# Il problema CL è NP-completo

Dati un grafo non orientato $G = (V, E)$ ed un intero $k \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme di almeno $k$ nodi tale che ogni coppia di nodi in quel sottoinsieme è collegata da un arco?

- $\mathcal{I}_{CL} = \{ \langle G = (V, E), k \rangle : G \text{ è un grafo non orientato e } k \text{ un intero positivo } \}$.
- $\mathcal{S}_{CL}(G, k) = \{ C \subset V \}$.
- $\pi_{CL}(G, k, \mathcal{S}_{CL}(G, k)) = \exists C \in \mathcal{S}_{CL}(G, k) : |C| \geq k \wedge \forall (u, v) \in C[(u, v) \in E]$.

Dimostriamo che $CL \in \mathbf{NP}$ mostrando un certificato che sia verificabile in tempo polinomiale: un certificato è un sottoinsieme C di V e per verificare che $C$ è effettivamente una clique per $G$, ossia che $C$ soddisfa
$\pi_{CL}(G, k, \mathcal{S}_{CL}(G, k))$, dobbiamo esaminare ciascuna coppia di nodi $u, v \in C$ e verificare che $(u, v) \in E$, perciò verifichiamo un certificato in tempo $O(|V|2|E|)$

Dimostriamo che $CL$ è completo per $\mathbf{NP}$ riducendo polinomialmente $IS$ a $CL$.
Trasformiamo una istanza $\langle G = (V, E), k \rangle$ di $IS$ nell'istanza $\langle G^c = (V, E_c), k \rangle$ di $CL$, in cui $G^c$ è il grafo complemento di $G$: $(u, v)$ è un arco di $G^c$ se e soltanto se $(u, v)$ non è un
arco di $G$, ossia $E^c = \{ (u, v) : (u, v) \notin E \}$.

$I \subseteq V$ è un insieme indipendente per $G$ se e soltanto se $I$ è una clique per $G^c$, ossia, $\langle G = (V, E), k \rangle$ è una istanza sì di $IS$ se e solo se $\langle G^c = (V, E^c), k \rangle$ è una istanza sì di $CL$ e calcolare $\langle G^c = (V, E^c), k \rangle$ richiede tempo polinomiale in $|\langle G = (V, E), k \rangle|$