北京大学量化交易协会2021级内培

资产配置

陈逸杰 吴宜邹 金希 李亚芬

2021-10-18

资产配置

大类资产简介

分类

- **资本资产**，通过未来现金流的资本化产生价值。例如，权益、固收和房地产。
- **消费或转化类资产**，通过消费或转化产生价值。例如谷物、能源等大宗商品。
- **价值储藏类资产**，在交换和出售时体现价值。例如，货币、珠宝、艺术品等。

划分特性

- **同质性**，同一类别资产具有类似的描述和统计特征。
- **排他性**，一项资产不能同时归属两个类别。
- **相关性**，同一类别资产相关性高，不同类别资产的相关性不能太高。

资产类别

- 股票（如国内、新兴市场、发达国家股票等）
- 债券（如利率债、信用债；新兴市场、发达国家债券等）
- 现金及等价物（如 7 天回购、3 个月期国债等）
- 另类投资（如房地产、大宗商品、PE、VC、基础设施投资等）

衍生品能否作为一类资产

主观观点

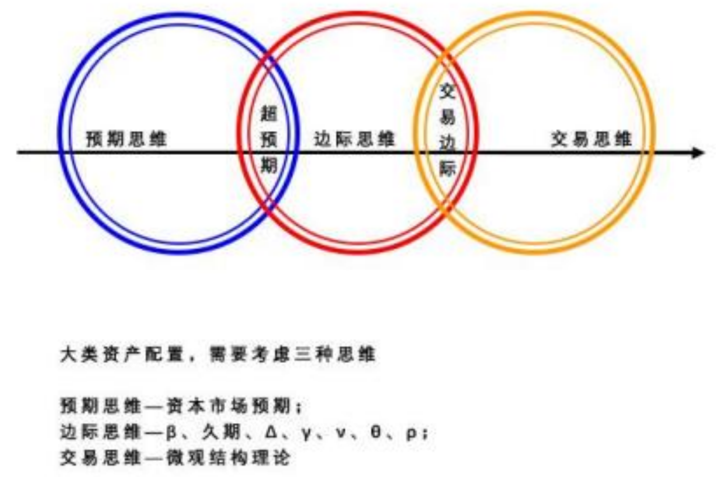
- **对冲基金**，对冲基金的投资策略五花八门。除绝对收益，还包括方向型策略（对市场保留部分敞口、如全球宏观对冲、多空策略）等形式。不同策略具有不同的风险和收益特征，不宜混为一谈。因此，更恰当的做法是将绝对收益看作一种资产类别，参与投资组合。
- **期货、期权等衍生品**，衍生品根据标的资产的不同，可分为股票、固定收益、商品、外汇等类型。不同的衍生品以及对应的标的资产，具有不同的风险收益特征，不宜混为一谈。例如，大宗商品通常以期货的形式参与投资组合。股指期货、国债期货、外汇远期一般会作为风险管理、覆盖策略工具（如实现战术资产配置）等参与投资组合。另外，与传统资产相比，衍生品更加复杂，存在杠杆、基差风险、展期等问题，因而对风险管理的要求也更高。

如何理解配置

整体思维

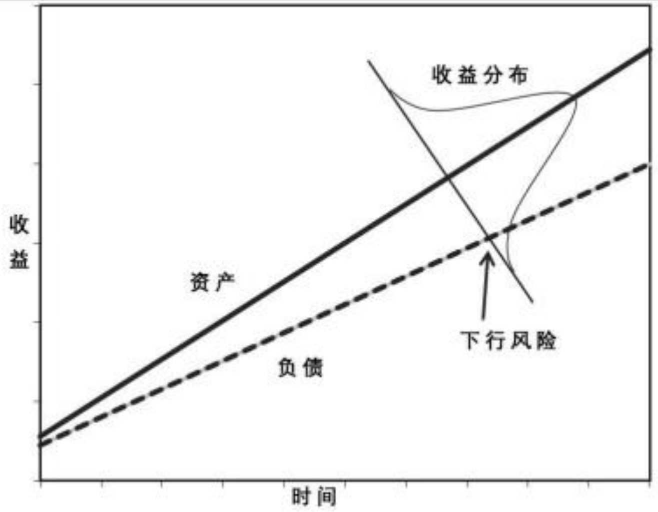
强调个别资产对投资组合的贡献。传统单资产策略，焦点是个别资产的风险和收益。但在大类资产配置中，着眼于个别资产对组合风险收益的贡献，因此**要统筹各类资产的相关性**。设想单一债券资产的波动率是 5%，但在加入5%的股票后（股票波动率对债券大得多），整个投资组合（95%债、5%股票） 的波动率，反而从5%降至 4.95%。因而“配置”强调：要突破对个别资产风险收益的讨论，否则就是“一叶障目、不见泰山”。

图 1: 大类资产配置与证券研究的 2+1 思维



数据来源：黄燕铭(2016)，国泰君安证券研究

图 2: 大类资产配置面临的基本问题



数据来源：Gupta(2016)，国泰君安证券研究

研究内容

宏观研究

- 有关劳动、资本、生产率、 制度以及外部冲击的宏观分析，勾勒出增长与通胀的长期趋势，决定了各类资产的溢价和折现率，为战略资产配置（SAA）提供了有益参考。
- 其次，对商业周期、存货周期，以及对货币政策、财政政策的宏观判断， 在短期影响各类资产收益、波动甚至相关性的预期，有助于战术资产配置（TAA）决策。

量化模型

- **一方面，量化工具是实现和评估资产配置的重要手段**。自 Markowitz（1952）均值-方差组合模型诞生以来，围绕资产配置、风险管理、因子投资等问题，各种量化工具层出不穷。
- **另一方面，资产管理者在实践中要采取定性、定量相结合的手段**。模型测算作为一种参考，是配置决策的起点。模型的前提假设，或与实际情况有差异；从历史数据来推演对对未来的预期，又存在不足。因此，加入定性判断，确定参数设定和输入变量，往往决定了配置和投资的结果。

投资手段

配置方法

主要的配置方法分为战略资产配置（SAA）和战术资产配置（TAA）。

- **战略资产配置（Strategic Asset Allocation，SAA）即投资政策声明（IPS）明确的长期资产配置比例**，代表了在投资组合中，各类资产的目标权重。
- **战术资产配置（Tactical Asset Allocation）即对长期资产配置比例（战略资产配置）的短期偏离**，通常用于寻求经济周期变化，或资产错误定价的机会。战略资产配置，往往在全球不同市场（如股票、债券、商品、外汇等）中寻找机会，因此又被称为全球战术资产配置（GTAA）。投资者进行战术资产配置，隐含了两个假设：第一，认为短期资产回报是可以预测的；第二，认为自己或选择的投资管理人具备这种预测能力。

投资框架

风险VS收益

资产所有者面临的共同问题是： 如何满足未来支出或债务偿付，如何确定投资目标和所要承担的风险。

- **对于收益，要区分绝对收益和相对收益，**其选择会直接影响投资组合的风险水平、构成、投资管理人的行为和投资业绩。如果选择相对收益，就要设置业绩基准（Benchmark）。因为投资组合不止一类资产，所以业绩基准往往是若干指数的复合。
- **对于风险，绝对收益对应绝对风险，相对收益对应相对风险，**根据收益、风险的刻画，再结合风险厌恶程度，就可以设定资产所有者的效用函数。不管具体形式如何，风险厌恶决定了——在效用函数之中，效用与收益正相关、与风险负相关。例如，均值-方差效用函数： $U = E(r_p) - \gamma/2 * var(r_p)$

投资限制

- **资产规模**，如果资产规模过小，可能会因为资源或投资门槛的限制，无法实现充分的分散化投资。
- **流动性**，流动性要求较高的投资者，要投向高质量、高流动性、短久期的资产。流动性要求较低的投资者，可以投资流动性较差的资产，例如房地产或基础设施，以赚取流动性溢价。
- **投资期限**，投资期限影响风险目标、投资范围、标的和交易策略。期限越长，就可以承担更高风险，投资范围更广、流动性要求也更低，比如：主权投资基金、养老金、企业年金等。
- **税收**，风险收益税前和税后，可能存在较大差异。不同辖区利息、分红、资本利得等税率，也有不同。因此，对纳税主体而言，资产配置要考虑税收的影响。
- **监管约束**，构投资者，比如养老金、保险公司和银行都要面对严格监管，以保证其流动性和清偿能力。
- **其他情况**，如社会责任投资、ESG 投资等。

战略资产配置（SAA）

步骤

- **根据资产所有者风险、收益目标和投资限制，明确可用于投资的大类资产。**
- **选择恰当的资产配置模型**，从资产负债角度看，分为三类模型：（1）资产分配法（Asset-only），仅根据投资者的资产，形成资产配置方案。（2）相对负债法（Liability-relative），考虑未来偿还负债（或支出）的资产配置方案。（3）目标导向法（Goals-based），将资产拆分成若干个投资组合，分别对应不同的投资目标。
- **形成各类资产的资本市场预期（CME）**，例如预期收益率、标准差和相关系数等，这些是战略资产配置决策的输入变量。估计CME，主要有三种方法。**一是采用规范式工具**（Formal Tools），例如（1）基于历史数据的统计模型，收缩估计量（Shrinkage estimate）、时间序列、多因子模型等；（2）DDM 模型；（3）风险溢价模式；（4）金融均衡模型。**二是专家问卷调查**。**三是定性判断**。

战略资产配置（SAA）

步骤

- **形成资产配置可选方案，**将 CME 输入资产配置模型，通过求解最优化问题，形成一系列可供投资者选择的资产配置方案。
- **模拟资产配置可选方案的效果，**测试在既定投资期限内，资产配置可选方案的投资结果，是否能在投资者风险容忍度的范围之内，达 到其收益目标。
- **不断重复第四步、第五步，直至产生最优资产配置组合。**

战术资产配置（TAA）

配置方法

战术资产配置包括两种基本方法，一是自主配置（Discretionary TAA）；二是系统性配置（Systematic TAA）。

- 自主配置。参考宏观经济、市场以及情绪指标，定性判断并进行预测。该方法要参考能够反映政治、经济、金融市场走势，影响短期资产收益的一系列指标。例如，GDP增速、货币政策、财政政策、通胀、资本流动、盈利预期、PMI、期限利差、信用利差、估值偏离度、市场情绪等。
- 系统性配置。通过量化手段，尝试赚取价值、成长、动量、市值、质量等因子溢价。

具体实施

- 基础投资工具，即直接调整投资组合内各类资产的权重，可通过配置ETFs，减少交易费用；
- 衍生工具，即利用期货、远期等衍生品多头、空头，间接调整资产权重；
- 独立战术资产配置工具（Standalone TAA vehicles），该工具更灵活，不受组合持仓或杠杆的限制。但该工具无法管理风险，或者用作战略资产配置的补充手段。

战术资产配置的缺陷在于：调仓存在交易成本，并且有可能推高投资组合的集中度风险。

再平衡

定义

再平衡是大类资产配置最重要的操作之一。简单说，再平衡就是调整资产权重，使之恢复到最初的战略配置比例。

配置方法

- **日历型再平衡（Calendar rebalancing）**，按事先确定的频率调仓，进行常规性的再平衡。有些 投资者按月度、季度或年度进行操作。少数投资者会采取每周、每日的再平衡策略。
- **区间型再平衡 (Range-based rebalancing）**，例如，最优股票权重是 60%，55%-65%是区间上下界，当股票权重突破区间上下界时，将触发再平衡操作。交易成本、投资者风险承受度、资产波动度，以及资产之间的相关性，是决定再平衡区间的重要因素。

外汇对冲

概念

每个投资者、每种投资组合**都有一种计价的基准货币**。对国内机构而言， 基准货币一般是人民币。对美国机构而言， 一般是美元。作为投资回报的外汇收益，要兑换或者折算为基准货币。未经套保的海外债券，相当于本币债券和部分外汇敞口。与其他风险不同，**外汇风险可以通过期货、 掉期和期权等衍生品进行管理**。

为什么要外汇对冲

随着全球化，资产配置更向着全球大类资产配置的方向前进，通过配置不同国家的资产分散风险并获寻找潜在的超额收益机会，因为不同国家的资产计价的基准货币不同，因此在配置时需要考虑汇率的波动率对投资者资产波动率的影响。

资产配置理论

理论演进

- 等权重投资组合策略保持每种资产的投资权重为 1/n（假设有 n 种资产）。
- 20 世纪 30 年代：60/40 投资组合策略最初含义为将资产的 60%配置S&P500 指数股票，资产的40% 配置 10 年美国国债。
- 1952 年：Markowitz 的均值方差模型是现代投资组合理论的基石，资产配置理论开始从定性向定量转变。均值方差模型首次使用期望均值衡量投资收益，以方差衡量投资风险，将资产配置问题转化为定量的多目标优化问题。
- 1952 年：最小化风险组合即均值方差有效前沿上以方差衡量的风险最小的一点，也被称为全局最小风险组合。无需给定预期收益率，倾向于集中投资几种十分平稳的资产。
- 1952 年：CAPM 模型，其对均值方差模型做了重要的超越，强调决定资产期望回报率的不是资产回报率的波动率，而是资产回报率与市场组合波动的相关性。

资产配置理论

理论演进

- **1973 年：基于期权的组合保险策略（OBPI，Option Based Portfolio Insurance）**起源于风险承受能力较低的保险机构，主要运用期权等方式平抑风险。
- **1985 年：大学捐赠基金模型，**是典型的融入经济周期与主观判断的大类资产配置，也是一类投资组合管理理念的统称。在美国，大学出于自身需求以及合理避税等考虑，纷纷利用其智力资源，主动管理所接受的捐赠资金。
- **1987 年：设定参数型投资组合保险策略，**是投资组合保险策略的一种，是在复制卖权策略（SPO）的基础上发展起来的，具体包括两种：**固定比例投资组合保险策略（CPPI，Constant Proportion Portfolio Insurance）和时间不变性投资组合保险策略（TIPP，Time Invariant Portfolio Protection）**。
- **1991 年：GEYR 模型，**是判断投资股票还是投资债券的有效工具。由于大多数发达国家最重要的投资工具是股票和债券，因此如何在两者间进行选择就成为重点研究方向。

资产配置理论

理论演进

- **1992 年：Black-Litterman模型，**在均值方差模型的基础上加入投资者观点。
- **1993 年：动量策略，**在研究资产组合的中期收益时提出。动量效应(Momentum Effect)又称惯性效应，意为资产价格在一段时间内的运动趋势能够继续延续，也就是过去一段时间收益较高的资产在未来仍将会获得较高的收益，而下跌严重的资产在未来一段时间内仍会下跌。
- **1996 年：风险平价的概念，并建立了量化的风险平价模型**。该理论关键在于使配置中各类资产对投资组合的风险贡献相等，因此也称为等量风险贡献组合（Equal Weighted Risk Contribution Portfolio）。

资产配置理论

理论演进

- **1997 年：FED 模型（FED Model）**，其实质在于股票作为一种无限期资产，其收益和风险应该与长期债券相近，因而可以通过两者的价差判断股价是否合理——股票本益比（E/P）高于国债利率，即股价被低估，反之则股价被高估。
- **1998 年：再抽样方法（Resampled）**，实证研究表明，市场参与者往往不能准确预估投资组合有效边界，市场平均有效边界曲线通常位于事后数据所归纳出的真实有效边界的右下方，亦即市场参与者未能真正获取应得的收益。1998年，Michaud 提出了再抽样方法，通过多次抽样以降低模型对参数的敏感性，使有效边界更加稳定。
- **2004 年：收缩方法（Shrinkage）**，通过对样本协方差与结构矩阵进行加权平均，从而在整个协方差矩阵中加入结构信息。最终将正的误差向下拉回（pull downwards）、将负的误差将偏误向上拉回（pull upwards）到平均水平。
- **2004 年：美林投资时钟模型，**其核心思想就是不同种类大类资产在经济周期不同阶段内的表现中存在规律性。

资产配置理论

理论演进

- **2007 年：Full-scale 模型**，核心思想是根据每个投资者的不同效用函数，分别计算每个时期的效用最大化投资组合。
- **2008 年：最大化分散风险（most diversified portfolio）**，其核心思想是利用分散化投资将投资组合的风险最小化。

全球主流大类资产配置

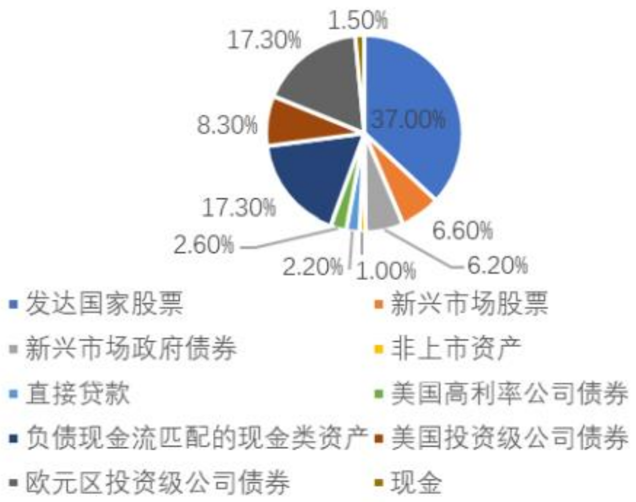
养老基金

- 挪威政府全球养老基金（GPFG）：60/40 策略+均值方差模型+不动产/新兴市场投资。
- 法国养老储备基金（FRR）：最大化分散风险+投资组合保险策略+另类/实体投资。
- 丹麦养老基金 （ATP）：风险平价模型+投资组合保险策略。
- 爱尔兰国民养老储备基金（NPRF）：主动管理+定向配置实体经济。
- 新西兰退休基金（NZSF）：80/20基准投资组合+投资组合保险策略（TIPP）+ 气候变化策略。

2010-2017 年 GPFG 大类资产配置比例

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
股票类	61.5%	58.7%	61.2%	61.7%	61.3%	61.2%	62.5%	66.6%
债券类	38.5%	41.0%	38.1%	37.3%	36.5%	35.7%	34.3%	30.8%
不动产类		3.0%	0.7%	1.0%	2.2%	3.1%	3.2%	2.6%

图 14：2017 年法国养老储备基金（FRR）资产配置比例

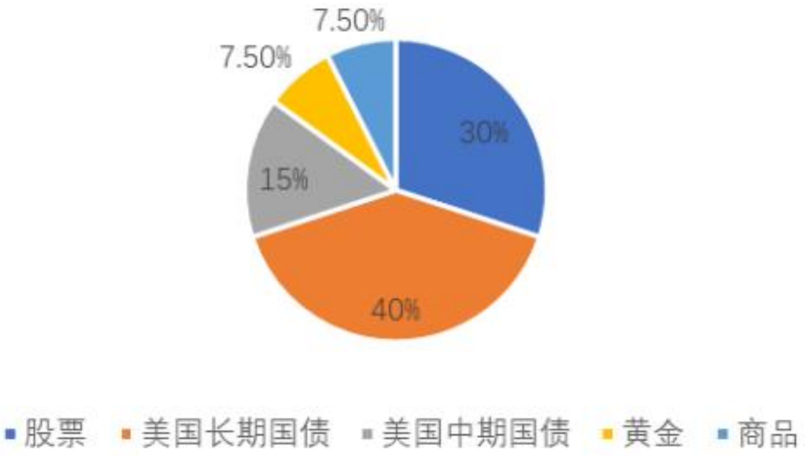


全球主流大类资产配置

对冲基金

- **桥水基金：基于风险平价模型的全天候策略，**这种策略较适合追求资产保值而不是获取超额利润的风险极度厌恶型投资者。
- **黑石公司：另类 Beta 资产配置策略，**黑石基金目前的资产配置方式是在风险平价模型的基础上找一些特别的风险因子，观察它们在新的另类贝塔框架中发挥什么样的作用，找出另类贝塔成熟的框架 或者一个较好的投资时间点，继而增加这个类别的投资。

图 16：全天候极简配置策略



表格 5： 全天候策略大类资产配置

	经济增长	通胀
高于预期	股票 商品 / 黄金 公司债	通胀保护债券（TIPS) 商品 / 黄金
低于预期	国债 通胀保护债券（TIPS)	国债 股票

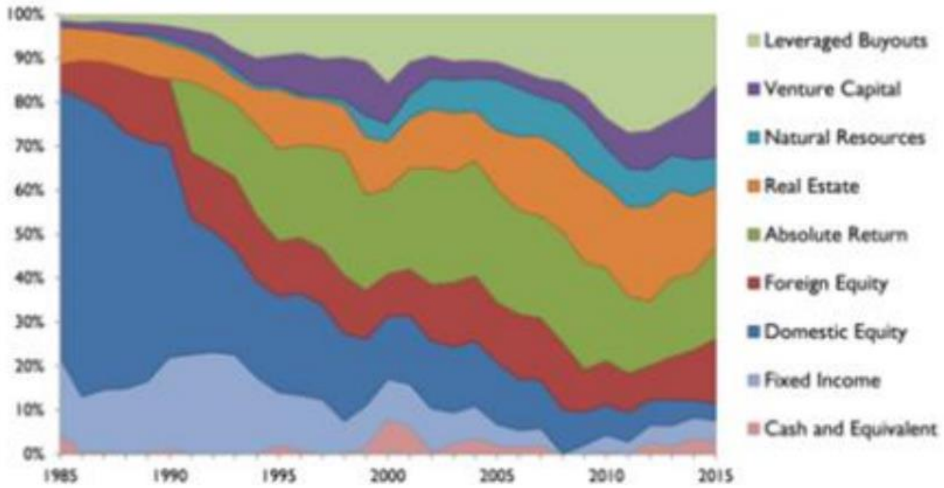
全球主流大类资产配置

大学捐赠基金

耶鲁基金：均值方差模型+最小化风险组合+另类投资+再平衡策略。

- 耶鲁基金借鉴的理论主要是马克维茨的均值方差模型。
- 在过去的 30 年里，耶鲁基金基于其价值回归潜力和多元化的优势，大幅增加另类资产配置比例，大大减少了其对国内有价证券的依赖。
- 为实现长期投资目标，耶鲁基金也配备了再平衡的策略，频繁的再平衡操作在证券价格剧烈波动时可以获利。

图 18：耶鲁基金资产配置比例变化



[【公开课】耶鲁大学：金融市场（中英双语字幕）_哔哩哔哩_bilibili]

资产配置

模型背景

传统MV模型

$$\min \omega^{\mathrm{T}}\Sigma\omega$$

$$s.t. \Sigma_{i=1}^{n}\omega_i = 1$$

$$\omega^T R_p = \alpha$$

重要意义

Markowitz 的均值方差模型是现代投资组合理论的基石，资产配置理论开始从定性向定量转变。均值方差模型首次使用期望均值衡量投资收益，以方差衡量投资风险，将资产配置问题转化为定量的多目标优化问题。

局限

- 局限于单期投资，属于静态模型
- 使用方差测算风险，没有区分正收益和负收益，不符合投资者的实际感受
- 投资组合增加时，相关的计算量呈几何级数增加
- 无法将投资者直觉纳入决策

模型背景

基本思路

给定投资者的风险偏好系数，根据不同投资组合的效用分数，选出给投资者带来效用最高的投资组合

常用效用函数

$$U = E(r) - \tfrac{1}{2}A\sigma^2$$

例子

考虑3个不同投资者，A1-2,A2=3.5,A3=5。表6.2展示了他们对每个风险资产的效用打分，每个投资者的最优选择时粗体部分。

Investor Risk Aversion (A)	Utility Score of Portfolio L [$E(r)$ = .07; σ = .05]	Utility Score of Portfolio M [$E(r)$ = .09; σ = .10]	Utility Score of Portfolio H [$E(r)$ = .13; σ = .20]
2.0	$.07 - \frac{1}{2} \times 2 \times .05^2 = .0675$	$.09 - \frac{1}{2} \times 2 \times .1^2 = .0800$	$\boldsymbol{.13 - \frac{1}{2} \times 2 \times .2^2 = .09}$
3.5	$.07 - \frac{1}{2} \times 3.5 \times .05^2 = .0656$	$\boldsymbol{.09 - \frac{1}{2} \times 3.5 \times .1^2 = .0725}$	$.13 - \frac{1}{2} \times 3.5 \times .2^2 = .06$
5.0	$.07 - \frac{1}{2} \times 5 \times .05^2 = .0638$	$\boldsymbol{.09 - \frac{1}{2} \times 5 \times .1^2 = .0650}$	$.13 - \frac{1}{2} \times 5 \times .2^2 = .03$

Table 6.2

Utility scores of alternative portfolios for investors with varying degrees of risk aversion

基本模型构建

Notation

- ✓ n risky assets
- ✓ $p_i(t)$ 第i个资产在t时的价格
- ✓ $r_i(t)$ return 从 t-1 到 t　　$r_i(t) = \frac{p_i(t)-p_i(t-1)}{p_i(t-1)}$
- ✓ r（t）=（ $r_1(t)$， $r_2(t)$ …… $r_n(t)$ ）’
- ✓ $\mu = E[r（t）]$
- ✓ V(t)=E[(r（t）$-\mu$)(r（t）$-\mu$)’)] 方差协方差矩阵
- ✓ T-1:vo 初始资产

  x=(x_1,……, x_n) position

  a =(a_1,……, a_n) portfolio weight a_i=$\frac{x_i}{\text{vo}}$

方差协方差矩阵

$$V_{ii}(t) = cov(\tilde{r}_i(t), \tilde{r}_i(t)) = var(\tilde{r}_i(t)) = \sigma_i^2$$

$$V_{ij}(t) = cov(\tilde{r}_i(t), \tilde{r}_j(t)) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

$$V = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

基本模型构建

简单推论

- ✓ $r_x(t)$=**a**’r(t)
- ✓ E[r（t）] = **a**’μ
- ✓ $VAR(r_x(t))$= **a**’ V(t)**a**

$$
\begin{aligned}
var(\tilde{r}_\alpha(t)) &= E[(\tilde{r}_\alpha(t) - E[\tilde{r}_\alpha(t)])(\tilde{r}_\alpha(t) - E[\tilde{r}_\alpha(t)])'] \\
&= E[\alpha'(\tilde{r}(t) - E[\tilde{r}(t)])(\alpha'(\tilde{r}(t) - E[\tilde{r}(t)]))'] \\
&= E[\alpha'(\tilde{r}(t) - \mu)(\tilde{r}(t) - \mu)'\alpha] \\
&= \alpha' E[(\tilde{r}(t) - \mu)(\tilde{r}(t) - \mu)']\alpha \\
&= \alpha' V(t)\alpha
\end{aligned}
$$

基本模型构建

最优化

- ✓ 最大化u(random payoff)
- ✓ random payoff=$v0 * (1 + a'r)$

限制

- ✓ 资产权重相加为1

$$\max_{\alpha} E[u(v_0 \cdot (1 + \alpha' \tilde{r}))]$$
$$\text{s.t. } \mathbf{1}'\alpha = 1$$

基本模型构建

最优化

假设投资者希望有r的期望收益

$$\max_{\alpha} E[u(v_0 \cdot (1+\tilde{r}_\alpha))]$$
$$\text{s.t. } E[\tilde{r}_\alpha] = r$$
$$\mathbf{1}'\alpha = 1$$

等价于

$$\min_{\alpha} var(v_0 \cdot (1+\alpha'\tilde{r})) = v_0^2\alpha' V\alpha$$
$$\text{s.t. } \mu'\alpha = r$$
$$\mathbf{1}'\alpha = 1.$$

基本模型构建

结果-有效边界

$$\sigma^2(r) = \alpha' V \alpha$$
$$= (r\gamma_1 + \gamma_0)' V (r\gamma_1 + \gamma_0)$$
$$= (\gamma_1' V \gamma_1) r^2 + 2\gamma_0' V \gamma_1 r + \gamma_0' V \gamma_0$$

CHA

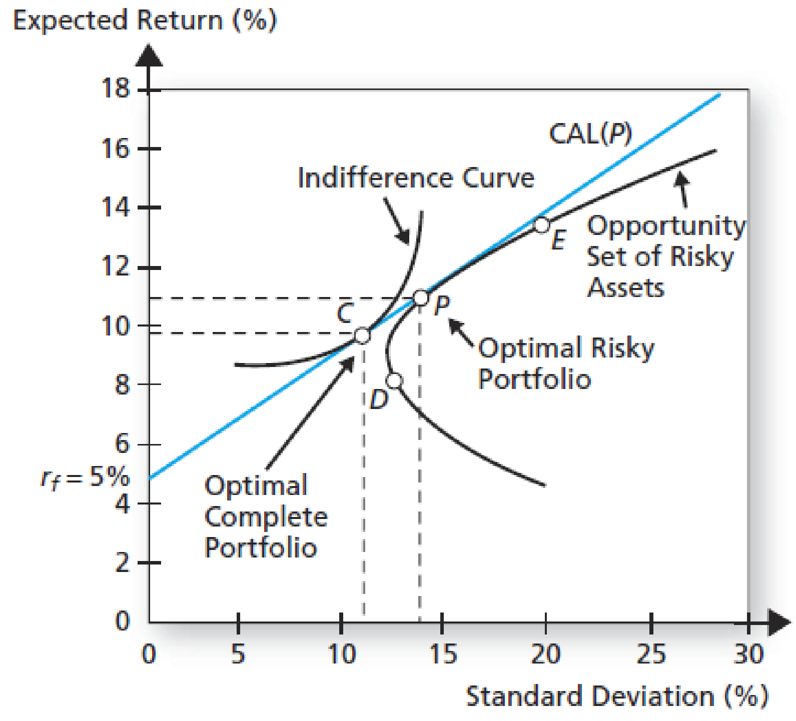


Figure 7.8 Determination of the optimal complete portfolio

基本模型构建

CHA

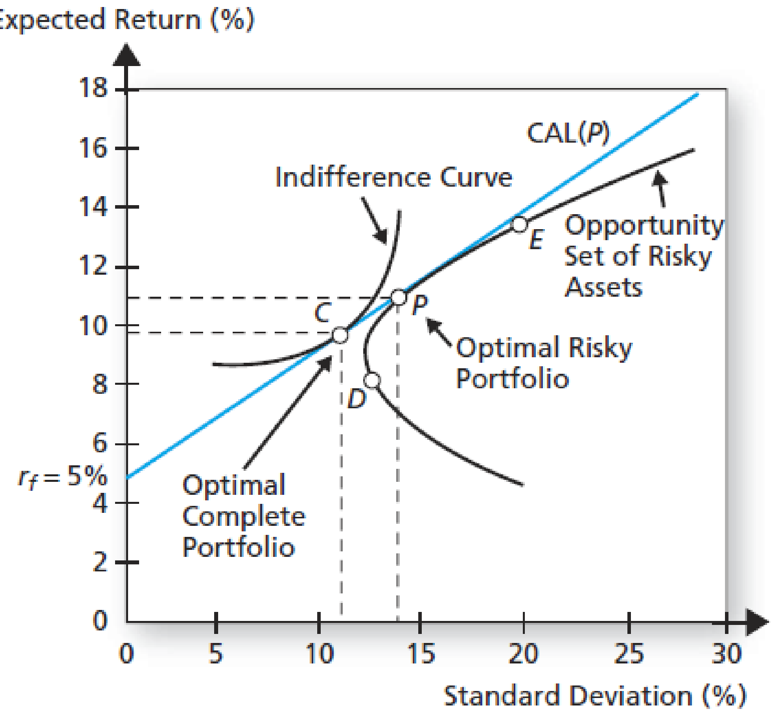


Figure 7.8 Determination of the optimal complete portfolio

最优化组合权重

- ✓ Step1:得到最优投资组合
- ✓ Step2:得到有效边界后最大化夏普比率得到CAL和optimal risky portfolio
- ✓ Step3:根据每个投资者的风险偏好决定optimal complete portfolio

Table 6.5

Spreadsheet calculations of indifference curves (Entries in columns 2–4 are expected returns necessary to provide specified utility value.)

	A = 2		A = 4	
σ	U = .05	U = .09	U = .05	U = .09
0	.0500	.0900	.050	.090
.05	.0525	.0925	.055	.095
.10	.0600	.1000	.070	.110
.15	.0725	.1125	.095	.135
.20	.0900	.1300	.130	.170
.25	.1125	.1525	.175	.215
.30	.1400	.1800	.230	.270
.35	.1725	.2125	.295	.335
.40	.2100	.2500	.370	.410
.45	.2525	.2925	.455	.495
.50	.3000	.3400	.550	.590

基本模型构建

加上无风险资产

- ✓ n+1
- ✓ a0：无风险资产的比重
- ✓ 投资组合的收益均值：$\mu'a + a0r_f$
- ✓ $VAR(r_x(t))$= a’ V(t)a

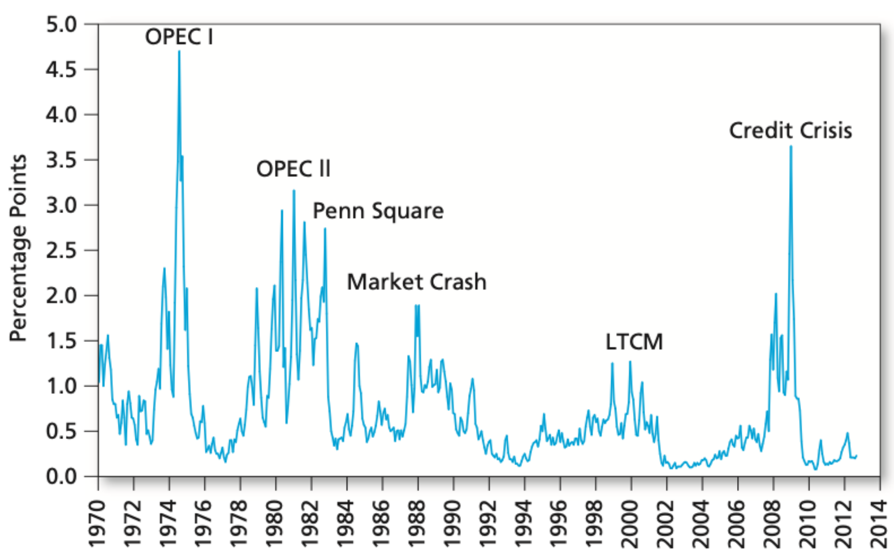


Figure 6.3 Spread between 3-month CD and T-bill rates

- ✓ 我们把货币市场基金看作大多数投资者最易接触到的无风险资产，货币市场基金大部分有三种：短期国债、银行可转债和商业票据，图6-3展示了银行存单和短期国债的收益率差。

基本模型构建

CHA

加上无风险资产

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2}\alpha' V\alpha$$

$$\text{s.t. } \alpha_0 r_f + \mu'\alpha = r$$

$$\alpha_0 + 1'\alpha = 1.$$

简化为：

mi

α

s.

结果-有效边界

$$\sigma(r) = \sqrt{(\alpha^*)' V\alpha^*} = \hat{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{\mu}' V^{-1} \hat{\mu}}}$$

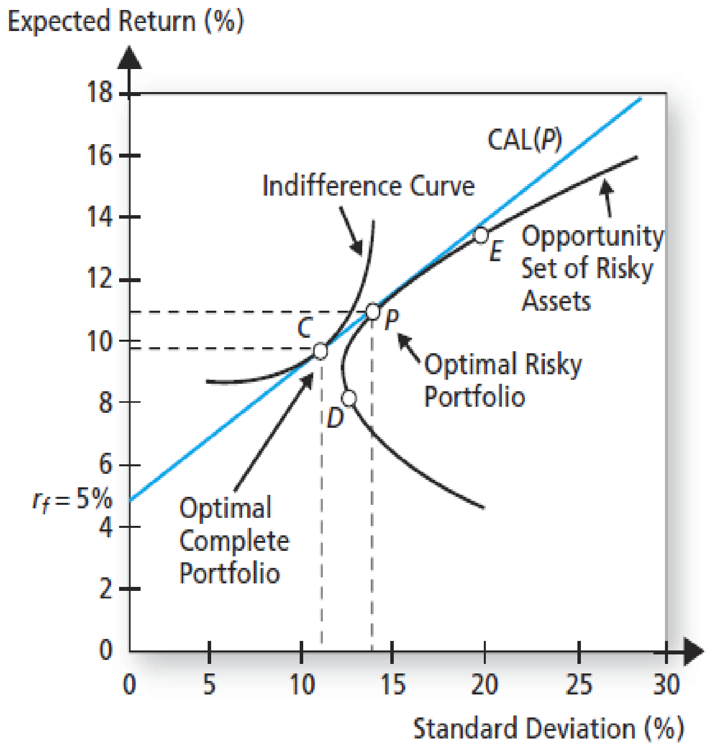


Figure 7.8 Determination of the optimal complete portfolio

基本模型构建

加上限制

- Eg：禁止做空、单个资产配置比例限制、行业占比限制、因子暴露限制
- a中每个元素大于等于0

$$
\begin{aligned}
\min_{\alpha}\ & \frac{1}{2}\alpha' V\alpha \\
\text{s.t. } & \mu'\alpha = r \\
& \mathbf{1}'\alpha = 1 \\
& \alpha \geq 0.
\end{aligned}
$$

资产配置

Black-litterman 模型简介

背 景

马克维茨M-V模型的缺点：

- **输入完全依赖历史数据**：相当于认为历史可以预测未来，历史可以重复，但Lustig（2013）对1926-2012年美股、美债和国库券进行了考察，结论是：1、无法用过去十年的收益率和相关系数预测未来十年的收益率或相关系数，2、历史波动率是预测未来波动率较好的指标。
- **结果对输入高度敏感**：GIGO；输入的收益率和波动率的微小变化会使资产配置的结果发生巨大的变化；Chopra and Ziemba (1993) 指出，收益率期望的误差对资产配置的影响比协方差的影响高一个数量级。
- **输出的资产配置方案太过集中**：M-V模型往往导致极端的权重分配（强烈卖空或完全不投资一些资产），违背分散化的理念，导致风险过度集中。

如何解决？

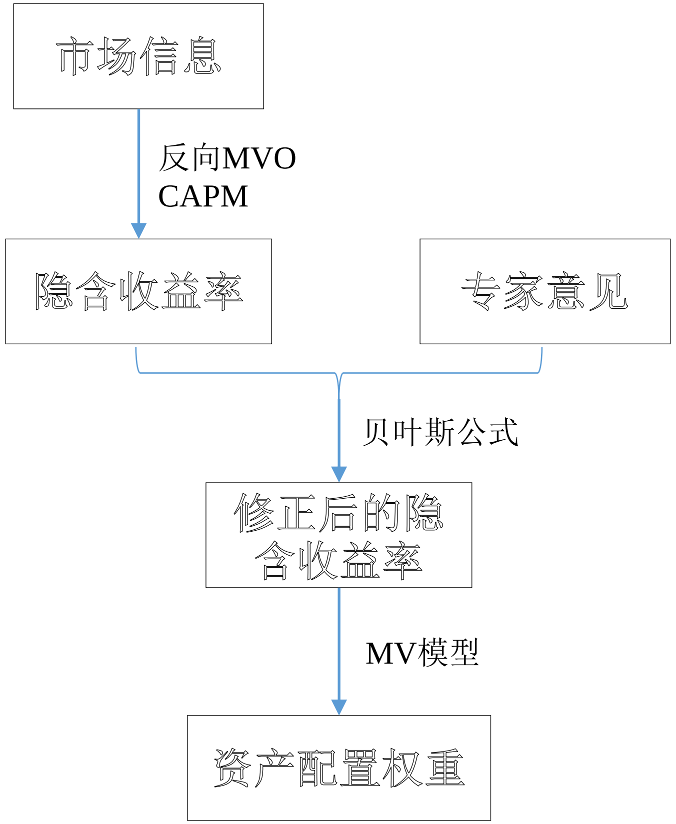
- 输入完全依赖历史数据
- 结果对输入高度敏感

更好的输入：加入专家**主观评价**

- 输出的资产配置方案太过集中 → 参考现有市场配置，**逆向优化**

结合方法：**贝叶斯**

模型逻辑框架



基本思路

Fischer Black和Robert Litterman在1990年提出BL模型，既可以应用于不同大类资产之间的配置，也可以应用于同一类资产内部的组合构造，其基本思路如下：

- 对市场信息进行**逆向优化**得到先验预期收益率；
- 将先验预期收益率与专家观点用**贝叶斯公式**得到后验预期收益率；
- 根据后验预期收益率和方差使用**均值-方差模型**得到后验的配置权重。

基本步骤

先验（隐含收益率）

- 假设市场有效，市场上的配置符合效用最大化：

$$\text{最大化：} U = w'\Pi - 1/2\mathrm{A}w'\Sigma w$$

$$\text{FOC：} \frac{dU}{dw'} = \Pi - \mathrm{A}\Sigma w = 0$$

MV模型通过收益率来求最优权重：$w = A^{-1}\Sigma^{-1}\Pi$

BL模型反过来，输入市场权重得到隐含收益率：$\Pi = \mathrm{A}\Sigma w$

为了方便贝叶斯更新，假设隐含收益率符合正态分布，$\mu \backsim N(\Pi, \tau\Sigma)$，其中$\tau$越小代表$\mu$估计越准确，一般取0.25或1。

- 一些细节：参数说明

Π是（隐含）收益率（通过求解FOC求得）

Σ是市场的协方差矩阵（见下一页）

w是（市场）权重（资产市值与总市值之比——市场有效的假设）

A是风险厌恶系数（可以用CAPM模型来得到，$A = \frac{r_m - r_f}{{}^{2}_{m}} = \frac{sharpe\ ratio}{\sigma}$）

基本步骤

先验（隐含收益率）

- 假设市场有效，市场上的配置符合效用最大化：

$$\text{最大化：} U = w'\Pi - 1/2Aw'\Sigma w$$

$$\text{FOC：} \frac{dU}{dw'} = \Pi - A\Sigma w = 0$$

- 一些细节：协方差Σ的估计

由CAPM模型（简化估计参数的数量），使用历史数据对下式进行回归：

$$r_{it} - r_{ft} = \beta_i\left(r_{mt} - r_{ft}\right) + \varepsilon_{it}$$

估计出β_i、ω_i^2

所以，假设不同资产之间的误差项不相关，则不同资产之间的协方差为：

$$V_{ij} = \begin{cases} \beta_i^2\sigma_m^2 + \omega_i^2, & if\ i = j \\ \beta_i\beta_j\sigma_m^2, & if\ i \neq j \end{cases}$$

其中ω_i^2为ε_{it}的方差。

基本步骤

权重（专家观点）

- 专家观点

$$P\mu = Q + \epsilon$$

其中，

P为联系矩阵（Link Matrix），每一行代表某个观点中涉及的资产的关系，包括绝对观点（某一个资产的未来的收益率，即只有一个元素不为0）和相对观点（某个资产未来相对另一个资产的收益率，有多个元素不为0）两种；

μ为（专家观点暗含的）收益率，在后续的计算中能够被$\mu = P^{-1}Q$代替；

Q是观点认为P中描述的资产组合的收益率（绝对观点则为单个资产的收益率，相对观点可以视作某种多空投资组合）；

ϵ为误差项，即以P为权重的资产组合收益率μ的方差，$Var(\epsilon) = \Omega = P\tau\Sigma P'$（在更复杂的模型中可以给不同的观点的方差乘上说明观点好坏的系数）；

为方便贝叶斯更新，假设专家观点符合正态分布$P\mu|\mu \sim N(Q,\Omega)$。

基本步骤

权重（专家观点）

- 专家观点（举例）

$$P\mu = Q + \epsilon$$

假设有三种股票A、B、C，有两条观点：

第一条说资金中80%买A、20%买B能够得到5%的收益

第二条说C的预期收益率为10%

则P: $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ μ: $\begin{bmatrix} \mu_A \\ \mu_B \\ \mu_C \end{bmatrix}$ Q: $\begin{bmatrix} 5\% \\ 10\% \end{bmatrix}$

基本步骤

后验分布（包含专家观点的隐含收益率）

- 贝叶斯参数估计方法：

  直觉：计算在所有不同（对参数的）假设下观测到的数据发生的可能性，可能性更大的假设更加可信（不同于极大似然估计得到点估计，贝叶斯估计参数得到的是参数可能的分布）。即按照观测到的数据在假设下发生的可能性大小对不同的假设进行加权平均得到新的更加可信的假设。

  算法：对每一个假设（参数的每一种可能的取值），将原本认为该条假设（参数分布）的可能性（**先验概率**）与数据在该假设下发生的概率（**权重**）相乘，最后再**标准化**，使权重总和为1。

  贝叶斯公式：$\mathrm{P(A|B)} = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

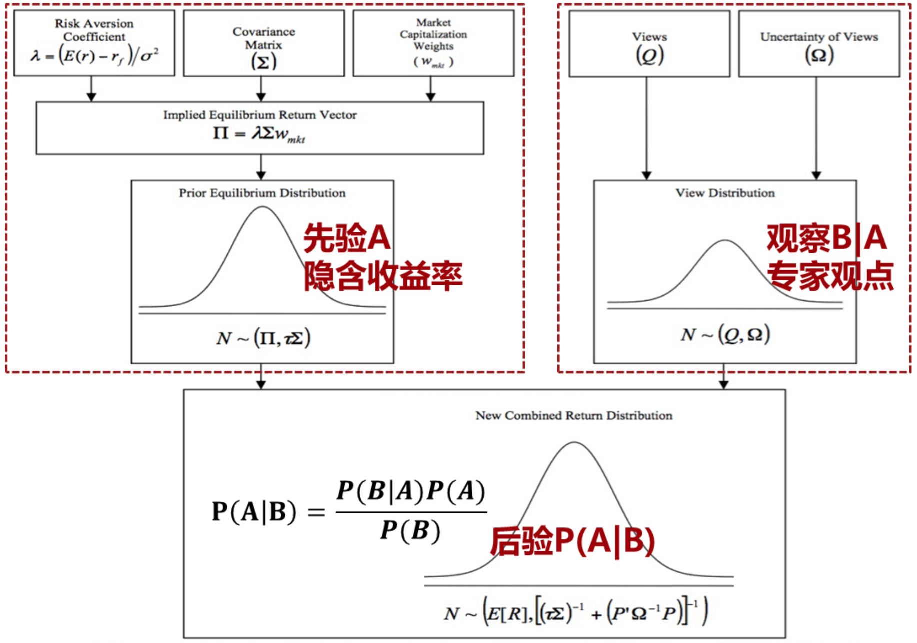
- BL模型中的应用：

  先验A（市场隐含收益率）：

  $$\mu \backsim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

  权重B|A（专家观点）：

  $$P\mu|\mu \sim N(Q, \Omega)$$



Reference：《统计反思:贝叶斯课程(with Code Examples in R/Stan/Python/Julia)》(2019) by Richard McElrea（b站就可以看）

后验分布（包含专家观点的隐含收益率）

Reference：具体的求解过程可以参考华西证券的black-litterman模型研究系列之一p6-p8

- 结论：基于投资者主观观点的预期收益率$P(\mu|P\mu)$

$$\mu|P\mu \backsim N(((\tau\Sigma)^{-1}+P'\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q), ((\tau\Sigma)^{-1}+P'\Omega^{-1}P)^{-1})$$

- 先验A（市场隐含收益率）：

$$\mu \backsim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

- 观察B|A（专家观点）：

$$P\mu|\mu \sim N(P^{-1}Q, (P'\Omega^{-1}P)^{-1})$$

- 贝叶斯公式：

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Reference：直觉解释部分参考了油管频道Friendly Finance with Chandra S. Bhatnagar

- **参数说明：**

  τ是市场隐含收益率的方差的系数（一般是0.25或1）

  Σ是市场的协方差矩阵（之前求的）

  P是专家观点中的联系矩阵

  Ω是专家观点里的误差项$Var(\epsilon) = \Omega = P\tau\Sigma P'$（其实因为假设了观点没有市场协方差以外来源的不确定性，所以化简后两个权重是一样的）

  Q是专家观点组合的预期收益率矩阵

- **直觉解释：**

  $\tau\Sigma$是市场隐含收益率的方差，$P'\Omega^{-1}P$是专家观点隐含收益率的方差，方差是不确定性，不确定性的逆就是可信度，即将专家观点的隐含收益率与市场组合的隐含收益率以它们的可信度作为权重进行加权平均，第一个括号是为了标准化使权重总和为1。

基本步骤

优化（同MVO）

- 对得到的后验分布，运用有约束或无约束的MVO，得到资产配置权重。

最大化：$U = w'\Pi_{post} - 1/2Aw'\Sigma_{post}\, w$

……

……

……

- 在假设后验分布**协方差矩阵与先验矩阵相同**（即认为后验的均值不是随机变量）时，BL模型在**无约束**的优化下**只改变专家观点涉及到的资产的权重**，其他资产的权重不变。

一个例子

单纯MVO Reference：https://zhuanlan.zhihu.com/p/38282835

假设七个国家股市的期望收益率都是 5%，协方差矩阵如下。

假设风险厌恶系数为 2.5。

假设之后又认为德国的期望收益率将会达到 6%，而法国和英国则仅有 4%，其他国家不变。

	澳大利亚	加拿大	法国	德国	日本	英国	美国
澳大利亚	0.02560	0.01585	0.01897	0.02233	0.01475	0.01638	0.01469
加拿大	0.01585	0.04121	0.03343	0.03603	0.01322	0.02469	0.02957
法国	0.01897	0.03343	0.06150	0.05787	0.01849	0.03884	0.03098
德国	0.02233	0.03603	0.05787	0.07344	0.02015	0.04211	0.03309
日本	0.01475	0.01322	0.01849	0.02015	0.04410	0.01701	0.01202
英国	0.01638	0.02469	0.03884	0.04211	0.01701	0.04000	0.02439
美国	0.01469	0.02957	0.03098	0.03309	0.01202	0.02439	0.03497

一个例子

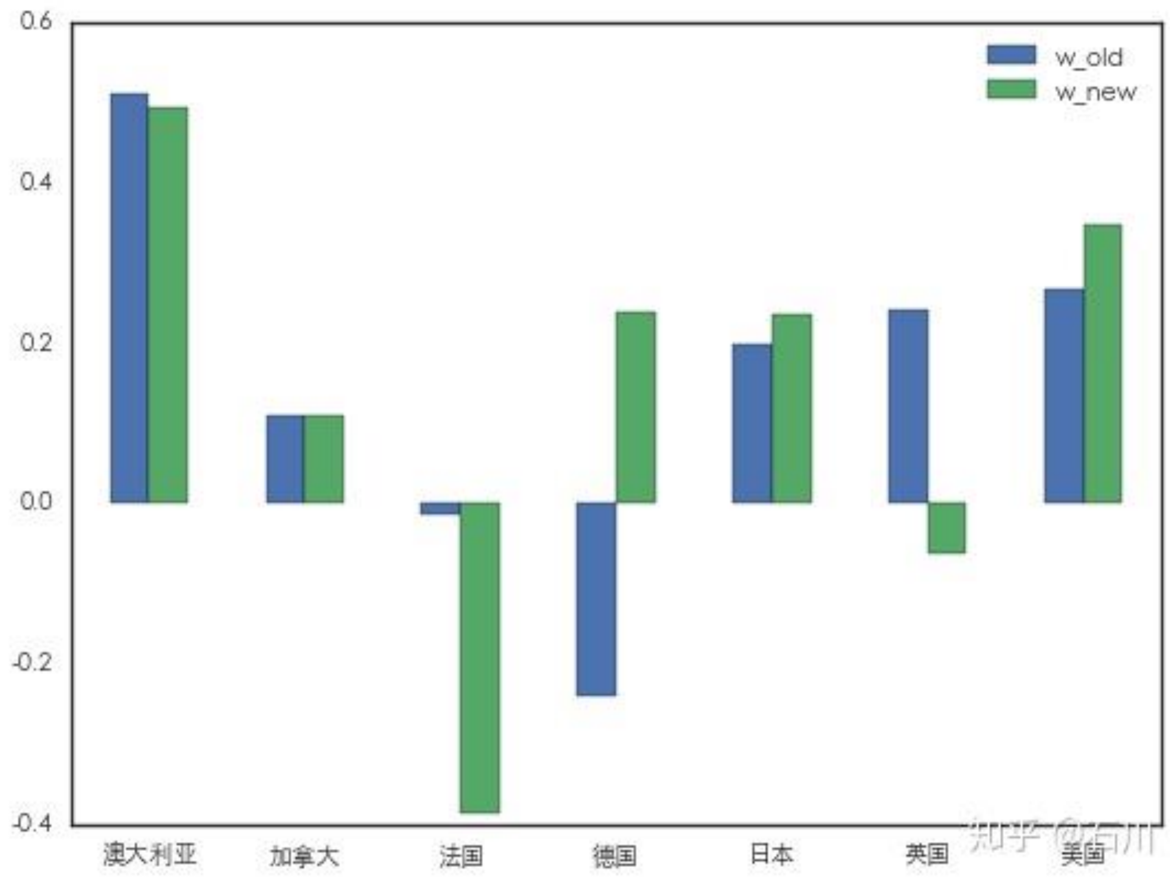
单纯MVO

Reference：https://zhuanlan.zhihu.com/p/38282835

初始的预期收益率下，根据“均值 — 方差”最优化，得到的最优资产配置权重如下图中的蓝色柱状图所示。按照该配置，我们大幅做空德国，微微做空法国，并做多其他国家。

在预期收益率变动后，重新使用“均值 — 方差”最优化，新的结果如下图中绿色的柱状图所示。

比较蓝色和绿色的柱状图可见，随着我们对德国、法国以及英国预期收益率的调整，最佳的权重也发生了变化。然而，权重的变化发生的非常剧烈（对收益率敏感）



一个例子

BL模型 Reference：https://zhuanlan.zhihu.com/p/38282835

还是那七个国家的股市。
假设根据市场数据倒推求出的预期收益率如右表。
假设τ（衡量对从市场推出的预期收益率的方差的估计，乘以市场的方差即为倒推出的预期收益率的方差）为0.1。
假设专家观点仅一条：预期德国的期望收益率较英国和法国期望收益率的等权重之和高 5%，我们对这个判断的标准差为 2%。

	澳大利亚	加拿大	法国	德国	日本	英国	美国
w_eq	1.6%	2.2%	5.2%	5.5%	11.6%	12.4%	61.5%
μ_0	3.94%	6.92%	8.36%	9.03%	4.30%	6.77%	7.56%

$$P = [0, 0, -0.5, 1.0, 0, -0.5, 0]$$
$$Q = [0.05]$$
$$\Omega = [0.04]$$

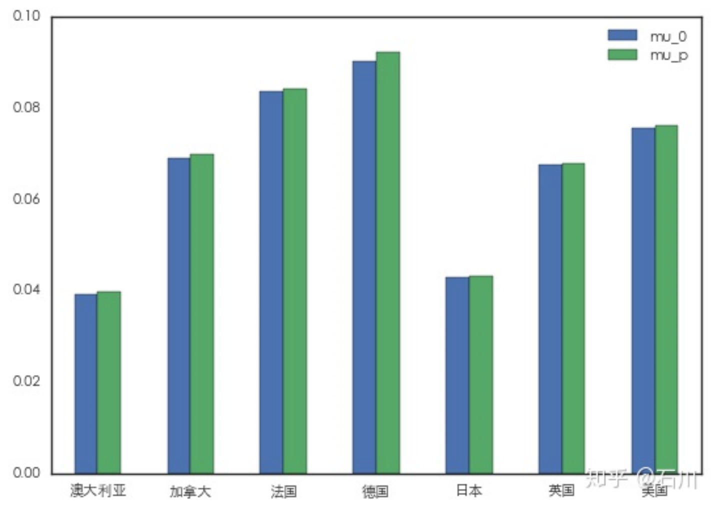
一个例子

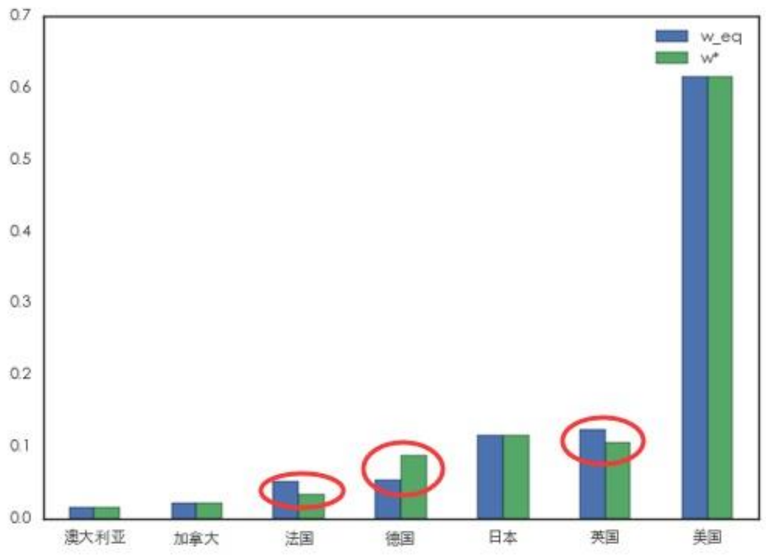
BL模型 Reference：https://zhuanlan.zhihu.com/p/38282835

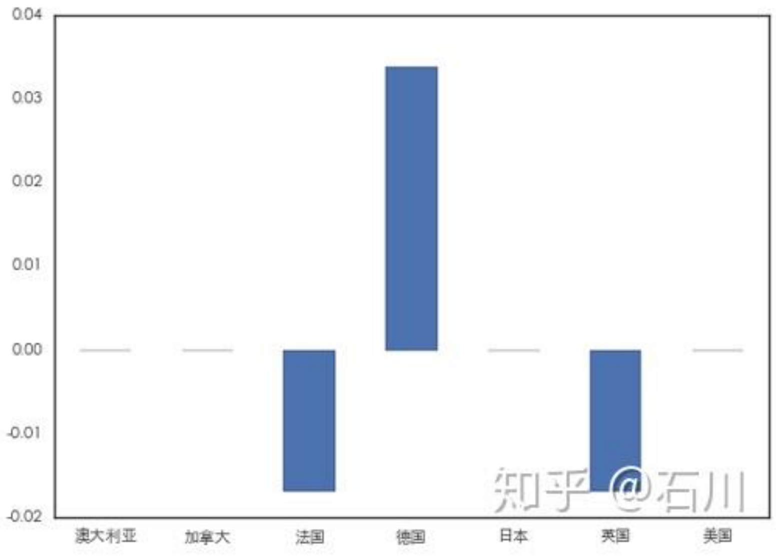
应用 Black-Litterman 模型得到的后验期望收益率（绿色）与作为先验的市场均衡状态期望收益率（蓝色）比较如右图。

所有国家的预期收益率均有所改变（因为方差的一些设置）法国和英国的收益率不降反升。

最终配置结果如下图。由于我们更看好德国，因此它的权重更高，而英法两国的权重相应相抵。其他国家的权重等于市场均衡状态的权重，不受我们的主观判断的影响。







资产配置

风险预算的定义

资产配置→风险配置

MVO 或 BL 模型都是从资产分配的角度，测算资产收益率、波动以及相关性，来确定投资组合的资产权重。**风险预算**提供了另一个视角：从**风险分配**的角度，来重新审视资产配置的权重，以及权重变化的影响。

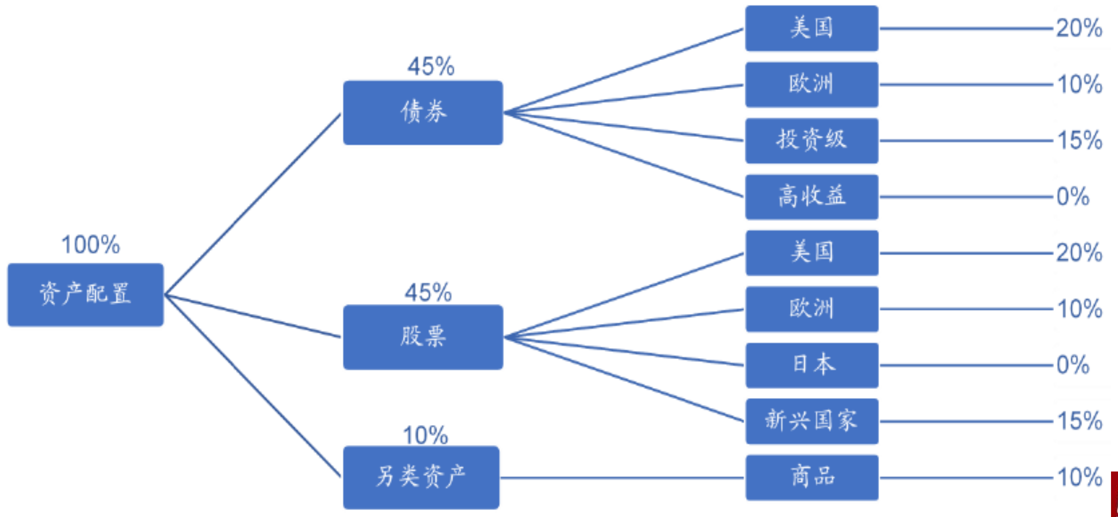
风险预算

从广义上讲，它是基于资产对组合的风险贡献以及期望收益而进行的配置。狭义上讲，风险预算是测量和分解风险的过程，利用这些风险度量值进行资产配置决策，并使用这些风险预算监控资产配置。

基本思路

目标：最大化每单位风险的收益

测算某种资产的**边际风险贡献**，当每一资产的“风险溢价/边际风险贡献”全部相等时，资产配置权重为最优，否则存在进一步改进的余地。

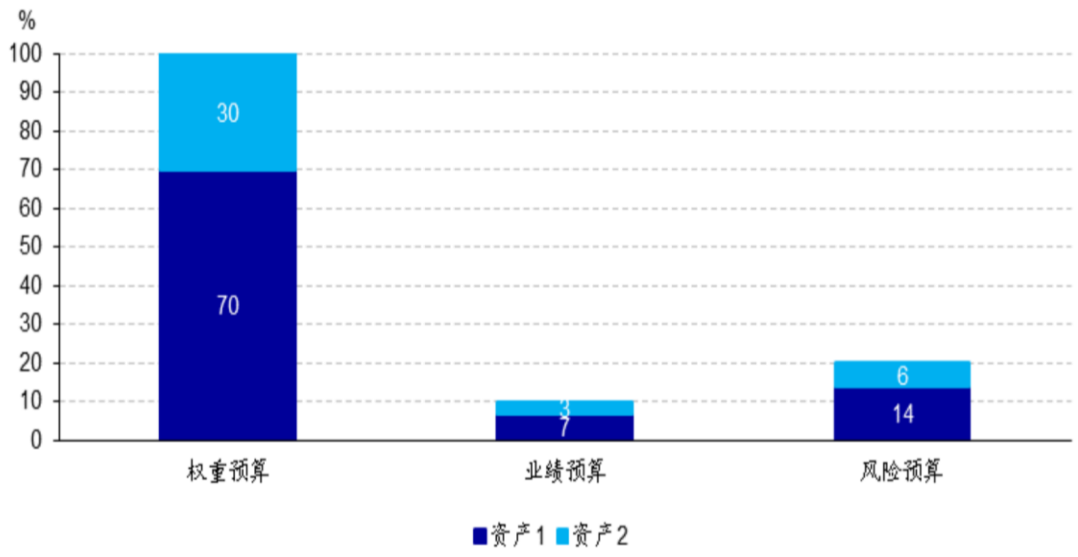


资料来源：海通证券研究所

风险预算的定义

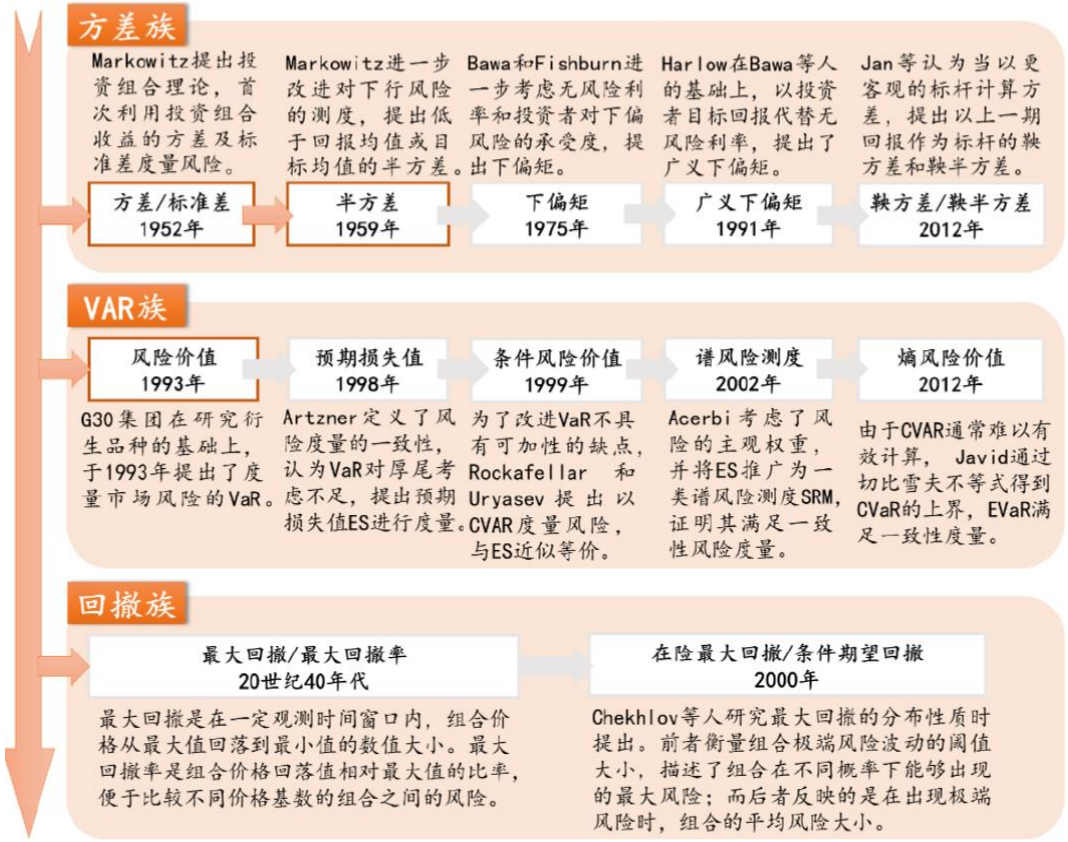
资产配置的三种预算策略

- 权重预算（Weight Budgeting, WB）
- 业绩预算（Performance Budgeting, PB）
- **风险预算**（Risk Budgeting, RB）



风险度量

- 绝对风险（如对称的标准差、着重刻画下行风险的 VaR 或者最大回撤）
- 相对风险（如跟踪误差）



资料来源：
- 海通证券研究所
- 华泰证券-改进风险度量方式稳定提升风险模型表现的方法：风险预算模型如何度量风险更有效
- https://wiki.mbalib.com/wiki/跟踪误差

风险预算模型的原理

- 假定组合包含n个资产，权重为$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ 由此确定的**组合风险**记为$R(x)$，常用标准差、在险价值(value at risk, VaR)、预期亏损(Expected Shortfall, ES)度量。

- 风险函数对变量x_i的一阶偏导$\frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$称为变量$x_i$的**边际风险贡献**(Marginal Contribution to Risk, MCR)，衡量了变量x_i的微小变化对风险的影响。

- 变量x_i与其边际风险贡献的乘积$x_i\cdot\frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$称为变量$x_i$对总风险的贡献，即风险贡献(Contribution to Risk, CR)。即第i个资产的风险贡献RC_i可唯一定义为

$$RC_i=x_i\cdot\frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$$

- 在资产收益率服从正态分布的假设下，上述三个风险度量指标——标准差、VaR 和 ES 都满足组合风险

$$R(x)=\sum_{i=1}^{n}RC_i$$

即为**欧拉配置原则**，是定义风险预算组合的基础。

风险预算模型的原理

- 进一步定义 b_i 为第 i 个资产的风险贡献 RC_i 在组合风险 $R(x)$ 中所占的百分比。在不考虑资金借贷和做空的假设下，一个标准的**风险预算组合**可由如下形式给出：

$$RC_i = b_i R(x)$$

$$s.t.\begin{cases} b_i \geq 0 \\ 1 \geq x_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} b_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

- 当给定**目标风险预算** b_i 后，求解上述非线性方程组就可转化成如下的优化问题：

$$min \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \cdot \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} - b_i R(x)\right)^2$$

$$满足\sum_{i=1}^{n} x_i = 1，0 \leq x_i \leq 1$$

只考虑目标风险预算大于零的资产，目标风险为零等价于资产权重为零。

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} RC_i$$

计算实际：$RC_i = x_i \cdot \dfrac{\partial R(x)}{\partial x_i}$

RC_i

给定 b_i 估计预期：$RC_i = b_i R(x)$

做差、平方 $\Rightarrow$ 加和、求最小

$$min \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \cdot \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} - b_i R(x)\right)^2$$

$$满足\sum_{i=1}^{n} x_i = 1，0 \leq x_i \leq 1$$

$$R(x) \xrightarrow{对x_i求偏导} MRC_i \xrightarrow{乘以\ x_i} RC_i \Leftarrow 加入最优化条件\ b_i^*$$

反推

用 R(x) 需要满足的最优化条件反推 R(x)！

实证：海外养老基金的资产配置

在不允许做空和借贷的约束下， 构建了如下三个组合：

- 风险预算组合1：构建与目标风险预算相一致的组合；
- 风险预算组合2：在允许与风险预算组合1有1%跟踪误差的条件下，最大化组合的预期收益；
- 均值-方差组合：在组合整体波动率与风险预算组合2一致的条 件下，最大化组合的预期收益。

结果分析：

- 风险预算组合1、2资产分散度较好，组合3资产(1)和资产(8)的权重之和超过了85%
- 均值-方差组合落在有效前沿之上，风险预算组合 2 有着和它相同的组合波动率。
- 由于加入了最大化预期收益的目标，风险预算组合2十分接近有效前沿。
- 从一个不考虑收益的风险预算组合 1 出发，设计了一个和最优组合有相同波动率且预期收益接近，但分散程度更好的配置方案，将这一过程称为 “积极的风险预算策略”。

图1 海外养老基金的目标风险预算

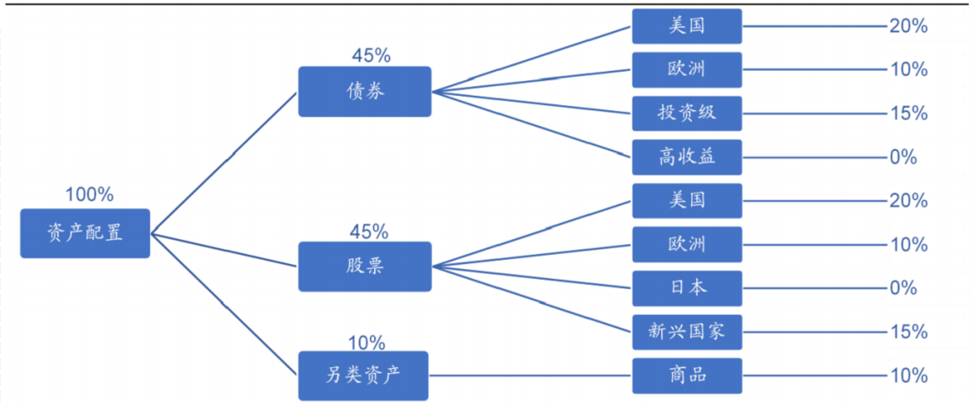
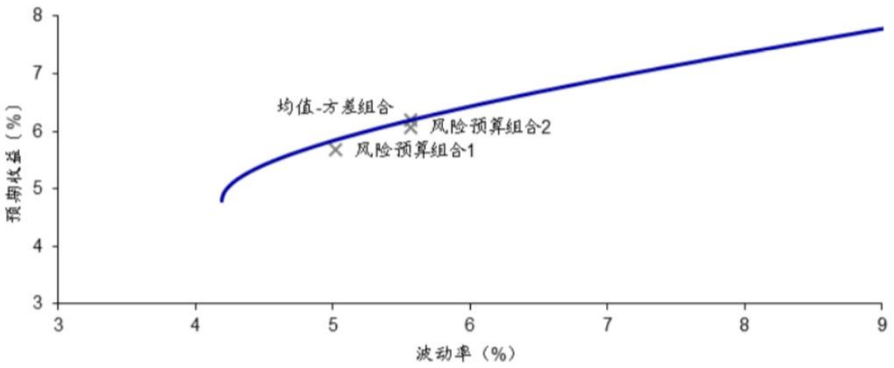


表 4 海外养老基金风险预算组合的权重与风险贡献（%）

资产类别	风险预算组合 1		风险预算组合 2		均值-方差组合	
	权重	风险贡献	权重	风险贡献	权重	风险贡献
(1)	36.8	20.0	45.9	18.1	66.7	25.5
(2)	21.8	10.0	8.3	2.4	0.0	0.0
(3)	14.7	15.0	13.5	11.8	0.0	0.0
(5)	10.2	20.0	10.8	21.4	7.8	15.1
(6)	5.5	10.0	6.2	11.1	4.4	7.6
(8)	7.0	15.0	11.0	24.9	19.7	49.2
(9)	3.9	10.0	4.3	10.3	1.5	2.7

图2 海外养老基金的风险预算组合



资料来源：
- 海通证券研究所

资产配置

风险平价（Risk Parity, RP）的策略思想

引入

1996 年对冲基金桥水基金开发了基于风险平价思想进行资产配置的全天候投资组合。2005 年，Qian 正式提出了风险平价的概念，并建立了量化的风险平价模型。风险平价是目前比较流行的资产配置模型之一。

思想

- 风险平价策略是对组合中**不同资产**分配**相同权重**的一种投资策略。
- 风险平价策略旨在同时考虑组合中单个资产的风险及资产之间协同风险，使各资产的风险贡献相同，消除不同资产对组合风险贡献的不平衡，得到风险更加**分散化**的组合。

本质

- 风险平价在本质上是一种特殊形式的 MVO。无须估计均值（预期收益）及相关系数（一些高级的风险平价模型会考虑估计相关系数），只需要估计波动率（实证：与预期收益相比，波动率更容易预测）。
- 其隐含的假定是：所有资产预期收益相等，并且彼此之间不具有相关性

实操

- 得到基于风险平价的投资组合后，投资者可通过借入或者持有部分现金，调整杠杆比例，使整个投资组合与其风险容忍度相对应。

风险平价的定义

- 风险平价（RP）策略的理念是：找到一个风险平衡的投资组合，使投资组合的**所有资产的风险贡献相同**。

投资组合x是一个RP投资组合，当且仅当它满足条件：

$$x_i \cdot \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} = x_j \cdot \frac{\partial R(x)}{\partial x_j}, for \forall i \neq j \Longrightarrow RC_i = RCj, for \forall i \neq j$$

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

- 采用收益率的标准差来度量组合风险，即：

$$R(x) = \sqrt{x'\Sigma x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} x_i x_j \sigma_{ij}}$$

σ_i^2 代表第i个资产的方差，σ_{ij} 代表第i个和第j个资产的协方差，Σ 代表协方差矩阵

- 则：

$$MCR_i = \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} = \frac{(\sum x)_i}{R(x)}$$

$$RC_i = x_i \cdot \frac{(\sum x)_i}{R(x)}$$

$$RC_i = RCj, for \forall i \neq j \Longleftrightarrow x_i \times (\sum x)_i = x_j \times (\sum x)_j, for \forall i \neq j$$

RP模型的数学推导

The two-asset case(n=2)

- 假设ρ为两资产之间的相关系数，$x=(w,1-w)$是权重向量， $0\le w\le 1$
- 风险贡献总和：$R(x)=RC_1+RC_2$

$$
\begin{aligned}
&= x_1\cdot\frac{\partial R(x)}{\partial x_1}+x_2\cdot\frac{\partial R(x)}{\partial x_2}\\
&= w\cdot\frac{(\sum x)_1}{\sigma(x)}+(1-w)\cdot\frac{(\sum x)_2}{\sigma(x)}\\
&= \frac{1}{\sigma(x)}(w^2\sigma_1^2+w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2+(1-w)w\rho\sigma_1\sigma_2+(1-w)^2\sigma_2^2)
\end{aligned}
$$

- x是RP投资组合，当且仅当：

$$RC_1=RC_2 \Longrightarrow x_1(\sum x)_1=x_2(\sum x)_2 \Longrightarrow w^2\sigma_1^2=(1-w)^2\sigma_2^2 \Longrightarrow w=\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

- RP投资组合为：

$$x^\star=\left(\frac{\sigma_1^{-1}}{\sigma_1^{-1}+\sigma_2^{-1}},\frac{\sigma_2^{-1}}{\sigma_1^{-1}+\sigma_2^{-1}}\right)$$

$$R(x)\longrightarrow MRC_i\longrightarrow RC_i \Longleftarrow$$

最优化条件
RC1=RC2

反推

- 注意，RP投资组合不依赖于 ρ!

风险预算的关键是度量某资产i的边际风险贡献进而度量某资产i对资产组合的风险贡献，权重和风险贡献成比例
风险评价的关键是进一步规定每一类资产对资产组合的风险贡献相等

RP模型的数学推导

Special case of homogeneous correlation (n > 2)

- 假设任意两资产之间的相关系数都相等，$\rho = \rho_{i,j} = corr(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$
- 风险贡献总和：

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} RC_i$$

$$RC_i = x_i \cdot \frac{(\sum x)_i}{R(x)} = (x_i^2\sigma_i^2 + \rho\sum_{j\neq i} x_i x_j \sigma_i \sigma_j)/\sigma(x)$$

$$= x_i\sigma_i\left((1-\rho)x_i\sigma_i + \rho\sum_{j=1}^{n} x_j\sigma_j\right)/\sigma(x)$$

- x是RP投资组合，当且仅当：

$$RC_i = RCj, for \forall i \neq j \Longrightarrow x_i\sigma_i = x_j\sigma_j,\ \text{for } \forall i \neq j,\ \ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

- RP投资组合为：

$$x_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^{-1}}$$

- 分配给每一项资产的权重与其波动性成反比！

RP模型的数学推导

The general case（n > 2）

- 利用协方差的性质可以得到，$\sigma_{ix} = cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_p) = cov(\tilde{r}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{r}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{ij}$

$$(\sum x)_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_j = \sigma_{ix}$$

- 风险贡献总和：

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} RC_i$$

$$RC_i = x_i \cdot \frac{(\sum x)_i}{R(x)} = x_i \cdot \frac{\sigma_{ix}}{R(x)}$$

- 有第i项资产的贝塔比率[1]：

$$\beta_i := \frac{cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_p)}{var(\tilde{r}_p)} = \frac{\sigma_{ix}}{\sigma^2(x)} = \frac{\sigma_{ix}}{R^2(x)}$$

- x是RP投资组合，当且仅当：

$$RC_i = RC_j, \forall i \neq j \Longrightarrow x_i = \frac{\beta_i^{-1}}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j^{-1}}$$

结论：β越高权重越低，具有高波动性或与其他资产高度相关的资产将受到惩罚

问题没有被解决，β_i仍取决于x

1：β系数相当于个别股票或股票基金相对于基准收益的波动情况，一般以市场收益为基准收益
此处以资产组合收益R(x)为基准

RP模型的数值计算求解

- 从数值计算的角度出发， RP模型可以通过如下优化问题1求解：

$$
\begin{tikzcd}
 & RC_i \arrow[d, Rightarrow] & & \\
i,j=1,\ldots,n \arrow[ur, "\forall i"] \arrow[dr, "\forall j"'] & \text{做差、平方} \arrow[r, Rightarrow] & \text{加和、求最小} \arrow[r, Rightarrow] & \\
 & RC_j \arrow[u, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i(\Sigma x)_i - x_j(\Sigma x)_j)^2 \\
\text{s.t. } & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.
\end{aligned}
$$

- 也可通过如下优化问题2求解：

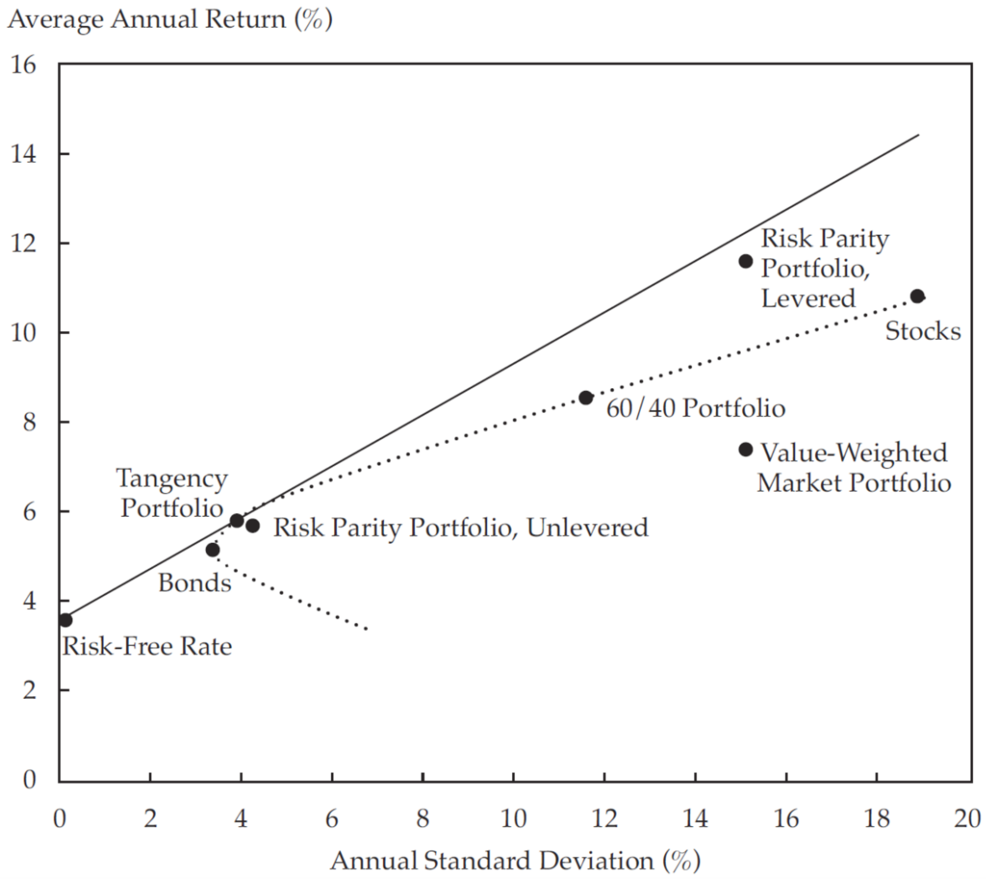
$$
\begin{aligned}
\min_{y} \ & \sqrt{y'\Sigma y} \\
\text{s.t. } & \sum_{i=1}^{n} \log y_i \geq c
\end{aligned}
$$

- c为任意常数，假设y*是此问题2的最优解，则 $x^* := y^*/(\sum_{i=1}^{n} y_i^*)$ 是问题1的最优解
- 两个最优化问题都可以通过SOP(Sequential Quadratic Programming)解决

实证

考虑一个简单的RP策略：

- 在每个日历月t结束时，将每个资产类别中的投资组合权重设为等于其波动的倒数，使用从t-1个月往前的三年的月超额收益来估计。获得的投资组合称为<u>无杠杆RP投资组合</u>
- 然后，将无杠杆RP投资组合的权重乘以常数，以匹配价值加权基准（如标准普尔500指数）的事后实现波动率，获得的投资组合称为<u>杠杆RP投资组合</u>。
- 将有无杠杆的RP投资组合与<u>60/40策略投资组合</u>[1]和<u>市场投资组合</u>[2]进行比较，比较**总累积回报（对数标度）**



- 相切投资组合，即具有最高夏普比率[3]的投资组合，投资88%的债券和12%的股票，因此市场投资组合分配了更大比例的资本股票。
- 在这个样本中（1926-2010年），股票的平均市场权重为68%，国债的平均市场权重为32%

1. 60/40策略投资组合将60%分配给股票，40%分配给债券，每月进行一次平衡以保持恒定权重
2. 市场投资组合包含市场上存在的所有资产种类，且各种资产所占的比例和每种资产的总市值占市场总市值的比例相同的投资组合
3. 夏普比率 $SharpRatio = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$ $E(R_p)$ ； R_f ：投资组 σ_p 预期年化回报率； ：年化无风险利率； ：投资组合预期年化回报率的标准差

桥水基金：基于风险平价模型的全天候策略

- 桥水基金的全天候策略最早于 1996 年由 Ray Dalio 提出。当时Dalio 提出全天候策略的目的是给自己的家人提供一个不需要主动管理的能够在任何经济环境下获得市场平均回报的资产组合。因此这种策略较适合追求资产保值而不是获取超额利润的风险极度厌恶型投资者。
- 根据历史回测，在 1984 年至 2013 年的 30 年内，按照该策略投资的年化收益率高达 9.72%，以标准差衡量的风险度仅为 7.63%，30 年内有 26 年的收益均为正数，平均回撤仅为 1.9%，承受了经济衰退、地产泡沫和金融危机等各种考验。

	S&P 500	全天候策略
负收益次数	24	14
大萧条时期(1929-1932)回撤	64.4%	20.55%
平均回撤	13.66%	3.65%

- 全天候策略解决了风险平衡模型中的两个核心问题：

  （1）在任何环境下给予投资者可靠的回报；（2）在最糟糕的经济环境下也保持较小的回撤。

资料来源：
- 太平洋证券大类资产配置系列之一：大类资产配置策略理论与应用_2018-10-11_太平洋证券

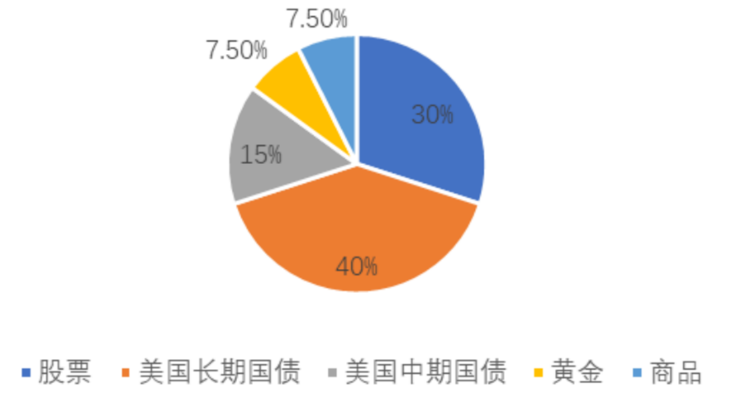
桥水基金：基于风险平价模型的全天候策略

- 针对第一个问题，Dalio 通过择时配置不同资产类别解决。
- Dalio给出了经济环境的4个季节以及不同季节适宜配置的资产类别
- Dalio 认为只要将风险在这 4 个季节中平均分配，分别承担 25%的风险，而并不需要对未来的经济走势进行预测，资产组合就能够达到风险完全平衡的目的

- 针对第二个问题，Dalio 通过选择配置资产类别的比例来解决。
- 为了实现等风险权重配置，由于各类资产的风险、回报各不相同，Dalio 利用了复杂的配置结构和杠杆工具。
- 比如配置债券等低风险低回报的资产时，通过合理地加杠杆的方式将债券的预期回报率调整为股票水平，变为高风险高回报的资产，然后再根据风险贡献等权重建立组合。

市场预期	经济增长		通胀	
↑	股票 大宗商品 公司信用债 新兴市场债券	25%	通胀挂钩债券 大宗商品 新兴市场债券	25%
↓	普通债券 通胀挂钩债券	25%	股票 普通债券	25%

图 16：全天候极简配置策略



资料来源：
- 太平洋证券大类资产配置系列之一：大类资产配置策略理论与应用_2018-10-11_太平洋证券

RP模型的评价

特点：

•经验上，RP组合的**夏普比率要高于市场投资组合和60/40投资组合**

•为了分散风险，RP组合使用者通常需要在低风险资产上投资比在高风险资产上投资更多的资金

•与传统的60/40投资组合相比，RP投资组合的总体积极性和预期回报率较低，RP投资者通过对风险平衡投资组合**应用杠杆**，将其**预期回报和风险提高到预期水平**，从而解决这一问题。

争议：风险平价模型，目前仍存在较大争议。

反对者认为：该模型最大缺陷在于，完全忽视了资产的预期收益，因此未能做到风险与收益的有效平衡。在过去 20 多年，风险平价之所以能够取得巨大成功，原因是该模型赋予了低波动债券更高的权重。美国长达 30 多年的利率趋势性回落，令美债表现优异。但随着美联储加息缩表，利率在未来很可能向上，呈现出均值回归的特征。此外，风险平价还依赖于投资组合资产类别的划分。

北京大学量化交易协会