Il problema IS è NP-completo

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un sottoinsieme di nodi tale che nessuna coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco è un insieme indipendente per G.
Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un insieme
indipendente per G di almeno k nodi?

- $\mathcal{I}_{IS} = \{ \langle G = (V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato e } k \text{ un intero positivo } \}$.
- $\mathcal{S}_{IS}(G, k) = \{ I \subset V \}$.
- $\pi_{VC}(G, k, \mathcal{S}_{IS}(G, k)) = \exists I \in \mathcal{S}_{IS}(G, k) : |I| \geq k \land \forall (u, v) \in I[(u, v) \notin E]$.

Il primo passo, per dimostrare la $\mathbf{NP}$-completezza di IS, è dimostrare che $IS \in \mathbf{NP}$.

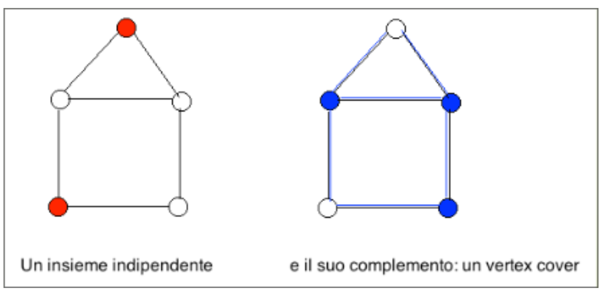
Dimostriamo che $IS \in \mathbf{NP}$ mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale:

- Un certificato è un sottoinsieme $I \ di \ V$
- per verificare che I è effettivamente un insieme indipendente per G, ossia che I soddisfa $\pi_{VC}(G, k, \mathcal{S}_{IS}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascuna coppia di nodi $u, v \in I$ e verificare che
$(u, v) \notin E$. Perciò, verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|2|E|)$

Dimostriamo che IS è completo per $\mathbf{NP}$ riducendo polinomialmente VC a IS, ossia, dimostriamo che $VC \leq IS$. Questa volta, la riduzione è poco più che una osservazione, perché è sufficiente osservare che
un sottoinsieme $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{V}$ è un insieme indipendente per $\mathbf{G}$ se e soltanto se $\mathbf{V'} = \mathbf{V} - \mathbf{I}$ è un vertex cover per $\mathbf{G}$

Dato un grafo $G = (V, E)$, un sottoinsieme $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G se e soltanto se $V' = V - I$ è un vertex cover per G

- se $I \subseteq V$ è un insieme indipendente per G allora, per ogni arco $(u, v) \in E$ accade che $u \notin I$ oppure $v \notin I$ - ossia, $u \in V'$ oppure $v \in V'$, cioè V' è un vertex cover per G
- Se $V' \subseteq V$ è un vertex cover per G allora, per ogni arco $(u, v) \in E$ accade che $u \in V'$ oppure $v \in V'$ - ossia, $u \notin I$ oppure $v \notin I$, cioè I è un insieme indipendente per G



Dimostriamo che IS è completo per $\mathbf{NP}$ riducendo polinomialmente VC a IS, attraverso l'osservazione precedente:

Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G = (V, E), |V| - k \rangle$ di IS, in cui il grafo rimane invariato!
G ha un vertex cover $V' \ di \ \leq k$ nodi se e soltanto se G ha un insieme indipendente $I = V - V' \ di \ \geq |V| - k$ nodi e calcolare $\langle G = (V, E), |V| - k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E), k \rangle|$.