Interpolazione polinomiale

Esistenza e unicità del polinomio d'interpolazione (forma canonica polin. d'interpolazione, forma di Lagrange).

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di cui sono noti i valori $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ in $n+1$ punti distinti $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$.

Si sceglie una classe C di funzioni definite su $[a, b]$ e valori in $\mathbb{R}$ e si vuole approssimare la funzione $f(x)$ con una funzione $g(x)$ della classe C tale che $g(x_0) = f(x_0), g(x_1) = f(x_1), ..., g(x_n) = f(x_n)$ ($g(x_i) = f(x_i)\ \forall i = 0, ..., n$).

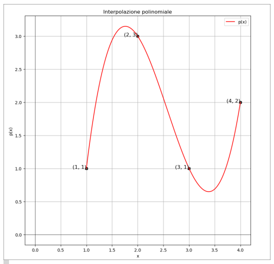
La scelta più comune per la sua semplicità è quella di prendere:

$$C = \mathbb{R}_n[x] = \text{spazio vettoriale dei polinomi di grado} \leq n = \{\, a_0 + a_1 x + a_2 + x^2, ..., a_n + x^n : a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \,\}$$

Con questa scelta, siamo sicuri che $\exists!\ g \in \mathbb{R}_n[x]\ t.c\ g(x_i) = f(x_i)\ \forall i = 0, ..., n$

Teorema

$$\text{Siano } (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2\ t.c\ x_0, x_1, ..., x_n \text{ sono tutti distinti.}$$
$$\text{Allora } \exists! \text{ polinomio } p(x) \in \mathbb{R}_n[x]\ t.c\ \ p(x_i) = y_i\ \forall i = 0, ..., n$$



> [!NOTE]
> $$\text{Per } n = 3 : \exists!\ p(x) \in \mathbb{R}_3[x]\ \ t.c$$
> $$p(x_0) = y_0,\ p(x_1) = y_1,\ p(x_2) = y_2,\ p(x_3) = y_3$$

> [!NOTE]
> Il teorema implica che , data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ punti distinti, $\exists!\ g(x) \in \mathbb{R}_n[x]\ t.c\ g(x_i) = f(x_i)\ \forall i = 0, ..., n$, infatti applicando il teorema con $y_i = f(x_i)\ \forall i = 0, ..., n$, si ottiene che $\exists! p(x) \in R_n[x]\ t.c\ p(x_i) = f(x_i)\ \forall i = 0, ..., n$

Dim (1)

Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ un polinomio in $R_n[x]$.
$p(x)$ soddisfa la proprietà sopra indicata in blu se e solo se:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + ... + a_n {x_0}^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + ... + a_n {x_1}^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + ... + a_n {x_n}^n = y_n \end{cases}$$

cioè se e solo se il suo vettore dei coefficienti $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)^T$ soddisfa il sistema lineare precedente

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \dots & {x_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (S)$$

> [!NOTE]
> La prima matrice si denota con $V(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$, matrice di Vandermonde sui nodi $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$

Adesso dimostriamo che $V(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ è invertibile perché dimostreremo che:

$$det[V(x_0,x_1,x_2,...,x_n)] = \begin{cases} 1, se\ n=0 \\ \prod_{i,j=0\ ,\ j<i}^{n}(x_i-x_j) = (x_1-x_0)\cdot(x_2-x_1)(x_2-x_0)\cdot(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_3-x_0), se\ n\geq 1 \end{cases} \quad (\star)$$

e quindi $det[V(x_0,x_1,x_2,...,x_n)] \neq 0$ poiché per ipotesi i nodi $x_0,x_1,...,x_n$ sono tutti distinti.
Questo permette di concludere che (S) ha un'unica soluzione, data da:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \dots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \dots & {x_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \dots & {x_n}^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\alpha)$$

e dunque $\exists!\ p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa la proprietà in blu e tale $p(x)$ è precisamente il polinomio di $\mathbb{R}_n[x]$ che ha come vettore dei coefficienti quello dato dalla (α).
Per concluedere la dimostrazione, resta solo da dimostrare $(\star)$ e lo facciamo per $n=3$, tanto la dimostrazione è la stessa per n generico.

Dim di $(\star)$ per $n=3$. $\forall i=1,...,3$ definisco
$d_i = det[V(x_0,...,x_i)]$. Il nostro obiettivo è calcolare d_3.

$$d_3 = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & {x_0}^3 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & {x_1}^3 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & {x_2}^3 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & {x_3}^3 \end{bmatrix} =^{C[4]\to C[4]-x_3C[3]}= \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & {x_0}^3 - x_0^2x_3 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & {x_1}^3 - x_1^2x_3 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & {x_2}^3 - x_2^2x_3 \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & 0 \end{bmatrix} =^{C[3]\to C[3]-x_3C[2]}= \begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 - x_0x_3 & {x_0}^2(x_0-x_3) \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 - x_1x_3 & {x_1}^2(x_1-x_3) \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 - x_2x_3 & {x_2}^2(x_2-x_3) \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} =^{C[2}$$

> [!NOTE]
> Se in un determinante si sostituisce una riga (o colonna) con se stessa più un multiplo scalare di un'altra riga (o colonna), allora il determinante non cambia

Sviluppiamo con La Place sull'ultima riga

$$(-1)^{n=3}\cdot \begin{vmatrix} x_0-x_3 & x_0(x_0-x_3) & {x_0}^2(x_0-x_3) \\ x_1-x_3 & x_1(x_1-x_3) & {x_1}^2(x_1-x_3) \\ x_2-x_3 & x_2(x_2-x_3) & {x_2}^2(x_2-x_3) \end{vmatrix} = (\text{linearità del determinante rispetto la prima riga (o colonna)})(-1)^{n=3}(x_0-x_3)(x_1$$

$$= (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)d_2$$
$$= (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdot(x_2-x_0)(x_2-x_1)d_1$$
$$= (x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdot(x_2-x_0)(x_2-x_1)\cdot(x_1-x_0)$$

Abbiamo dimostrato $(\star)$ $\square$