Teorema

Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ $t.c$ $x_0, x_1, ..., x_n$ sono tutti distinti.
Allora $\exists!$ polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ $t.c$ $p(x_i) = y_i\ \forall i = 0, ..., n$

dim (2)

$\forall j = 0, .., n$ definiamo il polinomio

$L_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

I polinomi $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ sono in numero di $n+1$ e hanno tutti grado n, per cui sono $n+1$ elementi di $\mathbb{R}_n[x]$. Mostriamo che questi polinomi sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$.

> [!NOTE]
> Ricordiamo che una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$ è un insieme di $V_1(x), ..., V_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ con le proprietà seguenti:
>
> - sono linearmente indipendenti
> - generano $\mathbb{R}_n[x]$, cioè ogni $q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ si può scrivere come combinazione lineare $\alpha_1 v_1(x), \ldots, \alpha_r v_r(x)$.

Per far questo , mi basta dimostrare che essi sono linearmente indipendenti, perché essi sono nel numero giusto di $n + 1 = dim(\mathbb{R}_n[x])$.

> [!NOTE]
> Tutte le basi di $\mathbb{R}_n[x]$ hanno lo stesso numero di elementi.
> E questo numero di elementi comune a tutte le basi di $\mathbb{R}_n[x]$ si chiama dimensione di $\mathbb{R}_n[x]$.
> Poiché una base di $\mathbb{R}_n[x]$ famosa è la base canonica $1, x, x^2, \ldots, x^n$ e ha $n+1$ elementi, deduciamo che la dimensione $dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$

> [!NOTE]
> Se si hanno $n+1$ elementi in uno spazio vettoriale di dim $n+1$, allora questi elementi sono una base dello spazio se e solo se sono lin. ind.

Osserviamo che $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ hanno la seguente proprietà coincide: $\forall h, j = 0, \ldots, n$:

$$L_j(x_h) = \begin{cases} 1\ se\ h = j \\ 0\ se\ h \neq j \quad (S) \end{cases}$$

Dimostriamo ora che $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ sono lin. ind.
Sia $a_0L_0(x), a_1L_1(x) + \cdots + a_nL_n(x)$ una combinazione lineare che coincide con il polinomio nullo, cioè t.c $a_0L_0(x), a_1L_1(x) + \cdots + a_nL_n(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Allora $\forall i = 0, \ldots, n$ deve essere $a_0L_0(x), a_1L_1(x) + \cdots + a_nL_n(x) = 0$

$= a_iL_i(x_i) = a_i \implies L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ sono lin. ind e dunque una base di $\mathbb{R}_n[x]$

Definiamo il polinomio $p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \cdots + y_nL_n(x)$.

- $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$
- $\forall i = 0, \ldots, n, \; p(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \cdots + y_nL_n(x_i) = y_i$

Abbiamo dimostrato l'esistenza di un polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i
Per dimostrare che $p(x)$ è l'unico polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa la condizione $p(x_i) = y_i \; \forall i = 0, \ldots, n$, supponiamo che $q(x)$ sia un altro polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa $q(x_i) = y_i \; \forall i = 0, \ldots, n$ e dimostriamo che $q(x)$ coincide con $p(x)$.
Poiché $q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ e $L_0(x), \ldots, L_n(x)$ sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$, $\exists \beta_0, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R} \; t.c \; q(x) = \beta_0L_0(x) + \beta_1L_1(x) + \cdots + \beta_nL_n(x)$.
Poiché $q(x_i) = y_i \; \forall i = 0, \ldots, n$, deve essere che $\forall i = 0, \ldots, n$

$y_i = q(x_i) = \beta_0L_0(x_i) + \beta_1L_1(x_i) + \cdots + \beta_nL_n(x_i) = \beta_i \implies q(x) = y_0L_0 + y_1L_1(x) + \cdots + y_nL_n(x) \quad \square$.

DEF

Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distinti.
L'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \; t.c \; p(x_i) = y_i \; \forall i = 0, \ldots, n$ si chiama polinomio d'interpolazione dei dati $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ o anche polinomio d'interpolazione dei valori $y_0, \ldots, y_n$ sui nodi $x_0, \ldots, x_n$.
La prima dimostrazione del teorema precedente ci dice che $p(x)$ si scrive in ***FORMA CANONICA*** come
$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [V(x_0, x_1, \ldots, x_n)]^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

e $[V(x_0, x_1, \dots\ x_n)] = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x1 & {x_1}^2 & \dots & {x1}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^n \end{bmatrix}$

La seconda dimostrazione del teorema precedente ci dice che $p(x)$ si scrive in ***FORMA DI LAGRANGE*** come

$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$ dove $\forall j = 0, \dots, n$ $(\$)$

$L_j(x) = j\text{-esimo}$ polinomio di lagrange relativo ai nodi $x_0, x_1, \dots, x_n = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$.

Se $y_0, \dots, y_n$ sono i valori nei punti $x_0, \dots, x_n$ di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, cioè se $y_i = f(x_i)\ \forall i = 0, \dots, n$, allora l'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]\ t.c\ p(x_i) = f(x_i)\ \forall i = 0, \dots, n$ si chiama anche polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$

Esempio

Scrivere in forma canonica e in forma di Lagrange il polinomio di interpolazione di $sin(x)$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}$

Soluzione

Si inizia dalla forma di Lagrange $(\$)$, della quale si ha immediatamente che il polinomio d'interpolazione di $sin(x)$ su x_0, x_1, x_2 è

$p(x) = sin(x_0)L_0(x) + sin(x_1)L_1(x) sin(x_2)L_2 =$

$= sin(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + sin(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + sin(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} =$

$= \frac{1}{2}\frac{x(x-\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{6}\cdot\frac{-\pi}{12}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{12}} =$

$= \frac{1}{2}\frac{x(x-\frac{\pi}{4})}{-\frac{\pi^2}{72}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi^2}{48}}$

Un controllo diretto permette di verificare che effettivamente:

$$p(x_0) = sin(x_0) = 0$$

$$p(x_1) = sin(x_1) = \frac{1}{2}$$

$$p(x_2) = sin(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per scrivere $p(x)$ in forma canonica, sviluppiamo i calcoli a partire dalla forma di Lagrange:
$p(x) = \frac{-24\sqrt{2}-36}{\pi^2}x^2 + \frac{9-4\sqrt{2}}{\pi}x$

> [!NOTE]
> Risolvendo $V(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

, viene $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-24\sqrt{2}-36}{\pi^2} \\ \frac{9-4\sqrt{2}}{\pi}x \end{bmatrix}$