 \cdot \Delta x_2 + x_{02} = x_{02} \quad x_3 = 0 \cdot \Delta x_3 + x_{03} = x_{03}.$$

Таким чином, матриця планування при п'ятирівневому трьохфакторному експерименті з урахуванням квадратичних членів для натуральних значень факторів буде мати вигляд:

N	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	y_i
1	$x_{1\min}$	$x_{2\min}$	$x_{3\min}$...
2	$x_{1\min}$	$x_{2\min}$	$x_{3\max}$...
3	$x_{1\min}$	$x_{2\max}$	$x_{3\min}$...
4	$x_{1\min}$	$x_{2\max}$	$x_{3\max}$...
5	$x_{1\max}$	$x_{2\min}$	$x_{3\min}$...
6	$x_{1\max}$	$x_{2\min}$	$x_{3\max}$...
7	$x_{1\max}$	$x_{2\max}$	$x_{3\min}$...
8	$x_{1\max}$	$x_{2\max}$	$x_{3\max}$...
9	$-1.73 \cdot \Delta x_1 + x_{01}$	x_{02}	x_{03}	...
10	$1.73 \cdot \Delta x_1 + x_{01}$	x_{02}	x_{03}	...
11	x_{01}	$-1.73 \cdot \Delta x_1 + x_{02}$	x_{03}	...
12	x_{01}	$1.73 \cdot \Delta x_1 + x_{02}$	x_{03}	...
13	x_{01}	x_{02}	$-1.73 \cdot \Delta x_1 + x_{03}$...
14	x_{01}	x_{02}	$1.73 \cdot \Delta x_1 + x_{03}$...

3. Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії

Для рівняння регресії при $k = 3$ (ПФЕ) з урахуванням ефекту взаємодії і квадратичних членів:

$$\hat{y} = \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123}, b_{11}, b_{22}, b_{33})$$

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2$$

$$\varphi_i = b_0x_{0i} + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} + b_{12}x_{1i}x_{2i} + b_{13}x_{1i}x_{3i} + b_{23}x_{2i}x_{3i} + b_{123}x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_{11}x_{1i}^2 + b_{22}x_{2i}^2 + b_{33}x_{3i}^2$$

Для спрощення розрахунків робимо заміну:

$$b_{12} = b_4 \quad b_{13} = b_5 \quad b_{23} = b_6 \quad b_{123} = b_7 \quad b_{11} = b_8 \quad b_{22} = b_9 \quad b_{33} = b_{10}$$

$$x_{1i}x_{2i} = x_{4i} \quad x_{1i}x_{3i} = x_{5i} \quad x_{2i}x_{3i} = x_{6i} \quad x_{1i}x_{2i}x_{3i} = x_{7i} \quad x_{1i}^2 = x_{8i} \quad x_{2i}^2 = x_{9i} \quad x_{3i}^2 = x_{10i}$$

$$\phi_i = b_0x_{0i} + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} + b_4x_{4i} + b_5x_{5i} + b_6x_{6i} + b_7x_{7i} + b_8x_{8i} + b_9x_{9i} + b_{10}x_{10i}$$

Аналогічно попередній лабораторній роботі знаходимо допоміжні коефіцієнти:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i} = m_{x1} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i} = m_{x2} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{3i} = m_{x3} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{4i} = m_{x4} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{5i} = m_{x5}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{6i} = m_{x6} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{7i} = m_{x7} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i} = a_{12} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{3i} = a_{13} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{4i} = a_{24}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{3i}x_{5i} = a_{35} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i = a_1 \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i = a_2 \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 = a_{11} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = a_{22}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = m_y \quad \text{и.т.д.}$$

Остаточно для коефіцієнтів рівняння регресії отримаємо:

$$b_{10} = \frac{\begin{vmatrix} I & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} & m_{x4} & m_{x5} & m_{x6} & m_{x7} & m_{x8} & m_{x9} & m_y \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{10} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & a_{72} & a_{82} & a_{92} & a_{20} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} & a_{73} & a_{83} & a_{93} & a_{30} \\ m_{x4} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} & a_{74} & a_{84} & a_{94} & a_{40} \\ m_{x5} & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} & a_{75} & a_{85} & a_{95} & a_{50} \\ m_{x6} & a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} & a_{76} & a_{86} & a_{96} & a_{60} \\ m_{x7} & a_{17} & a_{27} & a_{37} & a_{47} & a_{57} & a_{67} & a_{77} & a_{87} & a_{97} & a_{70} \\ m_{x8} & a_{18} & a_{28} & a_{38} & a_{48} & a_{58} & a_{68} & a_{78} & a_{88} & a_{98} & a_{80} \\ m_{x9} & a_{19} & a_{29} & a_{39} & a_{49} & a_{59} & a_{69} & a_{79} & a_{89} & a_{99} & a_{90} \\ m_{x10} & a_{110} & a_{210} & a_{310} & a_{410} & a_{510} & a_{610} & a_{710} & a_{810} & a_{910} & a_{100} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I & m_{x1} & m_{x2} & m_{x3} & m_{x4} & m_{x5} & m_{x6} & m_{x7} & m_{x8} & m_{x9} & m_{x10} \\ m_{x1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{110} \\ m_{x2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & a_{72} & a_{82} & a_{92} & a_{102} \\ m_{x3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} & a_{73} & a_{83} & a_{93} & a_{103} \\ m_{x4} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} & a_{74} & a_{84} & a_{94} & a_{104} \\ m_{x5} & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} & a_{75} & a_{85} & a_{95} & a_{105} \\ m_{x6} & a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} & a_{76} & a_{86} & a_{96} & a_{106} \\ m_{x7} & a_{17} & a_{27} & a_{37} & a_{47} & a_{57} & a_{67} & a_{77} & a_{87} & a_{97} & a_{107} \\ m_{x8} & a_{18} & a_{28} & a_{38} & a_{48} & a_{58} & a_{68} & a_{78} & a_{88} & a_{98} & a_{108} \\ m_{x9} & a_{19} & a_{29} & a_{39} & a_{49} & a_{59} & a_{69} & a_{79} & a_{89} & a_{99} & a_{109} \\ m_{x10} & a_{110} & a_{210} & a_{310} & a_{410} & a_{510} & a_{610} & a_{710} & a_{810} & a_{910} & a_{1010} \end{vmatrix}}$$

Можна помітити, що детермінанти в чисельнику відрізняються лише положенням стовпчика m_y $a_1 \dots a_{10}$.

4. Статистичні перевірки

Теоретичні відомості по статистичним перевіркам представлені в лабораторній роботі №3. Аналогічно проводиться:

1. Оцінка однорідності дисперсії за Кохреном. У випадку неоднорідності дисперсії треба збільшити кількість значень функції відгуку.
2. Перевірка значимості коефіцієнтів за Ст'юdentом. Якщо знаходимо не значимі коефіцієнти, то вони виключаються з рівняння регресії.
3. Перевірка адекватності моделі за Фішером. При неадекватності моделі, необхідно збільшити рівнів або змінити модель рівняння регресії.

5. Приклади виконання лабораторної роботи

Запишемо рівняння регресії з урахуванням квадратичних членів:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2$$

x ₁		x ₂		x ₃	
min	max	min	max	min	max
10	40	-15	35	-15	5

$$f(x_1, x_2, x_3) = 9,9 + 2,7 \cdot x_1 + 0,3 \cdot x_2 + 1,4 \cdot x_3 + 6,8 \cdot x_1 \cdot x_1 + 0,6 \cdot x_2 \cdot x_2 + 3,9 \cdot x_3 \cdot x_3 + 1,6 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_1 \cdot x_3 + 1,7 \cdot x_2 \cdot x_3 + 9,9 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3;$$

Всі зоряні точки знаходяться на однаковій відстані від центру експерименту, тому $l = \sqrt{k}$, де k – кількість факторів, відповідно, для 3-х факторного експерименту $l = 1.73$.

Матриця планування експерименту для РЦКП при k=3 з нормованими значеннями:

N	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1
2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1
4	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
5	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1
7	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1.73	0	0	0	0	0	0	2,9929	0	0
10	1.73	0	0	0	0	0	0	2,9929	0	0
11	0	-1.73	0	0	0	0	0	0	2,9929	0
12	0	1.73	0	0	0	0	0	0	2,9929	0
13	0	0	-1.73	0	0	0	0	0	0	2,9929
14	0	0	1.73	0	0	0	0	0	0	2,9929

$$y_i = f(x_1, x_2, x_3) + \text{random}(10) - 5$$

Матриця планування експерименту для РЦКП при k=3 з натуральними значеннями факторів:

N	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y_1	y_2	y_3	\bar{y}
1	10	-15	-15	-150,00	-150,00	225,00	2250,0	100,00	225,0	225,0	2,4e+04	2,4e+04	2,4e+04	2,4e+04
2	10	35	5	350,00	50	175,00	1750,0	100,00	1225	25	2,0e+04	2,0e+04	2,0e+04	2,0e+04
3	40	-15	5	-600,00	200,00	-75,000	-3000,0	1600,0	225	25,0	-2,0e+04	-2,0e+04	-2,0e+04	-2,0e+04
4	40	35	-15	1400,0	-600,00	-525,00	-21000	1600,0	1225	225	-1,9e+05	-1,9e+05	-1,9e+05	-1,9e+05
5	10	-15	5	-150,00	50,000	-75,000	-750,00	100,00	225	25	-6,8e+03	-6,8e+03	-6,8e+03	-6,8e+03
6	10	35	-15	350	-150,0	-525,00	-5250,0	100,00	1225	225	-5,0e+04	-5,0e+04	-5,0e+04	-5,0e+04
7	40	-15	-15	-600	-600,0	225,00	9000,0	1600,0	225	225	1,0e+05	1,0e+05	1,0e+05	1,0e+05
8	40	35	5	1400	200,0	175,00	7000,0	1600,0	1225	25	8,4e+04	8,4e+04	8,4e+04	8,4e+04
9	50,950	10	-5	509,5	-254,75	-50,000	-2547,5	2595,9	100	25	-6,6e+03	-6,6e+03	-6,6e+03	-6,6e+03
10	-0,950	10	-5	-9,50	4,7500	-50,00	47,5	0,90	100	25	5,4e+02	5,4e+02	5,4e+02	5,4e+02
11	25	53,250	-5	1331,3	-125,00	-266,25	-6656	625	2835	25	-5,8e+04	-5,8e+04	-5,8e+04	-5,8e+04
12	25	-33,250	-5	-831,25	-125,00	166,25	4156	625	1105	25	4,5e+04	4,5e+04	4,5e+04	4,5e+04
13	25	10	12,3	250,00	307,50	123	3075	625	100	151,2	3,6e+04	3,6e+04	3,6e+04	3,6e+04
14	25	10	-22,3	250,00	-557,50	-223	-5575	625	100	497,2	-4,9e+04	-4,9e+04	-4,9e+04	-4,9e+04

Коефіцієнти рівняння регресії:

b0 = -3.6770547919416106

b1 = 18.297138764866645

b2 = 2.617090135350105

b3 = -5.7356126966497705

b4 = 1.5983333338298478

b5 = 0.10244444445719368

b6 = 1.703555555215682

b7 = 9.899977778196815

b8 = 6.488248591695497

b9 = 0.486254797326279

b10 = 3.1996730770462585

Відповідно, рівняння регресії має вигляд:

$$\begin{aligned} y = & -3.6770547919416106 + 18.297138764866645 * x_1 + 2.617090135350105 * x_2 + -5.7356126966497705 * x_3 \\ & + 1.5983333338298478 * x_1 x_2 + 0.10244444445719368 * x_1 x_3 + 1.7035555555215682 * x_2 x_3 \\ & + 9.899977778196815 * x_1 x_2 x_3 + 36.488248591695497 * x_1^2 + 20.486254797326279 * x_2^2 + 23.1996730770462585 * x_3^2 \end{aligned}$$

Виконаємо перевірку (підставимо значення факторів з матриці планування і порівняємо результат з середніми значеннями функції відгуку за строками):

y1 = 24107.364136371718
y2 = 19754.315460055135
y3 = -19535.340129334447
y4 = -194015.07285133185
y5 = -6837.793845326003
y6 = -50003.85989573686
y7 = 100448.15118946029
y8 = 83704.10251326757
y9 = -6562.228879794263
y10 = 538.6361903590326
y11 = -58099.580464676634
y12 = 45156.722109350216
y13 = 36080.287670295475
y14 = -48927.02569381082

Так як отримані значення з невеликим відхиленням співпадають з середніми значеннями y_i , то значення коефіцієнтів рівняння регресії знайдені правильно.

Виконаємо статистичні перевірки: на однорідність дисперсії за критерієм Кохрена, на нуль-гіпотезу за критерієм Ст'юдента і на адекватність моделі за критерієм Фішера.

Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Кохрена

$G_p = 0.20165745856353587$

Визначимо степені свободи: $F_1 = m - 1 = 2$; $F_2 = N = 14$

Рівень значимості: $q = 1 - p = 0,05$.

Табличне значення коефіцієнта Кохрена: $G_t = 0.3346$

Відповідно, виконується умова: $G_p = 0.20165745856353587 < 0.3346 = G_t$ і з ймовірністю 0,95 всі строкові дисперсії однорідні.

Перевірка нуль-гіпотези за критерієм Ст'юдента

Так як число степенів свободи $F_3 = F_1 * F_2 = 28$, то табличне значення критерію Ст'юдента при рівні значимості $q = 1 - p = 0.05$: $t_{\text{табл}} = 2.048$

$t_0 = 32769.182479415416 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_1 = 49709.79249920016 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_2 = 34535.06367349451 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_3 = 32854.075166955576 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_4 = 32854.075166955576 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_5 = 34535.06367349451 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_6 = 49709.79249920016 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_7 = 32769.182479415416 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_8 = 32769.182479415416 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_9 = 32769.182479415416 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

$t_{10} = 32769.182479415416 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий

Відповідно, кількість значимих коефіцієнтів $d = 11$

Перевірка при підстановці в спрощене рівняння регресії:

ys1=24107.364136371718

ys2=19754.315460055135

ys3=-19535.340129334447

ys4=-194015.07285133185

ys5=-6837.793845326003

ys6=-50003.85989573686

ys7=100448.15118946029

ys8=83704.10251326757

ys9=-6562.228879794263

ys10=538.6361903590326

ys11=-58099.580464676634

ys12=45156.722109350216

ys13=36080.287670295475

ys14=-48927.02569381082

Перевірка адекватності моделі за критерієм Фішера

Одержане рівняння регресії необхідно перевірити на адекватність об'єкту, який ми досліджуємо. Для цього необхідно оцінити, на скільки відрізняються середні значення у вихідної величини, отриманої в точках факторного простору, та значення у, отриманих з рівняння регресії в тих самих точках факторного простору. Для цього використовують дисперсію адекватності.

Число степенів свободи: $F_4 = N - d = 3$; $F_3 = F_1 * F_2 = (m - 1) * N = 28$

Рівень значимості: $q = 1 - p = 0,05$.

Табличне значення коефіцієнта Фішера: $F_t = 3.0$

Так як **$F_p = 0.574545323441477 < F_t = 3.0$** , то отримана математична модель з ймовірністю $p = 0.95$ **адекватна** експериментальним даним.

Ще один приклад

$x_{1min} = -10.0$ $x_{1max} = 50.0$
 $x_{2min} = -20.0$ $x_{2max} = 40.0$
 $x_{3min} = -20.0$ $x_{3max} = -15.0$

$f(x_1, x_2, x_3) = 4.5 + 4.2 \cdot x_1 + 7.5 \cdot x_2 + 5.6 \cdot x_3 + 9.9 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_1 \cdot x_3 + 3.1 \cdot x_2 \cdot x_3 + 8.7 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + 2.6 \cdot x_1 \cdot x_1 + 0.1 \cdot x_2 \cdot x_2 + 7.6 \cdot x_3 \cdot x_3$

Рівняння регресії:

$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 + b_{33} \cdot x_3 \cdot x_3;$

Матриця планування експерименту для РЦКП з нормованими значеннями факторів:

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2
-1.0000	-1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
-1.0000	1.0000	1.0000	-1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
-1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	-1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
-1.0000	1.0000	-1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.7300	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.9929	0.0000	0.0000
-1.7300	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.9929	0.0000	0.0000
0.0000	1.7300	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.9929	0.0000
0.0000	-1.7300	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.9929	0.0000
0.0000	0.0000	1.7300	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.9929
0.0000	0.0000	-1.7300	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.9929

Матриця планування експерименту для РЦКП з натуральними значеннями факторів:

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y_1	y_2	y_3	avg y
-10.000	-20.000	-20.000	200.00	200.00	400.00	-4000.0	100.00	400.00	400.00	-28477,50	-28484,50	-28481,50	-28481,1666667
-10.000	40.000	-15.000	-400.00	150.00	-600.00	6000.0	100.00	1600.0	225.00	48736,50	48730,50	48732,50	48733,1666667
50.000	-20.000	-15.000	-1000.0	-750.00	300.00	15000	2500.0	400.00	225.00	129530,50	129536,50	129530,50	129532,5000000
50.000	40.000	-20.000	2000.0	-1000.0	-800.00	-40000	2500.0	1600.0	400.00	-320875,50	-320876,50	-320873,50	-320875,1666667
-10.000	-20.000	-15.000	200.00	150.00	300.00	-3000.0	100.00	400.00	225.00	-21408,50	-21409,50	-21406,50	-21408,1666667
-10.000	40.000	-20.000	-400.00	200.00	-800.00	8000.0	100.00	1600.0	400.00	66828,50	66826,50	66834,50	66829,8333333
50.000	-20.000	-20.000	-1000.0	-1000.0	400.00	20000	2500.0	400.00	400.00	174573,50	174567,50	174570,50	174570,5000000
50.000	40.000	-15.000	2000.0	-750.00	-600.00	-30000	2500.0	1600.0	225.00	-234483,50	-234487,50	-234483,50	-234484,8333333
71.900	10.000	-17.500	719.00	-1258.3	-175.00	-12583	5169.6	100.00	306.25	-87210,66	-87208,66	-87212,66	-87210,6590000
-31.900	10.000	-17.500	-319.00	558.25	-175.00	5582.5	1017.6	100.00	306.25	49867,43	49868,43	49864,43	49866,7643333
20.000	61.900	-17.500	1238.0	-350.00	-1083.3	-21665	400.00	3831.6	306.25	-175488,96	-175482,96	-175483,96	-175485,2973333
20.000	-41.900	-17.500	-838.00	-350.00	733.25	14665	400.00	1755.6	306.25	124676,69	124674,69	124680,69	124677,3526667
20.000	10.000	-13.175	200.00	-263.50	-131.75	-2635.0	400.00	100.00	173.58	-18969,04	-18969,04	-18977,04	-18971,7089167
20.000	10.000	-21.825	200.00	-436.50	-218.25	-4365.0	400.00	100.00	476.33	-32088,63	-32093,63	-32094,63	-32092,2989167

Коефіцієнти рівняння регресії:

$b_0 = -7459.989862627521$

b1 = 11.22647667760495
b2 = 11.070954545640687
b3 = -892.3252382127408
b4 = 9.898703331701565
b5 = 0.2944444593591177
b6 = 3.099999985704347
b7 = 8.69988952192009
b8 = 2.4213800134087617
b9 = -0.07787757065564462
b10 = -18.058920119772047

Отримане рівняння регресії:

$$y = -7459.989862627521 + (11.22647667760495)*x_1 + (11.070954545640687)*x_2 + (-892.3252382127408)*x_3 + (9.898703331701565)*x_1*x_2 + (0.2944444593591177)*x_1*x_3 + (3.099999985704347)*x_2*x_3 + (8.69988952192009)*x_1*x_2*x_3 + (2.4213800134087617)*x_1*x_1 + (-0.07787757065564462)*x_2*x_2 + (-18.058920119772047)*x_3*x_3$$

Виконаємо перевірку, підставивши значення факторів з матриці планування і порівняємо результат з середніми значеннями функцій відгуку:

y1 = -28480,678566 => -28481,166667 = avgY1
y2 = 48733,761463 => 48733,166667 = avgY2
y3 = 129532,641580 => 129532,500000 = avgY3
y4 = -320876,663871 => -320875,166667 = avgY4
y5 = -21406,826436 => -21408,166667 = avgY5
y6 = 66829,577903 => 66829,833333 = avgY6
y7 = 174569,793244 => 174570,500000 = avgY7
y8 = -234485,472710 => -234484,833333 = avgY8
y9 = -87209,323641 => -87210,659000 = avgY9
y10 = 49865,295732 => 49866,764333 = avgY10
y11 = -175484,507647 => -175485,297333 = avgY11
y12 = 124676,429297 => 124677,352667 = avgY12
y13 = -18972,759500 => -18971,708917 = avgY13
y14 = -32091,382019 => -32092,298917 = avgY14

Так як значення співпадають, то коефіцієнти рівняння регресії розраховані правильно.

Статистичні перевірки:

Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Кохрена:

Gp = 0.16452442159383032

Кількість степенів свободи: F1 = m - 1 = 2; F2 = N = 14

Рівень значимості: q = 1 - p = 0,05.

Табличне значення коефіцієнту Кохрена: Gt = 0.3346

Gp = 0.16452442159383032 < 0.3346 = Gt, тому з ймовірністю 0,95 все строкові дисперсії однорідні.

Перевірка нуль-гіпотези за критерієм Ст'юдента:

Так як число степенів свободи $F3 = F1 \cdot F2 = 28$, то табличне значення критерію Ст'юдента при рівні значимості $q = 1 - p = 0.05$: $t_{табл} = 2.048$

$t_0 = 31872.666766804497 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_1 = 39418.20107252923 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_2 = 69522.59281390563 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_3 = 98291.27744062555 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_4 = 98291.27744062555 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_5 = 69522.59281390563 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_6 = 39418.20107252923 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_7 = 31872.666766804497 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_8 = 31872.666766804497 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_9 = 31872.666766804497 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
 $t_{10} = 31872.666766804497 \Rightarrow$ коефіцієнт значимий
Кількість значимих коефіцієнтів: $d = 11$

Рівняння регресії з урахуванням незначимих коефіцієнтів:

$$y' = -7459.989862627521 + (11.22647667760495) \cdot x_1 + (11.070954545640687) \cdot x_2 + (-892.3252382127408) \cdot x_3 +$$
$$(9.898703331701565) \cdot x_1 x_2 + (0.2944444593591177) \cdot x_1 x_3 + (3.099999985704347) \cdot x_2 x_3 + (8.69988952192009) \cdot x_1 x_2 x_3 +$$
$$(2.4213800134087617) \cdot x_1^2 + (-0.07787757065564462) \cdot x_2^2 + (-18.058920119772047) \cdot x_3^2$$

Перевірка при підстановці у модифіковане рівняння:

$y'_1 = -28480,678566 \Rightarrow -28481,166667 = \text{avg}Y_1$
 $y'_2 = 48733,761463 \Rightarrow 48733,166667 = \text{avg}Y_2$
 $y'_3 = 129532,641580 \Rightarrow 129532,500000 = \text{avg}Y_3$
 $y'_4 = -320876,663871 \Rightarrow -320875,166667 = \text{avg}Y_4$
 $y'_5 = -21406,826436 \Rightarrow -21408,166667 = \text{avg}Y_5$
 $y'_6 = 66829,577903 \Rightarrow 66829,833333 = \text{avg}Y_6$
 $y'_7 = 174569,793244 \Rightarrow 174570,500000 = \text{avg}Y_7$
 $y'_8 = -234485,472710 \Rightarrow -234484,833333 = \text{avg}Y_8$
 $y'_9 = -87209,323641 \Rightarrow -87210,659000 = \text{avg}Y_9$
 $y'_{10} = 49865,295732 \Rightarrow 49866,764333 = \text{avg}Y_{10}$
 $y'_{11} = -175484,507647 \Rightarrow -175485,297333 = \text{avg}Y_{11}$
 $y'_{12} = 124676,429297 \Rightarrow 124677,352667 = \text{avg}Y_{12}$
 $y'_{13} = -18972,759500 \Rightarrow -18971,708917 = \text{avg}Y_{13}$
 $y'_{14} = -32091,382019 \Rightarrow -32092,298917 = \text{avg}Y_{14}$

Перевірка адекватності моделі за критерієм Фішера:

$F_p = 2.10282020718806$

Кількість степенів свободи: $F4 = N - d = 3$; $F3 = F1 \cdot F2 = (m-1) \cdot N = 28$

Рівень значимості: $q = 1 - p = 0,05$.

Табличне значення коефіцієнту Фішера: $F_t = 3.0$

$F_p = 2.10282020718806 < 3.0 = F_t$, тому отримана математична модель з ймовірністю $p = 0.95$ адекватна експериментальним даним.

Таблиця варіантів

№ варіанту	x ₁		x ₂		x ₃		f(x ₁ , x ₂ , x ₃)
	min	max	min	max	min	max	
101	-10	50	20	60	50	55	$1,5+1,5*x_1+6,8*x_2+3,2*x_3+2,7*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+1,2*x_3*x_3+6,2*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+2,4*x_2*x_3+6,1*x_1*x_2*x_3$
102	20	70	-20	40	70	80	$2,9+3,9*x_1+6,7*x_2+4,4*x_3+9,7*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+7,5*x_3*x_3+1,0*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+0,8*x_2*x_3+4,2*x_1*x_2*x_3$
103	-20	30	30	80	30	45	$0,7+5,4*x_1+4,8*x_2+5,3*x_3+1,1*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+8,9*x_3*x_3+8,1*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+3,5*x_2*x_3+1,9*x_1*x_2*x_3$
104	15	45	-25	10	45	50	$8,7+4,3*x_1+1,2*x_2+2,2*x_3+0,4*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+6,4*x_3*x_3+1,1*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+9,2*x_2*x_3+1,2*x_1*x_2*x_3$
105	-30	20	15	50	20	35	$8,6+8,5*x_1+7,9*x_2+7,3*x_3+0,2*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+6,1*x_3*x_3+7,2*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+5,6*x_2*x_3+9,3*x_1*x_2*x_3$
106	10	40	25	45	40	45	$6,7+9,1*x_1+1,6*x_2+9,1*x_3+3,3*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+6,1*x_3*x_3+8,5*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+6,6*x_2*x_3+8,1*x_1*x_2*x_3$
107	-5	15	-15	35	15	30	$3,9+5,6*x_1+7,9*x_2+7,3*x_3+2,0*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+4,2*x_3*x_3+1,5*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+9,9*x_2*x_3+5,3*x_1*x_2*x_3$
108	-30	0	-35	10	0	20	$5,4+3,6*x_1+6,6*x_2+7,7*x_3+8,0*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+2,5*x_3*x_3+5,9*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+7,2*x_2*x_3+5,3*x_1*x_2*x_3$
109	-20	15	10	60	15	35	$3,2+9,1*x_1+4,1*x_2+3,7*x_3+2,1*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+4,9*x_3*x_3+3,7*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+1,0*x_2*x_3+0,3*x_1*x_2*x_3$
110	-25	-5	-30	45	-5	5	$8,6+6,5*x_1+9,5*x_2+4,2*x_3+8,0*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+2,3*x_3*x_3+0,6*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+5,9*x_2*x_3+3,9*x_1*x_2*x_3$
111	10	60	-70	-10	60	70	$6,7+7,1*x_1+7,8*x_2+7,4*x_3+0,1*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+7,1*x_3*x_3+8,2*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+9,5*x_2*x_3+6,6*x_1*x_2*x_3$
112	-40	20	-35	15	20	25	$2,2+1,6*x_1+9,2*x_2+9,5*x_3+0,8*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+6,5*x_3*x_3+0,2*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+8,7*x_2*x_3+9,1*x_1*x_2*x_3$
113	-15	30	5	40	5	25	$6,7+2,8*x_1+1,3*x_2+8,9*x_3+6,3*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+8,1*x_3*x_3+5,4*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+4,9*x_2*x_3+5,2*x_1*x_2*x_3$
114	-25	75	25	65	25	40	$7,7+2,8*x_1+0,5*x_2+2,6*x_3+1,4*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+7,1*x_3*x_3+5,0*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+9,3*x_2*x_3+4,1*x_1*x_2*x_3$
115	10	50	-20	60	-20	20	$8,8+8,0*x_1+5,4*x_2+8,0*x_3+0,2*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+2,9*x_3*x_3+3,4*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+3,5*x_2*x_3+0,3*x_1*x_2*x_3$
116	-10	50	-20	60	-20	5	$8,4+8,5*x_1+5,7*x_2+9,7*x_3+8,9*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+0,5*x_3*x_3+2,0*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+4,3*x_2*x_3+9,7*x_1*x_2*x_3$

117	20	70	25	65	25	35	$0,6+4,0*x_1+2,8*x_2+4,7*x_3+3,1*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+5,4*x_3*x_3+5,7*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+8,8*x_2*x_3+0,1*x_1*x_2*x_3$
118	-20	30	5	40	5	10	$0,6+8,0*x_1+8,8*x_2+9,2*x_3+4,7*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+1,1*x_3*x_3+6,3*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+1,3*x_2*x_3+2,9*x_1*x_2*x_3$
119	15	45	-35	15	-35	-5	$6,4+6,1*x_1+7,8*x_2+1,5*x_3+6,6*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+8,8*x_3*x_3+0,9*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+5,7*x_2*x_3+2,7*x_1*x_2*x_3$
120	-30	20	-70	-10	-70	-40	$2,1+1,7*x_1+6,8*x_2+6,6*x_3+9,5*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+3,9*x_3*x_3+3,0*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+4,5*x_2*x_3+1,8*x_1*x_2*x_3$
121	10	40	-30	45	-30	-10	$5,9+4,0*x_1+3,5*x_2+8,2*x_3+4,3*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+9,3*x_3*x_3+6,1*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+8,6*x_2*x_3+3,1*x_1*x_2*x_3$
122	-5	15	10	60	10	20	$9,2+6,0*x_1+3,2*x_2+3,2*x_3+6,6*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+4,9*x_3*x_3+6,9*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+3,5*x_2*x_3+0,9*x_1*x_2*x_3$
123	-30	0	-25	10	-25	-5	$0,1+1,6*x_1+5,7*x_2+2,1*x_3+5,6*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+5,7*x_3*x_3+8,2*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+1,7*x_2*x_3+0,1*x_1*x_2*x_3$
124	-20	15	-15	35	-15	-10	$8,8+8,3*x_1+4,9*x_2+1,2*x_3+0,5*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+9,7*x_3*x_3+2,1*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+5,4*x_2*x_3+1,1*x_1*x_2*x_3$
125	-25	-5	25	45	25	30	$6,6+1,0*x_1+7,5*x_2+6,3*x_3+0,5*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+0,5*x_3*x_3+3,1*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+4,0*x_2*x_3+1,4*x_1*x_2*x_3$
126	10	60	15	50	15	20	$3,3+7,7*x_1+3,8*x_2+1,1*x_3+2,9*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+9,6*x_3*x_3+4,3*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+4,9*x_2*x_3+3,2*x_1*x_2*x_3$
127	-40	20	-25	10	-25	-10	$3,4+1,8*x_1+3,0*x_2+7,7*x_3+1,6*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+0,7*x_3*x_3+3,4*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+8,8*x_2*x_3+1,8*x_1*x_2*x_3$
128	-15	30	30	80	30	35	$4,4+8,3*x_1+3,5*x_2+8,0*x_3+2,9*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+2,3*x_3*x_3+3,4*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+9,3*x_2*x_3+8,3*x_1*x_2*x_3$
129	-25	75	-20	40	-20	-15	$1,4+4,0*x_1+9,3*x_2+7,9*x_3+7,7*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+0,7*x_3*x_3+2,9*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+3,9*x_2*x_3+1,0*x_1*x_2*x_3$
130	10	50	20	60	20	25	$6,2+6,0*x_1+6,5*x_2+3,2*x_3+9,9*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+3,6*x_3*x_3+2,3*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+2,9*x_2*x_3+7,4*x_1*x_2*x_3$
201	-10	50	-20	40	-20	-15	$4,5+4,2*x_1+7,5*x_2+5,6*x_3+2,6*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+7,6*x_3*x_3+9,9*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+3,1*x_2*x_3+8,7*x_1*x_2*x_3$
202	20	70	30	80	30	35	$7,9+3,9*x_1+8,7*x_2+6,8*x_3+6,0*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+7,8*x_3*x_3+2,0*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+0,5*x_2*x_3+5,1*x_1*x_2*x_3$
203	-20	30	-25	10	-25	-20	$3,7+6,3*x_1+8,8*x_2+5,9*x_3+8,9*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+8,8*x_3*x_3+4,4*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+2,0*x_2*x_3+8,0*x_1*x_2*x_3$
204	15	45	15	50	15	30	$3,5+6,6*x_1+3,9*x_2+1,8*x_3+5,3*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+4,3*x_3*x_3+6,0*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+9,4*x_2*x_3+3,0*x_1*x_2*x_3$

205	-30	20	25	45	25	30	$10,0+6,7*x_1+6,4*x_2+8,0*x_3+6,2*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+7,6*x_3*x_3+1,2*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+1,1*x_2*x_3+2,8*x_1*x_2*x_3$
206	10	40	-15	35	-15	5	$9,9+2,7*x_1+0,3*x_2+1,4*x_3+6,8*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+3,9*x_3*x_3+1,6*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+1,7*x_2*x_3+9,9*x_1*x_2*x_3$
207	-5	15	-35	10	-35	-10	$4,6+6,1*x_1+9,6*x_2+1,2*x_3+0,3*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+3,8*x_3*x_3+7,7*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+5,3*x_2*x_3+7,1*x_1*x_2*x_3$
208	-30	0	10	60	10	35	$8,0+5,3*x_1+0,5*x_2+5,6*x_3+3,2*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+4,1*x_3*x_3+8,9*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+1,5*x_2*x_3+1,2*x_1*x_2*x_3$
209	-20	15	-30	45	-30	-15	$5,4+3,4*x_1+9,6*x_2+6,8*x_3+3,1*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+1,2*x_3*x_3+0,8*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+9,9*x_2*x_3+4,5*x_1*x_2*x_3$
210	-25	-5	-70	-10	-25	-5	$4,6+5,6*x_1+7,0*x_2+3,9*x_3+1,6*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+0,5*x_3*x_3+9,6*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+2,5*x_2*x_3+3,7*x_1*x_2*x_3$
211	10	60	-35	15	10	15	$3,8+6,4*x_1+4,8*x_2+6,9*x_3+9,0*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+5,2*x_3*x_3+2,6*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+0,6*x_2*x_3+1,8*x_1*x_2*x_3$
212	-40	20	5	40	-40	-20	$5,4+2,4*x_1+7,3*x_2+9,6*x_3+2,5*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+8,2*x_3*x_3+1,7*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+0,6*x_2*x_3+9,3*x_1*x_2*x_3$
213	-15	30	25	65	-15	-5	$6,7+6,5*x_1+1,3*x_2+6,5*x_3+2,4*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+9,6*x_3*x_3+2,6*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+5,8*x_2*x_3+2,8*x_1*x_2*x_3$
214	-25	75	-20	60	-25	-10	$9,1+2,2*x_1+5,9*x_2+7,9*x_3+5,6*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+3,0*x_3*x_3+2,2*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+8,8*x_2*x_3+3,6*x_1*x_2*x_3$
215	10	50	-20	60	10	15	$7,2+5,5*x_1+6,3*x_2+3,1*x_3+4,6*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+3,2*x_3*x_3+4,3*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+8,0*x_2*x_3+7,0*x_1*x_2*x_3$
216	-10	50	25	65	-10	15	$5,6+8,0*x_1+4,8*x_2+6,2*x_3+5,9*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+8,7*x_3*x_3+2,0*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+1,0*x_2*x_3+3,0*x_1*x_2*x_3$
217	20	70	5	40	20	45	$3,1+6,3*x_1+9,8*x_2+5,5*x_3+2,5*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+1,0*x_3*x_3+3,5*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+7,9*x_2*x_3+8,7*x_1*x_2*x_3$
218	-20	30	-35	15	-20	5	$5,4+8,1*x_1+7,5*x_2+9,7*x_3+5,2*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+4,7*x_3*x_3+8,1*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+7,4*x_2*x_3+0,1*x_1*x_2*x_3$
219	15	45	-70	-10	15	30	$9,1+3,9*x_1+5,3*x_2+4,6*x_3+4,8*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+3,6*x_3*x_3+7,0*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+5,7*x_2*x_3+2,5*x_1*x_2*x_3$
220	-30	20	-30	45	-30	-15	$5,7+10,0*x_1+2,6*x_2+3,6*x_3+0,1*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+3,6*x_3*x_3+8,5*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+2,2*x_2*x_3+5,7*x_1*x_2*x_3$
221	10	40	10	60	10	15	$3,6+8,8*x_1+4,8*x_2+5,1*x_3+5,0*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+7,6*x_3*x_3+2,2*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+3,2*x_2*x_3+7,1*x_1*x_2*x_3$
222	-5	15	-25	10	-5	20	$9,1+1,8*x_1+6,5*x_2+8,7*x_3+2,0*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+8,6*x_3*x_3+8,6*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+0,3*x_2*x_3+9,4*x_1*x_2*x_3$

223	-30	0	-15	35	-30	-25	$8,2+4,4*x_1+0,8*x_2+1,2*x_3+7,4*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+8,3*x_3*x_3+1,1*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+4,7*x_2*x_3+9,8*x_1*x_2*x_3$
224	-20	15	25	45	-20	-15	$0,4+1,8*x_1+6,2*x_2+9,1*x_3+3,7*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+9,0*x_3*x_3+1,9*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+9,9*x_2*x_3+4,7*x_1*x_2*x_3$
225	-25	-5	15	50	-25	-15	$3,5+6,6*x_1+5,3*x_2+5,0*x_3+5,1*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+7,2*x_3*x_3+1,4*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+4,2*x_2*x_3+7,7*x_1*x_2*x_3$
226	10	60	-25	10	10	15	$1,9+7,1*x_1+0,4*x_2+3,6*x_3+3,8*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+2,8*x_3*x_3+7,4*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+2,7*x_2*x_3+3,0*x_1*x_2*x_3$
227	-40	20	30	80	-40	-25	$1,7+2,8*x_1+9,7*x_2+2,9*x_3+4,9*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+0,9*x_3*x_3+3,2*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+6,8*x_2*x_3+2,8*x_1*x_2*x_3$
228	-15	30	-20	40	-15	-5	$8,7+6,8*x_1+3,8*x_2+5,0*x_3+7,9*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+3,2*x_3*x_3+5,8*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+1,5*x_2*x_3+1,4*x_1*x_2*x_3$
229	-25	75	20	60	-25	-5	$4,8+7,9*x_1+5,4*x_2+7,6*x_3+5,1*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+7,7*x_3*x_3+3,6*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+6,2*x_2*x_3+5,7*x_1*x_2*x_3$
230	10	50	-15	45	10	15	$2,6+1,3*x_1+4,7*x_2+2,7*x_3+4,9*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+8,9*x_3*x_3+2,3*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+4,5*x_2*x_3+9,3*x_1*x_2*x_3$
301	-10	50	20	60	-10	5	$7,1+9,5*x_1+7,9*x_2+4,9*x_3+1,5*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+9,7*x_3*x_3+1,6*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+3,8*x_2*x_3+4,9*x_1*x_2*x_3$
302	20	70	-15	45	20	35	$6,6+3,3*x_1+9,2*x_2+5,8*x_3+7,5*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+1,9*x_3*x_3+5,7*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+6,5*x_2*x_3+3,7*x_1*x_2*x_3$
303	-20	30	-20	40	-20	-10	$6,1+5,4*x_1+0,2*x_2+7,4*x_3+8,8*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+5,0*x_3*x_3+4,5*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+4,7*x_2*x_3+2,6*x_1*x_2*x_3$
304	15	45	30	80	15	45	$0,3+4,1*x_1+2,8*x_2+7,8*x_3+1,4*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+2,4*x_3*x_3+9,7*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+4,4*x_2*x_3+3,4*x_1*x_2*x_3$
305	-30	20	-25	10	-30	-15	$3,8+8,8*x_1+9,8*x_2+1,3*x_3+3,1*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+10,0*x_3*x_3+9,0*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+8,6*x_2*x_3+7,5*x_1*x_2*x_3$
306	10	40	15	50	10	30	$1,7+4,9*x_1+2,5*x_2+3,4*x_3+6,3*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+1,2*x_3*x_3+4,8*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+2,0*x_2*x_3+0,5*x_1*x_2*x_3$
307	-5	15	25	45	15	45	$6,8+1,7*x_1+5,7*x_2+9,9*x_3+8,9*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+6,1*x_3*x_3+9,9*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+3,2*x_2*x_3+8,4*x_1*x_2*x_3$
308	-30	0	-15	35	-30	35	$9,6+8,8*x_1+9,2*x_2+6,9*x_3+7,5*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+6,9*x_3*x_3+7,4*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+5,9*x_2*x_3+10,0*x_1*x_2*x_3$
309	-20	15	-35	10	10	20	$4,3+8,4*x_1+6,4*x_2+5,4*x_3+4,1*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+7,4*x_3*x_3+1,0*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+5,6*x_2*x_3+2,1*x_1*x_2*x_3$
310	-25	-5	10	60	-5	60	$0,2+6,7*x_1+6,3*x_2+7,3*x_3+5,7*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+3,4*x_3*x_3+8,3*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+6,7*x_2*x_3+8,8*x_1*x_2*x_3$

311	10	60	-30	45	-30	45	$0,6+5,3*x_1+1,4*x_2+4,9*x_3+4,1*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+8,4*x_3*x_3+7,8*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+9,3*x_2*x_3+7,1*x_1*x_2*x_3$
312	-40	20	-70	-10	-20	20	$0,4+0,3*x_1+7,0*x_2+6,9*x_3+1,5*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+0,8*x_3*x_3+2,0*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+8,1*x_2*x_3+8,7*x_1*x_2*x_3$
313	-15	30	-35	15	-25	5	$9,1+8,1*x_1+9,3*x_2+9,7*x_3+1,9*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+3,1*x_3*x_3+6,8*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+1,3*x_2*x_3+8,4*x_1*x_2*x_3$
314	-25	75	5	40	15	25	$5,5+6,4*x_1+0,6*x_2+2,7*x_3+1,9*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+0,7*x_3*x_3+1,8*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+6,0*x_2*x_3+4,8*x_1*x_2*x_3$
315	10	50	25	65	50	65	$7,9+2,1*x_1+5,3*x_2+3,0*x_3+8,1*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+8,4*x_3*x_3+7,2*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+2,3*x_2*x_3+6,4*x_1*x_2*x_3$
316	-10	50	-20	60	50	55	$7,8+9,6*x_1+8,7*x_2+3,1*x_3+0,3*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+7,3*x_3*x_3+4,6*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+5,7*x_2*x_3+5,4*x_1*x_2*x_3$
317	-10	50	20	60	-10	10	$2,4+4,8*x_1+2,5*x_2+8,5*x_3+9,3*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+4,5*x_3*x_3+9,0*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+5,4*x_2*x_3+5,2*x_1*x_2*x_3$
318	20	70	-15	45	20	35	$2,4+0,5*x_1+6,0*x_2+10,0*x_3+4,2*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+2,2*x_3*x_3+0,8*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+7,2*x_2*x_3+4,7*x_1*x_2*x_3$
319	-20	30	20	60	-20	-5	$0,5+10,0*x_1+5,2*x_2+6,6*x_3+0,4*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+5,2*x_3*x_3+6,2*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+4,0*x_2*x_3+4,6*x_1*x_2*x_3$
320	15	45	-15	45	15	20	$3,3+7,8*x_1+2,9*x_2+7,7*x_3+8,9*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+5,6*x_3*x_3+1,1*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+1,1*x_2*x_3+2,7*x_1*x_2*x_3$
321	-30	20	-20	40	-30	-15	$7,3+8,8*x_1+1,3*x_2+9,1*x_3+2,1*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+2,1*x_3*x_3+4,6*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+4,1*x_2*x_3+7,2*x_1*x_2*x_3$
322	10	40	30	80	10	20	$2,1+1,1*x_1+0,5*x_2+4,2*x_3+8,6*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+2,8*x_3*x_3+1,0*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+0,9*x_2*x_3+2,4*x_1*x_2*x_3$
323	-5	15	-25	10	15	45	$5,0+4,7*x_1+3,6*x_2+6,4*x_3+6,8*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+5,3*x_3*x_3+3,2*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+2,7*x_2*x_3+0,1*x_1*x_2*x_3$
324	-30	0	15	50	-30	35	$3,6+8,2*x_1+3,8*x_2+8,7*x_3+2,4*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+6,5*x_3*x_3+1,8*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+9,6*x_2*x_3+4,8*x_1*x_2*x_3$
325	-20	15	25	45	10	20	$9,9+9,0*x_1+6,3*x_2+5,3*x_3+9,7*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+9,5*x_3*x_3+6,3*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+3,7*x_2*x_3+5,9*x_1*x_2*x_3$
326	-25	-5	-15	35	-5	60	$8,4+0,4*x_1+1,5*x_2+9,3*x_3+9,5*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+2,2*x_3*x_3+1,1*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+9,3*x_2*x_3+3,7*x_1*x_2*x_3$
327	10	60	-35	10	-30	45	$6,7+2,0*x_1+2,4*x_2+1,6*x_3+5,7*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+2,6*x_3*x_3+8,7*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+3,1*x_2*x_3+1,3*x_1*x_2*x_3$
328	-40	20	10	60	-20	20	$9,6+8,9*x_1+8,6*x_2+2,6*x_3+6,4*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+7,2*x_3*x_3+7,9*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+9,8*x_2*x_3+8,0*x_1*x_2*x_3$

329	-15	30	-30	45	-25	5	$2,3+1,6*x_1+4,7*x_2+5,0*x_3+2,3*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+9,4*x_3*x_3+7,3*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+4,2*x_2*x_3+9,6*x_1*x_2*x_3$
330	-25	75	-70	-10	15	25	$6,1+2,1*x_1+3,7*x_2+5,6*x_3+4,5*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+3,1*x_3*x_3+4,5*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+9,9*x_2*x_3+8,7*x_1*x_2*x_3$
401	10	50	-35	15	50	65	$0,6+9,1*x_1+7,5*x_2+6,5*x_3+7,4*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+10,0*x_3*x_3+6,6*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+6,3*x_2*x_3+1,1*x_1*x_2*x_3$
402	-10	50	5	40	50	55	$6,4+0,1*x_1+0,8*x_2+8,8*x_3+9,3*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+8,0*x_3*x_3+5,0*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+6,1*x_2*x_3+6,1*x_1*x_2*x_3$
403	-15	30	-35	15	-25	5	$2,6+5,3*x_1+4,2*x_2+4,9*x_3+1,4*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+2,9*x_3*x_3+0,1*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+4,4*x_2*x_3+5,2*x_1*x_2*x_3$
404	-25	75	5	40	15	25	$6,7+3,2*x_1+7,5*x_2+1,5*x_3+3,7*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+3,8*x_3*x_3+0,6*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+3,7*x_2*x_3+0,3*x_1*x_2*x_3$
405	10	50	25	65	50	65	$4,0+7,4*x_1+7,5*x_2+8,6*x_3+2,7*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+0,7*x_3*x_3+6,2*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+5,6*x_2*x_3+1,2*x_1*x_2*x_3$
406	-10	50	-20	60	50	55	$7,5+2,9*x_1+6,5*x_2+5,9*x_3+1,0*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+1,0*x_3*x_3+7,3*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+1,4*x_2*x_3+9,9*x_1*x_2*x_3$
407	-10	50	20	60	-10	-5	$0,7+5,5*x_1+6,2*x_2+7,6*x_3+6,2*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+7,9*x_3*x_3+4,7*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+5,4*x_2*x_3+5,5*x_1*x_2*x_3$
408	20	70	-15	45	20	25	$2,8+3,1*x_1+9,9*x_2+1,7*x_3+1,3*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+8,9*x_3*x_3+3,0*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+8,9*x_2*x_3+4,2*x_1*x_2*x_3$
409	-20	30	20	60	-20	-5	$4,5+2,6*x_1+1,8*x_2+3,3*x_3+7,3*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+4,1*x_3*x_3+0,3*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+7,8*x_2*x_3+7,1*x_1*x_2*x_3$
410	15	45	-15	45	15	20	$4,6+8,1*x_1+0,6*x_2+9,5*x_3+9,8*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+0,4*x_3*x_3+9,2*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+4,0*x_2*x_3+4,0*x_1*x_2*x_3$
411	-30	20	-20	40	-30	-20	$5,4+3,0*x_1+2,3*x_2+4,4*x_3+4,3*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+8,6*x_3*x_3+2,1*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+6,0*x_2*x_3+2,0*x_1*x_2*x_3$
412	10	40	30	80	10	20	$9,4+1,9*x_1+2,4*x_2+7,6*x_3+2,5*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+6,4*x_3*x_3+7,7*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+8,6*x_2*x_3+4,4*x_1*x_2*x_3$
413	20	60	-5	15	-25	-5	$0,3+9,3*x_1+2,2*x_2+8,0*x_3+9,1*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+2,0*x_3*x_3+9,7*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+0,5*x_2*x_3+6,3*x_1*x_2*x_3$
414	-15	45	-30	0	10	60	$3,6+3,9*x_1+10,0*x_2+8,1*x_3+4,9*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+8,3*x_3*x_3+3,2*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+8,6*x_2*x_3+6,9*x_1*x_2*x_3$
415	-20	40	-20	15	-40	20	$7,6+3,9*x_1+0,9*x_2+5,7*x_3+8,7*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+3,8*x_3*x_3+5,6*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+4,2*x_2*x_3+1,5*x_1*x_2*x_3$
501	30	80	-25	-5	-15	30	$0,9+6,1*x_1+5,8*x_2+9,6*x_3+7,3*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+7,5*x_3*x_3+3,6*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+3,3*x_2*x_3+2,7*x_1*x_2*x_3$

502	-25	10	10	60	-25	75	$0,2+7,6*x_1+3,3*x_2+8,5*x_3+8,6*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+9,8*x_3*x_3+0,4*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+7,2*x_2*x_3+2,9*x_1*x_2*x_3$
503	15	50	-40	20	10	50	$0,1+10,0*x_1+9,1*x_2+9,0*x_3+8,6*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+8,8*x_3*x_3+8,1*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+7,4*x_2*x_3+2,8*x_1*x_2*x_3$
504	25	45	-15	30	-10	50	$8,0+6,1*x_1+9,8*x_2+6,6*x_3+1,3*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+7,3*x_3*x_3+2,5*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+7,6*x_2*x_3+9,8*x_1*x_2*x_3$
505	-15	35	-25	75	-15	30	$8,3+1,9*x_1+4,3*x_2+0,7*x_3+4,3*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+3,2*x_3*x_3+9,5*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+5,2*x_2*x_3+6,6*x_1*x_2*x_3$
506	-35	10	10	50	-25	75	$6,3+1,4*x_1+4,5*x_2+0,9*x_3+1,2*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+1,5*x_3*x_3+3,1*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+1,8*x_2*x_3+3,2*x_1*x_2*x_3$
507	10	60	-10	50	10	50	$6,0+6,1*x_1+3,5*x_2+1,8*x_3+1,4*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+7,2*x_3*x_3+5,0*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+6,1*x_2*x_3+7,4*x_1*x_2*x_3$
508	-30	45	20	70	-10	50	$3,6+1,1*x_1+5,4*x_2+1,3*x_3+2,7*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+3,8*x_3*x_3+0,4*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+9,4*x_2*x_3+2,9*x_1*x_2*x_3$
509	-70	-10	-20	30	-10	50	$4,6+9,7*x_1+5,7*x_2+3,2*x_3+9,4*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+4,0*x_3*x_3+7,7*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+2,7*x_2*x_3+1,3*x_1*x_2*x_3$
510	-35	15	15	45	20	70	$7,9+3,2*x_1+1,4*x_2+4,2*x_3+6,2*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+4,0*x_3*x_3+6,0*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+6,4*x_2*x_3+3,0*x_1*x_2*x_3$
511	5	40	-30	20	-20	30	$9,9+4,7*x_1+0,3*x_2+4,9*x_3+9,3*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+8,5*x_3*x_3+9,7*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+7,3*x_2*x_3+3,4*x_1*x_2*x_3$
512	-35	15	10	40	-25	-5	$1,4+2,3*x_1+9,4*x_2+8,7*x_3+4,4*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+2,1*x_3*x_3+8,2*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+4,3*x_2*x_3+2,9*x_1*x_2*x_3$
513	5	40	-5	15	-15	-10	$6,0+8,0*x_1+3,5*x_2+2,4*x_3+5,8*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+9,2*x_3*x_3+9,4*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+9,1*x_2*x_3+4,7*x_1*x_2*x_3$
514	-70	-10	-30	0	25	30	$7,3+2,4*x_1+9,4*x_2+1,9*x_3+5,5*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+3,6*x_3*x_3+3,2*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+2,6*x_2*x_3+6,9*x_1*x_2*x_3$
515	-35	15	-20	15	15	20	$2,6+3,6*x_1+1,2*x_2+0,4*x_3+7,3*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+7,9*x_3*x_3+6,8*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+6,6*x_2*x_3+3,4*x_1*x_2*x_3$
516	5	40	-25	-5	-25	-10	$1,2+3,6*x_1+4,8*x_2+8,7*x_3+9,9*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+8,9*x_3*x_3+1,2*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+2,6*x_2*x_3+3,0*x_1*x_2*x_3$
517	-35	15	10	60	30	35	$2,2+7,0*x_1+8,9*x_2+8,8*x_3+8,5*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+7,8*x_3*x_3+4,3*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+0,5*x_2*x_3+8,8*x_1*x_2*x_3$
518	5	40	-40	20	-20	-15	$9,2+0,6*x_1+3,5*x_2+1,4*x_3+4,9*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+6,8*x_3*x_3+3,7*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+2,3*x_2*x_3+4,4*x_1*x_2*x_3$
519	25	65	-15	30	20	25	$3,0+4,0*x_1+0,9*x_2+4,9*x_3+3,6*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+9,3*x_3*x_3+0,7*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+4,5*x_2*x_3+2,1*x_1*x_2*x_3$

520	-20	60	-25	75	-20	-15	$4,5+8,0*x_1+5,8*x_2+6,5*x_3+6,6*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+6,9*x_3*x_3+0,9*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+5,3*x_2*x_3+8,0*x_1*x_2*x_3$
601	20	60	10	50	30	35	$3,3+9,1*x_1+5,9*x_2+9,6*x_3+3,6*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+4,1*x_3*x_3+9,2*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+4,7*x_2*x_3+1,1*x_1*x_2*x_3$
602	-15	45	-10	50	-25	-20	$6,9+7,5*x_1+5,4*x_2+6,3*x_3+4,5*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+9,3*x_3*x_3+3,9*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+8,9*x_2*x_3+9,9*x_1*x_2*x_3$
603	20	60	-10	50	15	30	$0,6+0,2*x_1+6,5*x_2+4,6*x_3+7,4*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+5,7*x_3*x_3+2,5*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+2,9*x_2*x_3+4,0*x_1*x_2*x_3$
604	-15	45	20	70	25	30	$7,3+7,3*x_1+9,0*x_2+4,4*x_3+7,4*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+5,0*x_3*x_3+2,0*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+8,7*x_2*x_3+9,2*x_1*x_2*x_3$
605	-20	40	-20	30	25	45	$2,7+7,4*x_1+0,7*x_2+8,0*x_3+6,1*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+1,5*x_3*x_3+9,6*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+5,2*x_2*x_3+3,3*x_1*x_2*x_3$
606	30	80	15	45	-15	35	$1,9+0,6*x_1+7,7*x_2+7,1*x_3+8,3*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+9,2*x_3*x_3+6,4*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+9,5*x_2*x_3+4,1*x_1*x_2*x_3$
607	-5	15	-20	40	-35	10	$8,4+8,7*x_1+5,5*x_2+5,5*x_3+8,1*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+9,2*x_3*x_3+9,2*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+8,0*x_2*x_3+9,4*x_1*x_2*x_3$
608	-30	0	30	80	10	60	$7,3+5,6*x_1+4,1*x_2+4,0*x_3+5,5*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+10,0*x_3*x_3+4,2*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+0,4*x_2*x_3+2,5*x_1*x_2*x_3$
609	-20	30	-25	10	-25	-20	$8,1+4,1*x_1+3,3*x_2+4,3*x_3+3,6*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+0,7*x_3*x_3+4,6*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+1,0*x_2*x_3+3,9*x_1*x_2*x_3$
610	15	45	15	50	15	30	$9,8+3,2*x_1+7,2*x_2+4,7*x_3+5,1*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+7,5*x_3*x_3+7,7*x_1*x_2+0,3*x_1*x_3+7,2*x_2*x_3+4,6*x_1*x_2*x_3$
611	-30	20	25	45	25	30	$6,1+3,6*x_1+7,9*x_2+0,2*x_3+2,0*x_1*x_1+0,9*x_2*x_2+0,4*x_3*x_3+0,6*x_1*x_2+0,6*x_1*x_3+7,0*x_2*x_3+2,5*x_1*x_2*x_3$
612	10	40	-15	35	-15	5	$5,8+4,6*x_1+3,0*x_2+2,4*x_3+0,8*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+9,3*x_3*x_3+1,3*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+9,9*x_2*x_3+1,3*x_1*x_2*x_3$
613	-5	15	-35	10	-35	-10	$8,0+1,7*x_1+8,5*x_2+2,6*x_3+1,6*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+1,0*x_3*x_3+6,7*x_1*x_2+0,9*x_1*x_3+10,0*x_2*x_3+2,8*x_1*x_2*x_3$
614	-30	0	10	60	10	35	$9,0+7,5*x_1+6,3*x_2+6,1*x_3+2,4*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+1,7*x_3*x_3+7,4*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+3,5*x_2*x_3+1,7*x_1*x_2*x_3$
615	-20	15	-30	45	-30	-15	$3,1+2,9*x_1+2,6*x_2+3,3*x_3+7,7*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+7,4*x_3*x_3+8,5*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+6,8*x_2*x_3+6,2*x_1*x_2*x_3$
616	-25	-5	-70	-10	-25	-5	$5,3+9,1*x_1+5,4*x_2+2,7*x_3+7,9*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+5,6*x_3*x_3+7,3*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+1,1*x_2*x_3+3,8*x_1*x_2*x_3$
617	10	60	-35	15	10	15	$2,9+4,0*x_1+7,1*x_2+1,5*x_3+8,1*x_1*x_1+0,4*x_2*x_2+0,6*x_3*x_3+0,8*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+1,1*x_2*x_3+4,6*x_1*x_2*x_3$

618	-30	0	-25	10	50	55	$4,3+2,5*x_1+4,6*x_2+7,8*x_3+9,0*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+6,9*x_3*x_3+2,1*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+4,6*x_2*x_3+6,7*x_1*x_2*x_3$
619	-20	15	-15	35	70	80	$8,8+0,1*x_1+2,3*x_2+3,4*x_3+7,0*x_1*x_1+0,1*x_2*x_2+7,0*x_3*x_3+5,4*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+1,3*x_2*x_3+1,8*x_1*x_2*x_3$
620	-25	-5	25	45	30	45	$1,6+6,0*x_1+2,7*x_2+4,7*x_3+1,6*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+4,2*x_3*x_3+8,6*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+5,1*x_2*x_3+0,4*x_1*x_2*x_3$
701	10	60	15	50	45	50	$5,8+8,0*x_1+1,9*x_2+4,3*x_3+7,9*x_1*x_1+1,0*x_2*x_2+5,6*x_3*x_3+0,9*x_1*x_2+0,7*x_1*x_3+6,9*x_2*x_3+6,3*x_1*x_2*x_3$
702	-40	20	-25	10	20	35	$0,2+7,1*x_1+9,4*x_2+8,6*x_3+1,9*x_1*x_1+0,6*x_2*x_2+8,4*x_3*x_3+3,7*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+4,5*x_2*x_3+7,4*x_1*x_2*x_3$
703	-15	30	30	80	40	45	$2,6+5,1*x_1+6,8*x_2+0,7*x_3+10,0*x_1*x_1+0,5*x_2*x_2+1,0*x_3*x_3+8,4*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+1,4*x_2*x_3+0,2*x_1*x_2*x_3$
704	-25	75	-20	40	15	30	$1,5+3,3*x_1+2,6*x_2+7,6*x_3+5,2*x_1*x_1+0,3*x_2*x_2+6,8*x_3*x_3+4,3*x_1*x_2+0,1*x_1*x_3+0,1*x_2*x_3+7,9*x_1*x_2*x_3$
705	10	50	20	60	0	20	$7,5+5,5*x_1+9,3*x_2+2,0*x_3+6,9*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+6,4*x_3*x_3+2,9*x_1*x_2+0,5*x_1*x_3+1,9*x_2*x_3+5,9*x_1*x_2*x_3$
706	-10	50	-20	40	15	35	$0,4+6,1*x_1+4,7*x_2+6,3*x_3+5,8*x_1*x_1+0,7*x_2*x_2+5,5*x_3*x_3+5,4*x_1*x_2+1,0*x_1*x_3+8,8*x_2*x_3+6,0*x_1*x_2*x_3$
707	20	70	30	80	-5	5	$3,9+9,8*x_1+6,0*x_2+8,8*x_3+6,5*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+7,1*x_3*x_3+6,8*x_1*x_2+0,2*x_1*x_3+6,3*x_2*x_3+8,9*x_1*x_2*x_3$
708	-20	30	-25	10	60	70	$6,3+3,9*x_1+3,5*x_2+0,2*x_3+8,8*x_1*x_1+0,8*x_2*x_2+9,4*x_3*x_3+4,4*x_1*x_2+0,8*x_1*x_3+3,3*x_2*x_3+1,9*x_1*x_2*x_3$
709	10	60	-35	10	-30	45	$2,4+4,7*x_1+7,4*x_2+3,5*x_3+8,3*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+6,1*x_3*x_3+0,4*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+1,6*x_2*x_3+1,4*x_1*x_2*x_3$
710	-40	20	10	60	-20	20	$6,1+4,1*x_1+7,9*x_2+7,5*x_3+6,9*x_1*x_1+0,2*x_2*x_2+3,0*x_3*x_3+8,8*x_1*x_2+0,4*x_1*x_3+7,4*x_2*x_3+0,1*x_1*x_2*x_3$