Forma di newton del polinomio d'interpolazione

Definizione (differenze divise)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione.

- Se y è un punto in $[a, b]$ si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a y il numero $f[y] = f(y)$.
- Se $y_1, \dots, y_k \in [a, b]$ sono $k \geq 2$ punti distinti, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a $y_1, \dots, y_k$ il numero $f[y_1, \dots, y_k] = \frac{f[y_1, \dots, y_{k-2}, y_k] - f[y_1, \dots, y_{k-1}]}{y_k - y_{k-1}}$
  Esempio $k = 2$,
  $f[y_1, y_2] = \frac{f[y_1] - f[y_2]}{y_2 - y_1} = \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_2 - y_1} \quad (\text{ rapporto incrementale di } f(x) \text{ relativo ai punti } y_1, y_2)$

Teorema

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ punti distinti. Allora il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ è
$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \ (\text{ Forma di Newton di } p(x)) \ (N)$

Corollario

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ punti distinti. Allora $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ non cambia se vengono permutati i suoi $n + 1$ nodi, cioè:
$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ $\forall$ permutazione σ di $\{0, \dots, n\}$.

> $n = 2, \ \{0, 1, 2\}, \ x_0, x_1, x_2$
> $\sigma = [2, 0, 1]$
> $\sigma(0) = 2$
> $\sigma(1) = 0$
> $\sigma(2) = 1$
> $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_0, x_1]$

dim

Sia σ una fissata (generica) permutazione di $\{0, \dots, n\}$. Applicando il Teorema precedente con i nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ si deduce che il polin. d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ è dato da (N).
Applicando il Teo. con i nodi $x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ si deduce che il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ è dato da (N_σ)

$p_\sigma(x) = f[x_{\sigma(0)}] + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}](x - x_{\sigma(0)})(x - x_{\sigma(1)}) + \dots + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}](x - x_{\sigma(0)})(x - x_{\sigma(1)}) \dots (x - x_{\sigma(n-1)})$

OSS 1

Il polinomio d'interpolazione $p(x)$ non dipende dall'ordinamento dei nodi e quindi $p(x) = p_\sigma(x)$.

OSS 2

Il coefficiente direttore di $p(x)$ è $f[x_0, x_1, \dots, x_n] =$ il numero che moltiplica x^n in $p(x)$

Il coefficiente direttore di $p(x)$ è $f[x_0, x_1, \dots, x_n] =$ il numero che moltiplica x^n in $p_\sigma(x)$

Poiché $p(x) = p_\sigma(x)$ per l'oss.1, deve essere $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$

Esempio:
Scrivere in forma canonica e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x) = \sqrt{x}$, sui nodi $x_0 = 0, x_1 = 0.16, x_2 = 0.64, x_3 = 1$

Sol:
Inizia dalla forma di Newton (da cui poi otteremo la forma canonica semplicemente sviluppando i calcoli). In base al teo. precedente $p(x)$ è dato in forma di Newton dalla formula:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad \nu$$

L'unica cosa da fare è calcolare le diff. divise. A tal fine si usa la tabella delle differenze divise

$f[x_0]$
$f[x_1]$ $f[x_0, x_1]$
$f[x_2]$ $f[x_0, x_2]$ $f[x_0, x_1, x_2]$
$f[x_3]$ $f[x_0, x_3]$ $f[x_0, x_1, x_3]$ $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$f[x_0] = f(x_0) = 0$
$f[x_1] = f(x_1) = 0.4$
$f[x_2] = f(x_2) = 0.8$
$f[x_3] = f(x_3) = 1$

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0.4}{0.16} = \frac{5}{2}$

$f[x_0, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0.8}{0.64} = \frac{5}{4}$

$f[x_0, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_0]}{x_3 - x_0} = 1$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{5}{4}}{0.64 - 0.16} = -\frac{125}{41}$

$f[x_0, x_1, x_3] = \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{1 - \frac{5}{2}}{1 - 0.16} = -\frac{25}{14}$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-\frac{-25}{14} + \frac{125}{48}}{1 - 0.64} = \frac{6875}{3024}$

Sostituiamo in (ν) gli elementi trovati rossi e così otteniamo la forma di Newton di $p(x)$

$$p(x) = 0 + \frac{5}{2}x - \frac{125}{48}x(x - 0.16) + \frac{6875}{3024}x(x - 0.16)(x - 0.64)$$

Sviluppando i calcoli, possiamo riscrivere $p(x)$ in forma canonica
$p(x) = \frac{6875}{3024}x^3 - \frac{13375}{3024}x^2 + \frac{2381}{756}x$

Oss
Supponiamo di avere dei dati $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distinti.
I numeri $y_0, y_1, \ldots, y_n$ possono **sempre** essere interpretati come i valori in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ di una qualunque funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita su un qualche intervallo $[a, b]$ che contiene i nodi $x_0, \ldots, x_n$.
Dunque ha perfettamente senso parlare di forma di Newton del polinomio d'interpolazione dei dati $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$: basta infatti immaginarsi una qualche $f(x)$ tale che $f(x_i) = y_i, \ \forall i = 0, \ldots, n$ e il gioco è fatto.

Ex:
Scrivere in forma canonica e in forma di Newton, il polinomio d'interpolazione di $f(x) = cos(\frac{\pi}{2}x)\log_2(x)$, sui nodi $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 8$

Ex:
Scrivere in forma canonica, di Lagrange e di Newton il polinomio d'interpolazione dei valori $y_0 = 0, y_1 = 3, y_2 = -3$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

Algoritmo di valutazione del polinomio d'interpolazione in un punto

- Algoritmo basato sulla forma di Newton
- Algoritmo Efficiente dal punto di vista computazionale

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, siano $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ e sia $t \in \mathbb{R}$ si vuole costruire un algoritmo per calcolare $p(t)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$
Per semplicità, descriviamo l'algoritmo nel caso $n = 3$, cosicchè per la (N) è

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

L'algoritmo è composto di due parti.

$(1.)$(indipendente dal punto t in cui devo valutare $p(x)$)

Consiste nel calcolo delle differenze divise, calcolo che viene effettuato con la tabella delle differenze divise come nell'esempio precedente.

$(2.)$
Una volta calcolate le differenze divise per calcolare $p(t)$ si usa un metodo noto come algoritmo di Ruffini-Horner: si scrive $p(t)$ nella forma

$$p(t) = \underbrace{f[x_0] + (t-x_0)(\underbrace{f[x_0,x_1] + (t-x_1)(\underbrace{f[x_0,x_1,x_2] + \underbrace{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}_{h_3}(t-x_2)}_{h_2})}_{h_1})}_{h_0}$$

Si pone:

$$\left.\begin{aligned} h_3 &= f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ h_2 &= f[x_0,x_1,x_2] + (t-x_2)h_3 \\ h_1 &= f[x_0,x_1] + (t-x_1)h_2 \\ h_0 &= f[x_0] + (t-x_0)h_1 = p(t) \end{aligned}\right\} \text{Per } i = 2,1,0 \;\; h_i = f[x_0,\dots,x_i](t-x_i)h_{i+1}$$

Valutiamo il costo computazionale dell'algoritmo.

$(1.)$
Si devono calcolare $6 = \frac{n(n+1)}{2}$ elementi della tabella delle differenze divise (cioè tutti gli elementi meno quelli della prima colonna che sono noti)
Il numero $\frac{n(n+1)}{2}$ di elementi da calcolare, coincide con il numero di elementi della parte triangolare inferiore (inclusa la diagonale) di una matrice $n \times n$, ossia $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$.

Per calcolare ognuno di questi $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi, occorrono 2 sottrazioni e una divisione, per cui in totale:

- $n(n+1)$ sottrazioni
- $\frac{n(n+1)}{2}$ divisioni

$n(n+1)A + \frac{n(n+1)}{2}D$

$(2.)$
Si devono calcolare h_2, h_1, h_0 ($h_3 = h_n$ non deve essere calcolato perché è una differenza divisa già calcolata nella parte 1)

Per il calcolo di ciascun $h_i, \forall i = n-1, \ldots, 0$, sono richieste 1 sottrazione, 1 divisione e 1 moltiplicazione.

In totale:

- n sottrazioni
- n addizioni
- n moltiplicazioni

$2nA + nM$

Dunque il costo totale $c(n) = (n^2 + 3n)A + nM + (\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2})D \approx n^2 A + \frac{n^2}{2} D$