Лабораторна робота № 4

Проведення трьохфакторного експерименту

при використанні рівняння регресії з урахуванням ефекту взаємодії.

Мета роботи

Провести повний трьохфакторний експеримент. Знайти рівняння регресії адекватне об'єкту.

Завдання на лабораторну роботу

1. Скласти матрицю планування для повного трьохфакторного експерименту.
2. Провести експеримент, повторивши N раз досліди у всіх точках факторного простору і знайти значення відгуку Y. Знайти значення Y шляхом моделювання випадкових чисел у певному діапазоні відповідно варіанту. Варіанти вибираються за номером в списку в журналі викладача.

$$y_{i\max} = 200 + x_{cp\max}$$

$$y_{i\min} = 200 + x_{cp\min}$$

де $x_{cp\max} = \dfrac{x_{1\max} + x_{2\max} + x_{3\max}}{3}$, $x_{cp\min} = \dfrac{x_{1\min} + x_{2\min} + x_{3\min}}{3}$

3. Знайти коефіцієнти рівняння регресії і записати його.
4. Провести 3 статистичні перевірки – за критеріями Кохрена, Стьюдента, Фішера.
5. Зробити висновки по адекватності регресії та значимості окремих коефіцієнтів і записати скореговане рівняння регресії.
6. Написати комп'ютерну програму, яка усе це моделює.

Порядок виконання роботи

1. Записати рівняння регресії з ефектом взаємодії.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3$$

2. Вибрати з таблиці варіантів і записати в протокол інтервали значень для x_1, x_2, x_3 Обчислити і записати для x_1, x_2, x_3 значення, відповідні кодованим +1; -1 значенням факторів $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$

3. Скласти матрицю планування для повного трьохфакторного експерименту з використанням додаткового нульового чинника ($\overline{x_0}$ = 1), і заповнити таблицю кодованими значеннями $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$. Вибрати кількість повторень кожної комбінації (m).

Матриця ПФЕ:

	$\overline{x_0}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	$\overline{x_1 x_2}$	$\overline{x_1 x_3}$	$\overline{x_2 x_3}$	$\overline{x_1 x_2 x_3}$	y_{j1}	$\cdots$	y_{jm}	$\overline{y_j}$	$S^2\{y_j\}$
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													

4) Розрахувати коефіцієнти рівняння регресії. При розрахунку використовувати як натуральні, так і нормовані значення факторів x_1, x_2, x_3

5) Провести статистичні перевірки отриманих результатів:

   5.1. Перевірка однорідності дисперсії за критерієм Кохрена (якщо дисперсія не однорідна, то збільшити m і почати з п. 3.).

   5. 2. Перевірка значимості коефіцієнтів рівняння регресії по критерієм Ст'юдента

   5.3.Перевірка адекватності моделі оригіналу за критерієм Фішера. Якщо модель не адекватна, то необхідно збільшити кількість членів рівняння регресії, змінити МП, провести додаткові досліди.

6) Враховуючи статистичні перевірки, зробити висновки по адекватності регресії і записати скореговане рівняння регресії.

7) Написати комп'ютерну програму, яка усе це виконує.

Зміст звіту

1. Короткі теоретичні відомості.
2. Результати підготовки (матриця планування у вигляді таблиці).
3. Результати виконання роботи.
4. Відповіді на контрольні запитання.
5. Висновки по лабораторній роботі.
6. Лістинг програми і результати її роботи.

Теоретичні відомості

Необхідні теоретичні відомості про ПФЕ та статистичні перевірки знаходяться у попередніх лабораторних роботах. Тут розглянуто особливості урахування ефекту взаємодії.

Визначення коефіцієнтів рівняння регресії ПФЕ

Рівняння регресії ПФЕ з урахуванням ефекту взаємодії для трьох факторів має вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 \qquad (1)$$

Це рівняння повинне відображати з певною точністю значення функції відгуку для будь-яких значень факторів, які знаходяться у певних межах, і зокрема, для точок плану:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i}$$

де $i = 1, 2, \ldots, N$.

Коефіцієнти b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , b_{12} , b_{13} , b_{23} , b_{123} знайдемо методом найменших квадратів, тобто пошуком найменшої суми квадратів відхилень теоретичних значень $\hat{y}_i$ від експериментальних значень y_i

$$E = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow min \qquad (2)$$

Для знаходження коефіцієнтів скористаємося тим, що усі часткові похідні по b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , b_{12} , b_{13} , b_{23} , b_{123} повинні дорівнювати нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{db_0} = 0 \\ \dfrac{dE}{db_1} = 0 \\ \dfrac{dE}{db_2} = 0 \\ \dfrac{dE}{db_3} = 0 \\ \dfrac{dE}{db_{12}} = 0 \\ \dfrac{dE}{db_{13}} = 0 \\ \dfrac{dE}{db_{23}} = 0 \\ \dfrac{dE}{db_{123}} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Перепишемо систему (3), диференціюючи вираження (2) для E:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_0} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_2} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_3} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_{12}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_{13}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_{23}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)\frac{d\hat{y}_i}{db_{123}} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Запишемо часткові похідні для $\hat{y}_i$, диференціюючи вираження рівняння регресії (1)

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_0} = 1$$

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_1} = x_{1i}$$

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_2} = x_{2i}$$

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_3} = x_{3i}$$

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_{12}} = x_{1i}x_{2i}$$

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_{13}} = x_{1i}x_{3i}$$

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_{23}} = x_{2i}x_{3i}$$

$$\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial b_{123}} = x_{1i}x_{2i}x_{3i}$$

Підставимо у рівняння (4) значення часткових похідних і запишемо систему рівнянь у повному вигляді

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot 1 = 0 \\
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot x_{1i} = 0 \\
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot x_{2i} = 0 \\
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot x_{3i} = 0 \\
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot x_{1i} x_{2i} = 0 \\
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot x_{1i} x_{3i} = 0 \\
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot x_{2i} x_{3i} = 0 \\
\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + b_{12} x_{1i} x_{2i} + b_{13} x_{1i} x_{3i} + b_{23} x_{2i} x_{3i} + b_{123} x_{1i} x_{2i} x_{3i} - y_i) \cdot x_{1i} x_{2i} x_{3i} = 0
\end{cases}
$$

або:

$$
\begin{cases}
b_0 N + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{3i} + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{3i} + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{2i} x_{3i} + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{3i} + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{3i} + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \\
b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} x_{3i} + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 x_{3i} + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{2i} \\
b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{3i} + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{3i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} x_{3i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{3i}^2 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{3i}^2 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{2i} x_{3i}^2 + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{3i} \\
b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i}^2 + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} x_{3i} + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 x_{3i} + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i}^2 x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} x_{2i} \\
b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{3i} + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{3i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{3i}^2 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} x_{3i} + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{3i}^2 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i}^2 + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} x_{3i} \\
b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} x_{3i} + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 x_{3i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} x_{3i}^2 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 x_{3i} + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i}^2 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 x_{3i}^2 + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{2i} x_{3i} \\
b_0 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i} + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} x_{3i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 x_{3i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i} x_{3i}^2 + b_{12} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i}^2 x_{3i} + b_{13} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i} x_{3i}^2 + b_{23} \sum_{i=1}^{N} x_{1i} x_{2i}^2 x_{3i}^2 + b_{123} \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 x_{2i}^2 x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} x_{2i} x_{3i}
\end{cases}
\quad (5)
$$

Отримали систему восьми рівнянь, лінійних відносно восьми невідомих b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , b_{12} , b_{13} , b_{23} , b_{123}.

Перепишемо систему рівнянь (5) у компактнішому вигляді:

$$\begin{cases}
\boldsymbol{b_0}\, m_{00} + \boldsymbol{b_1}\, m_{10} + \boldsymbol{b_2}\, m_{20} + \boldsymbol{b_3}\, m_{30} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{40} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{50} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{60} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{70} = k_0 \\
\boldsymbol{b_0}\, m_{01} + \boldsymbol{b_1}\, m_{11} + \boldsymbol{b_2}\, m_{21} + \boldsymbol{b_3}\, m_{31} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{41} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{51} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{61} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{71} = k_1 \\
\boldsymbol{b_0}\, m_{02} + \boldsymbol{b_1}\, m_{12} + \boldsymbol{b_2}\, m_{22} + \boldsymbol{b_3}\, m_{32} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{42} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{52} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{62} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{72} = k_2 \\
\boldsymbol{b_0}\, m_{03} + \boldsymbol{b_1}\, m_{13} + \boldsymbol{b_2}\, m_{23} + \boldsymbol{b_3}\, m_{33} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{43} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{53} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{63} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{73} = k_3 \\
\boldsymbol{b_0}\, m_{04} + \boldsymbol{b_1}\, m_{14} + \boldsymbol{b_2}\, m_{24} + \boldsymbol{b_3}\, m_{34} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{44} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{54} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{64} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{74} = k_4 \\
\boldsymbol{b_0}\, m_{05} + \boldsymbol{b_1}\, m_{15} + \boldsymbol{b_2}\, m_{25} + \boldsymbol{b_3}\, m_{35} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{45} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{55} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{65} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{75} = k_5 \\
\boldsymbol{b_0}\, m_{06} + \boldsymbol{b_1}\, m_{16} + \boldsymbol{b_2}\, m_{26} + \boldsymbol{b_3}\, m_{36} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{46} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{56} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{66} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{76} = k_6 \\
\boldsymbol{b_0}\, m_{07} + \boldsymbol{b_1}\, m_{17} + \boldsymbol{b_2}\, m_{27} + \boldsymbol{b_3}\, m_{37} + \boldsymbol{b_{12}}\, m_{47} + \boldsymbol{b_{13}}\, m_{57} + \boldsymbol{b_{23}}\, m_{67} + \boldsymbol{b_{123}}\, m_{77} = k_7
\end{cases} \qquad (6)$$

де:

$$m_{00} = N$$

$$m_{10} = \sum_{i=1}^{N} x_{1i}$$

$$m_{20} = \sum_{i=1}^{N} x_{2i}$$

і так далі,

$$m_{77} = \sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2\, x_{2i}^2 x_{3i}^2$$

Розв'яжемо систему рівнянь (6) методом Крамера. Цей метод грунтується на обчисленні визначників. Позначимо головний визначник системи як ***Det***

$$\boldsymbol{Det} = \begin{vmatrix}
m_{00} & m_{10} & m_{20} & m_{30} & m_{40} & m_{50} & m_{60} & m_{70} \\
m_{01} & m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} & m_{51} & m_{61} & m_{71} \\
m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} & m_{52} & m_{62} & m_{72} \\
m_{03} & m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} & m_{53} & m_{63} & m_{73} \\
m_{04} & m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{54} & m_{64} & m_{74} \\
m_{05} & m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{65} & m_{75} \\
m_{06} & m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} & m_{76} \\
m_{07} & m_{17} & m_{27} & m_{37} & m_{47} & m_{57} & m_{67} & m_{77}
\end{vmatrix}$$

Знаходження невідомих b_i за формулою:

$$b_i = \frac{\boldsymbol{Det_i}}{\boldsymbol{Det}},$$

де $\boldsymbol{Det_i}$ – визначник, подібний до ***Det***, за винятком того, що i-й стовпчик замінено стовпчиком вільних членів: $k_0, k_1, \ldots, k_7$.

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} k_0 & m_{10} & m_{20} & m_{30} & m_{40} & m_{50} & m_{60} & m_{70} \\ k_1 & m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} & m_{51} & m_{61} & m_{71} \\ k_2 & m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} & m_{52} & m_{62} & m_{72} \\ k_3 & m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} & m_{53} & m_{63} & m_{73} \\ k_4 & m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{54} & m_{64} & m_{74} \\ k_5 & m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{65} & m_{75} \\ k_6 & m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} & m_{76} \\ k_7 & m_{17} & m_{27} & m_{37} & m_{47} & m_{57} & m_{67} & m_{77} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} m_{00} & k_0 & m_{20} & m_{30} & m_{40} & m_{50} & m_{60} & m_{70} \\ m_{01} & k_1 & m_{21} & m_{31} & m_{41} & m_{51} & m_{61} & m_{71} \\ m_{02} & k_2 & m_{22} & m_{32} & m_{42} & m_{52} & m_{62} & m_{72} \\ m_{03} & k_3 & m_{23} & m_{33} & m_{43} & m_{53} & m_{63} & m_{73} \\ m_{04} & k_4 & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{54} & m_{64} & m_{74} \\ m_{05} & k_5 & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{65} & m_{75} \\ m_{06} & k_6 & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} & m_{76} \\ m_{07} & k_7 & m_{27} & m_{37} & m_{47} & m_{57} & m_{67} & m_{77} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10} & k_0 & m_{30} & m_{40} & m_{50} & m_{60} & m_{70} \\ m_{01} & m_{11} & k_1 & m_{31} & m_{41} & m_{51} & m_{61} & m_{71} \\ m_{02} & m_{12} & k_2 & m_{32} & m_{42} & m_{52} & m_{62} & m_{72} \\ m_{03} & m_{13} & k_3 & m_{33} & m_{43} & m_{53} & m_{63} & m_{73} \\ m_{04} & m_{14} & k_4 & m_{34} & m_{44} & m_{54} & m_{64} & m_{74} \\ m_{05} & m_{15} & k_5 & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{65} & m_{75} \\ m_{06} & m_{16} & k_6 & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} & m_{76} \\ m_{07} & m_{17} & k_7 & m_{37} & m_{47} & m_{57} & m_{67} & m_{77} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

$$b_3 = \frac{\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{20} & k_0 & m_{40} & m_{50} & m_{60} & m_{70} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} & k_1 & m_{41} & m_{51} & m_{61} & m_{71} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & k_2 & m_{42} & m_{52} & m_{62} & m_{72} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & k_3 & m_{43} & m_{53} & m_{63} & m_{73} \\ m_{04} & m_{14} & m_{24} & k_4 & m_{44} & m_{54} & m_{64} & m_{74} \\ m_{05} & m_{15} & m_{25} & k_5 & m_{45} & m_{55} & m_{65} & m_{75} \\ m_{06} & m_{16} & m_{26} & k_6 & m_{46} & m_{56} & m_{66} & m_{76} \\ m_{07} & m_{17} & m_{27} & k_7 & m_{47} & m_{57} & m_{67} & m_{77} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{20} & m_{30} & k_0 & m_{50} & m_{60} & m_{70} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} & m_{31} & k_1 & m_{51} & m_{61} & m_{71} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{32} & k_2 & m_{52} & m_{62} & m_{72} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & m_{33} & k_3 & m_{53} & m_{63} & m_{73} \\ m_{04} & m_{14} & m_{24} & m_{34} & k_4 & m_{54} & m_{64} & m_{74} \\ m_{05} & m_{15} & m_{25} & m_{35} & k_5 & m_{55} & m_{65} & m_{75} \\ m_{06} & m_{16} & m_{26} & m_{36} & k_6 & m_{56} & m_{66} & m_{76} \\ m_{07} & m_{17} & m_{27} & m_{37} & k_7 & m_{57} & m_{67} & m_{77} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

$$b_{13} = \frac{\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{20} & m_{30} & m_{40} & k_0 & m_{60} & m_{70} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} & k_1 & m_{61} & m_{71} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} & k_2 & m_{62} & m_{72} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} & k_3 & m_{63} & m_{73} \\ m_{04} & m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & k_4 & m_{64} & m_{74} \\ m_{05} & m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & k_5 & m_{65} & m_{75} \\ m_{06} & m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & k_6 & m_{66} & m_{76} \\ m_{07} & m_{17} & m_{27} & m_{37} & m_{47} & k_7 & m_{67} & m_{77} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

$$b_{23} = \frac{\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{20} & m_{30} & m_{40} & m_{50} & k_0 & m_{70} \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} & m_{51} & k_1 & m_{71} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} & m_{52} & k_2 & m_{72} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} & m_{53} & k_3 & m_{73} \\ m_{04} & m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{54} & k_4 & m_{74} \\ m_{05} & m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & k_5 & m_{75} \\ m_{06} & m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & k_6 & m_{76} \\ m_{07} & m_{17} & m_{27} & m_{37} & m_{47} & m_{57} & k_7 & m_{77} \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

$$b_{123} = \frac{\begin{vmatrix} m_{00} & m_{10} & m_{20} & m_{30} & m_{40} & m_{50} & m_{60} & k_0 \\ m_{01} & m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} & m_{51} & m_{61} & k_1 \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} & m_{52} & m_{62} & k_2 \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} & m_{53} & m_{63} & k_3 \\ m_{04} & m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{54} & m_{64} & k_4 \\ m_{05} & m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} & m_{65} & k_5 \\ m_{06} & m_{16} & m_{26} & m_{36} & m_{46} & m_{56} & m_{66} & k_6 \\ m_{07} & m_{17} & m_{27} & m_{37} & m_{47} & m_{57} & m_{67} & k_7 \end{vmatrix}}{\boldsymbol{Det}}$$

Ці формули дозволяють знайти коефіцієнти рівняння регресії як для натуральних, так і нормованих значень факторів. Проте, для нормованих можна запропонувати простіші формули.

Знаходження коефіцієнтів регресії для нормованих значень факторів ПФЕ

Задля кращого сприйняття повторимо запис системи рівнянь (5), яка розв'язується для знаходження коефіцієнтів b_i регресії для трьохфакторного ПФЕ з урахуванням взаємодії:

$$\left\{\begin{array}{l}
b_0 N + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{3i} + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i} + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i} + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i} + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i \\
b_0\sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2 + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i} + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i} + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{3i} + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i} \\
b_0\sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2 + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i} + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2 + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2x_{3i} + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{2i} \\
b_0\sum_{i=1}^{N} x_{3i} + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{3i}^2 + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i}^2 + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i}^2 + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{3i} \\
b_0\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i} + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2 + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}^2 + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}x_{3i} + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2x_{3i} + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}^2x_{3i} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i}x_{2i} \\
b_0\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i} + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{3i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{3i}^2 + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}x_{3i} + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{3i}^2 + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i}^2 + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i}x_{3i} \\
b_0\sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i} + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2x_{3i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{2i}x_{3i}^2 + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2x_{3i} + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i}^2 + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}^2x_{3i}^2 + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{2i}x_{3i} \\
b_0\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i} + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}x_{3i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2x_{3i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}x_{3i}^2 + b_{12}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}^2x_{3i} + b_{13}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}x_{3i}^2 + b_{23}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}x_{2i}^2x_{3i}^2 + b_{123}\sum_{i=1}^{N} x_{1i}^2x_{2i}^2x_{3i}^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_{1i}x_{2i}x_{3i}
\end{array}\right.$$

Ця система рівнянь, як здається, є дуже громіздкою, і для розв'язання потребує великої кількості обчислювальних операцій. Множники при b_i є сумами N значень факторів, або сумами добутків факторів, деякі з котрих у квадраті.

Виявляється, що для нормованих факторів x_1, x_2 та x_3 більшість множників-сум при b_i дорівнюють нулю, що суттєво спрощує систему рівнянь. Розглянемо це. Запишемо матрицю плану ПФЕ k=3, N=8, з урахуванням взаємодії для нормованих значень факторів.

i	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	-1	-1	1	1	-1	-1	1
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	-1	1	1	-1	-1	1	-1
5	1	-1	-1	-1	-1	1	1
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	1	1	-1	1	-1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1

Ця матриця має такі властивості:

1. Сума усіх нормованих значень стовпчика кожного фактора дорівнює нулю (симетричність):

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{pi} = 0,$$

де: p = 1,2,3.

2. Сума попарних добутків стовпчиків факторів дорівнює нулю (ортогональність):

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{pi}\bar{x}_{qi} = 0,$$

де $p \neq q$.

3. Сума добутків трьох стовпчиків факторів також дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{1i}\bar{x}_{2i}\bar{x}_{3i} = 0$$

4. Оскільки квадрат нормованих значень ±1 завжди дорівнює 1, то сума квадратів дорівнює N

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{pi}^{2} = N,$$

де: p = 1,2,3.

Наслідком вказаних вище властивостей є те, що, наприклад, сума

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{1i}\bar{x}_{2i}^{2}\bar{x}_{3i}$$

дорівнює нулю, оскільки

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{1i}\bar{x}_{2i}^{2}\bar{x}_{3i} \rightarrow \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{1i}1\,\bar{x}_{3i} \rightarrow \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_{1i}\bar{x}_{3i} = 0$$

З урахуванням таких властивостей нормованих значень факторів ПФЕ, множники-суми системи рівнянь (5) вздовж головної діагоналі дорівнюють N, а решта дорівнюють нулю:

$$\left\{ \begin{array}{llllllllll}
b_0 N & & & & & & & & = \sum_{i=1}^{N} y_i \\
 & b_1 N & & & \mathbf{0} & & & & = \sum_{i=1}^{N} y_i\,\bar{x}_{1i} \\
 & & b_2 N & & & & & & = \sum_{i=1}^{N} y_i\,\bar{x}_{2i} \\
 & & & b_3 N & & & & & = \sum_{i=1}^{N} y_i\,\bar{x}_{3i} \\
 & & & & b_{12} N & & & & = \sum_{i=1}^{N} y_i\,\bar{x}_{1i}\bar{x}_{2i} \\
 & & & & & b_{13} N & & & = \sum_{i=1}^{N} y_i\,\bar{x}_{1i}\bar{x}_{3i} \\
 & & \mathbf{0} & & & & b_{23} N & & = \sum_{i=1}^{N} y_i\,\bar{x}_{2i}\bar{x}_{3i} \\
 & & & & & & & b_{123} N & = \sum_{i=1}^{N} y_i\,\bar{x}_{1i}\bar{x}_{2i}\bar{x}_{3i}
\end{array} \right. \qquad (7)$$

Рішенням такої системи є:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$b_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \bar{x}_{1i}$$

$$b_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \bar{x}_{2i}$$

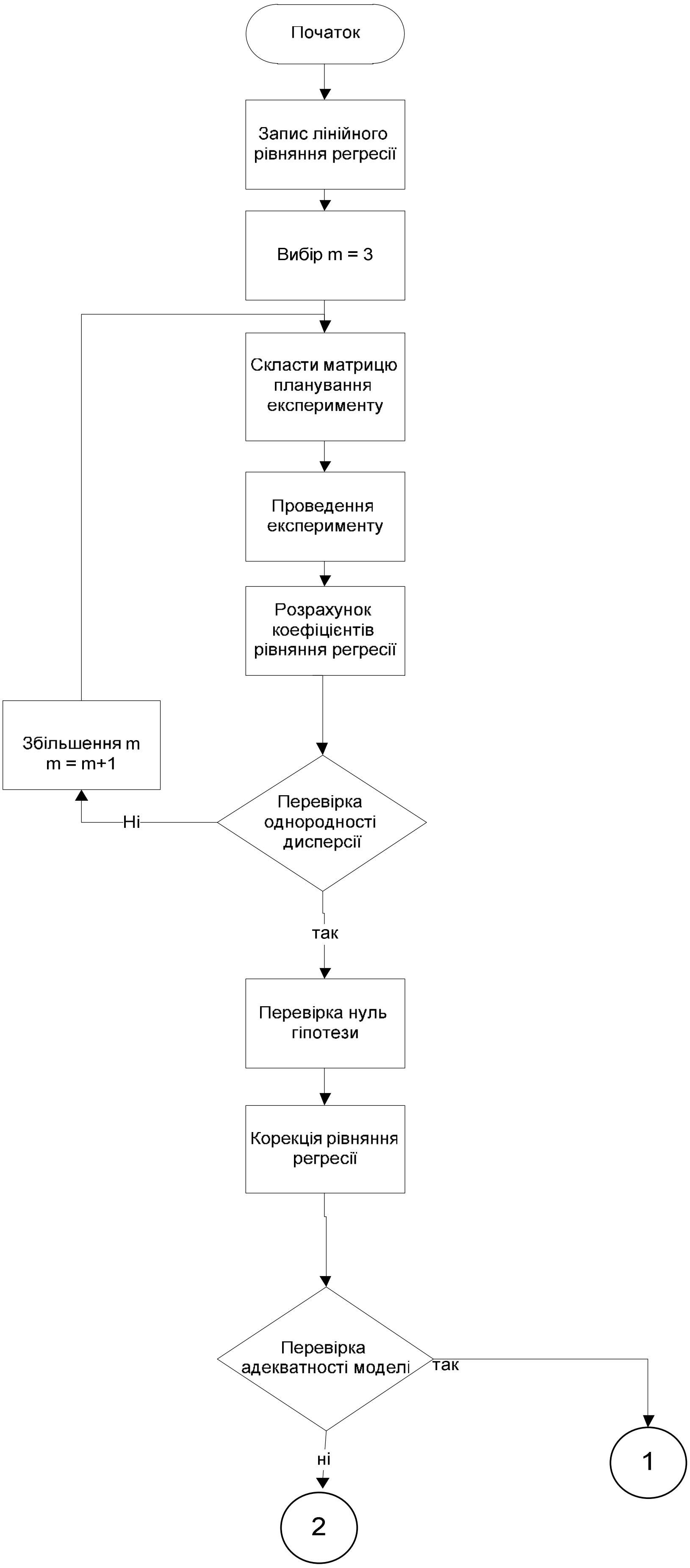
$$b_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \bar{x}_{3i}$$

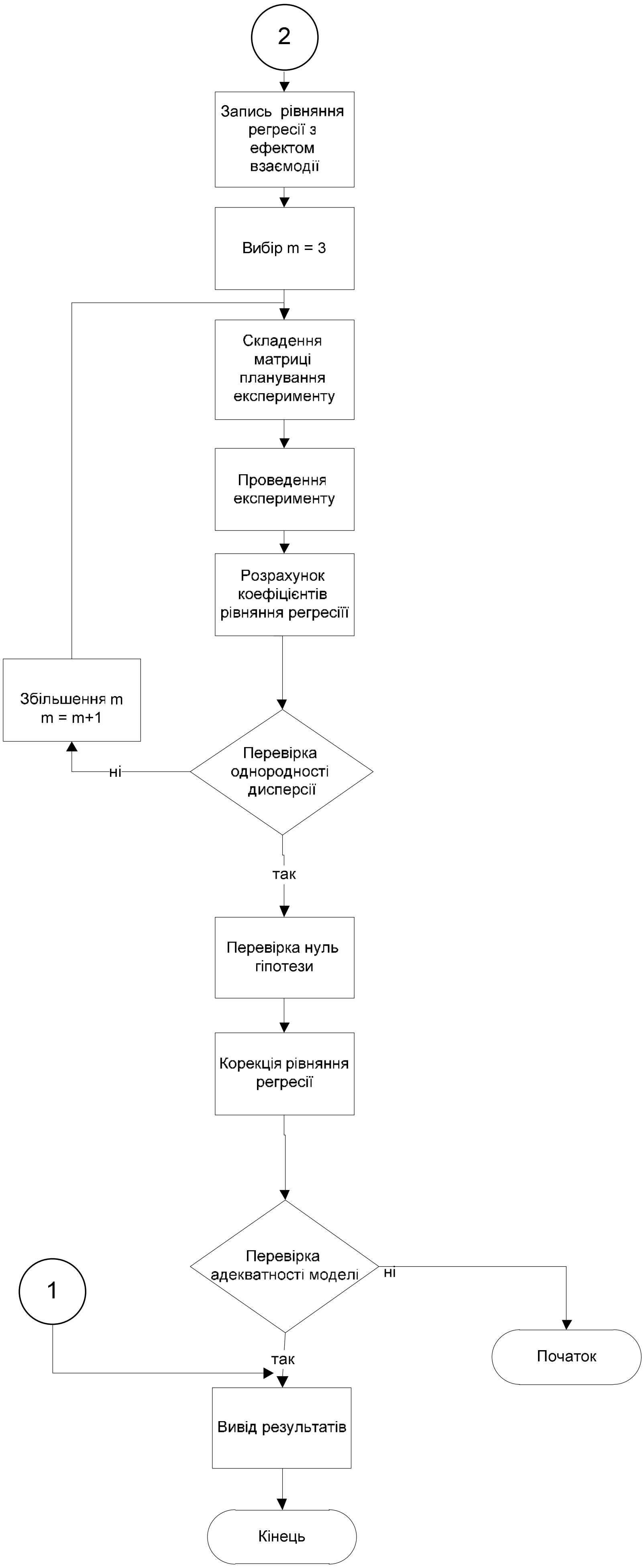
$$b_{12} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \bar{x}_{1i}\bar{x}_{2i}$$

$$b_{13} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \bar{x}_{1i}\bar{x}_{3i}$$

$$b_{23} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \bar{x}_{2i}\bar{x}_{3i}$$

$$b_{123} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \bar{x}_{1i}\bar{x}_{2i}\bar{x}_{3i}$$


Початок
Запис лінійного рівняння регресії
Вибір m = 3
Скласти матрицю планування експерименту
Проведення експерименту
Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії
Збільшення m
m = m+1
Ні
Перевірка однорідності дисперсії
так
Перевірка нуль гіпотези
Корекція рівняння регресії
Перевірка адекватності моделі
так
ні
1
2


2
Запись рівняння регресії з ефектом взаємодії
Вибір m = 3
Складення матриці планування експерименту
Проведення експерименту
Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії
Збільшення m
m = m+1
ні
Перевірка однородності дисперсії
так
Перевірка нуль гіпотези
Корекція рівняння регресії
Перевірка адекватності моделі
ні
1
так
Початок
Вивід результатів
Кінець

Таблиця варіантів

№$_{варіанта}$	x_1		x_2		x_3	
	min	max	min	Max	min	max
101	-40	20	10	60	-20	20
102	-10	50	20	60	50	55
103	20	70	-20	40	70	80
104	-20	30	30	80	30	45
105	15	45	-25	10	45	50
106	-30	20	15	50	20	35
107	10	40	25	45	40	45
108	-5	15	-15	35	15	30
109	-30	0	-35	10	0	20
110	-20	15	10	60	15	35
111	-25	-5	-30	45	-5	5
112	10	60	-70	-10	60	70
113	-40	20	-35	15	20	25
114	-15	30	5	40	5	25
115	-25	75	25	65	25	40
116	10	50	-20	60	-20	20
117	-10	50	-20	60	-20	5
118	20	70	25	65	25	35
119	-20	30	5	40	5	10
120	15	45	-35	15	-35	-5
121	-30	20	-70	-10	-70	-40
122	10	40	-30	45	-30	-10
123	-5	15	10	60	10	20
124	-30	0	-25	10	-25	-5
125	-20	15	-15	35	-15	-10
126	-25	-5	25	45	25	30
127	10	60	15	50	15	20
128	-40	20	-25	10	-25	-10
129	-15	30	30	80	30	35
130	-25	75	-20	40	-20	-15
201	10	50	20	60	20	25
202	-10	50	-20	40	-20	-15
203	20	70	30	80	30	35
204	-20	30	-25	10	-25	-20
205	15	45	15	50	15	30
206	-30	20	25	45	25	30
207	10	40	-15	35	-15	5
208	-5	15	-35	10	-35	-10
209	-30	0	10	60	10	35

210	-20	15	-30	45	-30	-15
211	-25	-5	-70	-10	-25	-5
212	10	60	-35	15	10	15
213	-40	20	5	40	-40	-20
214	-15	30	25	65	-15	-5
215	-25	75	-20	60	-25	-10
216	10	50	-20	60	10	15
217	-10	50	25	65	-10	15
218	20	70	5	40	20	45
219	-20	30	-35	15	-20	5
220	15	45	-70	-10	15	30
221	-30	20	-30	45	-30	-15
222	10	40	10	60	10	15
223	-5	15	-25	10	-5	20
224	-30	0	-15	35	-30	-25
225	-20	15	25	45	-20	-15
226	-25	-5	15	50	-25	-15
227	10	60	-25	10	10	15
228	-40	20	30	80	-40	-25
229	-15	30	-20	40	-15	-5
230	-25	75	20	60	-25	-5
301	10	50	-15	45	10	15
302	-10	50	20	60	-10	5
303	20	70	-15	45	20	35
304	-20	30	-20	40	-20	-10
305	15	45	30	80	15	45
306	-30	20	-25	10	-30	-15
307	10	40	15	50	10	30
308	-5	15	25	45	15	45
309	-30	0	-15	35	-30	35
310	-20	15	-35	10	10	20
311	-25	-5	10	60	-5	60
312	10	60	-30	45	-30	45
313	-40	20	-70	-10	-20	20
314	-15	30	-35	15	-25	5
315	-25	75	5	40	15	25
316	10	50	25	65	50	65
317	-10	50	-20	60	50	55
318	-10	50	20	60	-10	10
319	20	70	-15	45	20	35
320	-20	30	20	60	-20	-5
321	15	45	-15	45	15	20
322	-30	20	-20	40	-30	-15
323	10	40	30	80	10	20

324	-5	15	-25	10	15	45
325	-30	0	15	50	-30	35
326	-20	15	25	45	10	20
327	-25	-5	-15	35	-5	60
328	10	60	-35	10	-30	45
329	-40	20	10	60	-20	20
330	-15	30	-30	45	-25	5
401	-25	75	-70	-10	15	25
402	10	50	-35	15	50	65
403	-10	50	5	40	50	55
404	-15	30	-35	15	-25	5
405	-25	75	5	40	15	25
406	10	50	25	65	50	65
407	-10	50	-20	60	50	55
408	-10	50	20	60	-10	-5
409	20	70	-15	45	20	25
410	-20	30	20	60	-20	-5
411	15	45	-15	45	15	20
412	-30	20	-20	40	-30	-20
413	10	40	30	80	10	20
414	20	60	-5	15	-25	-5
415	-15	45	-30	0	10	60
501	-20	40	-20	15	-40	20
502	30	80	-25	-5	-15	30
503	-25	10	10	60	-25	75
504	15	50	-40	20	10	50
505	25	45	-15	30	-10	50
506	-15	35	-25	75	-15	30
507	-35	10	10	50	-25	75
508	10	60	-10	50	10	50
509	-30	45	20	70	-10	50
510	-70	-10	-20	30	-10	50
511	-35	15	15	45	20	70
512	5	40	-30	20	-20	30
513	-35	15	10	40	-25	-5
514	5	40	-5	15	-15	-10
515	-70	-10	-30	0	25	30
516	-35	15	-20	15	15	20
517	5	40	-25	-5	-25	-10
518	-35	15	10	60	30	35
519	5	40	-40	20	-20	-15
520	25	65	-15	30	20	25
601	-20	60	-25	75	-20	-15
602	20	60	10	50	30	35

603	-15	45	-10	50	-25	-20
604	20	60	-10	50	15	30
605	-15	45	20	70	25	30
606	-20	40	-20	30	25	45
607	30	80	15	45	-15	35
608	-5	15	-20	40	-35	10
609	-30	0	30	80	10	60
610	-20	30	-25	10	-25	-20
611	15	45	15	50	15	30
612	-30	20	25	45	25	30
613	10	40	-15	35	-15	5
614	-5	15	-35	10	-35	-10
615	-30	0	10	60	10	35
616	-20	15	-30	45	-30	-15
617	-25	-5	-70	-10	-25	-5
618	10	60	-35	15	10	15
619	-30	0	-25	10	50	55
620	-20	15	-15	35	70	80
701	-25	-5	25	45	30	45
702	10	60	15	50	45	50
703	-40	20	-25	10	20	35
704	-15	30	30	80	40	45
705	-25	75	-20	40	15	30
706	10	50	20	60	0	20
707	-10	50	-20	40	15	35
708	20	70	30	80	-5	5
709	-20	30	-25	10	60	70
710	10	60	-35	10	-30	45