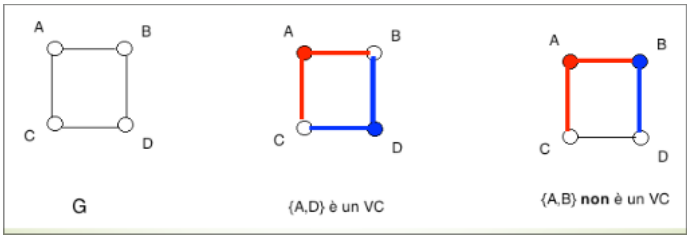
Il problema VC è NP-completo

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e sia $V' \subseteq V$;

V' è un vertex cover per G se ogni arco in E ha un estremo in V'.
Il problema $VERTEX\ COVER$ consiste nel decidere, dati un grafo $G = (V, E)$ e un intero k, se G contiene un vertex cover di cardinalità $\leq k$.
Il problema $VERTEX\ COVER\ (VC)$ pu`o essere formalizzato nella maniera seguente:

- $\mathcal{I}_{VC} = \{\ \langle G = (V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato e } k \text{ un intero positivo }\ \}$.
- $\mathcal{S}_{VC}(G, k) = \{\ V' \subset V\ \}$.
- $\pi_{VC}(G, k, \mathcal{S}_{VC}(G, k)) = \exists V' \in \mathcal{S}_{VC}(G, k) : |V'| \leq k \wedge \forall (u, v) \in E[v \in V' \vee u \in V']$.



Un certificato per una istanza $x = \langle G = (V, E), k \rangle$ di $VERTEX\ COVER$ è un sottoinsieme V' dei nodi di G. Poichè è possibile verificare se un certificato V' soddisfa il predicato $\rho_{VC} = |V'| \leq k \wedge \forall (u, v) \in E[u \in V' \vee v \in V']$ in tempo $O(|E||V|)$, questo prova che $VC \in \mathbf{NP}$

Per dimostrarne la completezza, mostriamo una riduzione polinomiale da $3SAT$, ossia, una funzione $f : \mathcal{I}_{3SAT} \rightarrow \mathcal{I}_{VC}$,
contenuta in $\mathbf{FP}$, tale che, per ogni $\phi \in \mathcal{I}_{3SAT}$, $\phi \in 3SAT$ se e solo se $f(\phi) \in VC$.

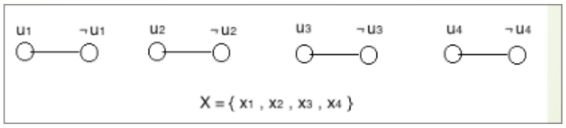
Per individuare f utilizzeremo, una tecnica cui faremo spesso riferimento anche in seguito quando vogliamo ridurre un problema A ad un problema B: ad ogni struttura dell'istanza di A faremo corrispondere una struttura dell'istanza di B, in modo che strutture dello stesso genere presenti nell'istanza di A corrispondano a strutture dello stesso genere dell'istanza di B.
A tali strutture daremo il nome di **gadget**.

Le strutture che compongono un'istanza $\langle X, g \rangle$ di $3SAT$ sono di due tipi:

- Variabili
- Clausole

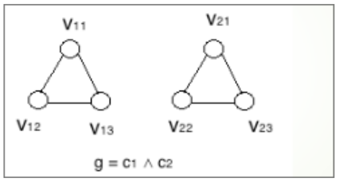
Trasformiamo ciascuna variabile in X in un arco (**gadget variabile**):

- Il gadget-variabile della variabile x_i è l'arco $(u_i, \neg u_i)$
- gadget-variabile associati a variabili diverse non hanno nodi in comune



Scegliendo un nodo in ogni gadget-variabile otteniamo un VC di questa porzione del grafo che stiamo costruendo:

- Se in un gadget-variabile non scegliamo alcun nodo, non copriamo quell'arco!
- Allora, un VC minimo di questa porzione di grafo ha cardinalità $|X|$
- ossia, $|X|$ nodi sono sufficienti, ma con meno di $|X|$ nodi qualche arco rimane scoperto



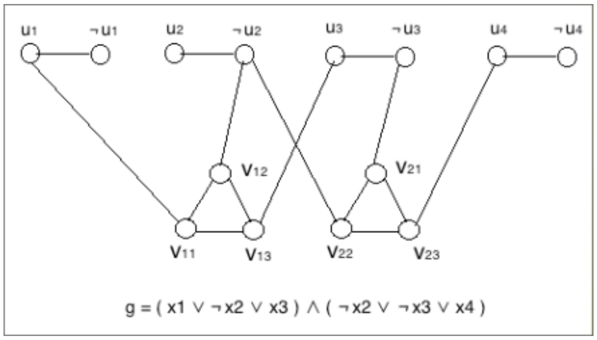
Trasformiamo ciascuna clausola in g in un ciclo di 3 nodi – ossia, il
gadget-clausola è C_3:

- Il gadget-clausola della clausola c_j è la terna di archi $(v_{j1}, v_{j2}), (v_{j2}, v_{j3}), (v_{j3}, v_{j1})$
- Gadget-clausola associati a clausole diverse non hanno nodi in comune
- Gadget-clausola e gadget-variabile non hanno nodi in comune

Scegliendo due nodi in ogni gadget-clausola otteniamo un VC di questa porzione del grafo che stiamo costruendo:

- Se in un gadget-clausola scegliamo meno di due nodi, non copriamo quel gadget!
- Allora, un Vertex Cover minimo di questa porzione di grafo ha cardinalità $2|g| = 2m$
- Ossia, $2m$ nodi sono sufficienti, ma con meno di $2m$ nodi qualche arco rimane scoperto

Ora dobbiamo collegare i gadget-clausola con i gadget-variabile. Per farlo utilizziamo il modo in cui sono composte le clausole: colleghiamo ciascun nodo in ciascun gadget-clausola al nodo-variabile che gli corrisponde (ad esempio, se $c_j = (x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3)$ creiamo gli archi "**obliqui**" $(v_{j1}, u_1), (v_{j2}, \neg u_2), (v_{j3}, u_3))$



E così, abbiamo costruito il grafo G corrispondente a $\langle X, g \rangle$.
Per completare l'istanza $\langle G, k \rangle$ di VC corrispondente a $\langle X, g \rangle$ scegliamo $k = |X| + 2|g| = n + 2m$. Banalmente, costruire $\langle G, k \rangle$ da $\langle X, g \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle X, g \rangle|$.

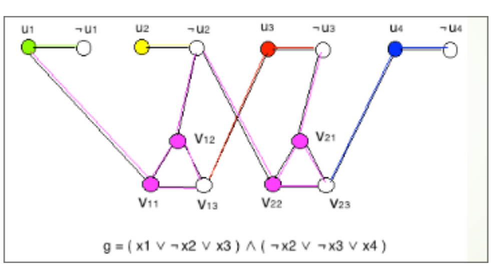
Resta da mostrare che g è soddisfacibile se e soltanto se G ha un vertex cover di al più $k = n + 2m$ nodi.
Prima di procedere con questa dimostrazione, ricordiamo che, n nodi sono necessari per coprire gli archi di tutti i gadget-variabile e $2m$ nodi sono necessari per coprire gli archi di tutti i gadget-clausole perciò, almeno $k = n + 2m$ nodi sono necessari per coprire gli archi di G.
Resta da far vedere che $k = n + 2m$ nodi sono sufficienti a coprire gli archi di G se e soltanto se g è soddisfacibile

Se g è soddisfacibile

Costruiamo l'insieme V' nel modo seguente:

- Sia $a : X \to \{vero, falso\}$ una assegnazione di verità che soddisfa g:
    i. Inseriamo in V' n nodi dei gadget-variabile: per $i = 1, \dots, n = |X|$, inseriamo in V' il nodo u_i se $a(x_i) = vero$, il nodo $\neg ui$ se $a(x_i) = falso$
    ii. per ogni $j = 1, \dots, m$, scegliamo un letterale $\ell_{jh}(h = 1,\ o\ h = 2,\ o\ h = 3)$ nella clausola c_j al quale è stato assegnato valore vero da a e inseriamo in V' i due nodi del gadget-clausola associato a c_j che non sono v_{jh}
        - ad esempio, se $a(x3) = vero\ e\ c_1 = (x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3)$ e scegliamo ℓ_{j3}, allora inseriamo in V' i nodi $v_{11}\ e\ v_{12}$
- Ogni arco nei gadget-variabile ha un estremo in V'
- per ogni $j = 1, \dots, m$, V' contiene due nodi del gadget-clausola associato a c_j: pertanto, tutti gli archi nei gadget-clausola sono coperti
- per ogni $j = 1, \dots, m$, non abbiamo inserito in V' un solo nodo che è collegato ad un nodo-variabile che appartiene a V': perciò, tutti gli archi obliqui sono coperti

Quindi i nodi in V' coprono tutti gli archi di G:



in figura è mostrato un VC (i nodi colorati) corrispondente all'assegnazione

$a(x_1) = a(x_2) = a(x_3) = a(x_4) = vero$ e la corrispondente copertura degli archi

$|V'| = n + 2m$

Quindi: se g è soddisfacibile, allora G contiene un VC di $k = (n + 2m)$ nodi

Se G contiene un VC V' di $k = (n + 2m)$ nodi

- V' contiene esattamente un nodo per ogni gadget-variabile
- V' contiene esattamente due nodi per ogni gadget-clausola
- Poiché V' contiene esattamente un nodo per ogni gadget-variabile, consideriamo la seguente assegnazione di verità a per le variabili in X:
  - $a(x_i) = vero\ se\ u_i \in V'$
  - $a(x_i) = falso\ se\ \neg u_i \in V'$
- Poiché V' contiene esattamente due nodi per ogni gadget-clausola, allora un arco "obliquo" in ogni gadget clausola non è coperto dai nodi in V' del gadget-clausola
- Allora, per ogni gadget clausola un arco "obliquo" è coperto da un nodo di un gadget-variabile contenuto in V'
  - ossia, da un nodo u_i – e quindi quella clausola contiene x_i come letterale e $a(x_i) = vero$
  - oppure da un nodo $\neg u_i$ – e quindi quella clausola contiene $\neg x_i$ come letterale e $a(x_i) = falso$
- Questo significa che ogni clausola contiene un letterale al quale a assegna valore vero

Quindi g è soddisfacibile!