

图像处理与分析课后作业四

李一帆

December 20, 2020

1 问题 1

问题描述：以 lena 图像为例，实现小波域维纳滤波。

解答：首先对维纳滤波进行一个简单的推导。假设图像的维纳滤波域的先验模型是高斯分布，噪声分布近似为高斯分布。

$$P(X_i) \propto \exp(-X_i^2/\sigma^2)$$

$$P(Y|X) = P(N)$$

$$P(N_i) \propto \exp(-N_i^2/\sigma^2)$$

根据 MAP，对于图像的估计 \hat{X} 可以表示为如下形式。

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \arg \max_X \{P(X|Y)\} = \arg \max_X \left\{ \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} \right\} \\ &= \arg \max_X \{P(Y|X)P(X)\} = \arg \min_X \{-\log(P(Y|X)P(X))\}\end{aligned}$$

假设图像在小波域上独立，可以直接对小波图像中的像素进行处理。

$$\hat{X}_i = \arg \min_X \left\{ \frac{(Y_i - X_i)^2}{\sigma_n^2} + \frac{X_i^2}{\sigma^2} \right\}$$

令 $F_i = \frac{(Y_i - X_i)^2}{\sigma_n^2} + \frac{X_i^2}{\sigma^2}$ ，有如下推导。

$$0 = \frac{\partial F_i}{\partial X_i} = 2 \frac{(X_i - Y_i)}{\sigma_n^2} + 2 \frac{X_i}{\sigma^2} \Rightarrow X_i = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_n^2} Y_i$$

对于参数 σ_n 和 σ^2 的估计可以利用如下公式。

$$\sigma_n = \frac{\text{median}(|HH|)}{0.6745}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{M} \sum_i Y(i)^2 - \sigma_n^2$$

其中 HH 表示对角线高频信号， median 表示求 HH 的中位数。

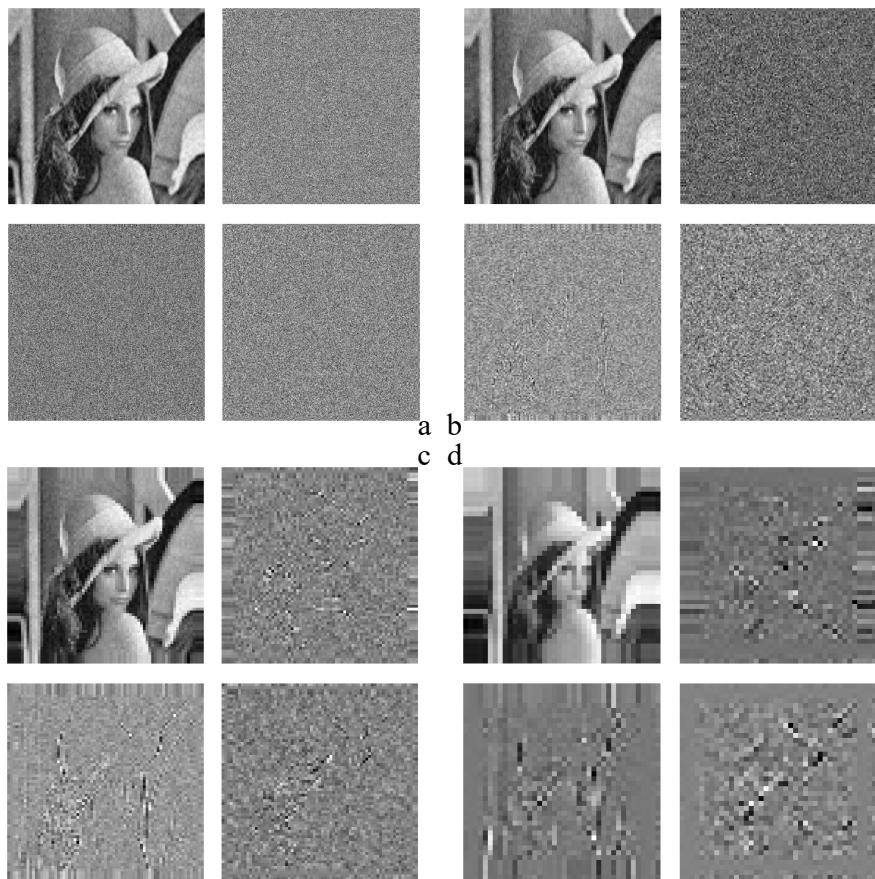


Figure 1: 四次维纳滤波后的结果

将带噪的 Lena 图像进行四次维纳滤波后的结果如图 Figure 1 所示，a, b, c, d 分别代表对图像进行第一次到第四次维纳滤波后的结果，每个图按照 LL, LH, HL 和 HH 的顺序进行排列。将滤波后的结果进行小波逆变换后结果如图 Figure 2 所示。



Figure 2: 原图、噪声图、滤波后图对比

本脚本主要由 `guass_noise()`, `winner_filter()`, `wiener_dwt()` 和 `run()` 构成。

- `gauss_noise`: 输入为图像以及信噪比，输出为加入信噪比大小高斯噪声后的图像；

- wiener_filter: 输入为带滤波的小波系数以及 HH , 输出为经过滤波后的小波系数;
- wiener_dwt(): 输入为原图以及小波的分解次数, 输出经过维纳滤波后的结果;
- run(): 运行以上所有函数并产生图像。