Análisis de $\int \frac{1}{x^n+1}\,dx$ mediante el teorema del binomio generalizado

Tu nombre

May 11, 2025

1 Preliminares

Teorema 1 (Teorema del binomio generalizado)**.** *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ y $|y| < 1$, se cumple:*

$$(1+y)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} y^k, \quad \textit{donde} \quad \binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k}.$$

En particular, para $\alpha = 1$:

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^k.$$

Proof. La demostración sigue del desarrollo en serie de Taylor alrededor de $y = 0$ y el criterio de convergencia para series binomiales. El radio de convergencia $|y| < 1$ se garantiza por el criterio de la razón. □

2 Desarrollo formal

2.1 Caso $|x| < 1$

Aplicando el Teorema 1 con $y = x^n$ ($|x| < 1$):

$$\frac{1}{1+x^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{nk}.$$

Integrando término a término (justificado por convergencia uniforme en $[-\rho, \rho]$, $\rho < 1$):

$$\int \frac{1}{1+x^n}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{nk+1}}{nk+1} + C.$$

2.2 Caso $|x| > 1$

Sea $|x| > 1$. Dividimos por x^n:

$$\frac{1}{1+x^n} = \frac{x^{-n}}{1+x^{-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{-n(k+1)}.$$

Integrando (converge para $|x| > 1$):

$$\int \frac{1}{1+x^n}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{-n(k+1)+1}}{-n(k+1)+1} + C.$$

3 Ejemplos

3.1 Caso $n = 1$

Para $|x| < 1$:

$$\int \frac{1}{1+x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C = -\ln(1+x) + C.$$

Para $|x| > 1$ (usando $x \mapsto 1/x$):

$$\int \frac{1}{1+x}\, dx = \ln|x| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kx^k} + C.$$

3.2 Caso $n = 2$

Para $|x| < 1$:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C = \arctan(x) + C.$$

Para $|x| > 1$:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) + C = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{-2k-1}}{2k+1} + C.$$

4 Conclusión

- Las series obtenidas son **localmente convergentes** y útiles para aproximaciones.
- La validez **global** requiere análisis por casos ($|x| \lessgtr 1$).
- Para $n = 1, 2$, las formas cerradas (logaritmo y arcotangente) son preferibles.