Il problema COL è NP-completo

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, si vuole assegnare un colore a ciascun nodo di G in modo tale che vengano soddisfatti alcuni vincoli.
Nel problema di Colorabilità classico il vincolo che deve essere rispettato è: **nodi adiacenti devono essere colorati con colori diversi**.
Possono essere definite, ribadiamo, tante regole diverse per colorare i nodi di un grafo, ma, quando non viene specificato altrimenti, ci si riferisce a questa regola.

Dati un grafo $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$ (con $k \leq |V|$), esiste una assegnazione di k colori ai nodi in V che assegni colori diversi a nodi adiacenti?

- $\mathcal{I}_{COL} = \{ \langle G = (V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \wedge\ k \in \mathbb{N} \}$.
- $\mathcal{S}_{COL}(G, k) = \{ c : V \to \{ 1, 2, \ldots, k \} \}$.
- $\pi_{COL}(G, k, \mathcal{S}_{COL}(G, k)) = \exists c \in \mathcal{S}_{COL}(G, k) : \forall (u, v) \in E[c(u) \neq c(v)]$.

Dimostriamo che $COL \in \mathbf{NP}$ mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale:
Un certificato è una colorazione $c : V \to \{ 1, 2, \ldots, k \}$.
Per verificare che c è effettivamente una colorazione per G, ossia che c soddisfa $\pi_{COL}(G, k, \mathcal{S}_{COL}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascun arco (u, v) in E e verificare che $c(u) \neq c(v)$.
Perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|E|)$, ossia, in tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E), k \rangle|$

Il problema k-COL

Il problema k-COL è una piccola variazione di COL: l'unica differenza è che l'intero k non è parte dell'istanza, ma costante.
Questa sottigliezza "k nell'istanza / k costante" comporta un modo diverso di definire il problema k-COL.

- $\mathcal{I}_{COL} = \{ \langle G = (V, E) \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \}$.
- $\mathcal{S}_{COL}(G, k) = \{ c : V \to \{ 1, 2, \ldots, k \} \}$.
- $\pi_{COL}(G, k, \mathcal{S}_{COL}(G, k)) = \exists c \in \mathcal{S}_{COL}(G, k) : \forall (u, v) \in E[c(u) \neq c(v)]$.

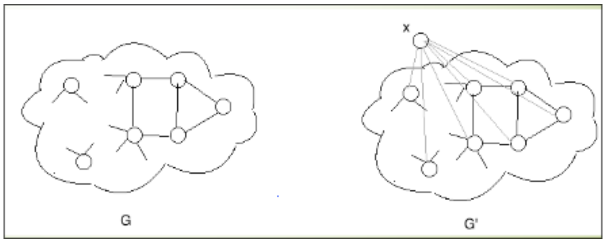
$1, 2, 3$-COL

Nel problema 1-COL ci si domanda se tutti i nodi possono essere colorati con lo stesso colore in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore.
Questo è possibile se e soltanto se nel grafo non esistono archi, ossia se e solo se G è un insieme indipendente.
Questa proprietà è verificabile in tempo polinomiale.
Perciò, 1-$COL \in P$.
Anche 2-$COL \in P$ (2-$COL \leq 2SAT$).
3-COL è $\mathbf{NP}$-completo (dimostrazione tramite una riduzione da $3SAT$).

4-COL

$(\implies)$

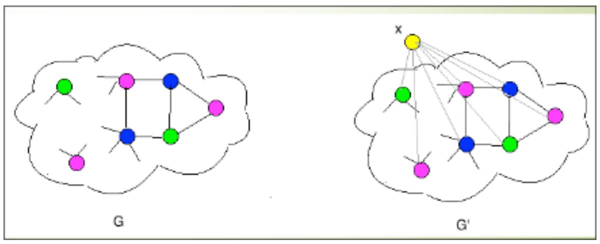
Nel problema 4-COL ci si domanda se i nodi di un grafo G possono essere colorati con 4 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore.
Abbiamo già visto che 4-$COL \in \mathbf{NP}$.
Dimostriamo ora che 4-COL è completo per $\mathbf{NP}$ tramite una riduzione da 3-COL.
Trasformiamo una istanza $G = (V, E)$ di 3-COL in una istanza $G' = (V', E')$ di 4-COL:
V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x: sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{ x \}$.
E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi che collegano x a tutti i nodi in V:
$E\text{'} = E \cup \{ (x, u) : u \in V \}$



Se i nodi di G possono essere colorati con 3 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore, allora chiamiamo 1, 2 e 3 i colori e:

- coloriamo con gli stessi colori i nodi in $V' - \{ x \}$
- coloriamo il nodo x con il colore 4
- abbiamo colorato con 4 colori i nodi di G' in modo che nodi adiacenti hanno colori diversi

Quindi, G' è 4-colorabile



($\Longleftarrow$)

Trasformiamo una istanza $G = (V, E)$ di 3-COL in una istanza $G' = (V', E')$ di 4-COL:

- V' è ottenuto aggiungendo a V un nuovo nodo x: sia $x \notin V$, allora $V' = V \cup \{ x \}$
- $E' = E \cup \{ (x, u) : u \in V \}$

Se i nodi di G' possono essere colorati con 4 colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore.Sia c la funzione che 4-colora V, chiamiamo 4 il colore assegnato al nodo x: $c(x) = 4$.
Poiché x è adiacente a tutti i nodi in V, allora il colore 4 non può essere utilizzato per colorare alcun nodo in V: per ogni $u \in V, c(u) \in \{ 1, 2, 3 \}$.
Poiché c è una 4-colorazione per G', allora, per ogni $u, v \in V$ tali che $(u, v) \in E$, $c(u) \neq c(v)$, ossia, c colora i nodi di G con 3 colori in modo che nodi adiacenti hanno colori diversi.
Quindi, G è 3-colorabile.
Poiché calcolare $\langle G' = (V', E') \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E) \rangle|$, questo completa la prova che 3-$COL \leq 4$-COL

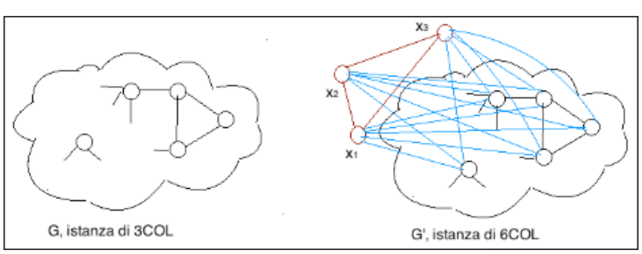
k-COL

Sia $k \in \mathbb{N}$ un intero fissato – **fissato una volta per tutte, perciò costante**.
Nel problema k-COL ci si domanda se i nodi di un grafo G possono essere colorati con k colori in modo tale che nodi adiacenti non siano colorati con lo stesso colore.
Abbiamo già visto che k-$COL \in \mathbf{NP}$

Dimostriamo ora che 3-$COL \leq k$-COL.

($\Longrightarrow$)

Trasformiamo una istanza $G = (V, E)$ di 3-COL in una istanza $G' = (V', E')$ di k-COL:
G' è ottenuto aggiungendo a G una clique C_k di $k - 3$ nuovi nodi $x_1, ..., x_{k-3}$ e poi aggiungendo gli archi che collegano ogni x_i a tutti i nodi in V



$(\Longleftarrow)$

Trasformiamo una istanza $G = (V, E)$ di 3-COL in una istanza $G' = (V', E')$ di k-COL:
G' è ottenuto aggiungendo a G una clique C_k di $k - 3$ nuovi nodi $x_1, ..., x_{k-3}$ e poi aggiungendo gli archi che collegano ogni x_i a tutti i nodi in V.

La dimostrazione che G è 3-colorabile se e soltanto se G' è k-colorabile è pressoché identica a quella di 4-COL.
Se $c : V \rightarrow \{ 1, 2, 3 \}$ è una colorazione dei nodi di G tale che, per ogni $(u, v) \in E, c(u) \neq c(v)$, allora $c' : V' \rightarrow \{ 1, 2, \ldots, k \}$ tale che $c'(u) = c(u)$ per ogni $u \in V$ e $c(x_i) = i + 3$ per $i = 1, \ldots, k - 3$ è una colorazione dei nodi di G' tale che, per ogni $(u, v) \in E$, $c(u) \neq c(v)$.

Se $c' : V' \rightarrow \{ 1, 2, \ldots, k \}$ è una colorazione dei nodi di G' tale che, per ogni $(u, v) \in E$, $c'(u) \neq c'(v)$, allora $c : V \rightarrow \{ 1, 2, 3 \}$ tale che $c(u) = c'(u)$ per ogni $u \in V$ è una colorazione dei nodi di G tale che, per ogni $(u, v) \in E$, $c(u) \neq c(v)$.
Poiché calcolare $\langle G' = (V', E') \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E) \rangle|$.
Questo completa la prova che 3-$COL \leq k$-COL.

COL

Potrebbe mai accadere che $COL \in P$?
Se esistesse un algoritmo deterministico $\mathcal{A}$ che, dati un grafo G e un intero k, decidesse in tempo polinomiale se G può essere k-colorato, allora, $\mathcal{A}$ ci permetterebbe di decidere in tempo deterministico polinomiale anche $3COL$ – basterebbe eseguire $\mathcal{A}(G, 3)$!
3-$COL \leq COL$.
E, dunque, COL è $\mathbf{NP}$-completo.
In effetti, COL è una generalizzazione di 3-COL.
In generale: se un caso particolare di un problema è $\mathbf{NP}$-completo, la generalizzazione non può essere “meno che $\mathbf{NP}$-completo”...
L’inverso, ovviamente, non è detto:, il caso particolare 2-COL di COL è in P, il caso particolare $3COL$ è $\mathbf{NP}$-completo!