Il problema 3SAT è NP-completo

$\mathcal{I}_{3SAT} = \{ \langle f, X \rangle : X \text{ è un insieme di variabili booleane } \wedge \ f \text{ e un predicato su } X \text{ in } 3CNF \}$

$\mathcal{S}_{3SAT}(X, f) = \{ a : X \rightarrow \{ vero, falso \} \}$

$\pi_{3SAT}(\mathcal{S}_{3SAT}(X, f), X, f) = \exists a \in \mathcal{S}_{3SAT}(X, f) : f(a(x)) = vero$

Osserviamo immediatamente che l'unica differenza fra i due problemi è nella definizione dell'insieme delle istanze.
In effetti, essi sono legati dalla relazione di inclusione: $\mathcal{I}_{3SAT} \subseteq \mathcal{I}_{SAT}$.

Sappiamo che $SAT \in \mathbf{NP}$ e, poichè, come abbiamo appena osservato, le istanze di $3SAT$ costituiscono un sottoinsieme dell'insieme delle istanze di SAT, anche $3SAT \in \mathbf{NP}$.

Dimostriamo, ora, la completezza di $3SAT$ mediante una riduzione da SAT

Sia $f \in \mathcal{I}_{SAT}$ una istanza di SAT; indichiamo con $X = \{ x_1, ..., x_n \}$ l'insieme delle variabili booleane che compaiono in f. Poichè f è in forma congiuntiva normale, possiamo considerare f come un insieme di clausole che devono essere tutte soddisfatte affinchè f sia soddisfacibile, ossia, $f = \{ c_1, ..., c_m \}$.

Mostreremo, in quanto segue, come trasformare ciascuna clausola $c_j \in f$ in un insieme C_j di clausole a 3 variabili, in cui compaiono le stesse variabili che compaiono in c_j e, in alcuni casi, variabili che non compaiono in f , in modo tale
che un'assegnazione di verità soddisfa c_j se e soltanto se la stessa assegnazione alle variabili che compaiono anche in
C_j soddisfa anche tutte le clausole in C_j, per ogni $j = 1, ..., m$.

Una volta definiti gli insiemi C_j, poniamo $\bar{f} = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_m$: $\bar{f}$ è un predicato in forma 3-congiuntiva normale e,dunque, è una istanza di $3SAT$.
Inoltre, per costruzione degli insiemi C_j, una assegnazione di verità soddisfa tutte le clausole in $\bar{f}$ se e soltanto la stessa assegnazione alle variabili che compaiono anche in $\bar{f}$ soddisfa tutte le clausole in
$\bar{f}$, ossia, $\bar{f} \in SAT$ se e soltanto se $\bar{f} \in 3SAT$.

Caso 1)

c_j contiene 1 letterale, ossia $c_j = \ell$, con $\ell = x_i$ o $\ell = \neg x$ allora,
$C_j = (\ell \vee y_{j1} \vee y_{j2}) \wedge (\ell \vee \neg y_{j1} \vee y_{j2}) \wedge (\ell \vee y_{j1} \vee \neg y_{j2}) \wedge (\ell \vee \neg y_{j1} \vee \neg y_{j2})$

La clausola $c_j = \ell$ è soddisfatta solo dall'assegnazione $\ell = vero$ ed è immediato verificare che tutte le clausole in C_j sono soddisfatte se e soltanto se $\ell = vero$.

Caso 2)

c_j contiene 2 letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2$,
allora $C_j = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_j) \wedge (\neg y_j \vee \ell_1 \vee \ell_2)$ dove y_j è una nuova variabile.
Se viene assegnato valore vero a ℓ_1 oppure a ℓ_2 allora C_j assume valore vero qualunque valore di verità si assegni a y_j se viene assegnato valore falso sia a ℓ_1 che a ℓ_2 allora C_j assume valore falso qualunque valore di verità si assegni a y_j

Caso 3)

c_j contiene 3 letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, allora $C_j = c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, è il caso più facile!

Caso 4)

c_j contiene 4 letterali, ossia $c_j = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \vee \ell_4$, allora $C_j = (\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_j) \wedge (\neg y_j \vee \ell_3 \vee \ell 4)$ dove y_j è una nuova variabile.
Se viene assegnato valore vero a ℓ_1 , oppure a ℓ_2 , oppure a ℓ_3 , oppure a ℓ_4 allora esiste una assegnazione di verità a y_j che fa assumere a C_j valore vero.
Se viene assegnato valore falso sia a ℓ_1 che a ℓ_2 che a ℓ_3 che a ℓ_4 allora C_j assume valore falso qualunque valore di verità si assegni a y

Caso 5,...,n)

Se c_j contiene $k \geq 4$ letterali, ossia, $c_j = \ell_1 \vee \ell_2 ... \ell_k$: sia $Y_j = \{\, y_{j1}, ..., y_{jk-3} \,\}$ un nuovo insieme di variabili booleane; allora, $C_j = \{\, (\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_{y_j 1}), (\neg y_{j1} \vee \ell 3 \vee y_{j2}), ..., (\neg y_{ji} \vee \ell_{i+2} \vee y_{ji+1}), ..., (\neg y_{jk-3} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k) \,\}$.

La clausola c_j è soddisfatta dalle assegnazioni tali che, per almeno un indice $i = 1, ..., k$, $\ell_i = vero$ ed è immediato verificare che le $k-3$ clausole in C_j sono soddisfatte se e soltanto se $\ell_i = vero$ per almeno un indice $i = 1, ..., k$.

Costruire l'insieme C_j a partire dalla clausola c_j richiede tempo lineare nel numero di letterali in c_j: poichè tale numero non può essere maggiore di $2n$, è possibile costruire C_j in tempo lineare in n.
Allora costruiamo $\bar{f}$ a partire da f in tempo proporzionale a nm, e dunque in tempo in $O(|f|^2)$