Topología de Zariski en Variedades Algebraicas y Anillos Conmutativos

Jack Solano

May 23, 2025

Abstract

Introducida por Oscar Zariski en su libro *Algebraic Surfaces* (1935), definida sobre variedades algebraicas. Esta topología se basa en los lugares de los ceros de los polinomios, considerando los conjuntos cerrados como los conjuntos de ceros de un conjunto de polinomios.

Posteriormente, la topología de Zariski fue generalizada al conjunto de ideales primos de un anillo conmutativo R, llamado el **espectro de un anillo** $\mathrm{Spec}(R)$. En esta generalización, los abiertos de $\mathrm{Spec}(R)$ corresponden a los ideales primos que no contienen ciertos elementos de R.

Alexander Grothendieck, en su teoría de **esquemas**, amplió y formalizó esta topología. Introdujo el concepto de esquema, una generalización de las variedades algebraicas, y definió la topología de Zariski en este contexto, utilizando el espectro de un anillo para describir los puntos de los esquemas.

Un libro clave donde Grothendieck desarrolla la topología de Zariski es:

> Grothendieck, A. (1966-67). *Éléments de géométrie algébrique (EGA), Volume I: Le langage des schémas.*

Este trabajo fue fundamental para el desarrollo de la geometría algebraica moderna y la teoría de esquemas.

Contents

1 Topología de Zariski en Variedades Algebraicas sobre un Cuerpo Algebraicamente Cerrado

En el contexto de variedades algebraicas, la topología de Zariski se utiliza para definir conjuntos cerrados como conjuntos de ceros de ideales, que capturan la estructura geométrica de los polinomios. Este enfoque es particularmente relevante sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, ya que permite una interpretación geométrica directa.

1.1 Definición de la Topología de Zariski en Variedades Algebraicas

Definición 1.1 (Topología de Zariski en k^n)**.** Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre k. La topología de Zariski en k^n se define tomando como conjuntos cerrados todos los conjuntos algebraicos de la forma

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \text{ para todo } f \in S\},$$

donde $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$

Teorema 1.1. *La topología de Zariski definida sobre el espacio afín $\mathbb{A}^n$ satisface las propiedades de una topología.*

Proof. Por definición, los conjuntos cerrados de la topología de Zariski son de la forma:

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \text{ para todo } f \in S\},$$

donde S es un conjunto de polinomios en $k[x_1, \ldots, x_n]$. Denotemos por $\mathcal{C}$ la colección de todos estos conjuntos $V(S)$. Queremos verificar que $\mathcal{C}$ cumple con las propiedades de los cerrados en una topología:

1. $\mathbb{A}^n$ y $\emptyset$ son cerrados.

- Si $S = \{0\}$, entonces $V(S) = \mathbb{A}^n$, ya que todos los puntos de $\mathbb{A}^n$, hacen que ese polinomio se anule, al ser el polinomio constante nulo.. - Si $S = \{1\}$, entonces $V(S) = \emptyset$, ya que no existe ningún punto $x \in \mathbb{A}^n$ tal que $1 = 0$.

Por lo tanto, $\mathbb{A}^n$ y $\emptyset$ son conjuntos cerrados.

2. La unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

Sean $V(I)$ y $V(J)$ dos conjuntos cerrados asociados a ideales I y J de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Por la propiedad de los ideales, tenemos que:

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ),$$

donde IJ es el producto ideal de I y J. Dado que IJ es un ideal en $k[x_1, \ldots, x_n]$, su conjunto asociado $V(IJ)$ es un conjunto cerrado. Esto se generaliza por inducción a un número finito de conjuntos cerrados. Por lo tanto, la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

3. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.

Sean $\{V(I_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados, donde cada $V(I_\alpha)$ está asociado a un ideal I_α. Por definición, tenemos:

$$\bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) = V\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right),$$

donde $\sum_{\alpha \in A} I_\alpha$ es el ideal generado por todos los I_α. Dado que $\sum_{\alpha \in A} I_\alpha$ es un ideal en $k[x_1, \ldots, x_n]$, su conjunto asociado $V\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.

Conclusión. Hemos probado que los conjuntos $V(S)$ definidos como los ceros de un conjunto de polinomios forman una colección que satisface los axiomas de los conjuntos cerrados en una topología. Por lo tanto, la colección de los complementos de estos conjuntos (los conjuntos abiertos) define una topología, llamada la **topología de Zariski**. □

Teorema 1.2. $V(I(Y)) = Y$

Queremos demostrar que:

$$V(I(Y)) = Y.$$

Proof. Sea Y un conjunto cerrado en la topología de Zariski, definido como:

$$Y = V(S) = \{p \in k^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in S\},$$

El ideal asociado a Y es:

$$I(Y) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in Y\}.$$

1. $V(I(Y)) \supseteq Y$**:** Por definición de $I(Y)$, cualquier polinomio $f \in I(Y)$ satisface $f(p) = 0$ para todo $p \in Y$. Por lo tanto, $Y \subseteq V(I(Y))$. Luego

2. $V(I(Y)) \subseteq Y$**:** Sea $p \in V(I(Y))$. Esto significa que $f(p) = 0$ para todo $f \in I(Y)$. Recordemos que $I(Y)$ contiene todos los polinomios que se anulan en Y. Por construcción, no puede existir un punto p fuera de Y que sea un cero de todos los polinomios en $I(Y)$. Por lo tanto, $p \in Y$, y se tiene $V(I(Y)) \subseteq Y$.

Por lo tanto:

$$V(I(Y)) = Y.$$

□

Teorema 1.3. *Sea k un cuerpo completo algebraicamente cerrado, con la topología métrica inducida por su completitud. En el espacio afín k^n, todo conjunto cerrado en la topología de Zariski es también cerrado en la topología métrica usual.*

Proof. Por definición, los conjuntos cerrados en la topología de Zariski son de la forma:

$$V(I) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ para todo } f \in I\},$$

donde $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal. Queremos probar que $V(I)$ es cerrado en la topología métrica usual.

Paso 1: Continuidad de los polinomios. Cada polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ es una función continua en la topología métrica de k^n. Esto se debe a que los polinomios son combinaciones finitas de operaciones continuas (suma, producto y composición), y la topología métrica respeta estas operaciones.

Paso 2: El conjunto de ceros de un polinomio es cerrado. Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Como f es continua y el conjunto $\{0\}$ es cerrado en k, el conjunto de ceros de f, definido como:

$$Z(f) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0\},$$

es cerrado en la topología métrica usual.

Paso 3: Intersección de cerrados. El conjunto cerrado $V(I)$ es la intersección de los conjuntos $Z(f)$ para todos los $f \in I$, es decir:

$$V(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f).$$

En la topología métrica, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada. Por lo tanto, $V(I)$ es cerrado en la topología métrica usual.

Paso 4: Generalidad del cuerpo k. El argumento anterior es válido para cualquier cuerpo k con una topología métrica inducida por su completitud. Además, dado que los cuerpos completos son metrizables (toda sucesión de Cauchy es convergente), la topología métrica está bien definida y cumple las propiedades necesarias para esta demostración.

Conclusión. Todo conjunto cerrado en la topología de Zariski sobre k^n es también cerrado en la topología métrica usual de k^n. □

1.2 Propiedades de la Topología de Zariski en Variedades Algebraicas

Teorema 1.4. *La topología de Zariski es T1.*

Proof. Sea $a_i \in \mathbb{A}^n$ entonces tenemos que $x - a_i = f(x) \in k[x_1, \dots, x_n]$ por lo tanto, $S = \{f\}$ genera a la variedad $V(S) = \{a_i\}$. Luego todo punto en el espacio afin es cerrado. Por lo tanto la Topologia de Zariski es T1. □

Teorema 1.5. *La topología de Zariski no es Hausdorff.*

Proof. Procedamos por contradicción. Supongamos que la topología de Zariski es Hausdorff. Esto significa que, para cualesquiera dos puntos $x, y \in \mathbb{A}^n$ con $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U_x y V_y tales que:

$$x \in U_x, \quad y \in V_y, \quad \text{y} \quad U_x \cap V_y = \emptyset.$$

Donde :

$$U_x = D(I_x) = \mathbb{A}^n \setminus V(I_x), \quad V_y = D(J_y) = \mathbb{A}^n \setminus V(J_y),$$

donde I_x, J_y son ideales propios del anillo $k[x_1, \dots, x_n]$. Si $U_x \cap V_y = \emptyset$, entonces:

$$\mathbb{A}^n = V(I_x) \cup V(J_y) = V(I_x J_y)$$

y, por lo tanto, el producto $I_x J_y$ debe ser el ideal nulo, es decir:

$$I_x J_y = (0).$$

Contradicción. El hecho de que $I_x J_y = (0)$ implica que existe un polinomio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que f tiene ceros en todos los puntos de $\mathbb{A}^n$ (es decir, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{A}^n$). Esto es imposible, ya que k es un cuerpo y el anillo $k[x_1, \dots, x_n]$ es dominio de integridad. Por lo tanto, debemos tener $I_x = (0)$ o $J_y = (0)$, lo que implica que:

$$U_x = \emptyset \quad \text{o} \quad V_y = \emptyset.$$

Esto contradice nuestra suposición inicial de que U_x y V_y eran abiertos no vacíos.

Conclusión. Por lo tanto, no pueden existir abiertos disjuntos U_x y V_y que separen puntos distintos x y y en la topología de Zariski. Esto demuestra que la topología de Zariski no es Hausdorff. □

Corolario 1.6. *La topología de Zariski no es métrica.*

Proof. Sabemos que todo espacio métrico es necesariamente Hausdorff. Como hemos demostrado que la topología de Zariski no es Hausdorff, se sigue que no puede ser métrica. □

Teorema 1.7. *Sea $Z \subset A^n = X$ un subconjunto cerrado en el espacio afín X sobre un cuerpo K. Entonces, Z es compacto en la topología de Zariski; es decir, cualquier cubierta abierta de Z admite un subcubrimiento finito.*

Proof. Por definición de conjunto cerrado en la topología de Zariski, existe un conjunto $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ con $I = |S|$

$$Z = V(S) = \bigcap_{i \in I} V(f_i).$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $I = \{1\}$ tomando $f_1 = f$, de modo que $Z = V(f)$. Como R es un dominio de factorización única (UFD), existe una descomposición de f como

$$f = g_1 \cdots g_s,$$

donde cada g_j es un polinomio primo en R. Así, podemos escribir

$$Z = V(g_1 \cdots g_s) = \bigcup_{j=1}^{s} V(g_j).$$

Una vez más, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $s = 1$, es decir, que f es un polinomio primo, y por lo tanto Z es un subconjunto cerrado irreducible de X.

Ahora, consideremos una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de Z, es decir:

$$Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Dado que Z es cerrado e irreducible, podemos asumir sin pérdida de generalidad que cada U_i es un conjunto abierto irreducible. Entonces, existe un conjunto de polinomios $\{f_i\}_{i \in I} \subset R$ tal que

$$U_i = D(f_i) = X \setminus V(f_i),$$

y, por lo tanto,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} V(f_i) = X \setminus V(W),$$

donde $V(W)$ es un subconjunto cerrado de X.

Sea $I(W)$ el ideal de W. Por el Teorema de la Base de Hilbert, el ideal $I(W)$ es finitamente generado. Así, existe un subconjunto finito $I_F \subset I$ y polinomios $\{f_i\}_{i \in I_F} \subset R$ tales que

$$I(W) = (f_i \mid i \in I_F).$$

De esta forma, podemos escribir

$$Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i = X \setminus V(I(W)) = X \setminus \bigcap_{i \in I_F} V(f_i) = \bigcup_{i \in I_F} U_i,$$

lo que muestra que Z admite un subcubrimiento finito.

Por lo tanto, Z es compacto en la topología de Zariski. $\square$

Observación 1. Este resultado se obtiene usando únicamente la hipótesis de que X es un espacio afín sobre un cuerpo, independientemente de su característica o de otras propiedades algebraicas.

Teorema 1.8. *El espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ (el espacio n-afín sobre un cuerpo k) bajo la topología de Zariski es un espacio topológico Noetheriano. Es decir, satisface la condición de cadena descendente sobre sus subconjuntos cerrados.*

Proof. Consideremos una sucesión descendente de subconjuntos cerrados en la topología de Zariski:

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \cdots .$$

Por las propiedades del ideal asociado a un subconjunto $Y_i \subseteq \mathbb{A}_k^n$, los ideales correspondientes $I(Y_i)$ forman una sucesión ascendente de ideales en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$:

$$I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq I(Y_3) \subseteq \cdots .$$

Dado que $k[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo Noetheriano (porque todo anillo de polinomios sobre un cuerpo es Noetheriano), esta sucesión ascendente de ideales se estabiliza. Es decir, existe un entero m tal que:

$$I(Y_m) = I(Y_{m+1}) = I(Y_{m+2}) = \cdots .$$

Por **Teorema 1.2**, tenemos que $V(I(Y_i)) = Y_i$ para todo i. Así, si los ideales se estabilizan en $I(Y_m)$, también lo hacen los subconjuntos cerrados:

$$Y_m = Y_{m+1} = Y_{m+2} = \cdots .$$

Esto demuestra que cualquier sucesión descendente de subconjuntos cerrados en la topología de Zariski se estabiliza. Por lo tanto, $\mathbb{A}_k^n$ es un espacio topológico Noetheriano. □

Teorema 1.9. *Un espacio topológico V es Noetheriano si y solo si cada subconjunto abierto de V es compacto.*

Proof. Demostraremos ambas implicaciones:

($\Rightarrow$) Si V es Noetheriano, entonces cada abierto de V es compacto.

Supongamos que V es un espacio topológico Noetheriano, es decir, satisface la condición de cadena descendente sobre sus subconjuntos cerrados. Sea $W \subset V$ un subconjunto abierto y sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$ una cubierta de W por abiertos de V.

Consideremos el conjunto F de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Como V es Noetheriano, el conjunto F tiene un elemento maximal bajo inclusión, digamos $C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n}$. Supongamos que:

$$W \setminus (C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n}) \neq \emptyset.$$

Entonces existe $C_\beta \in \mathcal{C}$ que contiene un punto $w \in W \setminus (C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n})$. Esto implica que:

$$C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n} \cup C_\beta$$

es una unión finita de elementos de $\mathcal{C}$ que contiene estrictamente a $C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n}$, lo cual contradice la maximalidad de este último. Por lo tanto, debe ser que:

$$W = C_{\alpha_1} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n},$$

y hemos encontrado una subcubierta finita de W. Por consiguiente, W es compacto.

($\Leftarrow$) Si cada abierto de V es compacto, entonces V es Noetheriano.

Supongamos ahora que cada subconjunto abierto de V es compacto. Queremos demostrar que V es Noetheriano, es decir, que toda cadena ascendente de subconjuntos cerrados en V se estabiliza.

Sea:

$$Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq \cdots$$

una cadena ascendente de subconjuntos cerrados en V. Definamos:

$$O = V \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i,$$

que es un subconjunto abierto de V. Por hipótesis, O es compacto. Ahora, si asumimos que la cadena no se estabiliza, entonces O no puede ser cubierto por un número finito de los complementos abiertos asociados, contradiciendo la compactitud de O. Esto implica que existe un entero m tal que:

$$Z_m = Z_{m+1} = Z_{m+2} = \cdots,$$

lo que demuestra que la cadena de cerrados se estabiliza. Por lo tanto, V es Noetheriano. □

Corolario 1.10. *En la topología de Zariski sobre un espacio afín $\mathbb{A}_k^n$, cada conjunto de la forma $D_f = \mathbb{A}_k^n \setminus V(f)$, donde $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, es un conjunto abierto y compacto.*

Proof. Por la definición de D_f, es un subconjunto abierto en la topología de Zariski. Dado que el espacio afín $\mathbb{A}_k^n$ es un espacio Noetheriano (como se ha demostrado anteriormente), cualquier subconjunto abierto es compacto, lo que incluye a D_f. □

Teorema 1.11. *Un espacio topológico Noetheriano X tiene un número finito de componentes irreducibles. Además, ninguna componente está contenida en la unión de las demás.*

Proof. Sea M el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de X que no pueden escribirse como una unión finita de subconjuntos irreducibles de X. Queremos demostrar que $M = \emptyset$.

Paso 1: Supongamos, por contradicción, que $M \neq \emptyset$. Entonces, por la propiedad Noetheriana de X, el conjunto M tiene un elemento minimal bajo inclusión. Llamemos a este elemento Y.

Dado que $Y \in M$, no puede escribirse como una unión finita de subconjuntos irreducibles de X. Esto implica que Y no es irreducible.

Paso 2: Descomposición de Y. Dado que Y no es irreducible, existen subconjuntos cerrados no vacíos Y_1 y Y_2 de Y, tales que:

$$Y = Y_1 \cup Y_2,$$

con $Y_1 \neq Y$ y $Y_2 \neq Y$.

Paso 3: Contradicción a la minimalidad de Y. Como Y es cerrado en X, también lo son Y_1 y Y_2. Además, por la minimalidad de Y en M, se deduce que $Y_1 \notin M$ y $Y_2 \notin M$. Por lo tanto, Y_1 y Y_2 pueden escribirse como una unión finita de subconjuntos irreducibles:

$$Y_1 = \bigcup_{i=1}^{m} Z_i, \quad Y_2 = \bigcup_{j=1}^{n} Z_j,$$

donde Z_i y Z_j son irreducibles. Por lo tanto, Y puede escribirse como:

$$Y = Y_1 \cup Y_2 = \bigcup_{i=1}^{m} Z_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} Z_j,$$

lo que implica que Y es una unión finita de subconjuntos irreducibles, contradiciendo el hecho de que $Y \in M$.

Paso 4: Conclusión. La contradicción implica que $M = \emptyset$, lo que significa que todo subconjunto cerrado de X puede escribirse como una unión finita de subconjuntos irreducibles. En particular, X mismo puede escribirse como una unión finita de subconjuntos irreducibles:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i,$$

donde cada X_i es irreducible y $X_i \neq X_j$ para $i \neq j$. Estos X_i son las componentes irreducibles de X. Además, ninguna componente irreducible puede estar contenida en la unión de las demás, ya que de ser así, no sería maximal. Esto concluye la demostración. □

Teorema 1.12. *El espacio afín $\mathbb{A}^n$ con la topología de Zariski es conexo.*

Proof. Supongamos, por contradicción, que $\mathbb{A}^n$ no es conexo. Entonces, existen abiertos disjuntos no vacíos U y V tales que:

$$U \cup V = \mathbb{A}^n \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset.$$

En la topología de Zariski, los abiertos son de la forma $\mathbb{A}^n \setminus V(S)$ para algún ideal $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. Así, podemos escribir:

$$U = \mathbb{A}^n \setminus V(S), \quad V = \mathbb{A}^n \setminus V(R),$$

donde S y R son ideales de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

La condición $U \cap V = \emptyset$ implica:

$$(\mathbb{A}^n \setminus V(S)) \cap (\mathbb{A}^n \setminus V(R)) = \emptyset,$$

lo cual significa que:

$$V(S) \cup V(R) = \mathbb{A}^n.$$

Dado que $V(S \cdot R) = V(S) \cup V(R)$, tenemos $V(S \cdot R) = \mathbb{A}^n$. Esto implica que $S \cdot R = (0)$, ya que $k[x_1, \ldots, x_n]$ es un dominio íntegro. Por lo tanto, $S = (0)$ o $R = (0)$.

Si $S = (0)$, entonces $V(S) = \mathbb{A}^n$, lo que implica que $U = \emptyset$. De manera similar, si $R = (0)$, entonces $V(R) = \mathbb{A}^n$ y $V = \emptyset$. En ambos casos, uno de los conjuntos U o V es vacío, lo cual contradice la suposición de que ambos son no vacíos.

Por lo tanto, $\mathbb{A}^n$ no puede ser separado en dos abiertos disjuntos, lo que demuestra que es conexo. □

1.3 Ejemplos en k^2

Ejemplo 1.1. Consideremos $k = \mathbb{C}$ y el anillo $k[x, y]$. La curva definida por el polinomio $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ en $\mathbb{C}^2$ es un conjunto cerrado en la topología de Zariski, ya que corresponde al conjunto de puntos donde el polinomio f se anula.

Ejemplo 1.2. El conjunto de puntos en $\mathbb{C}^2$ donde se anulan los polinomios x y y simultáneamente es el punto $(0, 0)$, que también es un conjunto cerrado en esta topología.

2 Topología de Zariski en Anillos Conmutativos

En el contexto de anillos conmutativos, la topología de Zariski se define sobre el espectro de un anillo (el conjunto de sus ideales primos). Esta construcción permite una generalización que es esencial en la teoría de esquemas.

2.1 Definiciones de la Topología de Zariski en el Espectro de un Anillo

Definición 2.1 (Espectro de un Anillo y Topología de Zariski)**.** Sea R un anillo conmutativo con unidad. El espectro de R, denotado $\mathrm{Spec}(R)$, es el conjunto de todos los ideales primos de R. La topología de Zariski en $\mathrm{Spec}(R)$ se define tomando como cerrados los conjuntos de la forma

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\},$$

donde $I \subset R$ es un ideal de R.

Definición 2.2. Sea R un anillo conmutativo con identidad. Para cada elemento $f \in R$, se define:

$$V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : f \in \mathfrak{p}\},$$

es decir, el conjunto de ideales primos de R que contienen al elemento f.

2.2 Resultados Basicos

Proposición 2.1. *Se cumple que $V(0) = X$ y $V(1) = \varnothing$.*

Proof. Por definición, $V(0) = \{p \mid p \text{ es primo y } 0 \in p\}$. Como todo ideal de R contiene al elemento 0, entonces $V(0) = X$.

Por otro lado, $V(1) = \{p \mid p \text{ es primo y } 1 \in p\}$. Sin embargo, ningún ideal primo contiene al elemento 1 porque 1 genera el ideal completo A. Por lo tanto, $V(1) = \varnothing$. □

Proposición 2.2. *Para una familia cualquiera $\{E_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de R, se cumple que:*

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i).$$

Proof. **(i) Demostración de $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} V(E_i)$:** Sea $p \in V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$, entonces $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq p$. Esto implica que, para todo $i \in I$, se tiene $E_i \subseteq p$, por lo que $p \in V(E_i)$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $p \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

(ii) Demostración de $\bigcap_{i\in I} V(E_i) \subseteq V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$: Sea $p \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$, entonces para todo $i \in I$, se cumple $E_i \subseteq p$. Por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq p$, lo que implica que $p \in V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$.

En consecuencia, se tiene la igualdad $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$. □

Proposición 2.3. *Para cualesquiera ideales $a, b \subseteq R$, se cumple que:*

$$V(a \cap b) = V(ab) = V(a) \cup V(b).$$

Proof. **(i) Demostración de $V(ab) = V(a) \cup V(b)$:** Sea $p \in V(ab)$, entonces $ab \subseteq p$. Esto implica que $\forall x \in a$ y $\forall y \in b$, se tiene $xy \in p$. Como p es primo, esto implica que $x \in p$ o $y \in p$. Por lo tanto, $a \subseteq p$ o $b \subseteq p$, lo que implica que $p \in V(a)$ o $p \in V(b)$, es decir, $p \in V(a) \cup V(b)$. Por lo tanto, $V(ab) \subseteq V(a) \cup V(b)$.

Sea $q \in V(a) \cup V(b)$. Esto implica que $q \in V(a)$ o $q \in V(b)$. En cualquier caso, como $ab \subseteq a$ y $ab \subseteq b$, se cumple $ab \subseteq q$, por lo que $q \in V(ab)$. Entonces, $V(a) \cup V(b) \subseteq V(ab)$.

Por lo tanto, $V(ab) = V(a) \cup V(b)$.

(ii) Demostración de $V(a \cap b) = V(ab)$: Sea $p \in V(a \cap b)$, entonces $a \cap b \subseteq p$. Como $ab \subseteq a \cap b$, se cumple $ab \subseteq p$, por lo que $p \in V(ab)$. Por lo tanto, $V(a \cap b) \subseteq V(ab)$.

Sea $q \in V(ab) = V(a) \cup V(b)$, entonces $q \in V(a)$ o $q \in V(b)$. En cualquier caso, $a \cap b \subseteq a \subseteq q$ o $a \cap b \subseteq b \subseteq q$, por lo que $q \in V(a \cap b)$. Esto implica que $V(ab) \subseteq V(a \cap b)$.

En consecuencia, $V(a \cap b) = V(ab)$. □

Proposición 2.4. *Sea R un anillo conmutativo con identidad, e $I \subseteq R$ un ideal. Entonces:*

$$V(I) = \emptyset \iff I = R.$$

Proof. Recordemos que $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $V(I) = \emptyset$. Entonces no existe ideal primo que contenga a I. Por el Lema de Zorn, todo ideal propio de R está contenido en un ideal primo. Por tanto, I no puede ser propio, es decir, $I = R$.
($\Leftarrow$) Recíprocamente, si $I = R$, entonces $1 \in I$, y ningún ideal primo contiene a 1, pues eso implicaría que el ideal primo es igual a R, lo cual es una contradicción. Por tanto, $V(R) = \emptyset$. □

Proposición 2.5. *Sea $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq R$ una familia (posiblemente infinita) de elementos. Entonces se cumple que:*

$$\bigcap_{i \in I} V(f_i) = V\left(\langle f_i : i \in I \rangle\right),$$

es decir, la intersección de los cerrados $V(f_i)$ es igual al cerrado determinado por el ideal generado por todos los f_i.

Proof. Por definición, $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(f_i)$ si y solo si $f_i \in \mathfrak{p}$ para todo $i \in I$, lo cual ocurre si y solo si el ideal generado por todos los f_i, es decir, $\langle f_i : i \in I \rangle$, está contenido en $\mathfrak{p}$. Esto es, $\mathfrak{p} \in V(\langle f_i \rangle)$. Por tanto,

$$\bigcap_{i \in I} V(f_i) = V\left(\langle f_i : i \in I \rangle\right).$$

□

2.3 Construccion Formal

Teorema 2.1 (Topología de Zariski en Spec(R))**.** *La topología de Zariski sobre el espacio* Spec(R)*, cuyos cerrados son de la forma $V(I)$ con $I \subseteq R$ un ideal, cumple las siguientes propiedades:*

1. $V(0) = \mathrm{Spec}(R)$ *y* $V(1) = \varnothing$ *son cerrados. (Por la Proposición 2.1)*

2. *La intersección arbitraria de cerrados de la forma $V(I)$ es cerrada:*

$$\bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) = V\left(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha\right) = V\left(\langle \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \rangle\right). \quad \textit{(Por la Proposición 2.2 y 2.5)}$$

3. *La unión finita de cerrados $V(I)$ es cerrada:*

$$V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ). \quad \textit{(Por la Proposición 2.3)}$$

Teorema 2.2. *Los conjuntos de la forma $D_f = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$, con $f \in R$, forman una base para la topología de Zariski en $Spec(R)$.*

Proof. Los conjuntos abiertos son, por definición, los complementos de los cerrados, es decir,

$$D(E) := V(E)^c = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \exists e \in E \text{ tal que } e \notin \mathfrak{p}\} = \bigcup_{e \in E} D_e,$$

donde hemos definido

$$D_f := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{p}\},$$

el cual es abierto por ser el complemento del cerrado $V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid f \in \mathfrak{p}\}$.

Así, todo conjunto abierto de la topología de Zariski es una unión (posiblemente infinita) de conjuntos de la forma D_f, con $f \in R$. Ahora, para demostrar que $\{D_f\}_{f \in R}$ es una base, basta probar que toda intersección de dos conjuntos de esta forma es un conjunto de la misma forma. En efecto, sean D_f y D_g, se tiene:

$$D_f \cap D_g = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{p} \text{ y } g \notin \mathfrak{p}\} = D_{fg},$$

porque $fg \notin \mathfrak{p}$ si y solo si $f \notin \mathfrak{p}$ y $g \notin \mathfrak{p}$ (ya que $\mathfrak{p}$ es primo).
Esto se justifica por el **Teorema 2.3**.

Por lo tanto, las intersecciones finitas de conjuntos de la forma D_f siguen siendo de la misma forma, y todo abierto es unión (posiblemente infinita) de conjuntos D_f, lo que demuestra que $\{D_f\}_{f \in R}$ es una base de la topología de Zariski. □

2.4 Axiomas de Separacion

Teorema 2.3. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Si* $\dim(R) = 0$*, entonces* $\mathrm{Spec}(R)$ *con la topología de Zariski es un espacio de Hausdorff.*

En realidad, demostraremos un hecho más fuerte:

Teorema 2.4. *Sean $p, q \in \mathrm{Spec}(R)$. Entonces, exactamente una de estas dos afirmaciones es verdadera:*

- *Existen $f, g \in R$ con $f \notin p$, $g \notin q$, y todo ideal primo contiene al menos a uno de f o g.*
- *Existe un ideal primo contenido en $p \cap q$.*

Este teorema implica el resultado original: si todos los primos son maximales, entonces ningún ideal primo puede estar contenido estrictamente en otro. Por tanto, la segunda alternativa sólo ocurre si $p = q$, y en consecuencia, los puntos distintos admiten entornos disjuntos.

Para entenderlo en términos topológicos:

- El cierre de un punto $x \in \mathrm{Spec}(R)$ es $\overline{\{x\}} = V(x)$.
- Dos puntos p y q tienen entornos disjuntos si existen $f \notin p$, $g \notin q$ tales que $D(f) \cap D(g) = \emptyset$, donde $D(f) = \{x \in \mathrm{Spec}(R) \mid f \notin x\}$.

Proof. Supongamos que no existen $f \notin p$, $g \notin q$ tales que todo ideal primo contiene a uno de ellos. Queremos construir un ideal primo contenido en $p \cap q$.

Sea $X = R \setminus (p \cap q)$. Queremos construir un ideal primo J tal que $J \cap X = \emptyset$.

Llamaremos *candidato* a cualquier subconjunto $Y \subseteq R$ tal que, para cualquier subconjunto finito $A \subseteq X$, existe un ideal primo I con $Y \subseteq I$ e $I \cap A = \emptyset$.

El conjunto vacío es candidato: dado $A \subseteq X$ finito, separamos sus elementos en $f_i \notin p$ y $g_j \notin q$, y definimos $f = \prod f_i$, $g = \prod g_j$, entonces $f \notin p$ y $g \notin q$, por hipótesis existe un primo I que no contiene ni a f ni a g, y por tanto $I \cap A = \emptyset$.

Dado que por **Teorema 2.5** la Clase Candidatos satisface todas las hipotesis del **Postulado de Kuratowski** (Equivalente al Lema de Zorn) existe un candidato maximal J. Demostraremos que J es un ideal primo contenido en $p \cap q$.

- Todo candidato está contenido en $p \cap q$ ya que está disjunto con $X = R \setminus (p \cap q)$.
- Si Y es candidato, entonces el ideal generado por Y también lo es. Por tanto, J es un ideal.

Supongamos que $f, g \in R$ con $fg \in J$, pero $g \notin J$. Por maximalidad de J, el conjunto $J \cup \{g\}$ no es candidato. Entonces existe $A_0 \subseteq X$ finito tal que para todo ideal primo I con $J \subseteq I$ y $g \in I$, se tiene $I \cap A_0 \neq \emptyset$.

Sea $A \subseteq X$ cualquier conjunto finito. Por hipótesis, existe I primo tal que $J \subseteq I$ y $I \cap (A \cup A_0) = \emptyset$. Entonces $g \notin I$ pero $fg \in J \subseteq I$, por lo tanto $f \in I$ ya que I es primo. Así, $J \cup \{f\} \subseteq I$ y $I \cap A = \emptyset$, lo que implica que $J \cup \{f\}$ es candidato, y por maximalidad de J, se concluye que $f \in J$.

Esto prueba que J es primo. Así, bajo la hipótesis de que no existen f, g como en la primera alternativa, se construye un primo contenido en $p \cap q$. $\square$

Definición 2.3. Sea R un anillo conmutativo. Recordemos que un subconjunto $Y \subseteq R$ es *candidato* si para todo conjunto finito $A \subseteq R$, existe un ideal $I \subseteq R$ tal que:

- $Y \subseteq I$
- $I \cap A = \emptyset$

Teorema 2.5. *La clase de candidatos es cerrada bajo uniones de cadenas.*

Proof. Sea $\{Y_i\}_{i\in\Lambda}$ una cadena de candidatos (i.e., totalmente ordenada por inclusión). Definimos $Y = \bigcup_{i\in\Lambda} Y_i$. Queremos probar que Y es candidato.

Fijemos un conjunto finito arbitrario $A \subseteq R$. Para cada Y_i, por ser candidato, existe un ideal $I_i \subseteq R$ tal que:

- $Y_i \subseteq I_i$
- $I_i \cap A = \emptyset \quad (\star)$

Supongamos por contradicción que Y **no** es candidato. Entonces, para este A, todo ideal que contenga a Y intersecta a A. En particular, el ideal generado por Y, denotado $\langle Y\rangle$, contendría algún $a \in A$.

Por definición de ideal generado, existirían $r_1, \dots, r_n \in R$ y $y_1, \dots, y_n \in Y$ tales que:

$$a = r_1y_1 + \cdots + r_ny_n \quad (\dagger)$$

Como $Y = \bigcup Y_i$ y la cadena es total, existe $k \in \Lambda$ tal que $y_1, \dots, y_n \in Y_k$. Pero Y_k es candidato, luego existe $I_k \supseteq Y_k$ con $I_k \cap A = \emptyset$. Sin embargo, por $(\dagger)$, $a \in I_k$, contradiciendo $(\star)$.

La contradicción surge de suponer que Y no es candidato. Por tanto, Y debe ser candidato. □

Teorema 2.6. *Si* $\mathrm{Spec}(R)$ *es* T_1*, entonces* $\dim(R) = 0$

Proof. Supongamos que $\mathrm{Spec}(R)$ es un espacio T_1. Por definición, esto significa que todo punto del espacio es cerrado.

Los puntos de $\mathrm{Spec}(R)$ son los ideales primos de R. Sea $p \in \mathrm{Spec}(R)$. Su cierre en la topología de Zariski es

$$\overline{\{p\}} = V(p) = \{q \in \mathrm{Spec}(R) \mid p \subseteq q\}.$$

Si $\mathrm{Spec}(R)$ es T_1, entonces $\{p\}$ es cerrado, lo cual implica que

$$V(p) = \{p\},$$

es decir, no existe un ideal primo $q \neq p$ tal que $p \subsetneq q$. Esto significa que p no está contenido propiamente en ningún otro primo, por lo tanto, p es maximal.

Como esto ocurre para todo $p \in \mathrm{Spec}(R)$, todos los ideales primos de R son maximales, lo cual implica que la dimensión de Krull de R es cero:

$$\dim(R) = 0.$$

□

Corolario 2.7. $\mathrm{Spec}(R)$ *es Hausdorff si y solo si, es T1, si y solo si R tiene dimension de Krull cero.*

Teorema 2.8. *El* $\mathrm{Spec}(R)$*, con la topología de Zariski, es un espacio T_0.*

Proof. Sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$ tales que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Entonces existe un elemento $f \in A$ tal que, sin pérdida de generalidad, $f \in \mathfrak{p}$ pero $f \notin \mathfrak{q}$.

Sea $D(f) = \{\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{r}\}$ el abierto básico de la topología de Zariski determinado por f.

Entonces $\mathfrak{q} \in D(f)$ porque $f \notin \mathfrak{q}$, pero $\mathfrak{p} \notin D(f)$ porque $f \in \mathfrak{p}$. Por tanto, $D(f)$ es un abierto que contiene a $\mathfrak{q}$ pero no a $\mathfrak{p}$.

□

2.5 Conexidad y Compacidad

Teorema 2.9. *Sea $X = \mathrm{Spec}(R)$ el espectro de un anillo conmutativo con unidad. Entonces X es cuasi-compacto, es decir, todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.*

Proof. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto arbitrario de $\mathrm{Spec}(R)$. Para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, existe algún U_i que contiene a $\mathfrak{p}$, y dentro de este U_i, también existe un abierto básico $D(f) \subseteq U_i$ que contiene a $\mathfrak{p}$.

Por lo tanto, el recubrimiento $\{U_i\}$ admite un refinamiento por abiertos básicos $D(f_j)$, y si este tiene un subrecubrimiento finito, entonces también lo tiene el original.

Así, basta demostrar el resultado para recubrimientos por abiertos básicos.
Supongamos entonces que

$$\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i\in I} D(f_i).$$

Recordemos que $D(f_i) = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(f_i)$, por lo tanto:

$$\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i\in I} D(f_i) = \mathrm{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i\in I} V(f_i).$$

De aquí se deduce que:

$$\bigcap_{i\in I} V(f_i) = \emptyset,$$

por la **Proposicion 2.5** tenemos que :

$$V(\langle f_i : i \in I\rangle) = \emptyset.$$

por la **Proposicion 2.4** :

$$\langle f_i : i \in I\rangle = R$$

Por lo tanto, existen $f_1, \ldots, f_n$ entre los f_i tales que $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle = R$. Luego por la **Proposicion 2.4** tenemos que :

$$V(f_1, \ldots, f_n) = \emptyset.$$

Así,

$$\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{j=1}^{n} D(f_j),$$

es decir, el recubrimiento por abiertos básicos tiene un subrecubrimiento finito. Por tanto, $\mathrm{Spec}(R)$ es cuasi-compacto. □

Teorema 2.10 (Compacidad de D_f)**.** *Sea $X = \mathrm{Spec}(R)$ y $D_f \subseteq X$ un abierto básico. Entonces D_f es cuasicompacto.*

Proof. Sea $\{D_{g_i}\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de D_f. Procedemos en 3 pasos:

- **Paso 1: Cubrimiento extendido**
  Consideramos el cubrimiento abierto de X:

$$X = \left(\bigcup_{i\in I} D_{g_i}\right) \cup V(f)$$

  donde hemos añadido el cerrado complementario $V(f) = X \setminus D_f$.

- **Paso 2: Subcubrimiento finito**
  Por compacidad de X (Teorema 2.9), existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que:

$$X = \left(\bigcup_{i\in J} D_{g_i}\right) \cup V(f)$$

- **Paso 3: Restricción a D_f**
  Intersecamos ambos lados con D_f:

$$D_f = D_f \cap X = \left(\bigcup_{i\in J} (D_f \cap D_{g_i})\right) \cup \underbrace{(D_f \cap V(f))}_{\emptyset}$$

  Por el Teorema 2.2, $D_f \cap D_{g_i} = D_{fg_i}$, luego:

$$D_f = \bigcup_{i\in J} D_{fg_i} \subseteq \bigcup_{i\in J} D_{g_i}$$

Hemos obtenido así un subcubrimiento finito de la cubierta original. □

Teorema 2.11. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Entonces:*

$\mathrm{Spec}(R)$ *es conexo* $\iff$ *R no tiene idempotentes no triviales (i.e., $e^2 = e \Rightarrow e = 0$ o $e = 1$)*

Proof. La demostración se divide en dos partes:

($\Rightarrow$) **Idempotentes triviales si** $\mathrm{Spec}(R)$ **es conexo**:

- Supongamos que existe $e \in R$ idempotente no trivial ($e \neq 0, 1$).
- Consideremos los ideales $I_1 = (e)$, $I_2 = (1-e)$. Como $e(1-e) = 0$, tenemos:

$$V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2) = V(0) = \mathrm{Spec}(R)$$
$$V(I_1) \cap V(I_2) = V(I_1 + I_2) = V(R) = \emptyset$$

- Esto muestra que $\mathrm{Spec}(R)$ es unión disjunta de dos cerrados no vacíos:

$$V(e) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid e \in \mathfrak{p}\}$$

$$V(1-e) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid 1-e \in \mathfrak{p}\}$$

- Contradicción con la conexidad de $\mathrm{Spec}(R)$.

($\Leftarrow$) Supongamos $\mathrm{Spec}(R) = V(I_1) \cup V(I_2)$ desconexión no trivial. Entonces:

- Existen $f \in I_1$, $g \in I_2$ con $f + g = 1$ (pues $I_1 + I_2 = R$)
- Como $I_1 I_2 \subseteq \mathrm{Nil}(R)$, existe $n \geq 1$ tal que $(fg)^n = 0$
- Desarrollamos $1 = (f+g)^{2n}$:

$$1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} f^{2n-k} g^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} f^{2n-k} g^k}_{e_1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} f^{2n-k} g^k}_{e_2} + \binom{2n}{n} (fg)^n$$

  donde el último término es cero pues $(fg)^n = 0$.
- Factorizamos e_1 y e_2:

$$e_1 = f^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} f^{n-k} g^k \right) = f^n \cdot \alpha$$

$$e_2 = g^n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} f^{n-k} g^{k-n} \right) = g^n \cdot \beta$$

- Verificamos las propiedades:
  * $e_1 + e_2 = 1$ (por la ecuación original)
  * $e_1 e_2 = f^n g^n \alpha\beta = (fg)^n (\alpha\beta) = 0$
  * $e_1^2 = f^{2n}\alpha^2 = f^n \cdot (f^n \alpha^2) = e_1 \cdot (f^n \alpha^2)$
  * Como $f^n \alpha = e_1$, se tiene $e_1^2 = e_1(f^{n-1}\alpha e_1) = e_1$ (pues $f \in I_1$ y $g \in I_2$ son no unidades)
- Así, e_1 y e_2 son idempotentes ortogonales no triviales, contradiciendo la hipótesis.

$\square$

2.6 Arco conexidad en el Espectro de un Anillo

Sea

$$E = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1] \right\} \cup \left\{ (0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1] \right\}.$$

un espacio topológico conexo y compacto Hausdorff. Definamos el conjunto

$$R = C(E, \mathbb{R}) = \{ f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \}.$$

Teorema 2.12 (Conexidad del Spec(R))**.**

Proof. Por el **Teorema 2.11** es sufiente probar que $R = C(E, \mathbb{R})$ no tiene elementos idempotentes no triviales. Sea f un elemento idempotente esto es, $f^2 = f \quad \forall x \in E$ Dado que las imagenes estan en $\mathbb{R}$ un cuerpo, los unicos idempotentes son los triviales, entonces $\mathrm{Im}(f) \subseteq \{0,1\}$ si la igualdad fuera cierta. Entonces f seria continua y sobreyectiva desde un espacio conexo hacia el conjunto $\{0,1\}$ como E es conexo, tenemos que $\mathrm{Im}(f) = \{0\} \quad$ o bien $\quad \mathrm{Im}(f) = \{1\}$. Por tanto, $\mathrm{Spec}(R)$ es conexo. □

Teorema 2.13 (Unicidad del ideal maximal contenedor)**.** *Sea E un espacio compacto Hausdorff y $R = C(E, \mathbb{R})$. Todo ideal primo $p \subset R$ está contenido en exactamente un ideal maximal $m_x = \{ f \in R \mid f(x) = 0 \}$ para algún $x \in E$.*

Proof. **1. Existencia.** Sea $p \subset R$ un ideal primo. Definimos el conjunto cero asociado como

$$V(p) := \bigcap_{f \in p} \{ x \in E : f(x) = 0 \}.$$

Si $V(p) = \emptyset$, por compacidad existirían $f_1, \ldots, f_n \in p$ con $V(f_1) \cap \cdots \cap V(f_n) = \emptyset$. Entonces la función

$$f = f_1^2 + \cdots + f_n^2 \in p$$

satisface $f(x) > 0$ para todo $x \in E$, por lo tanto f es una unidad en R, contradiciendo que p es propio. Así, $V(p) \neq \emptyset$. Para cualquier $x \in V(p)$, se tiene $f(x) = 0$ para todo $f \in p$, es decir, $p \subseteq m_x$.

2. Unicidad. Supongamos que $p \subseteq m_x \cap m_y$ con $x \neq y$. Por el lema de Urysohn, existen $f, g \in R$ tales que $f(x) \neq 0$, $f(y) = 0$, $g(y) \neq 0$, $g(x) = 0$. Entonces $f \notin m_x$, $g \notin m_y$, pero $fg = 0 \in p$. Como p es primo, se sigue que $f \in p$ o $g \in p$. En ambos casos, $f \notin m_x$ y $g \notin m_y$ contradicen que $p \subseteq m_x \cap m_y$. Por lo tanto, p está contenido en un único ideal maximal de la forma m_x. □

Definición 2.4. Sea E un espacio topológico completamente regular, $R = C(E, \mathbb{R})$ el anillo de funciones continuas reales sobre E, y $X = \mathrm{Spec}(R)$. Definimos la función

$$\pi : X \to E, \quad \pi(\mathfrak{p}) = x \text{ si } \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_x = \{f \in R \mid f(x) = 0\}.$$

Teorema 2.14. *π es continua.*

Proof. Dado $B(x_0, r) \subseteq E$, se probara que $\pi^{-1}(B(x_0, r))$ es abierta en X.

1. **Construcción de funciones**: Sea $s < r$. Como E es completamente regular, existe una función $f_s \in R$ tal que:

$$f_s(x) > 0 \text{ si } x \in B(x_0, s), \quad f_s(x) = 0 \text{ si } x \notin \overline{B}(x_0, s) \setminus \partial B(x_0, s)$$

(Si E es un espacio métrico, se puede tomar $f_s(x) = \max\{0, s - d(x_0, x)\}$.)

2. **Relación con abiertos de Zariski**: Consideramos el abierto básico de Zariski asociado a f_s,

$$D(f_s) = \{\mathfrak{p} \in X \mid f_s \notin \mathfrak{p}\}.$$

Demostraremos que:

$$\pi^{-1}(B(x_0, s)) \subseteq D(f_s) \subseteq \pi^{-1}(\overline{B}(x_0, s)).$$

1. Inclusión $\pi^{-1}(B(x_0, s)) \subseteq D(f_s)$

– Sea $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}(B(x_0, s))$. Entonces $\pi(\mathfrak{p}) = x \in B(x_0, s)$. Esto es $f_s(x) > 0$, entonces $f_s \notin \mathfrak{m}_x$. Luego $f_s \notin \mathfrak{p}$ por $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_x$. Esto es $\mathfrak{p} \in D(f_s)$.

2. Inclusión $D(f_s) \subseteq \pi^{-1}(\overline{B}(x_0, s))$:

– Sea $\mathfrak{p} \in D(f_s)$. Supongamos que $\pi(\mathfrak{p}) = x \notin \overline{B}(x_0, s)$. Esto es : Existe un abierto U_x disjunto de $\overline{B}(x_0, s)$. Por ser E completamente regular $\exists g \in R$ con:

$$g(x) > 0 \text{ en } U_x \quad \text{y} \quad g = 0 \text{ en } E \setminus U_x$$

– Como $U \cap \overline{B}(x_0, s) = \emptyset$, $f_s \cdot g = 0$ en todo E. Entonces $0 = f_s \cdot g \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es primo, $f_s \in \mathfrak{p}$ o $g \in \mathfrak{p}$. Pero $f_s \notin \mathfrak{p}$ por hipótesis, y $g \notin \mathfrak{p}$ porque $g(x) > 0$ y $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_x$. **Contradicción**. Por tanto, $x \in \overline{B}(x_0, s)$ y $\mathfrak{p} \in \pi^{-1}(\overline{B}(x_0, s))$.

3. **Unión de abiertos**: Definimos $U_s = D(f_s)$. Entonces:

$$\pi^{-1}(B(x_0, r)) = \bigcup_{s<r} \pi^{-1}(B(x_0, s)) \subseteq \bigcup_{s<r} U_s \subseteq \bigcup_{s<r} \pi^{-1}(\overline{B}(x_0, s)) = \pi^{-1}(B(x_0, r))$$

lo cual implica que

$$\pi^{-1}(B(x_0, r)) = \bigcup_{s<r} U_s,$$

Como la preimagen de todo abierto básico es abierta, π es continua. □

Corolario 2.15 (No arco-conexidad de $\mathrm{Spec}(R)$)**.** *Si E es la curva del topólogo (conexa pero no arco-conexa), entonces* $\mathrm{Spec}(R)$ *no es arco-conexo.*

Proof. Por el siguiente resultado de topología general:

> Si $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, y X es arco-conexo, entonces Y es arco-conexo.

Aplicado a nuestro caso: $\pi : \mathrm{Spec}(R) \to E$ es continua y sobreyectiva Si $\mathrm{Spec}(R)$ fuera arco-conexo, entonces E lo sería. Pero E (la curva del topólogo) no es arco-conexa. Por contradicción, $\mathrm{Spec}(R)$ no puede ser arco-conexo. □

2.7 Generalización a Espacios Compactos Hausdorff

El argumento sobre la continuidad de π se extiende más allá de espacios métricos. Basta que E sea un **espacio compacto Hausdorff** (o más generalmente, completamente regular) con las siguientes propiedades:

- **Topología generada por funciones continuas**: La topología en E está generada por conjuntos de la forma $f^{-1}((0, \infty))$ para $f \in C(E, \mathbb{R})$.
- **Existencia de funciones "bump"**: Para todo abierto $U \subseteq E$ y punto $x \in U$, existe $f \in C(E, \mathbb{R})$ tal que:

$$f(x) > 0 \quad \text{y} \quad f \equiv 0 \text{ en } E \setminus U.$$

Construcción clave: Dado un abierto $U \subseteq E$, elegimos f como arriba y definimos:

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

Entonces:

$$\pi^{-1}(U) = D(f) \quad (\text{abierto en } \mathrm{Spec}(A)).$$

Consecuencias:

- π es continua pues $\pi^{-1}(U)$ es abierto para todo U básico.
- Si E es conexo pero no arco-conexo (e.g., la curva seno del topólogo), entonces $\mathrm{Spec}(A)$ hereda estas propiedades:
  - **Conexidad**: $A = C(E, \mathbb{R})$ no tiene idempotentes no triviales.
  - **No arco-conexidad**: π sobreyectiva preservaría arco-conexidad, pero E no la tiene.

Ejemplo: Para $E =$ curva seno del topólogo compactificada, $\mathrm{Spec}(A)$ contiene:

- Una copia homeomorfa de E (ideales maximales) no arco-conexa.
- Ideales primos no maximales que obstruyen caminos.

3 Conclusiones

La topología de Zariski permite establecer un puente entre álgebra y geometría, proporcionando un marco adecuado para estudiar variedades algebraicas y anillos conmutativos. A través de esta topología, los conceptos geométricos se pueden traducir en términos algebraicos, lo cual es fundamental en la teoría de esquemas y en geometría algebraica en general.

References

[1] Gilmer, R. *Background and Preliminaries on Zero-Dimensional Rings*, en *Zero-Dimensional Commutative Rings*, Marcel Dekker, New York, 1995, pp. 1–13.

[2] Lezama, O. *Geometría Algebraica*. Universidad Nacional de Colombia. Accedido en noviembre de 2024, disponible en `https://red.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001007/olezama/`.

[3] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977. Una referencia clásica sobre la geometría algebraica, con un enfoque en esquemas y la topología de Zariski.

[4] Atiyah, M. F., & Macdonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969. Un texto esencial para entender la conexión entre álgebra conmutativa y geometría algebraica.

[5] Eisenbud, D. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1995. Un texto moderno que incluye aplicaciones a la geometría algebraica, incluyendo discusiones detalladas sobre la topología de Zariski.

[6] Zariski, O., & Samuel, P. *Commutative Algebra*, Volumenes I y II. Van Nostrand, 1958. Una referencia fundamental que desarrolla los aspectos algebraicos detrás de la topología de Zariski.

[7] Cox, D., Little, J., & O'Shea, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer, 2007. Una introducción accesible a la geometría algebraica computacional, con una explicación de la topología de Zariski en contextos aplicados.

[8] Grothendick, A., & Zariski, O. *The Topology of the Spectrum of a Commutative Ring*. Springer-Verlag, 1967. Un trabajo fundamental sobre la topología de los espectros de anillos conmutativos.

[9] Martínez Barahona, I. C. *La Topología de Zariski sobre Anillos Conmutativos*. Tesis presentada en la Universidad de El Salvador, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, Escuela de Matemática, para optar al título de Licenciada en Matemática, Ciudad Universitaria, marzo de 2008.