Definición de Clase Superinductiva

Sea A una clase.

Sea $g : A \to A$ una aplicación en A.

Entonces, A es superinductiva bajo g si y sólo si:

A es inductiva bajo g y A es cerrada bajo uniones de cadenas.

Es decir:

1. A contiene el conjunto vacío: $\emptyset \in A$
2. A es cerrada bajo g: $\forall x : (x \in A \implies g(x) \in A)$
3. A es cerrada bajo uniones de cadenas: $\forall C : \bigcup C \in A$ donde C es una cadena de elementos de A

Definición de Aplicación Progresiva

Sea C una clase.

Sea $f : C \to C$ una aplicación de C a C.

Entonces, f es una aplicación progresiva si y sólo si:

$$x \in C \implies x \subseteq f(x)$$

Es decir, si y sólo si para cada $x \in C$, x es un subconjunto de $f(x)$.

Axioma de Eleccion implica Lema de Kuratowski

Sea S un conjunto de conjuntos que es cerrado bajo uniones de cadenas entonces, cada elemento de S es un subconjunto de un elemento maximal de S bajo la relación de subconjunto.

Por el Axioma de Elección, existe una función de elección para S, entonces por **Lema 1** cada elemento de S es un subconjunto de un elemento maximal de S bajo la relación de contenencia. De ahí el resultado.

Lema 1

Todo Conjunto Cerrado bajo Uniones de Cadenas con Función de Elección es Tipo M:

Sea S un conjunto de conjuntos que es cerrado bajo uniones de cadenas, entonces, cada elemento de S es un subconjunto de un elemento maximal de S bajo la relación de subconjunto.

Prueba

Por el Axioma de Elección, existe una función de elección para S. Sea C una función de elección para S.

Para $x \in S$, definimos x^* como el conjunto de todos los elementos y de S tales que x es un subconjunto propio de y:

$$\forall x \in S : x^* := \{y \in S : x \subsetneq y\}$$

Tenemos que x^* está vacío si y sólo si x es un elemento maximal de S bajo la relación de subconjunto.

Definamos una aplicación progresiva g en S de la siguiente manera:

$$\forall x \in S : g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es maximal} \\ C(x^*) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Así:

- Si x es un elemento maximal de S, entonces $g(x) = x$.
- Si x no es un elemento maximal de S, entonces x es un subconjunto propio de $g(x)$.

Por el **lema 3**: Dado que tenemos S es conjunto superinductivo bajo Funcion progresiva para todo $b \in S$, b es un subconjunto de algún $x \in S$ tal que $x = g(x)$. Este elemento x es entonces un elemento maximal de S.

De ahí el resultado.

Lema 2

Corolario del Conjunto que es Superinductivo bajo Aplicación Progresiva tiene Punto Fijo

Si tenemos S un conjunto no vacío de conjuntos, con $g : S \to S$ una aplicación progresiva en S tal que: S es cerrado bajo g y S es cerrado bajo uniones de cadenas

Sea $b \in S$ entonces existe $x \in S$ tal que:

$$b \subseteq x \quad g(x) = x$$

Prueba

Supongamos la hipótesis.

Caso $b = \emptyset$ Este caso es trivial

Caso $b \neq \emptyset$ Sea S_b el conjunto de todos los elementos x de S tales que $b \subseteq x$, junto con $\emptyset$:

$$S_b = \{x \in S : b \subseteq x\} \cup \{\emptyset\}$$

Es claro por inspección que S_b es cerrado bajo uniones de cadenas.

Definamos la aplicación $g' : S_b \to S_b$ de la siguiente manera:

$$\forall x \in S_b : g'(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = \emptyset \\ g(x) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Entonces:

- g' es una aplicación progresiva en S_b.
- S_b es cerrado bajo g'.
- $\emptyset \in S_b$.

Así que S_b es superinductivo bajo g'.

Por lo tanto, por **Lema 2**

$$\exists x \in S_b : x = g'(x)$$

Para tal x tenemos que $x \neq \emptyset$ porque $g'(\emptyset) = b$.

De ahí:

$$b \subseteq x$$

Además, porque $x \neq \emptyset$:

$$g'(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = x$$

Así que:

$$b \subseteq x \quad g(x) = x$$

y la prueba está completa.

Prueba de la existencia de un punto fijo

Supongamos la hipótesis.

De:

- La intersección de un conjunto cuyos elementos son cerrados bajo una aplicación es también cerrada bajo esa aplicación.
- La intersección de un conjunto cuyos elementos son cerrados bajo uniones de cadenas es también cerrada bajo uniones de cadenas.

se sigue por definición que M es mínimamente superinductivo bajo g.

———————-

Por lo tanto, por definición M es una g-torre.

Por la intersección de una clase no vacía es un conjunto, M es un conjunto.

Así, por la unión de una g-torre es el mayor elemento y único punto fijo, tenemos:

$$\bigcup M \text{ es un punto fijo de } g$$

$$\bigcup M \in M$$

Dado que $M \subseteq S$ se sigue que:

$$\bigcup M \in S$$

y así, $\bigcup M$ es el x cuya existencia se está demostrando.

Lema 3 (H)

Todo Conjunto que es Superinductivo bajo Aplicación Progresiva tiene Punto Fijo:

Sea S un conjunto.
Sea $g : S \to S$ una aplicación progresiva en S.
Sea S superinductivo bajo g.
Entonces, existe $x \in S$ tal que x es un punto fijo de g (es decir, $g(x) = x$).

Prueba

Supongamos la hipótesis. Dado que S es superinductivo bajo g, sabemos que:

1. S contiene el conjunto vacío: $\emptyset \in S$.
2. S es cerrado bajo g: $\forall x \in S, g(x) \in S$.
3. S es cerrado bajo uniones de cadenas:
   $\forall C$ cadena de elementos de S, $\bigcup C \in S$.

Consideremos el conjunto de iteraciones sucesivas de g aplicadas al conjunto vacío, es decir, construimos una secuencia $\{x_n\}$ donde:

$$x_0 = \emptyset$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Para definir apropiadamente a x_{n+1} es necesario el axioma de eleccion, dado que a priori no se conoce la forma de $g(x_n)$, solo se sabe que es no vacio, pues contiene al menos a x_n
Dado que $\emptyset \in S$ y S es cerrado bajo g, se sigue por inducción que $x_n \in S$ para todo n.

Ahora, consideremos la cadena $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos:

$$x^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

Puesto que S es cerrado bajo uniones de cadenas, tenemos $x^* \in S$.
Demostraremos que x^* es un punto fijo de g.

1. $x^* \subseteq g(x^*)$ Dado que g es una aplicación progresiva, tenemos que para todo $x \in S$, $x \subseteq g(x)$. Por lo tanto, para cada x_n en la cadena:

$$x_n \subseteq x_{n+1} = g(x_n)$$

Tomando la unión sobre n, obtenemos:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} g(x_n)$$

Pero como g es una función y $g(x_n) = x_{n+1}$, esto implica:

$$x^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} g(x_n) = g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n\right) = g(x^*)$$

2. $g(x^*) \subseteq x^*$ Dado que x^* es la unión de todos los x_n y $x_{n+1} = g(x_n)$, tenemos que $g(x^*)$ es un subconjunto de x^*. Específicamente, como g es una aplicación progresiva:

$$g(x^*) = g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n\right)$$

Para cada n, $x_n \subseteq x^*$, y como g es progresiva, $g(x_n) \subseteq g(x^*)$. Pero sabemos que:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

por lo tanto,

$$x_{n+1} \subseteq g(x^*)$$

Tomando la unión sobre n, obtenemos:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} x_{n+1} \subseteq g(x^*)$$

Pero $\bigcup_{n=0}^{\infty} x_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n = x^*$, lo que implica:

$$x^* \subseteq g(x^*)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$x^* \subseteq g(x^*)$$
$$g(x^*) \subseteq x^*$$

Esto implica que $x^* = g(x^*)$, y así x^* es un punto fijo de g.