Teoremi Dispensa 7

Teorema

Sia $\Gamma = \langle I_\Gamma, S_\Gamma, \pi_\Gamma \rangle$ un problema decisionale e sia $\chi : I_\Gamma \rightarrow \Sigma^*$ una sua codifica ragionevole. Se $\chi(I_\Gamma) \in \mathbf{P}$, allora $L_\Gamma(\chi) \in \mathbf{NP} \Rightarrow L_{\Gamma^c}(\chi) \in \mathbf{coNP}$

dim

Poichè $\chi(I_\Gamma) \in \mathbf{P}$, allora esistono una macchina di Turing deterministica T ed un intero h tali che, per ogni $x \in \Sigma^*$, T decide se $x \in \chi(I_\Gamma)$ e $dtime(T, x) \in O(|x|^h)$.

Se $L_\Gamma(\chi) \in \mathbf{NP}$, allora esistono una macchina di Turing non deterministica NT_Γ ed un intero k tali che, per ogni $x \in L_\Gamma(\chi)$, NT_Γ accetta x e $ntime(NT_\Gamma, x) \in O(|x|^k)$.

Combinando T e NT_Γ, deriviamo una nuova macchina non deterministica NT' che, con input $x \in \Sigma^*$, opera in due fasi, come di seguito descritto.

1. Simula la computazione $T(x)$: se $T(x)$ termina nello stato di rigetto, allora NT' termina nello stato di accettazione, altrimenti ha inizio la 2.
2. Simula la computazione $NT_\Gamma(x)$.

Quindi, $NT'(x)$ accetta se e soltanto se $x \notin \chi(I_\Gamma)$ oppure $x \in L_\Gamma(\chi)$, ossia, se e soltanto se x appartiene al linguaggio complemento di $L_{\Gamma^c}(\chi)$.
Inoltre, è semplice verificare che $ntime(NT', x) \in O(|x|^{max\{h,k\}})$.
In conclusione, il linguaggio complemento di $L_{\Gamma^c}(\chi)$ è in $\mathbf{NP}$, e dunque $L_{\Gamma^c}(\chi) \in \mathbf{coNP}$.