Programmazione Dinamica

Paradigmi

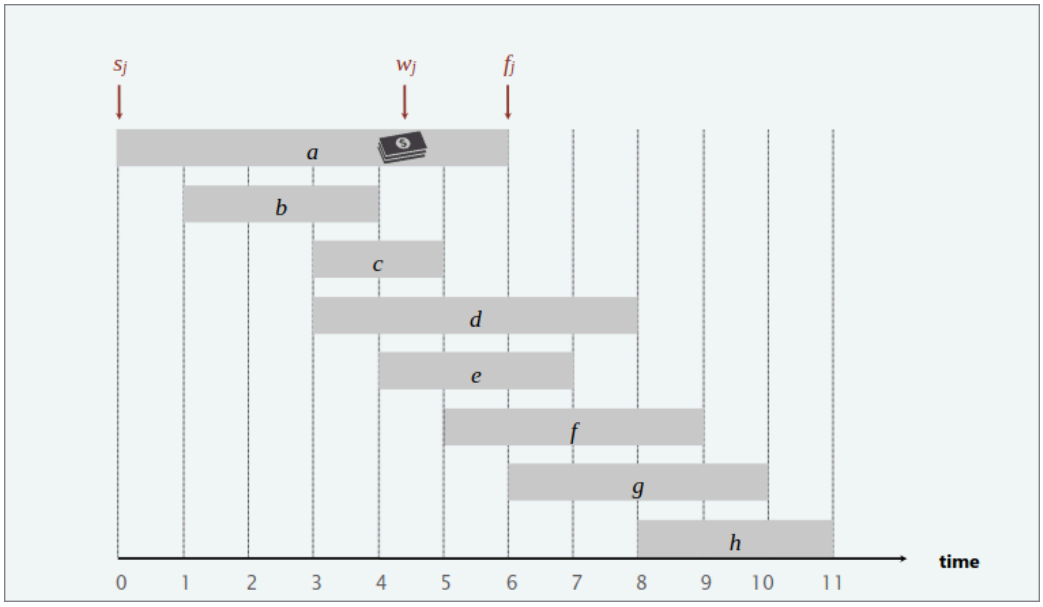
- **Greedy** Elabora l'input in un qualsiasi ordine, prendendi miopemente decisioni irrevocabili.
- **Divide-et-Impera** Spezza un problema in sottoproblemi indipendenti; risolve ogni sottoproblema, combina le soluzioni ai sottoproblemi in modo da formare la soluzione del problema originale.
- **Dynamic Programming** Spezza un problema in una serie di sottoproblemi sovrapponibili; combina le soluzioni di un sottoproblema più piccolo per formare la soluzione di un sottoproblema più grande.

Weighted interval scheduling

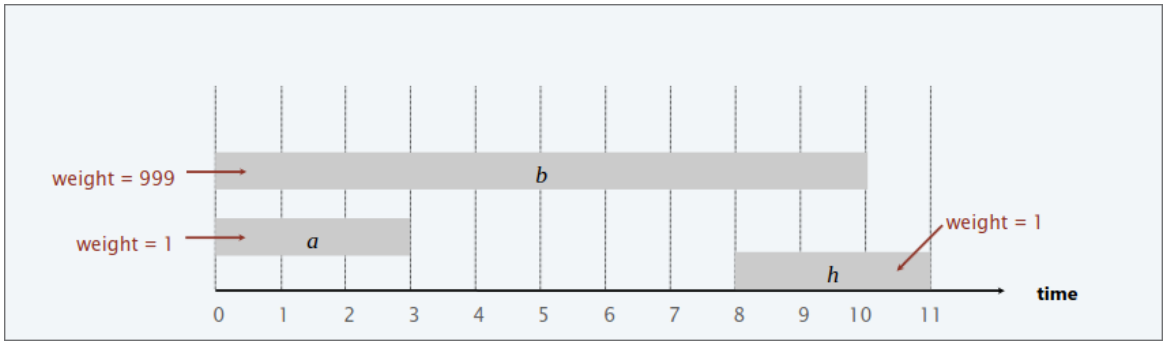
Job j inizia al tempo s_j, finisce a f_j, e ha peso $w_j > 0$. Due jobs sono **compatibili** se essi non si sovrappongono.

Goal

Trovare un sottoinsieme di job mutualmente compataibili di peso massimo.



> [!NOTE]
> L'algoritmo greedy Earliest finish-time first è corretto se i pesi sono tutti di 1
> L'algoritmo greedy fallisce per la versione con i pesi.



> [!NOTE]
> I jobs sono ordinati in ordine crescente di tempo di fine.

> [!IMPORTANT]
> $p(j) =$ il più piccolo indice $i < j$ tale che job i è compatibile con job j

> Ex. $p(8) = 1, p(7) = 3, p(2) = 0$

DP

$OPT[j] =$ il peso massimo di qualsiasi sottoinsieme di job compatibili per sottoproblema costituito solo dai job $1, 2, ..., j$.

Goal

$OPT[n]$

- **Caso1**

  $OPT[j]$ non sceglie il job j: deve essere una soluzione ottima del problema costituito dai jobs $1, 2, ..., j-1$ rimanenti.

- **Caso 2**

  $OPT[j]$ sceglie il job j:
  - Colleziona il profitto w_j.
  - Non è possibile utilizzare job incompatibili $\{ p(j)+1, p(j)+2, ..., j-1 \}$ (ovviamente se il job j è nella soluzione ottima, i job incompatibili non potranno essere nella soluzione ottima).
  - Deve includere la soluzione ottimale al problema consistente nei rimanenti jobs compatibili $1, 2, ..., p(j)$.

Proprietà della sottostruttura dell'ottimo (exchange argument)

Equazione di Bellman

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j = 0 \\ \max\{ OPT(j-1),\ w_j + OPT(p(j)) \} & \text{if } j > 0 \end{cases}$$

O prendo l'ottimo dei primi $1, ..., j-1$ job nel caso j non faccia parte dell'ottimo, o prendo il peso di j sommato all'ottimo del sottoproblema $p(j)$ (ovvero il primo job di indice più grande compatibile con j) nel caso j sia nella soluzione ottima.

Bottom-up DP

BOTTOM-UP(n, s_1, …, s_n, f_1, …, f_n, w_1, …, w_n)

Sort jobs by finish time and renumber so that $f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n$.

Compute $p[1], p[2], \ldots, p[n]$ via binary search.

$M[0] \leftarrow 0$.

previously computed values

FOR $j = 1$ TO n

  $M[j] \leftarrow \max\{ M[j-1],\ w_j + M[p[j]] \}$.

RETURN $M[n]$.

Tempo di esecuzione

La versione bottom-up usa $O(nlogn)$ passi:

- Ordino per tempo di fine: $O(nlogn)$
- Computo $p[j]$ per ogni j: $O(nlogn)$ (Ricerca Binaria)
- Ciclo for richiede $O(n)$ passi

Ritorno alla ricorsione

BRUTE-FORCE $(n, s_1, \ldots, s_n, f_1, \ldots, f_n, w_1, \ldots, w_n)$

Sort jobs by finish time and renumber so that $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$.

Compute $p[1], p[2], \ldots, p[n]$ via binary search.

RETURN COMPUTE-OPT(n).

COMPUTE-OPT(j)

IF ($j = 0$)

  RETURN 0.

ELSE

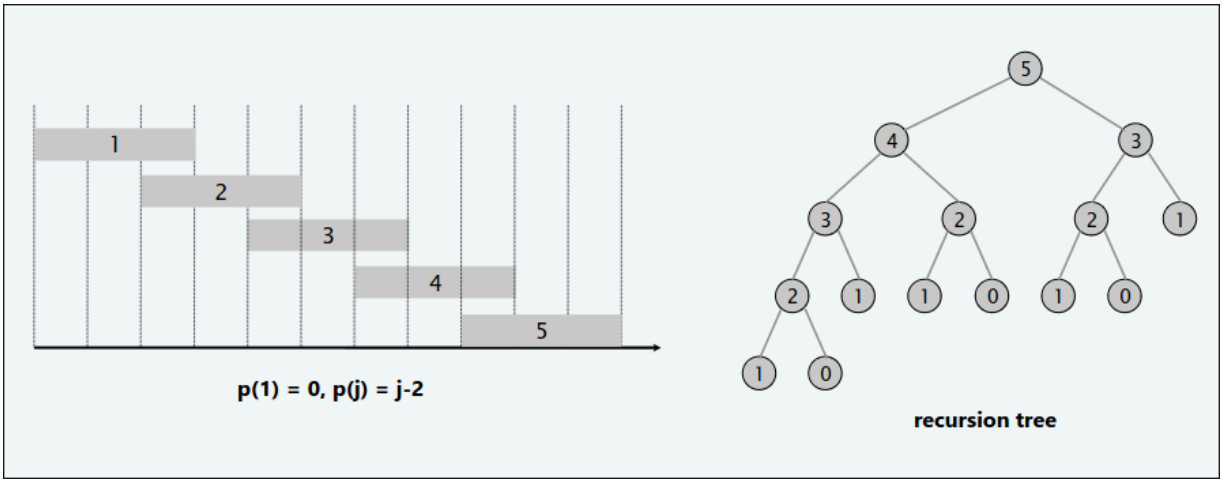
  RETURN max {COMPUTE-OPT($j-1$), w_j + COMPUTE-OPT($p[j]$) }.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 2T(n-1) + \Theta(1) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

$T(n)=\Theta(2^n)$

La prima chiamata è su $n-1$, la seconda (nel caso peggiore, i job sono tutti compatibili) $p[j] = n-1$

Questo algoritmo è lento, perché ricalcola ogni volta le soluzioni dei sottoproblemi.



Memoization

Programmazione dinamica top-down (memoization)

- Salva i risultati dei sottoproblemi j in $M[j]$
- Usa $M[j]$ per evitare di risolvere il sottoproblema j più di una volta.

TOP-DOWN($n, s_1, \ldots, s_n, f_1, \ldots, f_n, w_1, \ldots, w_n$)

Sort jobs by finish time and renumber so that $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$.

Compute $p[1], p[2], \ldots, p[n]$ via binary search.

$M[0] \leftarrow 0$. ← global array

RETURN M-COMPUTE-OPT(n).

M-COMPUTE-OPT(j)

IF ($M[j]$ is uninitialized)

$M[j] \leftarrow \max \{$ M-COMPUTE-OPT$(j-1)$, w_j + M-COMPUTE-OPT$(p[j])$ $\}$.

RETURN $M[j]$.

Tempo di esecuzione

La versione con memization usa $O(nlogn)$ passi

dim

- Ordina per tempo di fine: $O(nlogn)$
- Calcola $p[j]$ per ogni j: $O(nlogn)$
- $M\text{-}COMPUTE\text{-}OPT(j)$: ogni invocazione richiede $O(1)$ passi e o:
  - (1) ritorna un valore inizializzato $M[j]$
  - (2) inizializza $M[j]$ ed esegue due chiamate ricorsive
- Misura del progresso $\phi =$ numero delle voci inizializzate tra $M[1, ..., n]$:
  - inizialmente $\phi = 0$, finché $\phi \leq n$
  - (2) incrementa ϕ di $1 \implies \leq 2n$ chiamate ricorsive

Il tempo di esecuzione complessivo di $M\text{-}COMPUTE\text{-}OPT(n)$ è $O(n)$

Algoritmo per la soluzione

FIND-SOLUTION(j)

IF ($j = 0$)

RETURN $\emptyset$.

ELSE IF ($w_j + M[p[j]] > M[j-1]$)

RETURN $\{ j \} \cup$ FIND-SOLUTION($p[j]$).

ELSE

RETURN FIND-SOLUTION($j-1$).

$M[j] = \max \{ M[j-1], w_j + M[p[j]] \}$.

Il numero di chiamate ricorsive è $O(n)$

Longest increasing subsequence

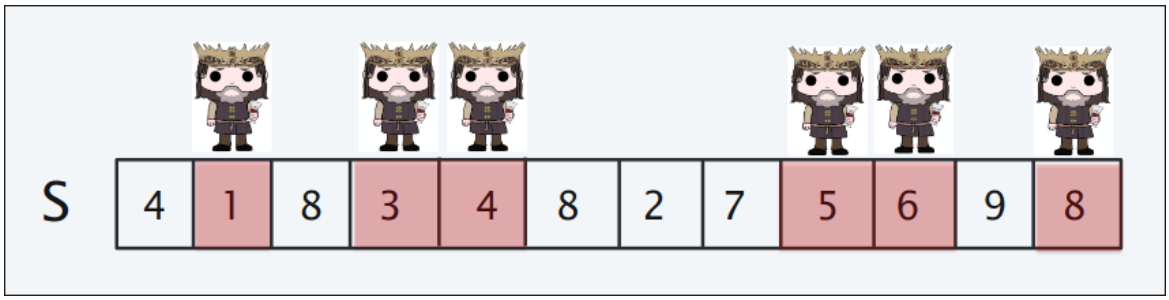
Bevi il più possibile

Robert vuole bere il più possibile:

- Robert cammina per le strade delle terre del Re e incontra n taverne $t_1, t_2, ..., t_n$, in ordine.
- Quando Robert incontra una taverna t_i, lui può o fermarsi a bere qualcosa o continuare a piedi
- Il vino servito nella taverna t_i ha forza s_i
- La forza delle bevute di Robert deve essere aumentare nel tempo

Goal

Calcola il massimo numero di fermate che Robert fa per bere.



$Optimal\ Sol = 6$

DP

- **Sottoproblema:**

  $OPT[i]$: lunghezza della longest increasing subsequence $S[1], ..., S[i]$

- **Caso base**

  $OPT[1] = 1$

- **Soluzione**

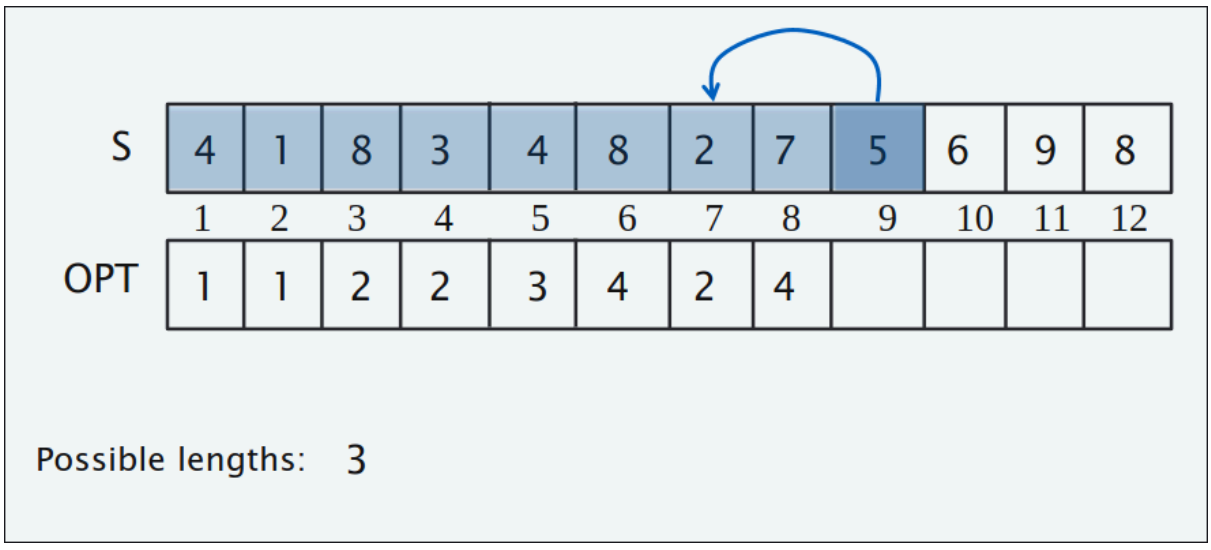
  $OPT[n]$

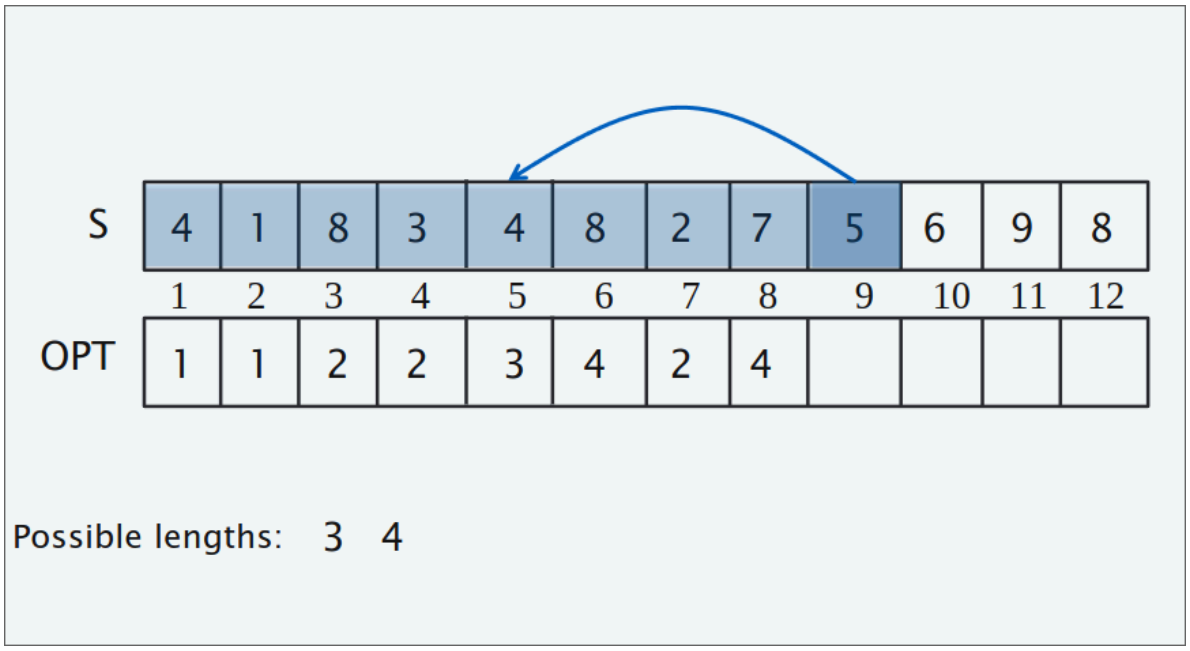
- **Equazione di Bellman????????**

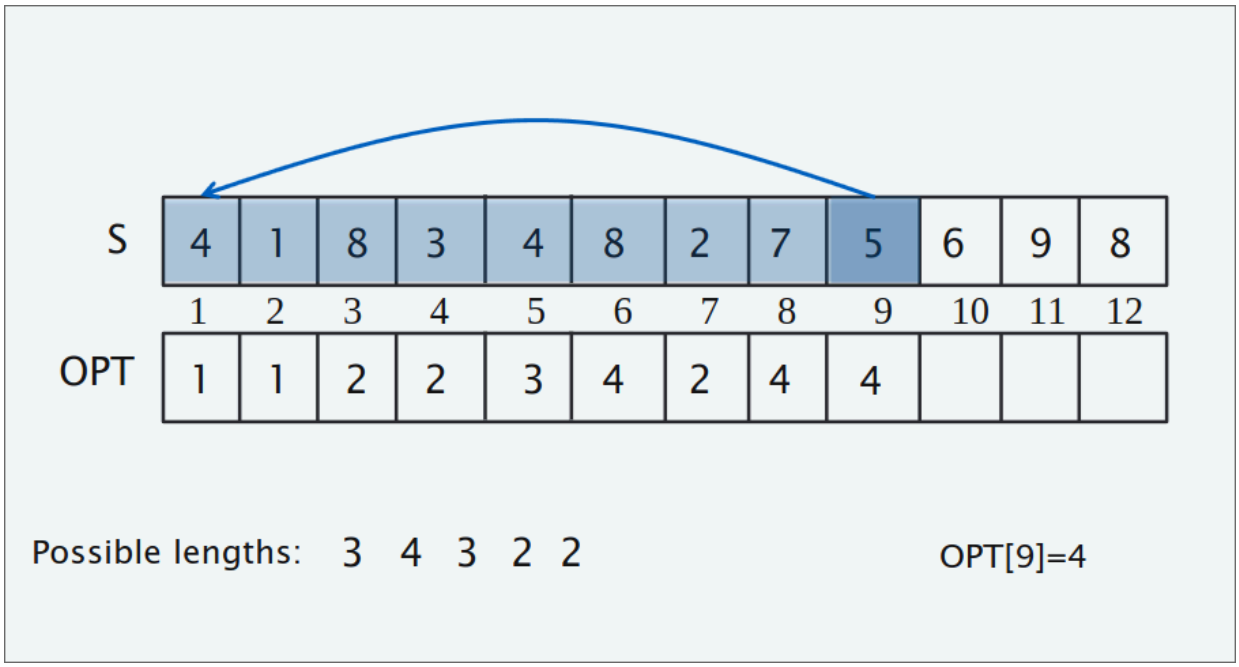
Posso dire che se una taverna non è nella soluzione ottima, allora prendo l'ottimo della taverna precedente, altrimenti se c'è prendo la soluzione ottima della taverna precedente e sommo 1.
Ma così non funziona perché l'elemento precedente ad i potrebbe essere più grande di i.

Consiglio: può essere utile, a volte, aggiungere dei vincoli ai sottoproblemi

$OPT[i]$: lunghezza della longest increasing subsequence $S[1], ..., S[i]$ che termina con $S[i]$







- **Sottoproblema:**

  $OPT[i]$: lunghezza della longest increasing subsequence $S[1], ..., S[i]$ che termina con $S[i]$

- **Caso base**

  $OPT[1] = 1$

- **Soluzione**

  $max_{i=1,...,n} OPT[i]$

- **Equazione di Bellman**

  $OPT[i] = 1 + max\{\, 0, max_{j=1,...,i-1 \; tc \; S[j]<S[i]} OPT[i] \,\}$

LIS(S[1:n])

OPT[1]=1

FOR i = 2 TO n

$$\text{OPT[i]= 1 + max}\left\{0,\ \max_{\substack{j=1,2,...,i-1\\ \text{tc } S[j]<S[i]}} \text{OPT[j]}\right\}$$

RETURN max_i OPT[i].

Tempo di esecuzione

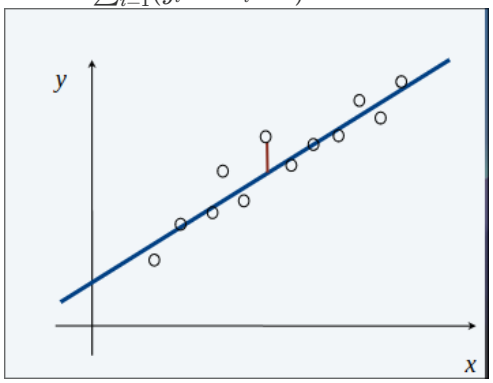
Ogni $OPT[i]$ è calcolato in $O(i) = O(n) \implies O(n^2)$ passi.

Segmented least squares

Least Squares:

- Dati n punti nel piano: $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$
- Trova una retta $y = ax + b$ che minimizza la somma degli errori quadratici:

$SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$



Goal

Calcola i valori di a e b che minimizzano SSE:

$$a = \frac{n\sum_i x_i y_i - (\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum_i y_i - a\sum_i x_i}{n}$$

Segmented least squares

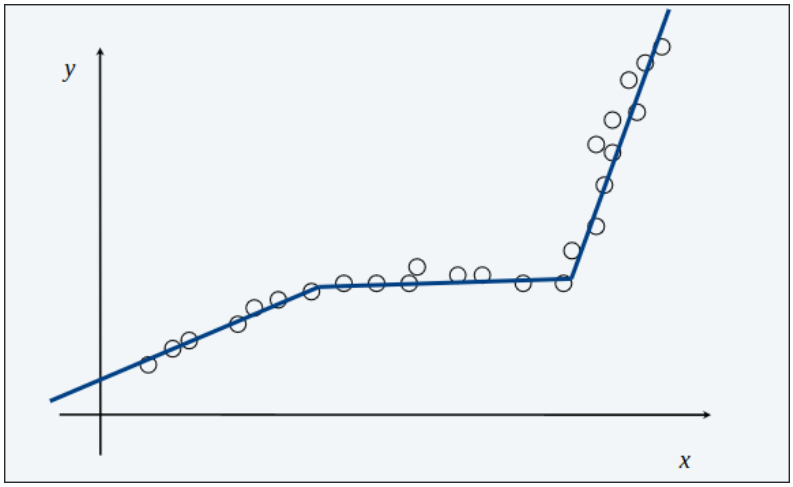
I punti si trovano all'incirca su una sequenza di diversi segmenti di linea.
Dati n punti nel piano: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_1 < x_2 < ... < x_n$, trova una sequenza di righe che minimizzi $f(x)$.

> [!NOTE]
> $f(x)$ deve contenere due aspetti, questi segmenti devono approssimare bene i punti che coprono questi segmenti (**accuratezza**) e da altra parte vorrei che questi segmenti non fossero tanti (**parsimonia**), altrimenti potrei scegliere una linea per ogni coppia di nodi ma così non avrei approssimato nulla. Se usassi una retta per ogni coppia di punti avrei acuratezza 0.

GOAL

Minimizzare $f(x) = E + cL$ per qualche costante $c > 0$ (ogni linea ha un certo costo c, questo è il senso, e aggiungerla costa dunque c, più c è alto meno archi posso usare, più c è piccolo meno archi posso usare, c è il grado di parsimonia):

- E : somma delle SSE in ogni segmento
- L : numero di segmenti



Notazione

$OPT[j]$= è la sequenza di punti $p_1, ..., p_j$ di costo minimo
$e_{ij} = SSE$ per le sequenze di punti $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_j$

Per calcolare $OPT[j]$

L'ultimo segmento usa i punti $p_i, ..., p_j$ per qualche $i \leq j$. Il costo è $e_{ij} + c + OPT(i-1)$

Equazione di bellman

$$OPT(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j = 0 \\ \min\limits_{1 \leq i \leq j} \{ e_{ij} + c + OPT(i-1) \} & \text{if } j > 0 \end{cases}$$

Algoritmo

SEGMENTED-LEAST-SQUARES($n, p_1, \ldots, p_n, c$)

FOR j = 1 TO n

  FOR i = 1 TO j

    Compute the SSE e_{ij} for the points $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_j$.

$M[0] \leftarrow 0$.

FOR $j = 1$ TO n

  $M[j] \leftarrow \min_{1 \le i \le j} \{ e_{ij} + c + M[i-1] \}$.

  previously computed value

RETURN $M[n]$.

Per ogni coppia i, j prendo la coppia con costo: $SSE + c$ minimo e tra questi vi sommo l'ottimo del segmento fino a $i - 1$. Quindi indovino il valore i, ovvero il punto dove inizia il segmento

Analisi

Teorema

L'algoritmo DP risolve il problema dei minimi quadrati segmentati in tempo $O(n^3)$ e spazio $O(n^2)$.

dim

Bottleneck=calcolare SSE e_{ij} per ogni i, j:

$$a_{ij} = \frac{n \sum_k x_k y_k - (\sum_k x_k)(\sum_k y_k)}{n \sum_k x_k^2 - (\sum_k x_k)^2}, \quad b_{ij} = \frac{\sum_k y_k - a_{ij} \sum_k x_k}{n}$$

$O(n)$ per calcolare e_{ij}

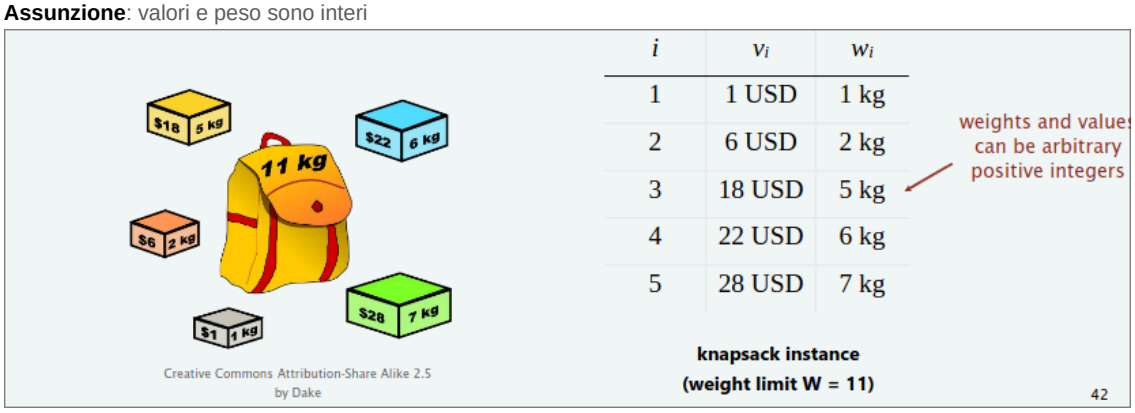
> [!IMPORTANT]
> Può essere implementato in $O(n^2)$:
> Per ogni i: pre calcola le somme comulative:
> $$\sum_{k=1}^{i} x_k, \quad \sum_{k=1}^{i} y_k, \quad \sum_{k=1}^{i} x_k^2, \quad \sum_{k=1}^{i} x_k y_k \ .$$
>
> Così è possibile calcolare e_{ij} in $O(1)$.

Knapsack Problem

Prepara lo zaino in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti presi:

- Ci sono n oggetti: l'oggetto i fornisce il valore $v_i > 0$ e pesa $w_i > 0$.
- Valore di un sottoinsieme di elementi = somma dei valori dei singoli elementi.
- Lo zaino ha un limite di peso di W.

> [!NOTE]
> Il sottoinsieme $\{1, 2, 5\}$ ha valore $35\ USD$ (e peso 10)
> Il sottoinsieme $\{3, 4\}$ ha valore $40\ USD$ (e peso 11)
> **Assunzione**: valori e peso sono interi



DP : falso inizio

$OPT(i)$ = valore ottimo del problema dello zaino con gli elementi $1, \ldots, i$.

Goal

$OPT[n]$

- **Caso 1 $OPT[i]$ non inserisce l'item i**

  OPT seleziona i migliori $\{1, 2, ..., i-1\}$

- **Caso 2 $OPT[i]$ inserisce l'item i**

  La selezione dell'elemento i non implica immediatamente che dovremo rifiutare altri item. Senza sapere quali altri elementi sono stati selezionati prima di i, non sappiamo nemmeno se abbiamo abbastanza spazio per i.

Abbiamo bisogno dunque di più informazioni, $OPT(i)$ non definisce appieno il problema che stiamo affrontando.
IN CONCLUSIONE, abbiamo bisogno di più sottoproblemi. Ovvero di tenere conto anche quanto ho spazio a disposizione.

DP: due variabili

$OPT(i, w)$= valore ottimale del problema dello zaino con gli elementi $1, \ldots, i$, soggetto a limite di peso w (la capacità disponibile)

Goal

$OPT(n, W)$

- **Caso 1 $OPT[i, w]$ non seleziona l'item i ($w_i > w$, ad esempio)**

  $OPT(i, w)$ seleziona i migliori i-1 item soggetti al limite di peso w

- **Caso 2 $OPT[i, w]$ selezione l'item i**

  Colleziona il valore v_i
  Il nuovo limite di peso è $w - w_i$
  $OPT(i, w)$ seleziona i migliori $i - 1$ oggetti sogetti al nuovo peso.

Bellman Eq.

$$OPT(i,w) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \\ OPT(i-1,w) & \text{if } w_i > w \\ \max\{\, OPT(i-1,w),\ v_i + OPT(i-1,w-w_i)\,\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Algoritmo

KNAPSACK(n, W, w_1, …, w_n, v_1, …, v_n)

FOR $w = 0$ TO W
  $M[0, w] \leftarrow 0$.

FOR $i = 1$ TO n
  FOR $w = 0$ TO W
    IF $(w_i > w)$ $M[i, w] \leftarrow M[i-1, w]$.
    ELSE $M[i, w] \leftarrow \max\{ M[i-1, w],\ v_i + M[i-1, w-w_i] \}$.

RETURN $M[n, W]$.

previously computed values

i	v_i	w_i
1	1 USD	1 kg
2	6 USD	2 kg
3	18 USD	5 kg
4	22 USD	6 kg
5	28 USD	7 kg

$$OPT(i,w) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \\ OPT(i-1,w) & \text{if } w_i > w \\ \max\{OPT(i-1,w),\ v_i + OPT(i-1,w-w_i)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

weight limit w

subset of items 1, …, i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
{ }	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
{ 1 }	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
{ 1, 2 }	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
{ 1, 2, 3 }	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
{ 1, 2, 3, 4 }	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
{ 1, 2, 3, 4, 5 }	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

OPT(i, w) = optimal value of knapsack problem with items 1, …, i, subject to weight limit w

La soluzione ottima è $\{3, 4\}$, se il valore nella stessa colonna ma riga precedente uguale significa che l'elemento i non l'ho messo, altrimenti si.

Teorema

L'algoritmo DP risolve il problema dello zaino con n oggetti e peso massimo W in tempo $\Theta(nW)$ e spazio $\Theta(nW)$.

dim

Richiede $O(1)$ passi per voce di tabella.
Sono presenti nella tabella $\Theta(nW)$ voci .
Dopo aver calcolato i valori ottimali, è possibile risalire per trovare la soluzione:
$OPT(i, w)$ prende l'elemento i se e solo se $M[i, w] > M[i–1, w]$.

> [!IMPORTANT]
> L'algoritmo dipende estremamente dall'assunzione che pesi siano interi, per i valori non è rilevante.

Pseudopolinomiale

$\Theta(nW)$ è una complessità pseudopolinomiale e non polinomiale.
Un algoritmo il cui tempo di esecuzione è polinomiale nei valori dell'input (ad esempio il più grande intero presente in l'ingresso):

- efficiente quando i numeri coinvolti nell'input sono ragionevolmente piccoli (ad esempio, nel problema dello zaino quando i w_i sono piccoli)
- non necessariamente polinomiale nella dimensione dell'input (numero di bit richiesti per rappresentano l'input)