Il problema TSP è NP-completo

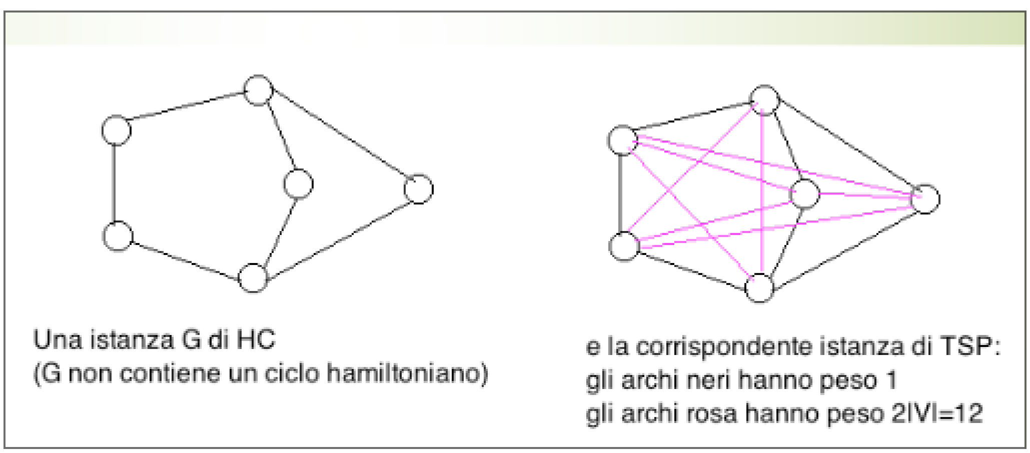
Dati un grafo non orientato completo e pesato $G = (V, E, w)$, dove $w : E \to \mathbb{N}$ è la funzione peso, e un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste in G un ciclo hamiltoniano tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono è $\leq k$?

- $\mathcal{I}_{LP} = \{ \langle G = (V, E, w), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato completo } \wedge \ w : E \to \mathbb{N} \ \wedge \ k \in \mathbb{N} \}$.
- $\mathcal{S}_{LP}(G, k) = \{ \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle : n = \mid V \mid \}$.
- $\pi_{LP}(G, k, \mathcal{S}_{LP}(G, k)) = \exists \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle \in \mathcal{S}_{LP}(G, k) : \forall i, j = 1, ..., h, \ e \ i \neq j \ [u_i \neq u_j] \ \wedge w(u_1, u_2) + w(u_2, u_3) + \ldots + w(u_{n-1}, u_n) + w(u_n, u_1) \leq k$.

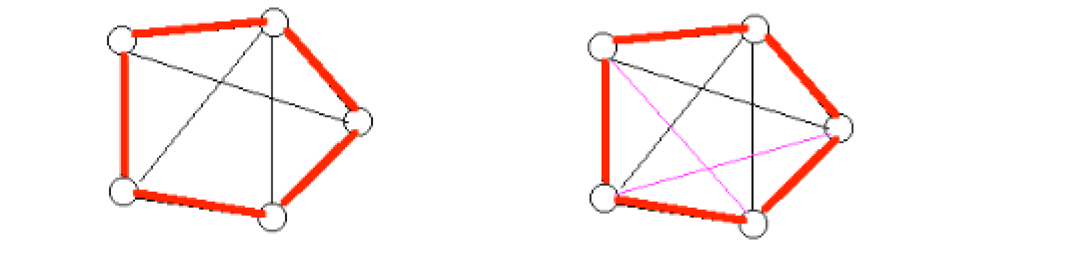
Dimostriamo, ora, che $HC \leq TSP$.
Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G' = (V, E', w), k \rangle$ di TSP, dove E' è ottenuto aggiungendo ad E gli archi mancanti: $E' = E \cup \{ (u, v) : u, v \in V \ \wedge \ (u, v) \notin E \}$, la funzione peso w è così definita:

- per ogni arco di E, ossia, per ogni $(u, v) \in E$, poniamo $w(u, v) = 1$,
- per ogni arco non in E, ossia, per ogni $(u, v) \notin E$, poniamo $w(u, v) = 2|V|$

$k = |V|$



Se G contiene un ciclo hamiltoniano, tale ciclo è anche contenuto in G': sso è costituito di $|V|$ archi contenuti in E, perciò la somma dei loro pesi in G' è $|V|$, Allora, G' contiene un ciclo hamiltoniano di costo $\leq k$.



Se G' contiene un ciclo hamiltoniano C tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono è $\leq |V|$.
C non può contenere archi appartenenti a $E' - E$, perché ciascuno degli archi in $E' - E$ ha peso $2|V|$ e quindi uno solo degli archi in $E' - E$ ha peso maggiore di $k = |V|$, perciò, poiché il peso complessivo di C è $k = |V|$, C è costituito di soli archi contenuti in E, ossia, C è un ciclo hamiltoniano contenuto in G.
Infine, calcolare $\langle G' = (V, E', w), k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E) \rangle|$.
Questo completa la prova che $HC \leq TSP$.