Chương 7

Quy hoạch động

Mục tiêu

- Tổng quan về phương pháp quy hoạch động
- Quá trình giải bài toán bằng quy hoạch động
- Các bài toán điển hình

Nội dung

7.1. Lý thuyết về quy hoạch động

7.2. Bài toán ba lô 1

7.3. Bài toán ba lô 2

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Bài toán:

Cho một dãy **A** gồm **n** số nguyên.

Cho **k** là một số nguyên dương.

Hãy tìm một dãy con (không nhất thiết phải liên tiếp nhau) dài nhất có tổng các số chia hết cho số **k**.

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

- Ví dụ: **n = 6; k = 5**

  Tức là dãy gồm 6 số nguyên dương. Số thứ tự các số trong dãy và giá trị của chúng lần lượt được cho tương ứng như trong bảng minh hoạ:

i	1	2	3	4	5	6
A[i]	**11**	**6**	**7**	**12**	**20**	**8**

Yêu cầu: Chọn nhiều nhất các số trong dãy A[i] (không nhất thiết phải liên tiếp nhau) sao tổng của chúng chia hết cho **K = 5**.

Kết quả: Chiều dài dãy con: **4**

Các phần tử được chọn là: **1** **2** **5** **6**

Có giá trị tương ứng là: **11** **6** **20** **8**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Nhắc lại phép toán mod

❖ Giả sử **r = a mod k** và **z = b mod k**

❖ Ta có:

1. (a + b) mod k = (r + z) mod k
2. (-r) mod k = (-r + k) mod k
3. (r + z) mod k = v

   → z = (v – r) mod k = (v – r + k) mod k

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A[i]	11	6	7	12	20	8
A[i] = A[i] % 5	1	1	2	2	0	3
	0	0	0	3	4	4

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Tham số thể hiện kích thước bài toán

Gọi **F(i)** = chiều dài dãy con dài nhất trong miền **[1..i]** có tổng chia hết cho k.

1. Nếu dãy con dài nhất không có **A[i]** thì **F(i) = F(i-1)**
   Với F(i-1) = chiều dài dãy con dài nhất trong miền **[1..i-1]** có tổng chia hết cho k

2. Nếu dãy con dài nhất có chứa A[i]: thì **F(i) = F(i-1) + 1**
   Gọi **r = A[i] mod k**

   - Nếu **r = 0**: thì F(i-1)= chiều dài dãy con dài nhất trong miền [1..i-1] có tổng chia hết cho k

   - Nếu **r > 0**: do (r + k - r) mod k = 0 nên F(i-1)= chiều dài dãy con dài nhất trong miền [1..(i-1)] có tổng chia với k dư (k-r)

Tham số thể hiện kích thước của bài toán: kích thước miền và số dư của tổng chia với k

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Lập công thức đệ qui

Gọi **F(i, v)** = chiều dài dãy con dài nhất trong miền **[1..i]** có tổng chia với k dư là v.

1. Nếu dãy con dài nhất không có A[i] thì **F(i, v) = F(i-1, v)**
2. Nếu dãy con dài nhất có chứa A[i]:
   Gọi **r = A[i] mod k** ta có **F(i, v) = F(i-1, v - r) + 1**
   - Nếu **v – r = 0**: **F(i, v) = F(i-1, 0) + 1**
   - Nếu **v – r > 0** và **F(i-1, v - r)>0**: **F(i, v) = F(i-1, v - r) + 1**
   - Nếu **v – r < 0** và **F(i-1, v-r+k)>0**: **F(i, v) = F(i-1, v-r+k) + 1**

   Thay: **(v - r) mod k** = **(v – r + k) mod k**

Bài toán nhỏ nhất ứng với **i = 1**:

- **F(1,v)= 0** nếu **r <> v**
- **F(1,v)= 1** nếu **r = v**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Công thức đệ qui

Gọi **r = A[i] mod k**.

- Với **i = 1**:
  - **F(1, v) = 0** nếu **r <> v**
  - **F(1, v) = 1** nếu **r = v**

- Với **i > 1**:

  - Nếu **v= r** thì: **F(i, v)= Max {F(i-1, v), F(i-1, 0) +1}**

  - Nếu **v > r** và **F(i-1, v- r) >0** thì:
    F(i, v) = Max {F(i-1, v), F(i-1, v – r) +1}

  - Nếu **v < r** và **F(i-1, v – r + k)>0** thì:
    F(i, v) = Max{F(i-1, v), F(i-1, v – r + k) + 1}

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Rút gọn công thức đệ qui

Gọi **r = A[i] mod k**.

- Với **i = 1**:
  - **F(1, v) = 0** nếu **r <> v**
  - **F(1, v) = 1** nếu **r = v**

- Với **i > 1**:

  - Nếu **v= r** thì: **F(i, v)= Max {F(i-1, v), F(i-1, 0) +1}**

  - Nếu **v <> r** và **F(i-1, (v-r+k) mod k) > 0** thì:
    F(i, v) = Max {F(i-1, v), F(i-1, (v – r + k) mod k) +1}

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Xây dựng bảng phương án:

❖ Cấu trúc bảng phương án:

Dùng mảng **F[1..n] [0..K-1]** chứa giá trị của các **F(i, v)**

❖ Cách tính giá trị trên bảng phương án:

Điền giá trị trên dòng **1**:

Nếu **A[1] mod k = v** thì **F[1, v] = 1** ngược lại **F[1, v] = 0**

Sử dụng công thức đệ qui và giá trị trên dòng **(i -1)** để tính dòng **i**:

- Nếu **v= r** thì: **F(i, v)= Max {F(i-1, v), F(i-1, 0) +1}**
- Nếu **v <> r** và **F(i-1, (v-r+k) mod k) > 0** thì:

F(i, v)= Max {F(i-1, v), F(i-1, (v–r+k) mod k) +1}

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Ví dụ bảng phương án: **Với i = 1**

- Nếu **v <> r** thì **F(1, v) = 0**
- Nếu **v = r** thì **F(1, v) = 1**

i	r=A[i] v	0	1	2	3	4
1	1	0	1	0	0	0

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Ví dụ bảng phương án: Với i = 2

- Nếu **v= r** thì: **F(2, v)= Max {F(1, v), F(1, 0) +1}**
- Nếu **v <> r** và **F(1, (v-r+k) mod k) > 0** thì:

F(2, v)= Max {F(1, v), F(1, (v–r+k) mod k) +1}

i	r=A[i] v	0	1	2	3	4
1	1	0	1	0	0	0
2	1	**4 | 0**	**0 | 1**	**1 | 2**	**2 | 0**	**3 | 0**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Ví dụ bảng phương án: Với i = 3

- Nếu **v= r** thì: **F(3, v)= Max {F(2, v), F(2, 0) +1}**
- Nếu **v <> r** và **F(1, (v-r+k) mod k) > 0** thì:

F(3, v)= Max {F(2, v), F(2, (v–r+k) mod k) +1}

i	r=A[i] v	0	1	2	3	4
1	1	0	1	0	0	0
2	1	4 | 0	0 | 1	1 | 2	2 | 0	3 | 0
3	2	**3 | 0**	**4 | 1**	**0 | 2**	**1 | 2**	**2 | 3**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Ví dụ bảng phương án: Với i = 4

- Nếu **v= r** thì: **F(4, v)= Max {F(3, v), F(3, 0) +1}**
- Nếu **v <> r** và **F(1, (v-r+k) mod k) > 0** thì:
  F(4, v)= Max {F(3, v), F(3, (v–r+k) mod k) +1}

i	r=A[i] v	0	1	2	3	4
1	1	0	1	0	0	0
2	1	4 | 0	0 | 1	1 | 2	2 | 0	3 | 0
3	2	3 | 0	4 | 1	0 | 2	1 | 2	2 | 3
4	2	**3 | 3**	**4 | 4**	**0 | 2**	**1 | 2**	**2 | 3**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Ví dụ bảng phương án: **Với i = 5**

- Nếu **v= r** thì: **F(5, v)= Max {F(4, v), F(4, 0) +1}**
- Nếu **v <> r** và **F(1, (v-r+k) mod k) > 0** thì:

F(5, v)= Max {F(4, v), F(4, (v–r+k) mod k) +1}

i	**r=A[i] v**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	0	1	0	0	0
2	1	4 | 0	0 | 1	1 | 2	2 | 0	3 | 0
3	2	3 | 0	4 | 1	0 | 2	1 | 2	2 | 3
4	2	**3 | 3**	**4 | 4**	**0 | 2**	**1 | 2**	**2 | 3**
5	0	**0 | 4**	**1 | 5**	**2 | 3**	**3 | 3**	**4 | 4**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Ví dụ bảng phương án: Với i = 6

- Nếu **v= r** thì: **F(6, v)= Max {F(5, v), F(5, 0) +1}**
- Nếu **v <> r** và **F(1, (v-r+k) mod k) > 0** thì:

F(6, v)= Max {F(5, v), F(5, (v–r+k) mod k) +1}

i	r=A[i] v	0	1	2	3	4
1	1	0	1	0	0	0
2	1	4 | 0	0 | 1	1 | 2	2 | 0	3 | 0
3	2	3 | 0	4 | 1	0 | 2	1 | 2	2 | 3
4	2	**3 | 3**	**4 | 4**	**0 | 2**	**1 | 2**	**2 | 3**
5	0	**0 | 4**	**1 | 5**	**2 | 3**	**3 | 3**	**4 | 4**
6	3	**2 | 4**	**3 | 5**	**4 | 5**	**0 | 5**	**1 | 6**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Thuật toán tạo bảng phương án

```
void TaoBangPhuongAn(F [1...n] [0...k-1])
{   for (v=0; v <= M; v++) F[1, v] = (A[i]%k == v) ? 1 : 0;
    for (i = 2; i <= n; i++)
        for (v=0; v <= k-1; v++)
        {   r = A[i] % k; F[i, v] = F[i-1, v];
            if (v == r && F[i, v] <= F[i-1, 0 ])
                F[i, v] = F[ i-1, 0] ] + 1;
            else
            if  (F[i-1, (v - r + k)%k] >0 && F[i, v] <= F[i-1, (v -
                r + k)%k])      F[i, v] = F[ i -1, (v - r + k)%k] + 1;
        }
}
```

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Truy vết:

Bắt đầu từ ô **F[n, 0]** trên dòng n ta dò ngược về dòng 0 theo nguyên tắc:

- Nếu **F[i–1, (v-r+k)% k] > 0** và **F[i, v] > F[i–1, (v-r+k)% k]:**
  - **A[i]** được chọn
  - Truy tiếp ô **F[i -1, (v-r+k)% k].**
- Ngược lại thì **A[i]** không được chọn, truy tiếp ô **F[i -1, v]**.

i	r=A[i] v	0	1	2	3	4
1	1	0	1	0	0	0
2	1	4 | 0	0 | 1	1 | 2	2 | 0	3 | 0
3	2	3 | 0	4 | 1	0 | 2	1 | 2	2 | 3
4	2	3 | 3	4 | 4	0 | 2	1 | 2	2 | 3
5	0	0 | 4	1 | 5	2 | 3	3 | 3	4 | 4
6	3	**2 | 4**	**3 | 5**	**4 | 5**	**0 | 5**	**1 | 6**

7.4. Bài toán dãy con có tổng chia hết cho k

Thuật toán truy vết

```
void TruyVet(F [i, v])
{  Bắt đầu từ ô F[n, 0] trên dòng n: i = n; v = 0;
   for (; i > 0; i --)
      if(F[i–1, (v-r+k)% k] >0 && F[i, v]> F[i–1, (v-r+k)% k])
        {   <A[i] được chọn>;
            v = (v – r + k)% k;
        }
}
```

KIỂM TRA

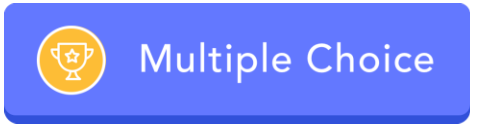
Cho một balo khối lượng M=9. Có 5 đồ vật lần lượt như sau:

Giá trị C[i] = {3, 5, 6, 4, 1};

khối lượng A[i] = {3, 4, 5, 2, 1}.

Hãy chọn các đồ vật để cho vào ba lô sao cho các đồ vật được chọn có giá trị lớn nhất và khối lượng không vượt quá khối lượng balo. Mỗi đồ vật có thể được chọn 1 lần hoặc không chọn.

Câu hỏi củng cố bài



Tổng kết

Bài toán ba lô 2

- Tham số thể hiện kích thước bài toán
- Lập công thức đệ quy
- Xây dựng bảng phương án lựa chọn các gói hàng $\rightarrow$ p/ án tối ưu
- Truy lại các gói hàng cùng s/l đã chọn

Bài toán dãy con nhỏ nhất chia hết cho k

- Tham số thể hiện kích thước bài toán
- Lập công thức đệ quy
- Xây dựng bảng phương án lựa chọn các số trong dãy $\rightarrow$ p/ án tối ưu
- Truy vết tìm lại các số đã chọn

Bài tập

1. Cho một balo có khối lượng M= 11.

   Có 4 đồ vật lần lượt như sau: khối lượng A[i]={4,2,4,3} với giá trị tương ứng C[i]={1,5,2,7}.

   Hãy chọn các đồ vật để cho vào balo sao cho các đồ vật được chọn có giá trị lớn nhất và khối lượng không vượt quá khối lượng của balo. Biết rằng mỗi đồ vật có thể được chọn nhiều lần.

Bài tập

2. Cho một dãy A gồm 8 số nguyên như sau

13	7	9	8	24	6	12	20

và một số nguyên dương k=8.

Hãy tìm một dãy con (không nhất thiết phải liên tiếp nhau) dài nhất có tổng các số chia hết cho số k.

Tài liệu tham khảo

[1]. Giáo trình Cấu trúc dữ liệu và giải thuật – Lê Văn Vinh, NXB Đại học quốc gia TP HCM, 2013

[2]. Cấu trúc dữ liệu & thuật toán, Đỗ Xuân Lôi, NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2010.

[3]. Trần Thông Quế, *Cấu trúc dữ liệu và thuật toán (phân tích và cài đặt trên C/C++)*, NXB Thông tin và truyền thông, 2018

[4]. Robert Sedgewick, *Cẩm nang thuật toán*, NXB Khoa học kỹ thuật, 2004 .

[5]. PGS.TS Hoàng Nghĩa Tý, *Cấu trúc dữ liệu và thuật toán*, NXB xây dựng, 2014