6/1/24, 1:45 PM CL\_NPC

## Il problema CL è NP-completo

Dati un grafo non orientato G=(V,E) ed un intero  $k\in\mathbb{N}$ , esiste un sottoinsieme di almeno k nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco?

- $\mathcal{I}_{CL} = \{ \langle G = (V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato e } k \text{ un intero positivo } \}.$
- $\mathcal{S}_{CL}(G,k) = \{ C \subset V \}.$
- $\pi_{CL}(G, k, \mathcal{S}_{CL}(G, k)) = \exists C \in \mathcal{S}_{CL}(G, k) : |C| \ge k \land \forall (u, v) \in C[(u, v) \in E].$

Dimostriamo che  $CL \in \mathbf{NP}$  mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale: un certificato è un sottoinsieme C di V e per verificare che C è effettivamente una clique per G, ossia che C soddisfa

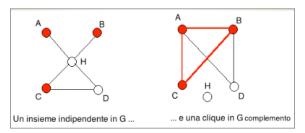
 $\pi_{CL}(G,k,\mathcal{S}_{CL}(G,k))$ , dobbiamo esaminare ciascuna coppia di nodi  $u,v\in C$  e verificare che  $(u,v)\in E$ , perciò verifichiamo un certificato in tempo O(|V|2|E|)

Dimostriamo che CL è completo per  ${\bf NP}$  riducendo polinomialmente IS a CL.

Trasformiamo una istanza  $\langle G=(V,E),k\rangle$  di IS nell'istanza  $\langle G^c=(V,E_c),k\rangle$  di CL, in cui  $G^c$  è il grafo complemento di G: (u,v) è un arco di  $G^c$  se e soltanto se (u,v) non è un

arco di G, ossia  $E^c = \{(u, v) : (u, v) \notin E\}$ .

 $I \subseteq V$  è un insieme indipendente per G se e soltanto se I è una clique per  $G^c$ , ossia,  $\langle G = (V, E), k \rangle$  è una istanza sì di IS se e solo se  $\langle G^c = (V, E^c), k \rangle$  è una istanza sì di CL e calcolare  $\langle G^c = (V, E^c), k \rangle$  richiede tempo polinomiale in  $|\langle G = (V, E), k \rangle|$ 



6/1/24, 1:45 PM CL\_NPC