

# Teoremi Informatica Teorica

Zbirciog Ionut Georgian

May 20, 2024

## Indice

<b>1</b>	<b>Teoremi Dispensa 2</b>	<b>2</b>
1.1	Teorema a pag. 5 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Teoremi Dispensa 3</b>	<b>3</b>
2.1	Teorema a pag. 3 . . . . .	3
2.2	Teorema a pag. 4 . . . . .	3
2.3	Teorema a pag. 5 . . . . .	4
2.4	Teorema a pag. 5 . . . . .	4
2.5	Teorema a pag. 7 . . . . .	4
2.6	Teorema a pag. 9 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Teoremi Dispensa 5</b>	<b>5</b>
3.1	Teorema a pag. 2 . . . . .	5
3.2	Teorema a pag. 4 (Halting Problem) . . . . .	5
3.3	Teorema a pag. 4 (Halting Problem) . . . . .	5
3.4	Teorema a pag. 6 . . . . .	6
3.5	Teorema a pag. 6 . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Teoremi Dispensa 6</b>	<b>7</b>
4.1	Teorema a pag. 3 . . . . .	7
4.2	Teorema a pag. 4 . . . . .	8
4.3	Teorema a pag. 10 . . . . .	8
4.4	Teorema a pag. 10 . . . . .	9
4.5	Teorema a pag. 11 . . . . .	9
4.6	Teorema a pag. 11 . . . . .	9
4.7	Teorema a pag. 14 . . . . .	10
4.8	Teorema a pag. 14 . . . . .	10
4.9	Teorema a pag. 20 . . . . .	11
4.10	Teorema a pag. 21 . . . . .	11
4.11	Teorema a pag. 21 . . . . .	11
4.12	Corollario a pag. 21 . . . . .	11
4.13	Corollario a pag. 23 . . . . .	12
4.14	Dimostrazione a pag. 23 . . . . .	12
4.15	Dimostrazione a pag. 23 . . . . .	12
4.16	Dimostrazione a pag. 24 . . . . .	13

# 1 Teoremi Dispensa 2

## 1.1 Teorema a pag. 5

Per ogni macchina di Turing non deterministica  $NT$  esiste una macchina di Turing deterministica  $T$  tale che, per ogni possibile input  $x$  di  $NT$ , l'esito della computazione  $NT(x)$  coincide con l'esito della computazione di  $T(x)$ .

**Dimostrazione:** Eseguiamo una simulazione della macchina non deterministica  $NT$  mediante una macchina deterministica  $T$ . La simulazione consiste in una visita in ampiezza<sup>1</sup> dell'albero delle computazioni di  $NT$  basata sulla tecnica *coda di rondine con ripetizioni*. Partiamo dallo stato globale  $SG(T, x, 0)$  e simuliamo tutte le computazioni di lunghezza 1. Se tutte le computazioni terminano in  $q_R$  allora  $T$  rigetta, se almeno una computazione termina in  $q_A$  allora  $T$  accetta, altrimenti ricominciamo da capo eseguendo tutte le computazioni di lunghezza 2 e così via.

---

<sup>1</sup>Perché non in profondità? Non possiamo fare una visita in profondità perché non sappiamo la lunghezza di ciascuna computazione, in quanto potrebbero anche non finire.

## 2 Teoremi Dispensa 3

### 2.1 Teorema a pag. 3

Un linguaggio  $L \subseteq \Sigma^*$  è decidibile se e soltanto se  $L$  e  $L^c$  sono accettabili.

**Dimostrazione:**

( $\Rightarrow$ ) Se  $L$  è decidibile allora esiste una macchina di Turing  $T$  deterministica tale che  $\forall x \in \Sigma^*$ ,  $T(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L \wedge T(x) = q_R \Leftrightarrow x \in L^c$ . Osserviamo dunque che  $T$  accetta  $L$ .

Da  $T$ , deriviamo ora  $T'$  aggiungendo le seguenti quintuple:

$$\langle q_A, x, x, q'_R, stop \rangle \wedge \langle q_R, x, x, q'_A, stop \rangle \quad \forall x \in \Sigma \cup \square$$

L'esecuzione di  $T'$  è simile a quella di  $T$ , solo che gli stati di accettazione e rigetto sono stati invertiti, in questo modo se  $T$  accetta  $x$  allora  $T'$  rigetta  $x$ , mentre se  $T$  rigetta  $x$ ,  $T'$  accetta  $x$ , dunque  $T'$  accetta  $L^c$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $L$  e  $L^c$  sono accettabili allora esistono due macchine di Turing  $T_1$  e  $T_2$  tali che,  $\forall x \in \Sigma^*$   $T_1(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L \wedge T_2(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L^c$ . Non essendo specificato l'esito della computazione nel caso in cui  $x \notin L$  e  $x \notin L^c$  definiamo la macchina  $T$  che, simulando  $T_1$  e  $T_2$  decide  $L$  nel seguente modo<sup>2</sup>:

1. Esegui una singola istruzione di  $T_1$  sul nastro 1: se  $T_1(x) = q_A$  allora  $T(x) = q_A$ , altrimenti esegui il passo (2).
2. Esegui una singola istruzione di  $T_2$  sul nastro 2: se  $T_2(x) = q_A$  allora  $T(x) = q_R$ , altrimenti esegui il passo (1).

Se  $x \in L$ , allora prima o poi, al passo (1),  $T_1$  entrerà nello stato di accettazione, portando  $T$  ad accettare. Se  $x \in L^c$ , allora prima o poi, al passo (1),  $T_1$  entrerà nello stato di accettazione, portando  $T$  a rigettare.

### 2.2 Teorema a pag. 4

Un linguaggio  $L$  è decidibile se e soltanto se la funzione  $\chi_L$  è calcolabile.

**Dimostrazione:**

( $\Rightarrow$ ) Se  $L$  è decidibile allora esiste una macchina di Turing  $T$  deterministica di tipo **riconoscitore** tale che  $\forall x \in \Sigma^*$ ,  $T(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L \wedge T(x) = q_R \Leftrightarrow x \in L^c$ . A partire da  $T$  definiamo una macchina di Turing  $T'$  di tipo trasduttore a 2 natri, con input  $x \in \Sigma^*$  che opera nel seguente modo:

1. Sul primo nastro simula  $T(x)$ .
2. Se  $T(x)$  termina nello stato  $q_A$  allora  $T'(x)$  scrive sul nastro di output il valore 1, altrimenti scrive il valore 0 e poi termina.

Osserviamo che poiché  $L$  è decidibile il passo (1) termina sempre per ogni input  $x$ . Se  $x \in L$  allora  $T(x) = q_A$  e  $T'(x)$  scrive 1 sul nastro di output. Se  $x \notin L$  allora  $T(x) = q_R$  e  $T'(x)$  scrive 0 sul nastro di output. Questo dimostra che  $\chi_L$  è calcolabile.

( $\Leftarrow$ ) Se  $\chi_L$  è calcolabile e per costruzione anche totale allora esiste una macchina di Turing  $T$  di tipo **trasduttore**, che per ogni  $x \in \Sigma^*$ , calcola  $\chi_L(x)$ . A partire da  $T$  definiamo  $T'$  di tipo riconoscitore a 2 natri, con input  $x \in \Sigma^*$  che opera nel seguente modo:

1. Sul primo nastro simula  $T(x)$  scrivendo il risultato sul secondo nastro.
2. Se sul secondo nastro c'è scritto 1 allora  $T'(x) = q_A$ , altrimenti nello stato  $q_R$ .

Osserviamo che poiché  $\chi_L$  è calcolabile il passo (1) termina sempre per ogni input  $x$ . Se  $\chi_L(x) = 1$  allora (1) termina scrivendo 1 sul secondo nastro e  $T'(x) = q_A$ . Se  $\chi_L(x) = 0$  allora (1) termina scrivendo 0 sul secondo nastro e  $T'(x) = q_R$ . Questo dimostra che  $L$  è decidibile.

---

<sup>2</sup>Osserviamo che non possiamo simulare  $T_1$  e  $T_2$  "blackbox", in quanto non sappiamo se la loro computazione termina o meno.

## 2.3 Teorema a pag. 5

Se la funzione  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma_1^*$  è totale e calcolabile allora il linguaggio  $L_f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma_1^*$  è decidibile.

**Dimostrazione:** Poiché  $f$  è calcolabile e totale allora esiste una macchina di Turing trasduttore che calcola  $f(x) \forall x \in \Sigma^*$ . A partire da  $T$  definiamo una macchina di Turing  $T'$  riconoscitore a due nastri con input  $\langle x, y \rangle$  dove  $x \in \Sigma^*$  e  $y \in \Sigma_1^*$ , che opera nel seguente modo:

1. Sul nastro 1 è scritto l'input  $\langle x, y \rangle$ .
2. Sul nastro 2 simula  $T(x)$ , scrivendovi il risultato  $z$ .
3. Se  $z = y$  allora  $T'(x) = q_A$  altrimenti va in  $q_R$ .

Osserviamo che, poiché  $f$  è totale e calcolabile il passo (2) termina per ogni input  $x \in \Sigma^*$ . Se  $f(x) = z = y$  allora  $T'(x)$  termina in  $q_A$ . Se  $f(x) = z \neq y$  allora  $T'(x)$  termina in  $q_R$ . Questo dimostra che  $L_f$  è decidibile.

## 2.4 Teorema a pag. 5

Sia  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma_1^*$  una funzione. Se il linguaggio  $L_f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma_1^*$  è decidibile allora  $f$  è calcolabile<sup>3</sup>.

**Dimostrazione:** Poiché  $L_f \subseteq \Sigma^* \times \Sigma_1^*$  è decidibile, esiste una macchina di Turing riconoscitore  $T$ , tale che  $\forall x \in \Sigma^* \text{ e } \forall y \in \Sigma_1^*, T(x) = q_A \text{ se } y = f(x) \text{ e } T(x) = q_R \text{ se } y \neq f(x)$ . A partire da  $T$  definiamo una macchina di Turing trasduttore  $T'$  con input  $x \in \Sigma^*$  che opera nel seguente modo:

1. Scrive  $i = 0$  sul nastro 1.
2. Enumera tutte le stringhe  $y \in \Sigma_1^*$  di lunghezza pari al valore scritto sul primo nastro, simulando per ciascuna stringa  $T(x, y)$ .
  - (a) Sia  $y$  la prima stringa di lunghezza  $i$  non ancora enumerata, allora scrive  $y$  sul secondo nastro.
  - (b) Sul terzo nastro, esegue la computazione  $T(x, y)$ .
  - (c) Se  $T(x, y) = q_A$  allora scrive  $y$  sul nastro di output eventualmente incrementando  $i$  se  $y$  era l'ultima stringa, torna al passo (2).

Poiché  $L_f$  è decidibile il passo (b) termina per ogni input  $(x, y)$ . Se  $x$  appartiene al dominio di  $f$ , allora  $\exists y \in \Sigma_1^*$  tale che  $y = f(x)$ , e quindi  $(x, y) \in L_f$ . Allora prima o poi la stringa  $y$  verrà scritta sul secondo nastro e  $T(x, y) = q_A$ . Questo dimostra che  $f$  è calcolabile.

## 2.5 Teorema a pag. 7

Per ogni programma scritto in accordo con il linguaggio di programmazione **PascalMinimo**, esiste un macchina di Turing  $T$  di tipo trasduttore che scrive sul nastro di output lo stesso valore fornito in output dal programma.

**Dimostrazione omessa**

## 2.6 Teorema a pag. 9

Per ogni macchina di Turing deterministica  $T$  di tipo riconoscitore ad un nastro esiste un programma  $P$  scritto in accordo alle regole del linguaggio **PascalMinimo** tale che, per ogni stringa  $x$ , se  $T(x)$  termina nello stato finale  $q_F \in \{q_A, q_R\}$  allora  $P$  con input  $x$  restituisce  $q_F$  in output.

**Dimostrazione omessa**

---

<sup>3</sup>Osserviamo che non possiamo invertire del tutto il teorema precedente, dalla decidibilità di  $L_f$  possiamo dedurre solo la calcolabilità di  $f$

### 3 Teoremi Dispensa 5

#### 3.1 Teorema a pag. 2

L'insieme  $T$  delle macchine di Turing definite sull'alfabeto  $\{0, 1\}$  e dotate di un singolo nastro (più l'eventuale nastro di output) è numerabile

**Dimostrazione:** Per dimostrare tale teorema, dobbiamo trovare una biezione tra l'insieme  $T$  e l'insieme  $\mathbb{N}$ . Tale biezione non è altro che una etichettatura degli elementi dell'insieme con etichette appartenenti ad  $\mathbb{N}$ , ossia, una numerazione degli elementi dell'insieme. Sia  $T$  una macchina di Turing e  $\beta_T$  la sua codifica. Dunque, rappresentiamo  $T$  con la parola  $\beta_T \in \Sigma^*$ , con  $\Sigma = \{0, 1, \oplus, \otimes, -, f, s, d\}$  come segue:

$$\beta_T = b(q_0) - b(q_1) \otimes b(q_{11}) - b_{11} - b_{12} - b(q_{12}) - m_1 \oplus \dots \oplus b(q_{h1}) - b_{h1} - b_{h2} - b(q_{h2}) - m_h$$

Ora, effettuando le seguenti sostituzioni in  $\beta_T$ , otteniamo una stringa in  $\mathbb{N}$

- "s" con "5"
- "f" con "6"
- "d" con "7"
- "-" con "4"
- " $\otimes$ " con "3"
- " $\oplus$ " con "2"

Inoltre, dato che la stringa può iniziare con un "0", allora premettiamo il carattere "8" alla stringa ottenuta. La parola in  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}^*$  così ottenuta, può, ovviamente, essere considerata come un numero espresso in notazione decimale, ovvero il numero  $v(T) \in \mathbb{N}$  associato univocamente a  $T$ .

#### 3.2 Teorema a pag. 4 (Halting Problem)

Definiamo il seguente linguaggio  $L_H$  in questo modo:

$$L_H = \{(i, x) : i \text{ è la codifica di una TM } \wedge T_i(x) \text{ termina}\}$$

Il linguaggio  $L_H$  è accettabile.

**Dimostrazione:** Dobbiamo dimostrare che esiste una macchina di Turing  $T$  tale che, per ogni input  $(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $T(i, x) = q_A$  se e soltanto se  $(i, x) \in L_H$ .

Definiamo  $U'$  una macchina di Turing universale modificata con input  $(i, x)$ . Tale macchina opera nel seguente modo:

1. Verifica se  $i$  è la codifica di una macchina di Turing. Se non lo è allora  $U'(i, x) = q_R$ .
2. Simula  $U(i, x)$ , se termina in  $q_A$  o in  $q_R$  allora  $U'(x) = q_A$ .

$U'$  non sa decidere  $L_H^c$ , perciò lo accetta solo.

#### 3.3 Teorema a pag. 4 (Halting Problem)

Il linguaggio  $L_H$  non è decidibile

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $L_H$  sia decidibile. Allora, deve esistere una macchina di Turing  $T$  tale che,  $T(i, x) = q_A \Leftrightarrow (i, x) \in L_H$  e  $T(i, x) = q_R \Leftrightarrow (i, x) \notin L_H$ .

+ Da  $T$  **deriviamo**  $T'$  che terminando su ogni input, accetta tutte e sole le coppie  $(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus L_H$ , ossia  $L_H^c$ .  $T'(i, x) = q_R \Leftrightarrow (i, x) \in L_H$  e  $T'(i, x) = q_A \Leftrightarrow (i, x) \notin L_H$ . Quindi  $T'(i, x)$  decide  $L_H^c$ .

+ Da  $T'$  **deriviamo**  $T''$  in questo modo:

$$T''(i, x) = \text{non termina se } T'(i, x) = q_R \text{ e } T''(i, x) = q_A \text{ se } T'(i, x) = q_A.$$

$$\text{Quindi } T''(i, x) = \text{non termina se } (i, x) \in L_H \text{ e } T''(i, x) = q_A \text{ se } (i, x) \notin L_H.$$

+ Da  $T''$  **deriviamo**  $T^*$  in questo modo:

$$T^*(i) = T'' = \text{non termina se } (i, i) \in L_H \text{ e } T^*(i) = T''(i, i) = q_A \text{ se } (i, i) \notin L_H.$$

Se  $T$  esiste  $\Rightarrow T^*$  esiste, allora  $\exists k \in \mathbb{N}$  tale che  $T^* = T_k$ . Se  $T_k(k) = T^*(k)$  accettasse, allora  $T'(k, k)$  dovrebbe accettare anch'essa. Ma se  $T'(k, k)$  accetta, allora  $(k, k) \notin L_H$ , ossia,  $T_k(k)$  non termina. Allora  $T^*(k)$  non può accettare e, dunque, necessariamente non termina. Ma, se  $T^*(k)$  non termina, allora  $T'(k, k)$  rigetta e, quindi,  $(k, k) \in L_H$ . Dunque, per definizione,  $T_k(k)$  termina. Quindi, in entrambi le ipotesi,  $T_k(k)$  termina o non termina, portando ad una contraddizione. Allora  $T^*$  non può esistere, ma allora neanche  $T''$  può esistere, e neanche  $T'$  e di conseguenza  $T$ . Quindi se  $T$  non esiste,  $L_H$  non è decidibile.

### 3.4 Teorema a pag. 6

Se  $L_1 \cup L_2$  sono due linguaggi accettabili, allora  $L_1 \cup L_2$  è un linguaggio accettabile.

Se  $L_1 \cup L_2$  sono due linguaggi decidibili, allora  $L_1 \cup L_2$  è un linguaggio decidibile.

**Dimostrazione:**

### 3.5 Teorema a pag. 6

Se  $L_1 \cap L_2$  sono due linguaggi accettabili, allora  $L_1 \cap L_2$  è un linguaggio accettabile.

Se  $L_1 \cap L_2$  sono due linguaggi decidibili, allora  $L_1 \cap L_2$  è un linguaggio decidibile.

**Dimostrazione:**

## 4 Teoremi Dispensa 6

### 4.1 Teorema a pag. 3

Sia  $T$  una macchina di Turing deterministica, definita su un alfabeto  $\Sigma \setminus \square$  e un insieme di stati  $Q$ , e sia  $x \in \Sigma^*$  tale che  $T(x)$  termina, allora:

$$dspace(T, x) \leq dtime(T, x) \leq dspace(T, x)|Q|(|\Sigma| + 1)^{dspace(T, x)}$$

**Dimostrazione:**

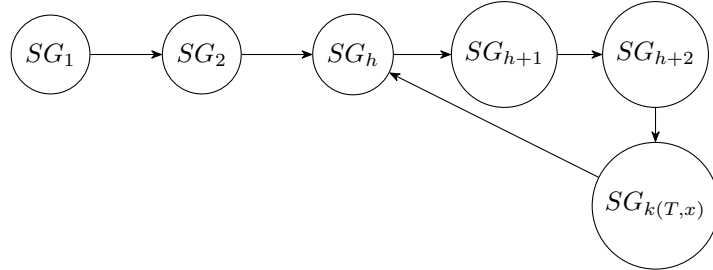
1.  $dspace(T, x) \leq dtime(T, x)$   
 Banalmente, una computazione deterministica che termina in  $k$  passi non può utilizzare più di  $k$  celle del nastro.
2.  $dtime(T, x) \leq dspace(T, x)|Q|(|\Sigma| + 1)^{dspace(T, x)}$ 
  - (a)  $dspace(T, x)|Q|(|\Sigma| + 1)^{dspace(T, x)}$ : è il numero di stati globali possibili di  $T$  nel caso in cui non più di  $dspace(T, x)$  celle del nastro vengano utilizzate dalla computazione  $T(x)$ .
  - (b)  $(|\Sigma| + 1)^{dspace(T, x)}$ : sono tutte le possibili parole di  $dspace(T, x)$  simboli di  $\Sigma \cup \{\square\}$ , ossia tutte le possibili configurazioni delle  $dspace(T, x)$  celle utilizzate.

Siano, dunque,  $T$  una macchina deterministica e  $x \in \Sigma^*$  tali che  $T(x)$  termina in  $k$  passi utilizzando  $dspace(T, x)$  celle del nastro. Poiché  $T(x)$  termina in  $k$  passi, essa è una successione di stati globali

$$SG_0(x), SG_2(x), \dots, SG_k(x)$$

tali che  $SG_0(x)$  è lo stato globale iniziale e per ogni  $0 \leq i \leq k - 1$  esiste una transizione  $SG_i(x) \rightarrow SG_{i+1}(x)$ , e  $SG_k(x)$  è lo stato globale finale.

Sia  $k(T, x) = dspace(T, x)|Q|(|\Sigma| + 1)^{dspace(T, x)}$ . Se  $T(x)$  durasse più di  $k(T, x)$  passi (senza mai uscire dalle  $dspace(T, x)$  celle), allora sarebbe una successione di stati globali contenente almeno due volte uno stesso stato globale,  $SG_h$ .



Ma  $T$  è deterministica, allora, a partire da  $SG_h$  è possibile eseguire un'unica quintupla (verso  $SG_{h+1}$ ) ed essa viene eseguita tutte le volte in cui  $T(x)$  si trova in  $SG_h$ . Quindi, entrambe le volte, avviene una transizione verso lo stesso stato globale  $SG_{h+1}$ , in questo modo  $T(x)$  va in loop e non termina che è contro l'ipotesi che termina.

## 4.2 Teorema a pag. 4

Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione totale e calcolabile.

Se  $L \subseteq \Sigma^*$  è accettato da una macchina di Turing non deterministica  $NT$  tale che, per ogni  $x \in L$ ,  $ntime(NT, x) \leq f(|x|)$  allora  $L$  è decidibile.

Se  $L \subseteq \Sigma^*$  è accettato da una macchina di Turing non deterministica  $NT$  tale che, per ogni  $x \in L$ ,  $nspac(NT, x) \leq f(|x|)$  allora  $L$  è decidibile.

**Dimostrazione:** Poiché  $f$  è totale e calcolabile, esiste una macchina di Turing  $T_f$  trasduttore tale che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_f(n)$  termina con il valore  $f(n)$  scritto sul nastro di output. Assumiamo che l'input e l'output siano codificati in unario. Sia  $L \subseteq \Sigma^*$  un linguaggio accettato da una macchina di Turing  $NT$  tale che  $\forall x \in L, ntime(NT, x) \leq f(|x|)$ . Deriviamo ora da  $NT$  e  $T_f$  una nuova macchina non deterministica  $NT'$  a tre nastri.

$N_1$ : viene scritto in unario l'input  $x \in \Sigma^*$ .

$N_2$ : viene scritta la lunghezza di  $x$  in unario.

$N_3$ : viene utilizzato come clock, ovvero viene scritto  $f(|x|)$ .

La computazione  $NT'$  consiste di 3 fasi:

- FASE 1:  $NT'(x)$  scrive  $|x|$  su  $N_2$  in unario. Una volta letto  $\square$  su  $N_1$ , le testine di  $N_1$  e  $N_2$  vengono riposizionate sul carattere più a sinistra.
- FASE 2: Simula  $T_f(|x|)$ , usando  $N_2$  come nastro di input e  $N_3$  come nastro di output. Essa termina scrivendo il valore di  $f(|x|)$  su  $N_3$  e riavvolge la testina.
- FASE 3: Simula i primi  $f(|x|)$  passi della computazione, utilizzando  $N_1$  come input e nastro di lavoro e  $N_3$  come clock, ovvero come contatore del numero di istruzioni eseguite. Fino a quando viene letto 1 su  $N_3$  viene eseguita un'istruzione di  $NT(x)$  e la testina di  $N_3$  viene spostata a destra. Se  $NT(x)$  raggiunge  $q_A$  o  $q_R$ ,  $NT'(x)$  termina nel medesimo stato. Se viene letto  $\square$  su  $N_3$ ,  $NT'(x)$  termina in  $q_R$ .

Poiché  $f$  è calcolabile e totale e poiché la simulazione della computazione  $NT(x)$  nella terza fase viene forzosamente terminata, se non ha terminato entro  $f(|x|)$  passi, tutte le computazioni di  $NT'$  terminano.

- Se  $x \in L$  allora poiché  $NT$  accetta  $x$  in  $f(|x|)$  passi, nella terza fase termina in  $q_A$  prima che venga letto  $\square$ .
- Se  $x \notin L$  allora o  $NT(x)$  termina in  $q_R$  durante la terza fase e di conseguenza anche  $NT'(x)$  termina in  $q_R$ , oppure viene letto  $\square$ , ovvero  $NT(x)$  non ha accettato  $x$  in  $f(|x|)$  passi e dunque  $NT'(x)$  rigetta.

Questo dimostra che  $NT'$  decide  $L$  e dunque che  $L$  è decidibile.

## 4.3 Teorema a pag. 10

Per ogni funzione totale calcolabile  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$DTIME[f(n)] \subseteq NTIME[f(n)] \subseteq DSPACE[f(n)] \subseteq NSPACE[f(n)]$$

**Dimostrazione:** Una macchina di Turing deterministica è una particolare macchina di Turing non deterministica avente grado di non determinismo pari a 1, inoltre ogni parola decisa in  $k$  passi e anche accettata in  $k$  passi (ogni parola decisa in  $k$  celle e anche accettata in  $k$  celle).



#### 4.4 Teorema a pag. 10

Per ogni funzione totale calcolabile  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$DTIME[f(n)] \subseteq DSPACE[f(n)] \subseteq \wedge NTIME[f(n)] \subseteq NSPACE[f(n)]$$

**Dimostrazione:** Segue dal teorema:

$$dspace(T, x) \leq dtime(T, x) \dots$$

Sia  $L \subseteq \Sigma^*$  tale che  $L \in DTIME[f(n)]$ . Allora esiste  $T$  che decide  $L$  e tale che  $\forall x \in \Sigma^*$ ,  $dtime(T, x) \in O(f(|x|))$ . Poiché  $dspace(T, x) \leq dtime(T, x)$  e  $dspace(T, x) \leq dtime(T, x) \in O(f(|x|))$ , allora  $dspace(T, x) \in O(f(|x|))$  e dunque  $L \in DSPACE(f(|x|))$ . Analogamente per  $NTIME[f(n)] \subseteq NSPACE[f(n)]$ .

#### 4.5 Teorema a pag. 11

Per ogni funzione totale calcolabile  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$DSPACE[f(n)] \subseteq DTIME[2^{O(f(n))}] \subseteq \wedge NSPACE[f(n)] \subseteq NTIME[2^{O(f(n))}]$$

**Dimostrazione:** Segue dal teorema:

$$\dots \leq dspace(T, x) |Q| (|\Sigma| + 1)^{dspace(T, x)}$$

Sia  $L \subseteq \Sigma^*$  tale che  $L \in DTIME[f(n)]$ . Allora, esiste una macchina di Turing  $T$  deterministica  $T$  che decide  $L$  e tale che, per ogni  $x \in \Sigma^*$ ,  $dspace(T, x) \in O(f(|x|))$ . Poiché:  
Supponiamo che  $\Sigma = \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} dtime(T, x) &\leq dspace(T, x) |Q| (|\Sigma| + 1)^{dspace(T, x)} \\ &= dspace(T, x) |Q| 3^{dspace(T, x)} \\ &= 2^{\log(dspace(T, x))} |Q| 2^{\log(3) dspace(T, x)} \\ &= |Q| 2^{\log(dspace(T, x)) + \log(3) dspace(T, x)} \\ &\leq |Q| 2^{(1+\log(3)) dspace(T, x)} \end{aligned}$$

Allora  $dtime(T, x) \in O(2^{O(f(|x|))})$  e dunque  $L \in DTIME[2^{O(f(|x|))}]$

#### 4.6 Teorema a pag. 11

Per ogni funzione totale calcolabile  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$DTIME[f(n)] = coDTIME[f(n)] \wedge DSPACE[f(n)] = coDSPACE[f(n)]$$

**Dimostrazione:**  $\forall L \in DTIME[f(n)]$ , esiste  $T$  che decide  $L$  e  $dtime(T, x) \in O(f(|x|))$ . Da  $T$  deriviamo  $T^c$  con input  $x \in \Sigma^*$  e  $Q_f = \{q_A^c, q_R^c\}$  che decide  $L^c$  nel seguente modo:

FASE 1: Simula  $T(x)$

FASE 2: 

- Se  $T(x) = q_A$ , allora  $T^c(x) = q_R$
- Se  $T(x) = q_R$ , allora  $T^c(x) = q_A$

Dunque  $L^c \in DTIME[f(n)]$ .

Analogamente possiamo dimostrare che un qualsiasi linguaggio  $L \in coDTIME[f(n)]$ . Di conseguenza che  $DTIME[f(n)] = coDTIME[f(n)]$ . Dimostrazione analoga per  $DSPACE[f(n)] = coDSPACE[f(n)]$ .

## 4.7 Teorema a pag. 14

Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione time-constructible (space-constructible.).

Allora, per ogni  $L \in NTIME[f(n)]$ , si ha che  $L$  è decidibile in tempo non deterministico in  $O(f(n))$ .

Allora, per ogni  $L \in NTIME[f(n)]$ , si ha che  $L$  è decidibile in spazio non deterministico in  $O(f(n))$ .

**Dimostrazione:** Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione time-constructible. Allora esiste una macchina di Turing di tipo trasduttore  $T_f$  che, avendo scritto sul nastro di input/lavoro  $n \in \mathbb{N}$  in unario, in  $O(f(n))$  passi scrive sul nastro di output il valore di  $f(n)$  in unario. Sia  $L \in NTIME[f(n)]$ . Allora esiste una  $NT$  che accetta  $L$  e tale che, per ogni  $x \in L$ ,  $ntime(NT, x) \in O(f(|x|))$ . Definiamo ora da  $T_f$  e  $NT$ , la macchina  $NT'$  con input  $x \in L$  che opera nel seguente modo:

FASE 1: Scrive su  $N_2$ ,  $|x|$  in unario.

FASE 2: Simula  $T_f(x)$  e scrive il risultato in unari su  $N_3$ .

FASE 3: Finché legge 1 su  $N_3$  esegue una istruzione di  $NT(x)$  su  $N_1$ .

- Se termina in  $q_A$ , allora  $NT'(x) = q_A$ .
- Altrimenti sposta la testina a destra su  $N_3$

FASE 4: Se legge  $\square$  su  $N_3$  allora rigetta.

- La fase 1 termina in  $O(|x|)$  passi.
- la fase 2 termina in  $O(f(|x|))$  passi, in quanto  $f$  è time-constructible.
- La fase 3 termina in  $O(f(|x|))$  passi, in quanto  $\forall x \in \Sigma^*$ ,  $ntime(NT', x) \in O(f(|x|))$ .

Dunque,  $NT'(x)$  decide  $L$ ,  $\forall x \in \Sigma^*$ , e  $ntime(NT', x) \in O(f(|x|))$ .

## 4.8 Teorema a pag. 14

Per ogni funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  time-constructible,

$$NTIME[f(n)] \subseteq DTIME[2^{O(f(n))}]$$

**Dimostrazione:** Sia  $L \in \Sigma^*$  tale che  $L \in NTIME[f(n)]$ , allora esistono una macchina di Turing  $NT$  che accetta  $L$  e una costante  $h$  tali che  $\forall x \in L$ ,  $ntime(NT, x) \leq hf(|x|)$ . Poiché  $f$  è time-constructible, esiste una macchina di Turing deterministica  $T_f$  con input la rappresentazione in unario di  $n \in \mathbb{N}$ , che calcola il valore di  $f(n)$  in unario in tempo  $O(f(n))$ . Indichiamo con  $k$  il grado di non determinismo di  $NT$  e definiamo  $T$  deterministica che simuli  $NT$  con input  $x \in \Sigma^*$  che opera nel seguente modo:

FASE 1: Scrive su  $N_2$ ,  $|x|$  in unario.

FASE 2: Simula  $T_f(|x|)$  e scrive su  $N_3$  l'output  $hf(|x|)$  in unario.

FASE 3: Per ogni computazione deterministica  $\alpha(x)$  in  $NT(x)$ :

- Finché legge 1 su  $N_3$  esegue un'istruzione lungo  $\alpha(x)$ .
- Se  $\alpha(x) = q_A$  allora  $T(x) = q_A$ .
- Altrimenti sposta la testina a destra su  $N_3$ .
- Se legge  $\square$  si sposta sul primo 1 a sinistra e passa alla prossima computazione deterministica  $\alpha(x)$  se esiste.

FASE 4: Rigetta

- La fase 1 termina in  $O(f(|x|))$  passi.
- La fase 2 termina in  $O(hf(|x|)) = O(f(|x|))$  passi.
- La fase 3 termina in  $O(f(|x|)k^{hf(x)})$  poiché esegue ogni computazione deterministica di  $NT(x)$

Dunque,

$$dtime(T, x) \in O(f(|x|)k^{hf(x)}) \subseteq O(2^{O(f(|x|))})$$

## 4.9 Teorema a pag. 20

Siano  $C$  e  $C'$  due classi di complessità tali che  $C' \subseteq C$ . Se  $C'$  è chiusa rispetto ad una  $\pi$ -riduzione allora, per ogni linguaggio  $L$  che sia  $C$ -completo rispetto a tale  $\pi$ -riduzione,  $L \in C'$  se e solo se  $C = C'$ .

### Dimostrazione

$\Leftarrow$ ) Se  $C = C'$  allora  $L \in C'$ .

$\Rightarrow$ ) Sia  $L \in C'$ . Poiché  $L$  è  $C$ -completo rispetto alla  $\pi$ -riducibilità, allora per ogni  $L_0 \in C$ ,  $L_0 \leq_\pi L$ . Poiché  $C'$  è chiusa rispetto alla  $\pi$ -riduzione, ovvero per ogni altro linguaggio  $L'$ ,  $L' \leq_\pi L$ , allora  $L' \in C'$ , dunque per ogni linguaggio  $L_0 \in C$ ,  $L_0 \leq_\pi L$ , allora  $L_0 \in C'$ . Quindi  $C = C'$ .

## 4.10 Teorema a pag. 21

La classe  $\mathbf{P}$  è chiusa rispetto alla riducibilità polinomiale.

**Dimostrazione** Sia  $L \in \mathbf{P}$ , allora esistono una macchina di Turing  $T$  deterministica e  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $T$  decide  $L$  e per ogni  $x \in \Sigma^*$ ,  $dtime(T, x) \in O(|x|^k)$ .

Sia  $L' : L' \leq_p L$ , allora esiste una funzione  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  in  $\mathbf{FP}$  che riduce  $L'$  a  $L$ , con  $T_f$  trasduttore tale che per ogni  $x \in \Sigma_1^*$ ,  $T_f(x) \in L \Leftrightarrow x \in L' \wedge dtime(T_f, x) \in O(|x|^c)$ .

Da  $T$  e  $T_f$  definiamo  $T'$  con input  $x$  che opera nel seguente modo:

FASE 1: Simula  $T_f(x)$  e scrive l'output  $y$  su  $N_2$ .

FASE 2: Simula  $T(y)$ :

- Se termina in  $q_A$  allora  $T'$  accetta.
- Se termina in  $q_R$  allora  $T'$  rigetta.

Dato che  $f$  è una riduzione da  $L'$  a  $L$ , quindi  $f(x) \in L \Leftrightarrow x \in L'$ , quindi  $T'$  termina per ogni input  $x \in \Sigma^*$  e accetta  $\Leftrightarrow T(f(x))$  accetta, ossia  $\Leftrightarrow f(x) \in L$ .

Resta da mostrare che  $T'(x)$  opera in tempo polinomiale in  $|x|$ . La simulazione di  $T_f(x)$  richiede  $dtime(T_f, x) \leq |x|^c$  e la simulazione di  $T(f(x))$  richiede  $dtime(T, f(x)) \leq |f(x)|^k$ .

$$\begin{aligned} dtime(T', x) &\leq |x|^c + f(|x|)^{k4} \\ &\leq |x|^c + |x|^{ck} \\ &\Rightarrow dtime(T', x) \in O(|x|^{ck}) \end{aligned}$$

Poiché  $c$  e  $k$  sono costanti, allora risulta che  $\mathbf{P}$  è chiusa rispetto la riducibilità polinomiale dato che  $L' \in \mathbf{P}$ .

## 4.11 Teorema a pag. 21

Le classi  $\mathbf{NP}$ ,  $\mathbf{PSPACE}$ ,  $\mathbf{EXPTIME}$ ,  $\mathbf{NEXPTIME}$ , sono chiuse rispetto alla riducibilità polinomiale.

### Dimostrazione:

$\mathbf{NP}$

$\mathbf{PSPACE}$

$\mathbf{EXPTIME}$

$\mathbf{NEXPTIME}$

## 4.12 Corollario a pag. 21

Se  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$  allora, per ogni linguaggio  $\mathbf{NP}$ -completo  $L$ ,  $L \notin \mathbf{P}$ .

**Dimostrazione:** Supponiamo che  $L$  sia un linguaggio  $\mathbf{NP}$ -completo e che  $L \in \mathbf{P}$ . Poiché  $L$  è  $\mathbf{NP}$ -completo, per ogni linguaggio  $L' \in \mathbf{NP}$ ,  $L' \leq L$ , ma se  $L \in \mathbf{P}$ , poiché  $\mathbf{P}$  è chiusa rispetto alla riduzione  $\leq$ , questo implica che, per ogni  $L' \in \mathbf{NP}$ ,  $L' \in \mathbf{P}$ . Ossia  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ , contraddicendo l'ipotesi.

### 4.13 Corollario a pag. 23

Se  $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$ , allora  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ .

**Dimostrazione** ( $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$ ): Se  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ , allora  $\mathbf{NP} = \mathbf{coP}$  poiché  $\mathbf{P} = \mathbf{coP}$ . Ma se  $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{coP}$ , allora  $\mathbf{coP} = \mathbf{coNP}$ . Dunque:

$$\underline{\mathbf{NP}} = \mathbf{P} = \mathbf{coP} = \underline{\mathbf{coNP}}$$

### 4.14 Dimostrazione a pag. 23

La classe  $\mathbf{coNP}$  è chiusa rispetto alla riducibilità polinomiale.

**Dimostrazione:** Poiché  $\mathbf{NP}$  è chiusa rispetto alla riducibilità polinomiale

Per ogni  $L_2 \in \mathbf{NP}$  e per ogni  $L_1$ , se  $L_1 \leq L_2$ , allora  $L_1 \in \mathbf{NP}$ .

$\Rightarrow$  Per ogni  $L_2^c \in \mathbf{coNP}$  e per ogni  $L_1^c$ , se  $L_1^c \leq L_2^c$ , allora  $L_1^c \in \mathbf{coNP}$

### 4.15 Dimostrazione a pag. 23

Un linguaggio  $L$  è  $\mathbf{NP}$ -completo se e soltanto se  $L^c$  è  $\mathbf{coNP}$ -completo.

**Dimostrazione:**

( $\Rightarrow$ ) Sia  $L$  un linguaggio  $\mathbf{NP}$ -completo, allora per definizione di completezza

1.  $L \in \mathbf{NP}$  allora  $L^c \in \mathbf{coNP}$ .
2.  $\forall L_0 \in \mathbf{NP}, L_0 \leq L$ .

Sia  $L_1$  un qualsiasi linguaggio in  $\mathbf{coNP}$ , allora  $L_1^c \in \mathbf{NP}$ . Poiché  $L$  è  $\mathbf{NP}$ -completo,  $L_1^c \leq L$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Esiste } f \in \mathbf{FP} : \forall x \in \Sigma^* [x \in L_1^c \Leftrightarrow f(x) \in L] \\ \Rightarrow \text{Esiste } f \in \mathbf{FP} : \forall x \in \Sigma^* [x \notin L_1^c \Leftrightarrow f(x) \notin L] \\ \Rightarrow \text{Esiste } f \in \mathbf{FP} : \forall x \in \Sigma^* [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L^c] \end{aligned}$$

In conclusione,  $\forall L_1 \in \mathbf{coNP} : L_1 \leq L^c$ , e quindi  $L^c$  è  $\mathbf{coNPC}$ .

( $\Leftarrow$ ) Sia  $L^c$  un linguaggio  $\mathbf{coNP}$ -completo, allora per definizione di completezza

1.  $L^c \in \mathbf{coNP}$  allora  $L \in \mathbf{NP}$ .
2.  $\forall L_0^c \in \mathbf{coNP}, L_0^c \leq L^c$ .

Sia  $L_1$  un qualsiasi linguaggio in  $\mathbf{NP}$ , allora  $L_1^c \in \mathbf{coNP}$ . Poiché  $L^c$  è  $\mathbf{coNP}$ -completo,  $L_1^c \leq L^c$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Esiste } f \in \mathbf{FP} : \forall x \in \Sigma^* [x \in L_1^c \Leftrightarrow f(x) \in L^c] \\ \Rightarrow \text{Esiste } f \in \mathbf{FP} : \forall x \in \Sigma^* [x \notin L_1^c \Leftrightarrow f(x) \notin L^c] \\ \Rightarrow \text{Esiste } f \in \mathbf{FP} : \forall x \in \Sigma^* [x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L] \end{aligned}$$

In conclusione,  $\forall L_1 \in \mathbf{NP} : L_1 \leq L$ , e quindi  $L$  è  $\mathbf{NPC}$ .

#### 4.16 Dimostrazione a pag. 24

Se esiste un linguaggio  $L$  **NP**-completo tale che  $L \in \mathbf{coNP}$ , allora  $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ .

**Dimostrazione:**  $L$  è **NP**-completo, allora per definizione di completezza

1.  $L \in \mathbf{NP}$ .

2.  $\forall L_1 \in \mathbf{NP}, L_1 \leq L$ .

$\subseteq$  Se  $L \in \mathbf{coNP}$  allora  $\forall L_1 \in \mathbf{NP}, L_1 \leq L$ , ma  $\mathbf{coNP}$  è chiusa rispetto alla riducibilità polinomiale ovvero  $[L_2 \in \mathbf{coNP}, L_1 \leq L_2, \Rightarrow L_1 \in \mathbf{coNP}]$ , allora, per ogni  $L_1 \in \mathbf{NP}$  si ha che  $L_1 \leq L$ , e  $L \in \mathbf{coNP}$ .  
Dunque, per la chiusura di  $\mathbf{coNP}$ ,  $L_1 \in \mathbf{coNP}$ , quindi  $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{coNP}$ .

$\supseteq$  Poiché  $L \in \mathbf{coNP}$ , allora  $L^c \in \mathbf{NP}$ , ma poiché  $L$  è **NP**-completo, allora  $L^c$  è **coNP**-completo, quindi  $\forall L' \in \mathbf{coNP}, L' \leq L^c$ . Ma  $\mathbf{NP}$  è chiusa rispetto alla riducibilità polinomiale, ovvero  $[L_2 \in \mathbf{NP}, L_1 \leq L_2, \Rightarrow L_1 \in \mathbf{NP}]$ , allora, per ogni  $L' \in \mathbf{coNP}, L' \leq L^c$  e  $L^c \in \mathbf{NP}$ . Dunque, per la chiusura di  $\mathbf{NP}$ ,  $L' \in \mathbf{NP}$ , quindi  $\mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{NP}$ .

In conclusione, se  $L$  è **NP**-completo  $\wedge L \in \mathbf{coNP}$ , allora  $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ .