Problema 6.4: Dimostrare se la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ di seguito descritta è time-constructible.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{3(n-1)}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Def: Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è t. cons se esiste una T_f (trasduttore) che prendendo in input $n \in \mathbb{N}$ in unario calcola il valore $f(n)$ scrivendolo in unario sul nastro di output e $dtime(T_f, n) \in O(f(n))$

Costruisco T_f trasduttore a tre nastri con nastro N_1 nel quale verrà scritto in unario il valore n. N_2 nel quale verrà scritto $n/2$ o $(n-1)/2$ (rispettivamente con n pari o dispari). Su N_3 l'output finale.

L'insieme degli stati usati da Q è $q_p, q_d, q_0, q_2, q_3, q_4, q_F$

N_1:	⊔	1	1	1	1	1	⊔	·	·	·	·	⊔
N_2	⊔	1	1	⊔	⊔	⊔	⊔	·	·	·	·	⊔
N_3	⊔	1	1	1	1	1	1	⊔	·	·	·	⊔

Nella prima fase viene scritto il valore $n/2$ o $(n-1)/2$ in unario su N_2 nel caso n sia rispettivamente pari o dispari.

Il valore $n/2$ o $(n-1)/2$ viene calcolato in contemporanea al controllo se n sia pari o dispari:

Per ogni coppia di 1 in N_1 viene scritto un 1 su N_2.
Nel caso siano stati letti una sequenza dispari di 1 e venga successivamente letto "⊔" non verrebbe scritto nulla sul nostro N_2

$\langle q_0, (1,⊔,⊔), (1,⊔,⊔), q_D, (D,F,F) \rangle$ $\langle q_0, (⊔,⊔,⊔), (⊔,⊔,⊔), q_F, (F,F,F) \rangle$

$\langle q_D, (1,⊔,⊔), (1,1,⊔), q_P, (D,D,F) \rangle$

$\langle q_P, (⊔,⊔,⊔), (⊔,⊔,⊔), q_2, (F,S,F) \rangle$

$\langle q_D, (⊔,⊔,⊔), (⊔,⊔,⊔), q_2, (F,S,F) \rangle$

Una volta che la macchina sia entrata nello stato q_2

su N_2 vi sarà il valore di $n/2$ o $(n-1)/2$ in unario nel caso n sia, rispettivamente, pari o dispari.

La testina su N_2 è posizionata sul carattere 1 più a destra. Ora non bisognerà far altro che concatenare per tre volte la sequenza di 1 su N_2 per tre volte e scrivere la sequenza di 1 concatenata su N_3 (scorrendo il nostro N_2 per tre volte e ogni volta che viene letto "1" su N_2 viene scritto 1 su N_3. Questa fase della computazione partirà con lo stato q_2, una volta letta una prima intera sequenza di 1 la macchina entrerà nello stato q_3 e su N_3 vi sarà lo stesso contenuto di N_2. Di seguito le quintuple

$$\langle q_2, (\square, 1, \square), (\square, 1, 1), q_2, (f, s, d) \rangle$$

$$\langle q_2, (\square, \square, \square), (\square, \square, \square), q_3, (f, d, f) \rangle$$

Una volta che la macchina è entrata in q_3 significa che è stato copiato il contenuto di N_2 in N_3.
In questa fase verranno concatenati il contenuto in N_2 e N_3.
Di seguito le quintuple:

$\langle q_3, (\sqcup, 1, \sqcup), (\sqcup, 1, 1), q_3, (f, d, d) \rangle$

$\langle q_3, (\sqcup, \sqcup, \sqcup), (\sqcup, \sqcup, \sqcup), q_4, (f, s, f) \rangle$

Una volta che la macchina è entrata nello stato q_4 su N_3 vi è 2 volte il contenuto di N_2. In quest'ultima fase vengono concatenati nuovamente il contenuto del nastro N_2 e quello del nastro di N_3

$\langle q_4 (\sqcup, 1, \sqcup), (\sqcup, 1, 1), q_4 (f, s, d) \rangle$

$\langle q_4 (\sqcup, \sqcup, \sqcup), (\sqcup, \sqcup, \sqcup), q_F (f, f, f) \rangle$

Vediamo ora il numero di passi effettuati dalla computazione $T_f(n)$ per calcolare $f(n)$:

Nella prima fase, viene letto l'intero contenuto del nastro N_1 più un carattere "$\sqcup$".

Nelle successive fasi viene letto l'intero contenuto del nastro N_2 più un carattere "$\sqcup$".

Dunque nel caso n sia pari

$T(n) = n + 1 + 3\left(\frac{n}{2}\right)$ mentre nel caso dispari

$T(n) = n + 1 + 3\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

Dumpe $T(n) \in O(f(n))$.