

不同厚度水层的非线性热对流斑图 的观察与分析

杨佳宇*

北京大学物理学院 学号：1800011409

2020 年 10 月 29 日

本实验利用阴影法观察了厚度为 2 mm 与 4 mm 的瑞利-贝纳德对流系统在不同温差下的稳定的热对流斑图。分析了斑图同心圆环图样的成因，及热对流斑图随温差的演化情况，并得到了临界温差所在的大致范围。结合实验结果，使用理论模型进行解释，并结合实际分析与理论模型的差异及造成差异的原因。通过实验的观察分析与解释，加深了对贝纳问题的认识，也对耗散结构理论有了更深刻的理解。

关键词：耗散结构，热对流斑图，贝纳问题，阴影法

*1800011409@pku.edu.cn; Tel: (+86) 180 9268 9592

1 引言

热对流 (thermal flow) 是一种由热力驱动的流体运动. 由于热力的不均匀分布, 流体内部的存在温差, 温差又会引起流体的密度差, 流体处在重力场中, 会出现阿基米德浮力, 在浮力的驱动下产生热对流. 热对流具有”热流体上升, 冷流体下沉”的基本特征, 是一种较为常见的自然现象.

1900 年, 贝纳德 (Henri Bénard) 对具有自由面-固壁底层的流体薄层进行了热对流实验, 观察到由于对流现象形成的各种对流图形 (斑图). 后来瑞利对该系统进行了理论分析, 因此该系统也成为瑞利-贝纳德系统. 而这种发生在底部加热的一层流体表面上的对流也被称为瑞利-贝纳德对流 (Rayleigh–Bénard convection).

通过长期对非平衡态热力学系统在非线性区演化的研究, 比利时布鲁塞尔学派的普利高津 (I. Prigogine) 在 20 世纪 60 年代末期提出了耗散结构理论 (Dissipative Structure Theory), 描述了远离平衡态的开放系统. 耗散结构理论的提出使得人们对瑞利-贝纳德对流有了更为深入的认识, 同时也广泛影响了自然科学以至社会科学的发展.

本实验对厚度为 $d = 2 \text{ mm}$ 和 $d = 4 \text{ mm}$ 的对流水层进行观察. 在水层下表面进行加热, 在上下表面温差稳定时观察其热对流斑图, 利用阴影法将水层密度分布转化为透射光光强分布, 并使用 CCD 记录斑图. 实验中改变下表面的加热温度以改变上下表面温差, 对不同温差下的对流斑图进行记录和分析, 观察热对流斑图随温差增加的演化情况, 并大致得到耗散结构出现时的临界参数.

2 理论

2.1 耗散结构理论

耗散结构理论由普利高津提出, 在 20 世纪 60 年代末发展起来. 耗散结构理论讨论的是一个远离平衡态的系统. 当我们使用某个参量来描述系统偏离平衡态的程度时, 若驱动系统使得这个参量到达一定阈值, 该系统会出现分岔. 在偏离平衡态参量越过这一阈值、系统越过分岔点后, 离开原来的无序的热力学分支, 发生突变, 达到一个全新的有序稳定的状态. 这种有序结构被称为”耗散结构”.

耗散结构理论告诉我们, 系统是开放的、系统远离平衡态是系统从无序状态过渡到耗散结构需要满足的两个必要条件. 在满足这两个必要条件时, 系统内部的摩擦、粘滞、扩散等耗散因素会发挥作用, 使系统形成新的稳定有序结构.

2.2 瑞利-贝纳德对流的线性稳定性分析

瑞利-贝纳德对流系统的示意图如图1所示。流体处于两个温度不同的无限大平板之间，整个系统处在重力加速度大小为 g 的竖直向下的重力场中。上下温差设为 ΔT 。

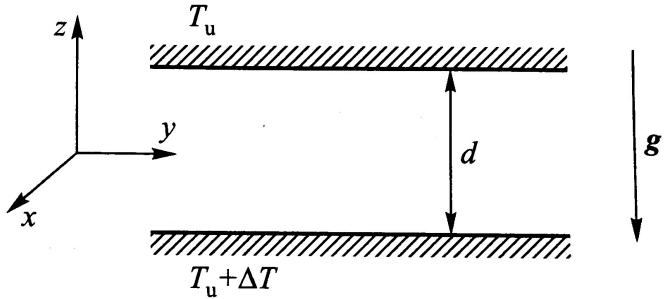


图 1. 瑞利-贝纳德对流系统的示意图^[1], 上下为温度不同的两个无限大平板

对于该系统，应该满足鲍辛尼斯克条件，对应的热对流方程如(1)。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla V = g\alpha T \mathbf{z} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \gamma \nabla^2 \mathbf{V} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \end{array} \right. \quad (1)$$

(1)式中第一个方程为斯托克斯方程导出的结果，第二个方程为流体的连续性方程，第三个方程代表了热传导方程。 \mathbf{V} 为流体的流速场， α 、 γ 、 κ 分别为液体的热膨胀系数、黏度、热导率。该方程组的物理意义是，外界的加热 ($\kappa \nabla^2 T$) 使流体中产生了温度场 T ，在重力场中通过浮力作用 $g\alpha T \mathbf{z}$ 可以影响流体内的流速场 \mathbf{V} ，即影响其内部的对流。而对流又可以带来热量传输 ($\mathbf{V} \cdot \nabla T$)，从而改变原来的温度分布。

结合系统本身的边界条件，

$$\left\{ \begin{array}{l} T(z = -d/2) = T_u + \Delta T \\ T(z = d/2) = T_u \\ V(z = -d/2) = V(z = d/2) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

我们可以解出定常解：

$$T_0(z) = T_u + \Delta T \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{d} \right), \quad \mathbf{V}_0 = 0 \quad (3)$$

同时也可根据(4)式来得到 $p_0(z)$ 。

$$g\alpha T_0(z) \mathbf{z} = \frac{1}{\rho} \nabla p_0(z) \quad (4)$$

我们对定态解加上微扰, $T = T_0 + \theta$, $p = p_0 + p'$, $\mathbf{V} = \mathbf{u}$, 代入(2), 再进行去量纲化, 同时考虑微扰是小量, 只保留线性项, 最终可以得到系统满足的方程为:

$$\begin{cases} \sigma^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \theta \mathbf{z} - \nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = Ra\omega + \nabla^2 \theta \end{cases} \quad (5)$$

其中边界条件为 $\theta = \mathbf{u} = 0$, $z = \pm \frac{1}{2}$.

(5)式中 $Ra \equiv \frac{g\alpha d^3 \Delta T}{\kappa\gamma}$, 称为瑞利数. $\omega \equiv u_z$, 是微扰速度在 z 方向上的分量.

在(5)式中含有一个可变参量 Ra , 这是上下表面温差 ΔT 的线性函数. 当温差较低, Ra 较小的时候, 系统的噪声会随时间衰减, 保持定态解的稳定; 当温度差较大, Ra 高于一临界值 R_c 时, 部分扰动的噪声就会逐渐变大, 均匀态不稳定, 出现斑图结构. 根据数值计算结果: $R_c = 1.707.76$. ^[1]

2.3 阴影法原理

流体的折射率与其密度有关, 满足的关系如(6)式所示, 称为 Clausius-Mosotti 关系.(6)式中 M 是流体的分子量.

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi\alpha N_A}{3M} \rho \quad (6)$$

(6)式对气体与液体均成立. 我们可以从中看出, 流体中的不均匀的密度分布会导致其折射率分布不均匀, 因此我们可以通过观察光通过流体后的折射行为来推断出其折射率分布, 从而得到其密度的分布情况.

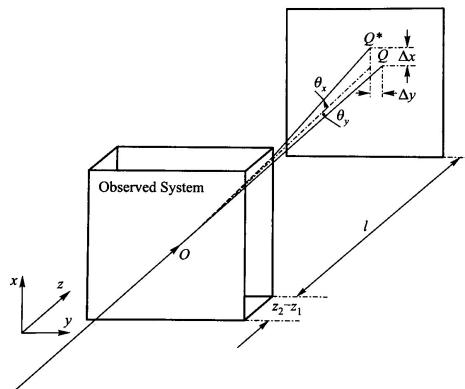


图 2. 阴影法原理介绍的示意图 ^[1].
 Q 为入射光没有偏折打到接收屏上的位置,
 Q^* 为光线实际偏折后打到接收屏上的位置.

阴影法的装置示意图如图2所示. 根据费马原理, 并近似地认为光线在经过被观测系统后相对入射点没有发生位置的偏移, 只是出射的时候存在一个不可忽略的方向角的偏移. 我们可以得到(7)式.

$$\Delta x = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} dz, \quad \Delta y = l \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz \quad (7)$$

采用准平行光入射被观测系统, 入射光强 $I(x, y) = I_{const}$, 记录平面的光强分布为 $I^*(x^*, y^*)$, 且满足 $I^*(x^*, y^*) dx^* dy^* = I_{const} dx dy$. 我们最终可以得到(8)式.

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{|I^* - I|}{I} = l \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\ln n) dz \quad (8)$$

从(8)式可以看出, 当流场中 $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ 或者 $\frac{\partial^2 n}{\partial y^2}$ 不为常量的时候, 可以观察到记录平面上的照明度的不均匀分布, 从而可以根据观察到的光强分布对折射率分布进行分析, 结合(6)式得到流体的密度分布.^[4]

3 实验

3.1 装置介绍

本实验装置示意图如图3所示.

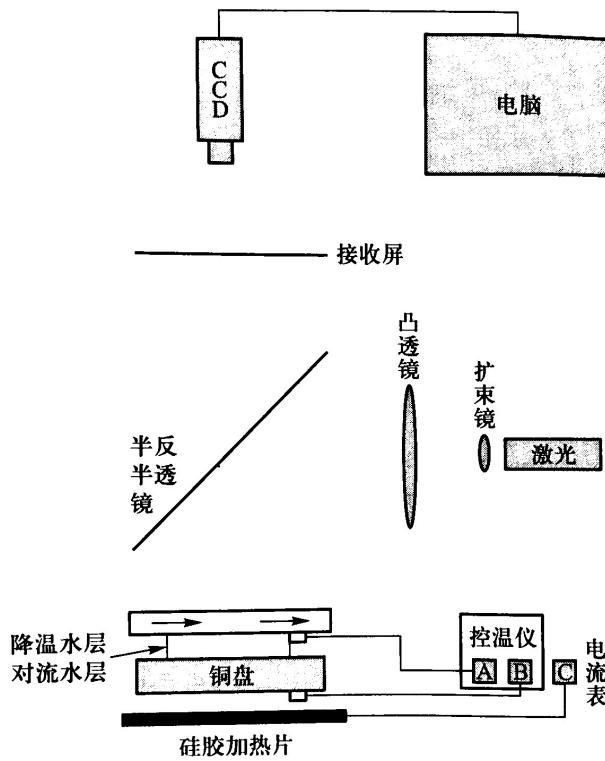


图 3. 实验装置示意图

本实验装置中的光路部分由激光器作为光源, 经过扩束镜扩束后再经过凸透镜汇聚成准平行光, 经过半反半透镜反射, 平行入射对流水层, 对流水层下表面铜盘上侧镀了金层, 对入射光线进行反射, 光线再次穿过对流水层, 投射过半反半透镜, 到达接收屏.

瑞利-贝纳德对流系统近似由图3的下方的装置来实现. 蓝宝石片作为对流水层的上边界, 铜盘作为对流水层的下边界, 将黑色 O 环置于两平板之间, 并向其中加入去离子水. 形成具有圆形侧边界的对流水层. 蓝宝石片上方另有降温水层, 降温水层在实验中靠一水泵保持流动, 将热量带走. 铜盘下方的硅胶加热片可以为对流水层下表面进行加热. 加热电流可以调整并检测, 代表着下表面加热温度的高低.

本实验使用 Pt100 作为温度探测头, 分别在对流水层的上方蓝宝石片和下方的铜盘处放置 Pt100 来测量对流水层的上表面与下表面的温度, 连接到控温仪, 可以直接读出温度, 精确到 0.1°C . 同时使用 CCD 将接收平面上的光强分布拍摄下来, 传输到电脑上进行观察, 保存下来进行分析.

3.2 实验方法和条件

在给装置加入对流水层之前, 通过测温装置直接读取并记录上表面温度 T_u 与下表面温度 T_d . 即实验时的室温: $T_u = 24.6^{\circ}\text{C}$, $T_d = 25.9^{\circ}\text{C}$.

本实验分别使用 2 mm 厚和 4 mm 厚的 O 环进行观察, 即对 2 mm 厚和 4 mm 厚的对流水层进行实验.

在使用 2 mm 厚的 O 环时, 加入去离子水形成对流水层后调节好光路, 随后将装置静置 1 小时, 以保证对流水层内部的微小扰动全部耗散掉. 完成静置后, 升高加热电流, 随着加热电流的提高, 下表面温度与上表面温度会上升, 因为上表面存在降温水层, 上下表面温差 ΔT 也会提高. 逐渐提高加热电流, 并在调节后等待 10 分钟左右让系统稳定. 观察不同加热电流、不同温差下系统稳定后的接收平面的图样, 并在快要出现斑图时减小加热电流的变化步长, 每 50 mA 进行一次观察记录. 根据记录的斑图进行分析, 并可以得到临界加热电流、临界温差的大致范围.

在使用 4 mm 厚的 O 环时, 利用

$$Ra = \frac{g\alpha d^3 \Delta T}{\kappa\gamma} \quad (9)$$

结合 2 mm 厚水层测量的临界温差的结果, 可以计算得到 2 mm 厚水层的理论临界温差. 再以 100 mA 为步长逐渐提高加热电流, 直到观察到斑图, 可以提高步长, 观察 Ra 很大时斑图的变化. 并对实验结果进行分析, 得到 4 mm 厚水层对应的临界加热电流、临界温差的大致范围, 并与理论计算的结果进行对比分析.

4 结果与讨论

4.1 2 mm厚对流水层的实验结果

2 mm厚的对流水层得到的热对流斑图如图4所示.

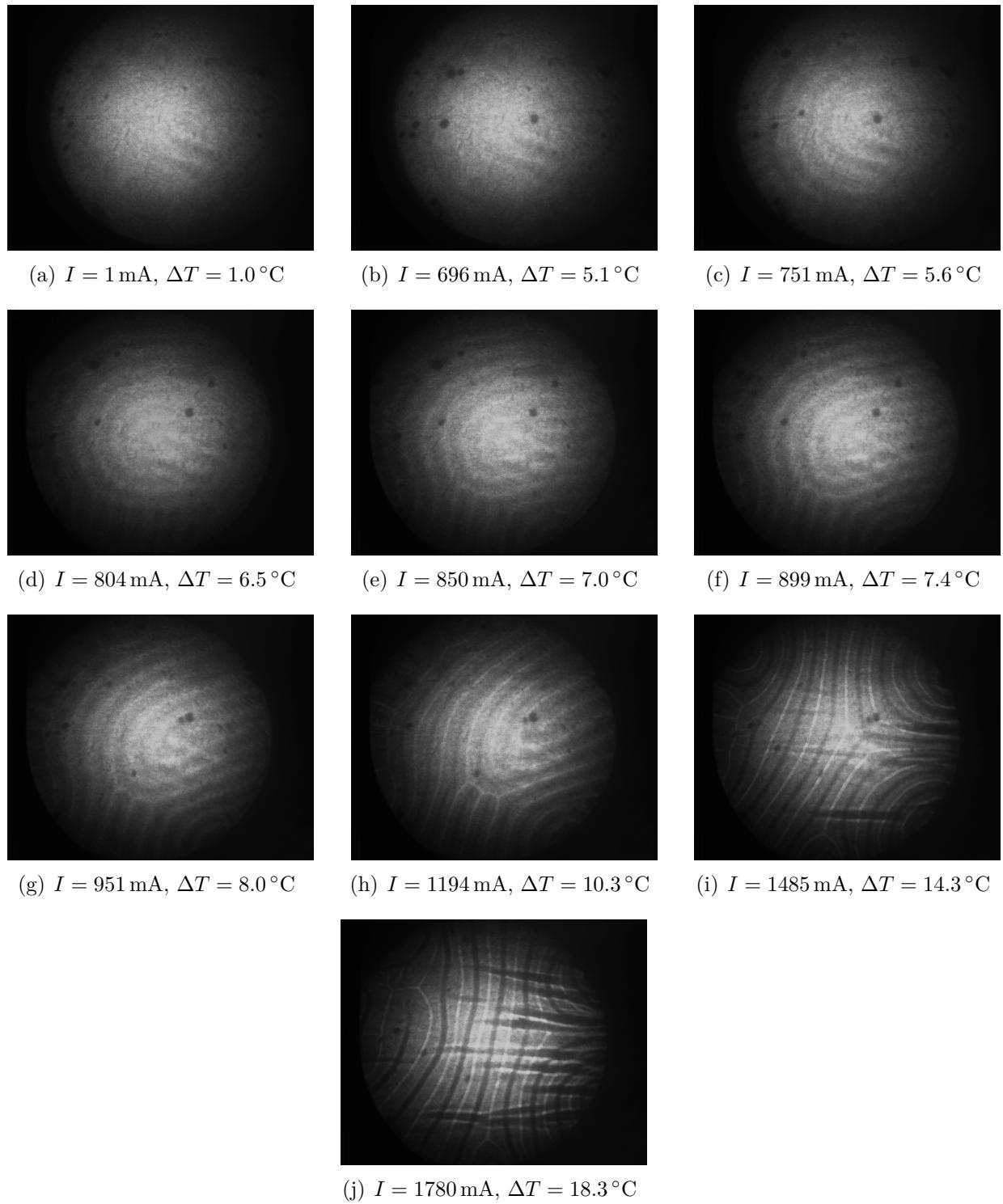


图 4. 2 mm厚水层得到的热对流斑图

图4中每张斑图对应的实验数据如表1所示.

表 1. 图4中各斑图对应的实验数据

图片标号	加热电流 I/mA	上表面 $T_u/^\circ\text{C}$	下表面 $T_d/^\circ\text{C}$	$\Delta T/^\circ\text{C}$
a	1	26.5	27.5	1.0
b	696	28.7	33.8	5.1
c	751	29.6	35.2	5.6
d	804	30.1	36.6	6.5
e	850	31.0	38.0	7.0
f	899	31.8	39.2	7.4
g	951	32.5	40.5	8.0
h	1194	34.5	44.8	10.3
i	1485	38.0	52.3	14.3
j	1780	41.7	60.0	18.3

对图4中不同加热电流 I 、不同温差 ΔT 的热对流斑图进行对比分析, 在图4(c)中隐约出现了同心圆轮廓, 在图4(d)中出现了同心圆环结构, 在图4(e)中可以明显看到同心圆斑图, 但是右下角的同心圆边缘出现了破缺. 因此可以知道, 临界参量应处在图4(c)与图4(d)对应的参量之间, 如表2所示.

表 2. 2 mm水层对应临界参量的范围

水层厚度 h	临界加热电流 I_c	临界温差 ΔT_c
2 mm	751 mA ~ 804 mA	5.6 °C ~ 6.5 °C

对同心圆斑图产生的解释在附录中做了详细说明. 但是我们可以明显看出从图4(e)开始斑图的右方与下方出现了斑图的破缺, 这是因为实验过程中在完成图4(d)的记录之后人为的触碰到了对流系统实验装置, 使得对整个系统额外施加了一个微小扰动, 这个扰动使得原本的同心圆斑图破缺, 并随着 ΔT 的增大呈现出新的斑图结构. 但是可以看出, 在图4(e)和图4(f)中, 虽然同心圆环的右下角出现了破缺, 但是整个斑图的左上角仍然维持这很好的同心圆结构, 因此我们依然可以对其左上角部分进行进一步分析.

观察图4(c)-图4(f)中各同心圆斑图随着 ΔT 增大的变化趋势, 可以看出: 在形成同心圆斑图的过程中, ΔT 增大, 条纹变清晰, 衬比度变高, 对应的亮纹振幅较大; 在形成同心圆斑图后, ΔT 增大, 条纹的变稀疏, 同心圆环间距变大, 视野中条纹数目减少.

当 ΔT 继续增大, 可以看到同心圆环结构彻底破碎, 原本有序的结构崩溃, 形成的新斑图结构. 新的斑图结构将原来的微小扰动放大, 同时出现了白、灰、黑三种颜色区域, 结构较为复杂. 这一情形应该与对流水层中的湍流有关, 这里不作详细讨论.

4.2 4 mm厚对流水层的实验结果

4 mm厚的对流水层得到的热对流斑图如图5所示.

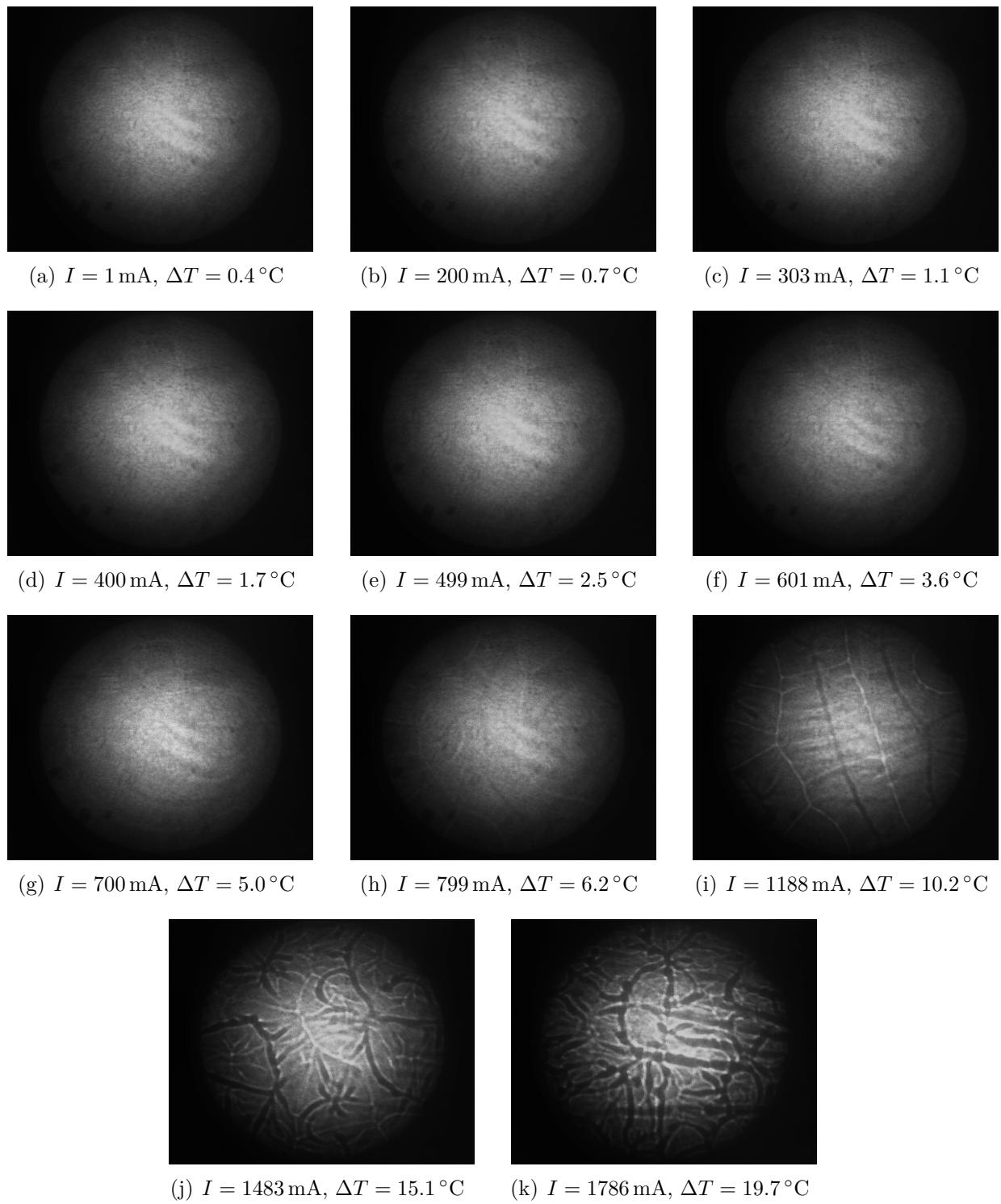


图 5. 4 mm厚水层得到的热对流斑图

图5中每张斑图对应的实验数据如表3所示.

表 3. 图5中各斑图对应的实验数据

图片标号	加热电流 I/mA	上表面 $T_u/^\circ\text{C}$	下表面 $T_d/^\circ\text{C}$	$\Delta T/^\circ\text{C}$
a	1	32.0	32.4	0.4
b	200	31.4	32.1	0.7
c	303	31.2	32.3	1.1
d	400	31.1	32.8	1.7
e	499	31.1	33.6	2.5
f	601	31.2	34.8	3.6
g	700	31.4	36.4	5.0
h	799	31.7	37.9	6.2
i	1188	33.3	43.5	10.2
j	1483	35.8	50.9	15.1
k	1786	38.9	58.6	19.7

对图5中不同加热电流 I 、不同温差 ΔT 的热对流斑图进行分析, 在图5(f)中隐约出现了同心圆的轮廓, 在图5(g)中出现了同心圆斑图图样, 在图5(h)中可以看到同心圆斑图破裂. 因此可以得知, 临界参量应处在图5(f)与图5(g)对应的参量之间, 如表4所示.

表 4. 4 mm水层对应临界参量的范围

水层厚度 h	临界加热电流 I_c	临界温差 ΔT_c
2 mm	601 mA ~ 700 mA	3.6 °C ~ 5.0 °C

对比表2与表4, 结合(9)式, 当 Rc 固定时, $\Delta T_c \propto d^{-3}$. 因此理论上4 mm水层对应的临界温度差应该是2 mm水层的 $\frac{1}{8}$. 但是实验得到的结果却并非如此, 只在定性上与理论符合, 即4 mm水层对应的临界温度差比2 mm水层的小. 这一实验与理论的差异是因为我们的实验装置并不能达到理论的理想条件. 理论模型是基于两个无限大平面间的对流水层进行分析的, 而我们实际的实验装置是有限大的圆柱形水层, 侧面也存在散热. 与此同时, 上下表面也并不是理想的导热材料, 因此上下表面各自的温度也并不是理想的均匀状态. 这些理想条件无法实现, 导致了实验结果与定量理论分析上的较大差异.

另外, 可以发现对于4 mm水层, 同心圆环隐约出现, 并且很快就破缺, 结合(9)式, d 增大为原来的 2 倍之后, 随着 ΔT 的增大, Ra 增大地更为迅速, 因此其稳定的同心圆斑图可以存在对应的 ΔT 区间变小, 体现为同心圆环迅速破缺. 但整体上, 4 mm水层也具备着4.1节中分析的2 mm水层所具备的性质.

4.3 对斑图中流动阴影的分析

从图4(i)、图4(j)、图5(k)中可以看出, 无论是2 mm水层还是4 mm水层, 在 ΔT 很大的时候, 原本的斑图表面就会出现从左向右流动的黑色阴影.

对这一现象有两个猜想: 其一是上方降温水层在流动, 在上表面温度达到一定程度的时候其内部的密度、内部的气泡会使得流水的密度存在不均匀的分布, 并且这一分布在随着降温水层的流动而移动, 这一不均匀分布最终也体现在了斑图中; 其二是在温差比较大的时候, 对流水层内部的水流情况混乱, 也存在着湍流, 因此这一阴影与对流水层内部的流动有关.

以上两种猜想均有其不合理的地方. 考虑降温水层, 在图4(i)、图4(j)、图5(k)中对应的上表面温度实际上与之前并没有显著差异, 除非这一密度不均匀分布的情况的出现也需要上方降温水层到达一定阈值温度才可以, 并且是一种到达阈值温度的突变. 考虑对流水层, 这一流动的阴影是源源不断的从一个方向流向另一个方向, 在结构对称的有限区域对流水层内似乎并不能够发生这样的单向持续流动.

因此对这一现象的原因尚未有定论.

5 结论

本次实验观察了厚度分别为2 mm与4 mm水层的热对流同心圆环斑图. 得到2 mm水层的临界温差 ΔT_c 所在范围为 $5.6^\circ\text{C} \sim 6.5^\circ\text{C}$, 4 mm水层的临界温差 ΔT_c 所在范围为 $3.6^\circ\text{C} \sim 5.0^\circ\text{C}$. 同时, 对斑图对温差变化的演化进行分析, 发现随着温差 ΔT 的增大, 逐渐出现同心圆环斑图, 同心圆环逐渐清晰、衬比度增强、环间距增大, 随后同心圆环斑图破碎, 出现新的斑图, 图样混乱. 此外, 4 mm水层的同心圆环会更快的破碎. 通过对两种厚度的非线性热对流斑图的演化状况的观察与分析, 对耗散结构理论有了更深入的理解.

6 致谢

非常感谢周路群老师在整个实验过程中的悉心指导以及对实验本身、相关背景的生动讲解. 也很感谢我的搭档赵贤觉同学在实验过程中的协力合作.

附录

随着温差的升高, 可看到黑白结构 (即斑图) 的出现, 黑白的区域如何对应水层的流动情况?

同心圆斑图的产生是因为液体内部对称的对流结构, 如图6所示.

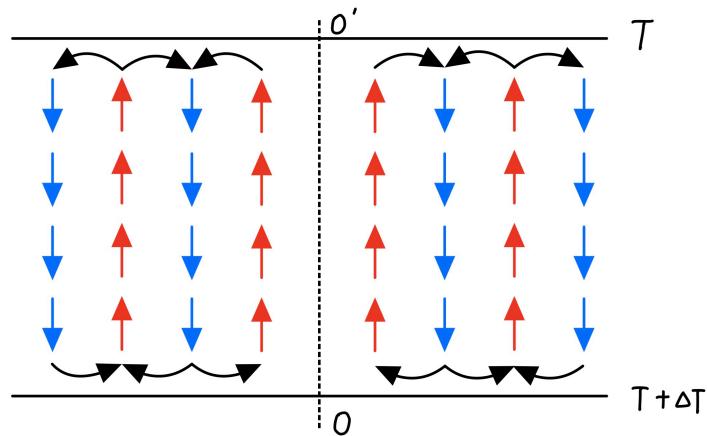


图 6. 形成同心圆斑图时液体对流示意图, 图中为过圆柱水层中轴的纵截面
蓝箭头代表冷水下流, 红箭头代表热水上流

在图6中, 下流的冷水流与上流的热水流形成的热对流, 因为冷水流密度大, 热水流密度小, 结合(6)式可以得到, 冷水下流对应的区域折射率 n 较大, 热水上流对应的区域折射率 n 较小. 当光线经过具有一定折射率分布的区域时, 会从折射率较小的一侧向折射率较大的一侧偏移, 因此入射的准平行光在离开对流水层的时候会向冷水下流对应的区域偏转, 从而使得接收平面上冷水区对应的位置接收到的光线较多, 而热水区对应的位置接收到的光线较少, 形成交替的明暗条纹.

所以, 黑区域对应的是热水上流的区域, 白区域对应的是冷水下流的区域.

另外, 由于水层本身是圆柱形水层, 侧边界为圆形边界, 因此该对流结构也是圆环状对流层, 最终形成明暗交替的同心圆环斑图.

斑图出现的临界点如何确定? 如何根据所观察到的现象确定临界点?

斑图出现的临界点应当是观察到同心圆斑图恰好形成时对应的温差. 但是实际实验中, 在临界点附近加热电流的步长有 50 mA , 很难保证恰好观察到临界点的斑图, 同时因为在临界点转变点附近出现的斑图, 冷热水之间温差并不大, 用阴影法不能获得的图像对比度不高, 判断斑图出现存在困难, 因此我们只是给出临界点所在的范围.

如4.1节与4.2节中所描述, 当前一个斑图隐约出现同心圆轮廓, 后一个斑图出现了成形的同心圆结构时, 可以判断临界点在这两个斑图所对应的参量之间.

当水层换成4 mm时, 考虑临界点会如何改变? 并注意实验过程中的参数选择.

根据(9)式, 当 Rc 固定时, $\Delta T_c \propto d^{-3}$. 因此理论上4 mm水层对应的临界温度差应该是2 mm水层的 $\frac{1}{8}$.

在实验中从1 mA开始加加热电流, 步长设置为100 mA, 来寻找4 mm水层的临界温差, 再将其与理论的临界点改变的位置进行比较.

我们发现理论结果与实际实验得到的临界点并不相符, 或者说只在定性上是符合的, 在4.2节中对这一现象的原因进行了详细分析.

如何确定斑图的空间特征尺度?

从图6中可以看出, 斑图的空间特征尺度即为图中的周期性单元的长度, 也就是斑图中相邻明暗条纹之间的距离. 因此测量实际 O 圈的直径 D , 并数出斑图中明环和暗环总数 N , 可以得到其空间特征尺度 a 为

$$a = \frac{D}{2N} \quad (10)$$

斑图的空间特征尺度与对流水层厚度的关系如何?

不同对流水层厚度, 对应的不同厚度 O 圈具有相同的直径 D , 因此只需要比较其总环数 N 即可. 对比图5(g)与图4(d), 可以看出图4(d)中的总环数 $N = 14$, 而图5(g)中的总环数 $N < 10$. 因此很显然2 mm水层的空间特征尺度比4 mm水层更小.

因此, 可以推断, 对流水层厚度越大, 斑图的空间特征尺度越大.

参考文献

- [1] 吴思诚, 荀坤 2015 近代物理实验 (第4版)(北京: 高等教育出版社) P364-P376
- [2] 周路群, 冉书能, 贾春燕 2012 物理实验 32(8)P1-P5