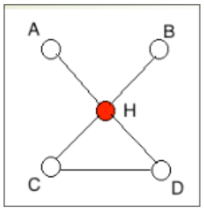
Il problema DS è NP-completo

Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, un sottoinsieme D di nodi tale che ogni nodo che non è in D ha almeno un vicino in D è un dominating set di G
.
Un DS è un insieme di nodi che domina tutti i nodi del grafo.
Un vertex cover V' è sempre un dominating set: se ogni arco ha un estremo in V', ogni nodo non in V' ha un vicino in V'.
Ma non sempre un dominating set è un vertex cover :



in figura vediamo un dominating set che non è un vertex cover: infatti, l'arco (C, D) non è coperto dal nodo H.

Nel problema Dominating Set vogliamo trovare un sottoinsieme di nodi "piccolo" che domini tutti i nodi di un grafo.

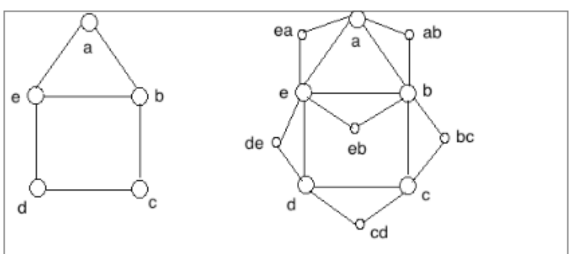
Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di al più k nodi tale che ogni nodo che non è in quel sottoinsieme ha un vicino in esso?

- $\mathcal{I}_{DS} = \{ \langle G = (V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo connesso non orientato e } k \text{ un intero positivo } \}$.
- $\mathcal{S}_{DS}(G, k) = \{ D \subset V \}$.
- $\pi_{DS}(G, k, \mathcal{S}_{DS}(G, k)) = \exists D \in \mathcal{S}_{DS}(G, k) : |D| \leq k \wedge \forall u \in V - D[\exists v \in D : (u, v) \in E]$.

Il primo passo, per dimostrare la $\mathbf{NP}$-completezza di DS, è dimostrare che $DS \in \mathbf{NP}$.

Un certificato è un sottoinsieme D di V.
Per verificare che D è effettivamente un Dominating Set per G, ossia che D soddisfa $\pi_{DS}(G, k, \mathcal{S}_{DS}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascun nodo u in $V - D$ e verificare che esiste un nodo v in D tale che $(u, v) \in E$. Perciò, verifichiamo un certificato in tempo O(|V|2|E|).

Dimostriamo che DS è completo per $\mathbf{NP}$ riducendo polinomialmente VC a DS.
Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D = (V_D, E_D), k \rangle$ di DS: in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{ uv : (u, v) \in E \}$ e in cui $E_D = E \cup F$, con $F = \{ (u, uv), (v, uv) : (u, v) \in E \}$

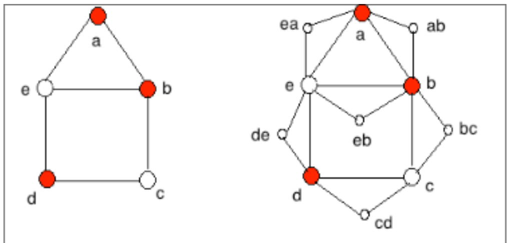


grafo G istanza di VC grafo G_D istanza di DS corrispondente a G

Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D = (V_D, E_D), k \rangle$ di DS, in cui $V_D = V \cup W, conW = uv : (u, v) \in E$ e $E_D = E \cup F, conF = \{ (u, uv), (v, uv) : (u, v) \in E \}$

Se G ha un vertex cover V' con $|V'| \leq k$, allora, V' è un dominating set per G_D, infatti: V' $\subseteq V \subseteq V_D$; inoltre, comunque scegliamo un nodo u in V_D:

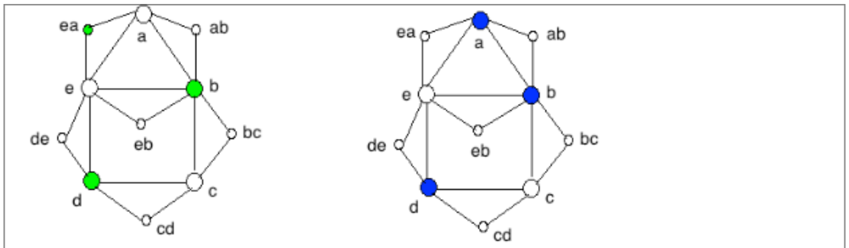
- se $u \in V – V'$: poiché G è connesso esiste un arco (u, v) in E, e poiché V' è un vertex cover per G allora $v \in V'$
- se $u = xy \in W$, poiché V' è un vertex cover per G allora $x \in V$' o $y \in V$



un vertex cover V' per G V' è un dominating set per G_D

Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E), k \rangle$ di VC nell'istanza $\langle G_D = (V_D, E_D), k \rangle$ di DS, in cui $V_D = V \cup W$, con $W = \{\, uv : (u, v) \in E \,\}$ e $E_D = E \cup F$, con $F = \{\, (u, uv), (v, uv) : (u, v) \in E \,\}$.
Se G_D ha un dominating set D con $|D| \leq k$, allora,

1. trasformiamo D in un nuovo dominating set D' per G_D tale che $D' \subseteq V$ e $|D'| = |D|$
   - se D contiene qualche $uv \in W$, sostituiamo uv con u (o con v, è indifferente)
   - poiché uv domina solo u e v, quello che otteniamo è un nuovo insieme dominante



Un dominating set che contiene ea ∈ W Il dominating set in cui ea è stato sostituito da a (che domina ea)

2. D' è un vertex cover per G, infatti: per ogni arco $(u, v) \in E$, $uv \in W$
   poiché D' è un dominating set per G_D allora $u \in D'$ oppure $v \in D'$ oppure $uv \in D'$ e poiché D' non contiene nodi di W, ossia $uv \notin D'$ allora $u \in D'$ oppure $v \in D'$.

Quindi, abbiamo dimostrato che $\langle G = (V, E), k \rangle$ è una istanza sì di VC se e solo se
$\langle G_D = (V_D, E_D), k \rangle$ è una istanza sì di DS.
Infine, poiché calcolare $\langle G_D = (V_D, E_D), k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E), k \rangle|$, questo completa la prova che $VC \leq DS$