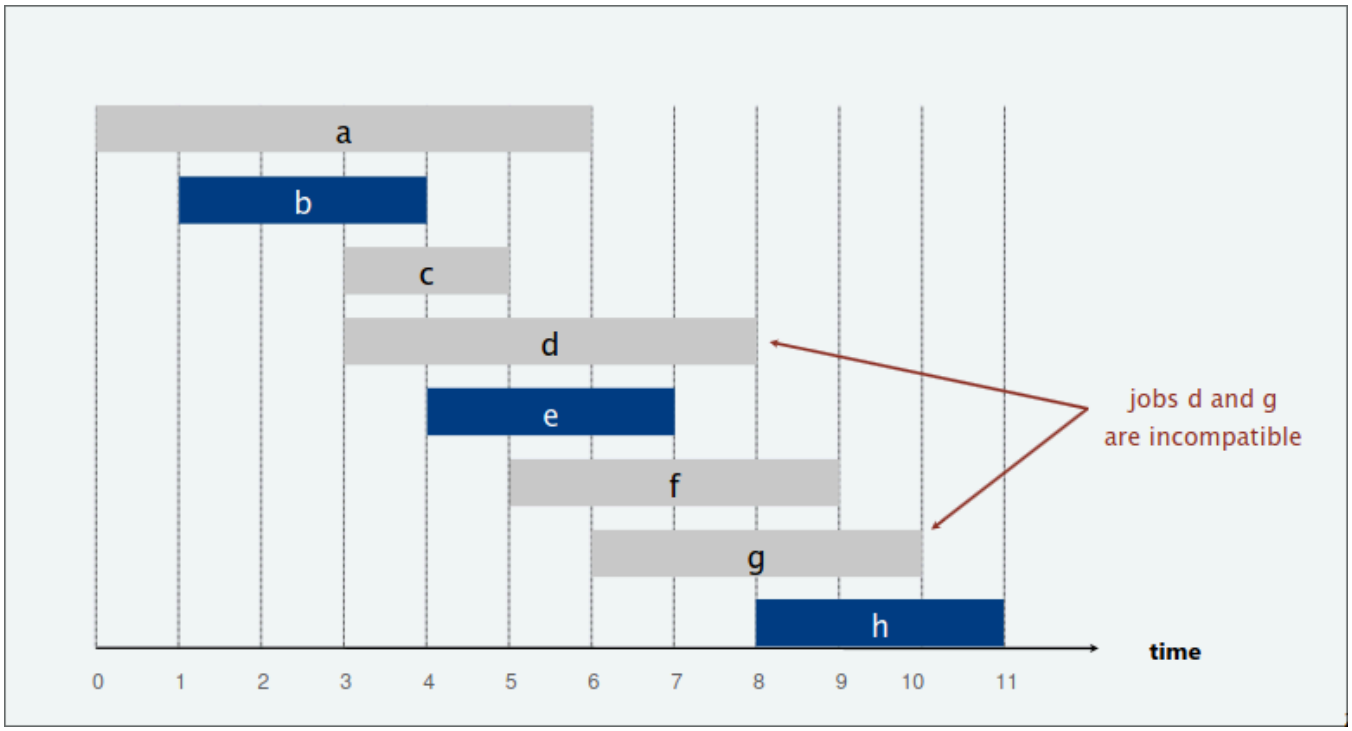
Interval Scheduling

Job j inizia al tempo s_j e finisce al tempo f_j. Due job sono detti **compatibili** se essi non si sovrappongono.

Obiettivo

Trovare il massimo sottoinsieme di job compatibili



INPUT

1. Un insieme di n intervalli $I_1, \ldots, I_n$
2. L'intervallo I_i inizia al tempo s_i e finisce al tempo s_j

SOLUZIONE POSSIBILE

1. Un sottoinsieme S di intervalli compatibili

MISURA DA OTTIMIZZARE

1. Numero di intervalli schedulati

Algoritmi Greedy

Considera i jobs in un qualsiasi ordine e prende ogni job disponibile compatibile con quelli già presi.

- **Tempo di inzio** $[X]$

  Considera i job in ordine crescente di tempo di inizio

- **Tempo di fine** $[\circledcirc]$

  Considera i job in ordine crescente di tempo di fine

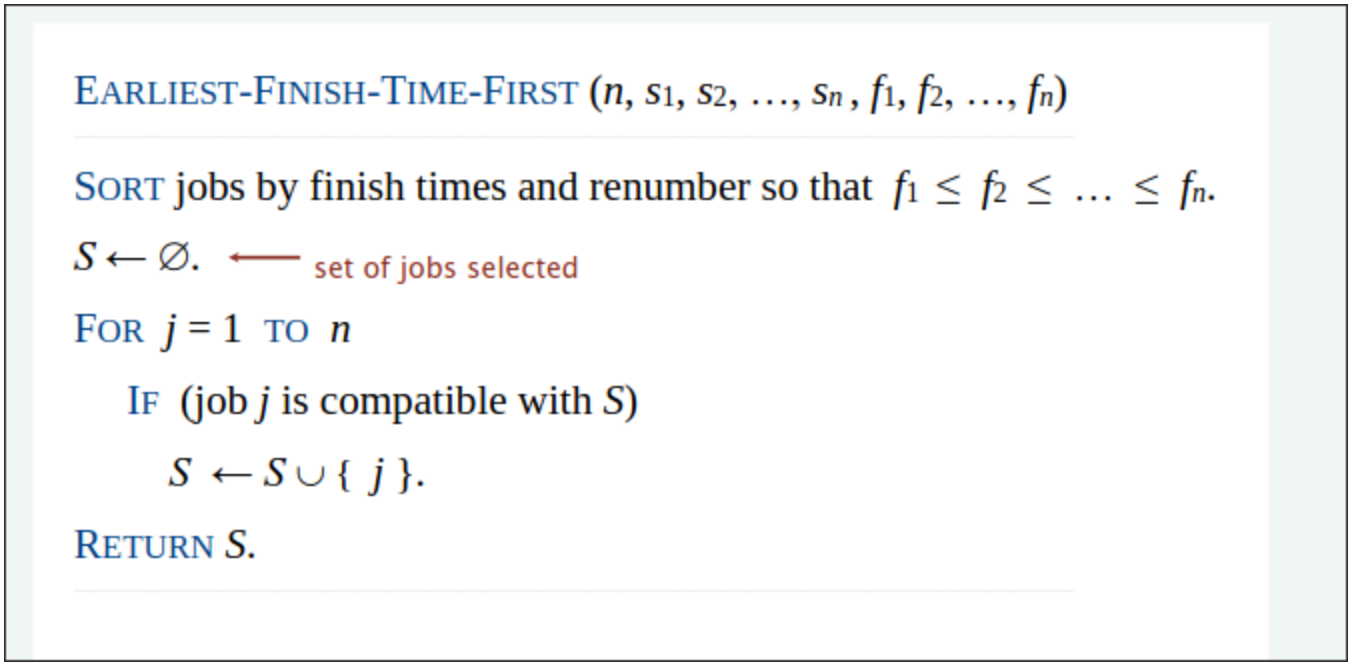
- **Intervallo più corto** $[X]$

  Considera i job in ordine crescente di tempo di fine - tempo d'inizio

- **Minori conflitti** $[X]$

  Per ogni job j, conta il numero di jobs c_j in conflitto con j. Schedula in ordine crescente di c_j

Algoritmo tempo di fine



Complessità : $O(nlogn)$

Analisi algoritmo

Sia $i_1, \dots, i_k$ l'insieme di jobs scelti dal greedy (Tempo di fine)
Sia $j_1, \dots, j_m$ l'insieme di jobs scelti dall'ottimo (Tempo di fine)

> Note
>
> Denotiamo con $f(i_r)$ il tempo di fine del job i_r

Lemma

Per ogni $r = 1, 2, \dots, k$ noi abbiamo $f(i_r) \leq f(j_r)$

dim

- $r = 1$ Ovvio. Osserviamo che il primo job dell'algoritmo greedy finisce prima del primo task del ottimo. Questo perchè i job sono ordinati in modo crescente per tempo finale, e il greedy va a scegliere il più piccolo in assoluto.
- $r > 1$ Supponiamo vera per $r - 1$ la proprietà $f(i_{r-1}) \leq f(j_{r-1})$. Adesso l'ottimo sceglie il job j_r , che a sua volta è compatibile con i job selezionati dal greedy. Quindi il greedy, avendo i task ordinati per finish time, per forza andrà a guardare task con $f(i_r) \leq f(j_r)$ andando a selezionare o uno che finisce prima, quindi $f(i_r)$ oppure proprio $f(j_r)$.

Teorema

L'algoritmo è **ottimo**.

dim

Sia $i_1, \dots, i_k$ l'insieme di jobs scelti dal greedy (Tempo di fine)
Sia $j_1, \dots, j_m$ l'insieme di jobs scelti dall'ottimo (Tempo di fine)

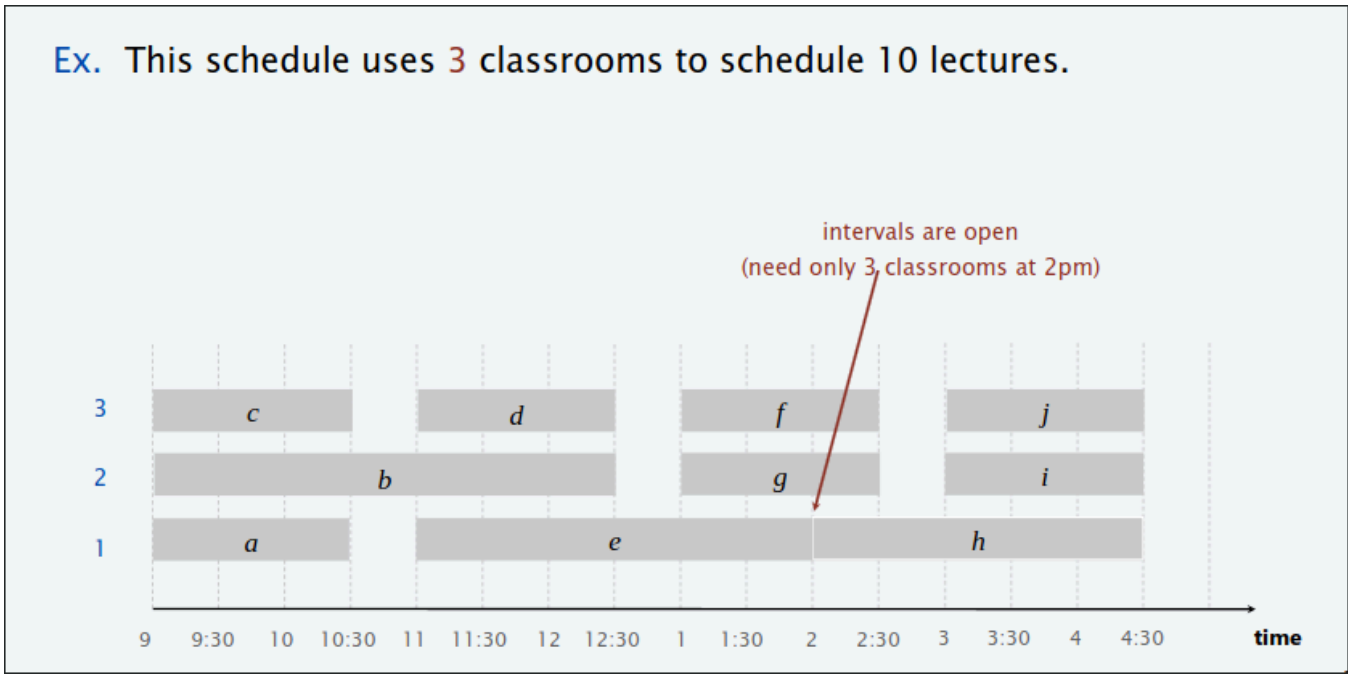
Assumiamo che il greedy non sia ottimale, dunque $m > k$, applicando il Lemma con $r = k$, abbiamo che $f(i_k) \leq f(j_k)$. Siccome $m > k$, significa che l'algoritmo ottimo sceglie un job $k + 1$ che inizia dopo la fine di j_k ma anche dopo i_k (per il Lemma). Di conseguenza il job j_{k+1} è compatibile anche con i job selezionati dal greedy, dunque il greedy sceglierebbe anche il job j_{k+1} ottenendo un insieme di job ottimo.

Interval Partitioning

Lezione j inizia al tempo s_j e finisce al tempo f_j

Obiettivo

Trovare il minimo numero di classi per schedulare tutte le lezioni cosicché due lezioni non si effettuino nello stesso momento nella stessa classe.



INPUT

1. Un insieme di n intervalli $I_1, \ldots, I_n$
2. L'intervallo I_i inizia al tempo s_i e finisce al tempo s_j

SOLUZIONE POSSIBILE

1. Una partizione di intervalli in sottoinsiemi (classi) $C_1, \ldots, C_d$ tale che ogni C_i contiene esclusivamente intervalli compatibili

MISURA DA OTTIMIZZARE

1. Numero di classi

Algoritmi Greedy

Considera le lezioni in un qualsiasi ordine. Assegna ogni lezione ad una classe disponibile. Alloca una nuova classe, se nessuna è disponibile

- **Tempo di inzio** $[\circledcirc]$

  Considera le lezioni in ordine crescente di tempo di inizio

- **Tempo di fine** $[X]$

  Considera le lezioni in ordine crescente di tempo di fine

- **Intervallo più corto** $[X]$

  Considera le lezioni in ordine crescente di tempo di fine - tempo d'inizio

- **Minori conflitti** $[X]$

  Per ogni lezione j, conta il numero di lezioni c_j in conflitto con j. Schedula in ordine crescente di c_j

Algoritmo tempo di inizio

EARLIEST-START-TIME-FIRST (n, s_1, s_2, …, s_n , f_1, f_2, …, f_n)

SORT lectures by start times and renumber so that $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$.

$d \leftarrow 0$. ⟵ number of allocated classrooms

FOR $j = 1$ TO n

  IF (lecture j is compatible with some classroom)

    Schedule lecture j in any such classroom k.

  ELSE

    Allocate a new classroom $d + 1$.

    Schedule lecture j in classroom $d + 1$.

    $d \leftarrow d + 1$.

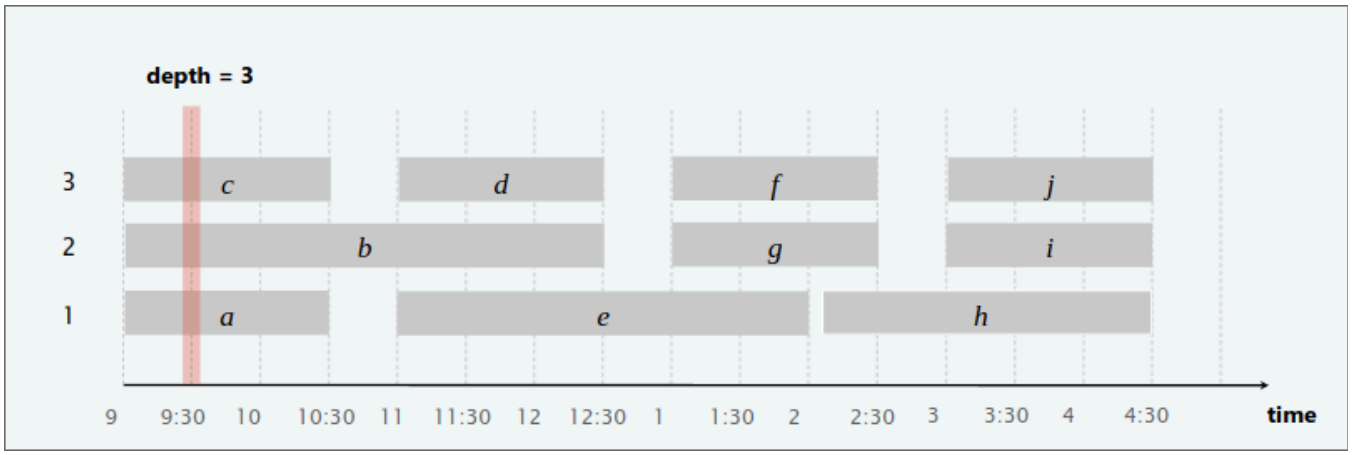
RETURN schedule.

> **Note**
>
> Può essere implementato in $O(nlogn)$:
> Ordina in base al tempo d'inizio, e memorizza le classi in una **coda con priorità** (key=tempo di fine dell'ultima lezione)
>
> - Per allocare una nuova classe fai una **INSERT**
> - Per schedulare una lezione j in una classe k, fai una **INCREASE KEY** alla classe k di f_j
> - Per determinare se una lezione j è compatibile con una qualsiasi classe, confronta s_j con **FIND-MIN**.
>
> Il numero totale di operazioni sulla coda con priorità è $O(n)$; ogniuna richiede tempo $O(logn)$.

Un lowerbound per la soluzione ottima

> Important
>
> La **profondità** di un insieme di intervalli aperti è il massimo numero di intervalli che contengono un qualsiasi punto dato.

Il numero di classi necessario è maggiore uguale alla profondità



> Important
>
> L'algoritmo non schedula mai due lezioni incompatibili nella stessa classe

Teorema

L'algoritmo è **ottimo**

dim

Sia d il numero di classi allocate dall'algoritmo.
La classe d è stata aperta perché avevamo bisogno di schedulare una lezione j incompatibile con una qualsiasi lezione in una delle $d-1$ classi.
Così ci sono d lezioni e ogniuna finisce dopo s_j.
Dato che abbiamo ordinato in base al tempo d'inizio, ogniuno di questi intervalli iniziano prima di s_j. Dunque abbiamo d intervalli che si sovrappongono al tempo $s_j + \epsilon$. Di conseguenza si usano al più d classi.