Errore (Resto) dell'interpolazione polinomiale

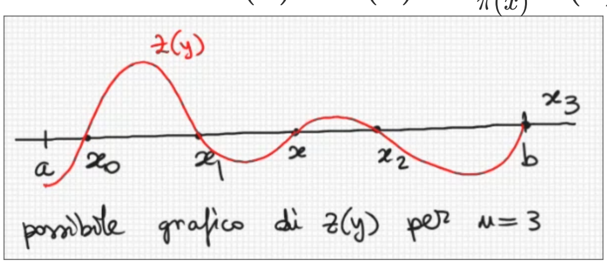
Teorema

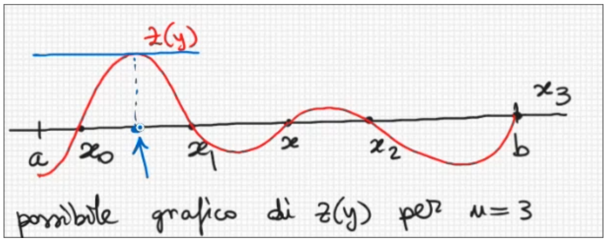
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{n+1}[a,b]$
$(\{\, f:[a,b]\to\mathbb{R}:$
$f \text{ è derivabile 2 volte su } [a,b] \text{ e } f, f', \dots, f^{n+1} \text{ sono continue su } [a,b]\,\})$ e sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sugli $n+1$ nodi distinti $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$.
Allora $\forall x\in[a,b]\ \exists \xi=\xi(x)\in(a,b)\ t.c$
$f(x)-p(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ (€)

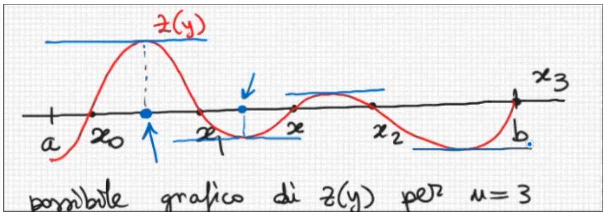
dim

Sia $x\in[a,b]$ fissato.

- ***Caso 1***: x coincide con uno dei nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$
  In tal caso posso scegliere un qualsiasi $\xi\in(a,b)$ e sono sicuro che € vale perché ottengo $0=0$ (perché il primo membro è 0 perché $p(x_i)=f(x_i)\forall i=0,\dots,n$ per definizione, mentre il 2 membro è 0 perché la parte rossa si annulla)
- ***Caso 2***: x non coincide con uno dei nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$
  Definiamo
  $\pi(y)=(y-y_0)(y-y_1)\dots(y-y_n)$
  $r(y)=f(y)-p(y)$
  $z:[a,b]\to\mathbb{R},\ z(y)=r(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y)$
  - i. proprietà: $z(y)$ è una funzione di classe C^{n+1} "ereditata" da $f(y)$
  - ii. proprietà: $z(y)$ si annulla in almeno $n+2$ punti di $[a,b]$ perché:
    - si annulla in tutti i nodi $x_0,\dots,x_n$ (esempio $z(x_0)=r(x_0)-\frac{r((x))}{\pi(x)}\pi(x_0)=f(x_0)-p(x_0)-\frac{r((x))}{\pi(x)}\pi(x_0)$ e $\pi(x_0)=0$ per def di $\pi(y)$)
    - si annulla in x: $z(x)=r(x)-\frac{r((x))}{\pi(x)}\pi(x)=0$





Per il teorema di Rolle,
$z'(y)$ si annulla in almeno $n+1$ punti di (a,b),
$z''(y)$ si annulla in almeno n punti,
$z'''(y)$ si annulla in almeno $n-1$ punti

$\vdots$

$z^{(n+1)}(y)$ si annulla in almeno 1 punto di (a,b) che chiamo ξ

Dimostriamo che questo punto ξ fa valere la formula $(€)$

$$z(y) = r(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y) = f(y) - p(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}(y-x_0)(y-x_1)\dots(y-x_n)$$

$$z^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - p^{(n+1)}(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}\pi^{(n+1)}(y) =$$
$$= f^{(n+1)}(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)! =$$
$$= 0 = z^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)!$$
$$\implies f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\pi(x)$$

> Per capire cos'è $\pi^{(n+1)}(y)$ guardiamo il caso $n=2$:
> $\pi' = (y-x_0)(y-x_1)(y-x_2) = (y^2-(x_0+x_1)y+x_0x_1)(y-x_2) =$
> $= y^3-(x_0+x_1+x_2)y^2+(x_0x_1+x_0x_2+x_1x_2)y-x_0x_1x_2$
> Dunque $\pi^{(3)}(y) = \frac{d^3}{dy^3}y^3$.
> In generale , $\pi(y)$ è **monico** e $\pi^{(n+1)}(y) = \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} = (n+1)!$

□

Esempio

Fissiamo un punto $t \in [0,1]$. Stimare l'errore che si commette approssimando $sin(t)$ con $p(t)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $sin(x)$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}$

$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$

Sol.

Applichiamo il teorema precedente
con $f(x) = sin(x),\ n = 2$

> $sin(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e con $[a, b] = [0, 1] =$
> $\text{il più piccolo intervallo che contiene i nodi } x_0, x_1, x_2 \text{ e il punto } t$

$\left|sin(t) - p(t)\right| = \left|\frac{-cos(\xi)}{6}(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)\right|\ (\xi \in (0, 1)) =$
$\left|\frac{-cos(\xi)}{6}(t)(t - \frac{\pi}{6})(t - \frac{\pi}{4})\right| =$

> $\left|\alpha\beta\right| = \left|\alpha\right| \left|\beta\right|$

$= \frac{\left|-cos(\xi)\right|}{6}\left|(t)\right| \left|(t - \frac{\pi}{6})\right| \left|(t - \frac{\pi}{4})\right| =$

$= \frac{cos(\xi)}{6}\left|(t)\right| \left|(t - \frac{\pi}{6})\right| \left|(t - \frac{\pi}{4})\right|$

$\leq \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{6}\frac{\pi}{4} \approx 0.0685$

Volendo ottenere una stima più precisa, si può procedere nel modo seguente:
$\left|sin(t) - p(t)\right| = \left|\frac{-cos(\xi)}{6}t(t - \frac{\pi}{6})(t - \frac{\pi}{4})\right| = \quad (\xi \in (0, 1))$

$= \left|\frac{cos(\xi)}{6}t(t - \frac{\pi}{6})(t - \frac{\pi}{4})\right|$

$\leq \frac{1}{6}\ max_{y \in [0,1]}\left|y(y - \frac{\pi}{6})(y - \frac{\pi}{4})\right| \quad (T)$

Calcoliamo il massimo $\left|y(y - \frac{\pi}{6})(y - \frac{\pi}{4})\right| (\omega(y))$ su $[0, 1]$. Per farlo, dobbiamo cercare tutti i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ su $[0, 1]$ e scegliere il più grande di essi in modulo.
Per un teorema dell'analisi, i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ su $[0, 1]$ si trovano o nei punti di bordo $[0, 1]$ oppure nei punti stazionari di $\omega(y)$ in $[0, 1]$, cioè quei punti di $[0, 1]$ in cui $\omega'(y)$ si annulla.

$\omega(y) = y(y - \frac{\pi}{6})(y - \frac{\pi}{4}) = y^3 - \frac{5}{12}y^2 + \frac{\pi^2}{24}y =$
$\omega'(y) = 3y^2 - \frac{5\pi}{6}y + \frac{\pi^2}{24}$

$\omega'(y) = 0 \iff y = y_{1,2} = \frac{\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{(\frac{5\pi}{6})^2 - \frac{\pi^2}{2}}}{6} = \frac{5\pi}{36} \pm \frac{\pi\sqrt{7}}{36}$

Notiamo che $y_{1,2} \in [0, 1] \implies$ sono punti stazionari di $\omega(y) \in [0, 1]$

$max_{y \in [0,1]}\left|\omega(y)\right| = max_{y \in [0,1]}\left|\omega(0), \omega(1), \omega(\frac{5\pi}{36} + \frac{\pi\sqrt{7}}{36}), \omega(\frac{5\pi}{36} - \frac{\pi\sqrt{7}}{36})\right| \leq 0,103$

sostituiamo in (T), otteniamo

$\left|sin(t)-p(t)\right| \leq \frac{1}{6}\cdot 0,103 \approx 0,0172$

Esempio

Sia $f(x)=e^{x^2}$ e sia $p(x)$ il suo polinomio d'interpolazione sui nodi $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1.$

- Fornire una stima dell'errore d'interpolazione $\left|f(x)-p(x)\right|$, cioè determinare una costante $C\ t.c\ \left|f(x)-p(x)\right| \leq C \forall x \in [0,1]$
- Stimare l'errore che si commette approssimando $\sqrt[9]{e}$ con $p(\frac{1}{3})$ senza calcolare ne $\sqrt[9]{e}$ ne $p(\frac{1}{3})$.

Sol.

1°punto

Applicando il teorema precedente con $f(x)=e^{x^2}, [a,b]=[0,1], n=2. \forall x \in [0,1]$
$(\$)\ \left|f(x)-p(x)\right| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}x(x-\frac{1}{2})(x-1)\right| \quad (\xi \in (0,1))$
Calcoliamo le derivate
$f'(x)=2xe^{x^2}$
$f''(x)=2xe^{x^2}+2x\cdot 2xe^{x^2}=(2+4x^2)e^{x^2}$
$f'''(x)=8xe^{x^2}+(2+4x^2)2xe^{x^2}=(8x^3+12x)e^{x^2}$

$\forall x \in [0,1]$
$\left|f'''(x)\right| = \left|(8x^3+12x)e^{x^2}\right| = (8x^3+12x)e^{x^2} \leq 20e$

torando a $\$$ $\forall x \in [0,1]$ abbiamo:
$|f(x)-p(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}|x||(x-\frac{1}{2})||(x-1)| \leq \frac{20e}{6}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \approx 4.530$

Stima più precisa : $\forall x \in [0,1]$ vale:
$|f(x)-p(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}|x(x-\frac{1}{2})(x-1)| \leq$

$\leq \frac{20e}{6}\ max_{y\in[0,1]}\ |y(y-\frac{1}{2})(y-1)|\ \ (\$\$)$

come prima, calcoliamo $|y(y-\frac{1}{2})(y-1)| = \omega(y)$:

$\omega(y)=y(y-\frac{1}{2})(y-1)=y^3-\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{2}y$

$\omega'(y)=3y^2-3y+\frac{1}{2}$

$\omega'(y)=0 \iff y=y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6} \in [0,1]$

$max_{y \in [0,1]} |\omega(y)| = max(|\omega(0)|, |\omega(1)|, |\omega(frac3 + \sqrt{3}6)|, \omega(frac3 - \sqrt{3}6)) = \frac{\sqrt{3}}{36}$

Sostituendo in $$ si ottiene $\forall x \in [0,1]$:
$|f(x) - p(x)| \leq \frac{20e}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \approx 0.436$

2° punto

Dobbiamo stimare

$|\sqrt[9]{e} - p(\frac{1}{3})| = |e^{\frac{2}{3}} - p(\frac{1}{3})| = |f(\frac{1}{3}) - p(\frac{1}{3})|$

siccome $\frac{1}{3}$ sta in $[0,1]$, per la stima precedente vale $|f(\frac{1}{3}) - p(\frac{1}{3})| \leq 0.436$.

In alternativa volendo ottenere una stima più precisa, applichiamo il teorema precedente direttamente con $x = \frac{1}{3}$:

$|f(\frac{1}{3}) - p(\frac{1}{3})| = |\frac{f'''(\xi)}{3!}(\frac{1}{3} - 0)(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{1}{3} - 1)| \;\; \xi \in (0,1)$

$= \frac{|f'''(\xi)|}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \leq \frac{20e}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \approx 0.336$