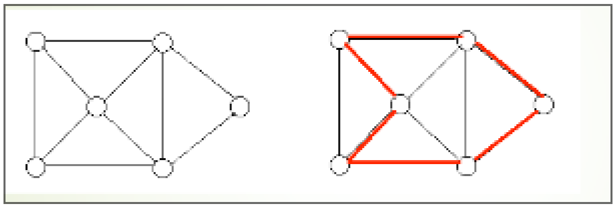
Il problema HC è NP-completo

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un ciclo in G che passa una ed una sola volta attraverso ogni nodo di G è un **ciclo hamiltoniano** in G



- $\mathcal{I}_{HC} = \{ \langle G = (V, E) \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \}.$
- $\mathcal{S}_{HC}(G, k) = \{ \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle : \text{ per } i = 1, ..., n, u_i \in V \ \wedge \ n =\mid V \mid \}.$
- $\pi_{HC}(G, k, \mathcal{S}_{HC}(G, k)) = \exists \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle \in \mathcal{S}_{HC}(G, k) : (u_1, u_n) \in E \ \wedge \ \forall i = 1, ..., n-1 [(u_i, u_{i+1}) \in E] \ \wedge \ \forall i, j = 1, ..., n \ e \ i \neq j \ [u_i \neq u_j].$

HC è $\mathbf{NP}$-completo, la dimostrazione è omessa.

Il problema HP è NP-completo

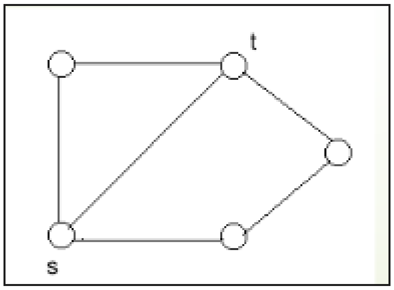
Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed una coppia di nodi $s, t \in V$, esiste un **percorso hamiltoniano** da s a t in G, ossia un percorso fra s e t che passa una e una sola volta attraverso ciascun nodo di G?

- $\mathcal{I}_{HC} = \{ \langle G = (V, E), s, t \rangle : G \text{ è un grafo non orientato } \ \wedge \ s \in V \ \wedge \ t \in \}.$
- $\mathcal{S}_{HC}(G, k) = \{ \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle : \text{ per } i = 1, ..., n, u_i \in V \ \wedge \ n =\mid V \mid \}.$
- $\pi_{HC}(G, k, \mathcal{S}_{HC}(G, k)) = \exists \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle \in \mathcal{S}_{HC}(G, k) : s = u_1 \ \wedge \ t = u_n \ \wedge \ \forall i = 1, ..., n-1 [(u_i, u_{i+1}) \in E] \ \wedge \ \forall i, j = 1, ..., n, \ e \ i \neq j \ [u_i \neq u_j].$

Dimostriamo che $HP \in \mathbf{NP}$ mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale.
Un certificato è una sequenza di nodi $S = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$. Verifichiamo che S è effettivamente un percorso hamiltoniano da s a t, ossia che S soddisfa $\pi_{HC}(G, k, \mathcal{S}_{HC}(G, k))$, in tempo $O(|E||V| + |V|^2)$
ossia, in tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E), s, t \rangle|$

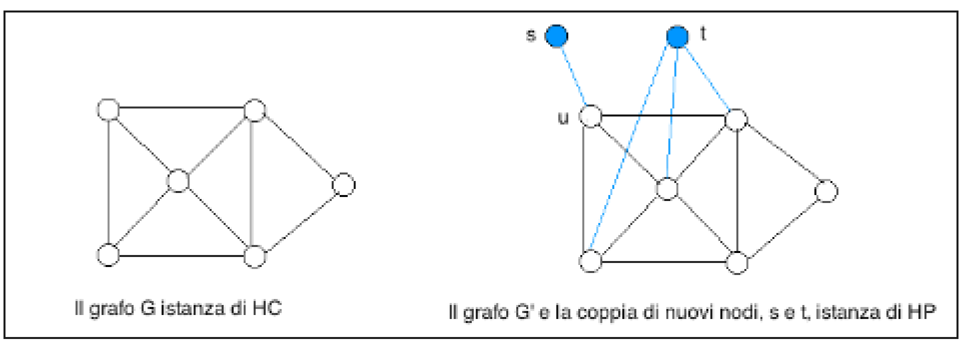
HC $\implies$ HP

Dimostriamo che HP è completo per $\mathbf{NP}$ riducendo polinomialmente HC a HP. In effetti, i due problemi HP e HC si assomigliano moltissimo, però la loro somiglianza potrebbe trarre in inganno.
Ad una prima occhiata, potremmo pensare di trasformare una istanza $\langle G = (V, E) \rangle$ di HC, nell'istanza $\langle G = (V, E), s, t \rangle$ di HP, in cui s e t sono due qualsiasi nodi in V tali che $(s, t) \in E$ pertanto, potremmo pensare, se c'è un ciclo hamiltoniano in G, esso passa sicuramente sia per s che per t, e, per di più, s e t sono collegati da un arco, ma non funziona!



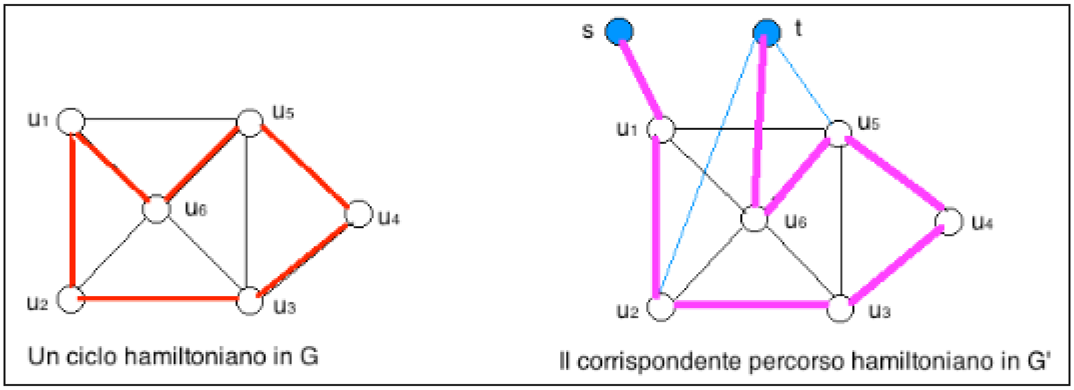
Il grafo contiene un ciclo hamiltoniano ma non contiene un percorso fra s e t che passi una e una sola volta per ogni nodo

Dimostriamo che HP è completo per $\mathbf{NP}$ riducendo polinomialmente HC a HP.
Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G' = (V', E'), s, t \rangle$ di HP, dove s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s, t \notin V$ e $V' = V \cup \{ s, t \}$ ed otteniamo E' scegliendo un nodo $u \in V$, collegando s ad u e collegando t a tutti i nodi che in G sono adiacenti ad u: $E' = E \cup \{ (s, u) \} \cup \{ (t, x) : (u, x) \in E \}$



Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G' = (V', E'), s, t \rangle$ di HP, dove s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s, t \notin V, V' = V \cup \{ s, t \}, E' = E \cup (s, u) \cup \{ (t, x) : (u, x) \in E \}$.
Se G contiene un ciclo hamiltoniano $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$, scegliamo $u_1 = u$ (il nodo al quale è collegato

s),poiché $(u_i, u_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$, allora $\langle s, u_1, u_2, \ldots, u_n, t \rangle$ è un percorso hamiltoniano in G'



HC $\Longleftarrow$ HP

Trasformiamo un'istanza $\langle G = (V, E) \rangle$ di HC nell'istanza $\langle G' = (V', E'), s, t \rangle$ di HP, dove s e t sono due nuovi nodi, ossia, $s, t \notin V, V' = V \cup \{ s, t \}, E' = E \cup \{ (s, u) \} \cup \{ (t, x) : (u, x) \in E \}$.

Se G' contiene un **percorso hamiltoniano** $\langle s, u_1, u_2, \ldots, u_n, t \rangle$, poiché $(u_i, u_{i+1}) \in E$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ e $u_i \neq u_j$ per $i \neq j$, e poiché $(u_n, u_1) \in E$ – per costruzione di G', in quanto t è stato collegato a tutti i nodi adiacenti a u_1 in G, allora $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ è un ciclo hamiltoniano in G.

Infine, costruire $\langle G' = (V', E'), s, t \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E) \rangle|$.

Questo completa la prova che $HC \leq HP$. E che HP è $\mathbf{NP}$-completo.