线性代数

线性代数

- 基本概念
- 矩阵基础运算
- 解方程组
- 特征向量与特征值

基本概念

◆ 标量

定义:
标量是只有大小没有方向的量。在数学中，它通常是一个实数或复数。

通俗:
想象你有5个苹果。这个数字“5”就是一个标量。它只告诉你有多少苹果，但不告诉你这些苹果放在哪里。

基本概念

◆ 向量

定义：向量是具有大小和方向的量。在数学中，它通常表示为一个有序的数字列表，如二维或三维空间中的点。

通俗：想象你在一个大房间里，你想告诉你的朋友一个宝藏的位置。你可以说：“从门口开始，走5步向前，然后走3步向右。”这个“5步向前和3步向右”就像一个向量，它有方向和距离。

基本概念

◆ 矩阵

定义：矩阵是一个二维数组，其中的每个元素都是一个标量。它可以表示线性变换。

通俗：想象你有一个秘密地图，上面有很多宝藏的位置。为了整齐地记录所有的位置，你决定用一个网格或表格来写下所有的“向前和向右”的步数。这个表格就像一个矩阵，它帮助你整齐地记录信息。

基本概念

◆ 张量

定义：张量是一个可以在多个方向上有分量的数学对象。标量是零阶张量，向量是一阶张量，矩阵是二阶张量。更高阶的张量可以看作是多维数组。

通俗：想象你不仅在一个房间里找宝藏，而且在一个大楼里。这时，你不仅要告诉你的朋友向前走多少步、向右走多少步，还要告诉他上或下走多少楼梯。如果你用一个更大的表格来记录这些信息，其中包括向前、向右和上下的步数，这就像一个张量。张量就是一个更高级的表格，可以记录更多的信息。

案例实践

- ◆ 创建向量、矩阵、张量

案例实践

- ◆ 将Numpy矩阵保存成本地图像

矩阵基础运算

◆ 矩阵的加法

设有 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$

则 $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}$

案例实践

◆ 图像增强（调整亮度）

矩阵基础运算

◆ 标量与矩阵的乘法

设有 $c = 3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

则 $cA = 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

案例实践

◆ 图像增强（调整对比度）

案例实践

◆ 用代码完成下面的操作：

设有 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ $c=3$

则 $cA=3\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 1 & 3\times 2\\ 3\times 3 & 3\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}$$

解方程组

◆ 解以下方程

案例实践

◆ 使用代码解以下方程

特征向量与特征值

◆ 特征值

定义：与特征向量相对应的标量 λ 称为特征值。它表示在特定的特征向量方向上，变换的缩放比例。

想象一个拉伸机，你放入一根箭头，拉伸机的作用下，这根箭头可能会被拉长、缩短或者保持原长，但方向不变。这个“拉伸”或者“缩短”的倍数，就是特征值。特征值反映了这个变换增强或减弱了向量的程度。

特征向量与特征值

◆ 特征向量

定义：如果一个非零向量 v 在一个线性变换下的效果仅仅是被伸缩（缩放或拉伸），而方向不变，那么这个向量被称为特征向量。

那根被拉伸后方向不变的箭头，就是特征向量。它是一个特殊的向量，它在矩阵变换下只是被伸缩，但不改变其方向。可以指明变换的主要方向

特征向量与特征值

◆ 求特征值与特征向量

求解以下矩阵的特征值与特征向量：$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

特征向量与特征值

◆ 求特征值与特征向量

求解以下矩阵的特征值与特征向量：$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1.计算特征方程

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

2.求特征值

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$

3.求特征向量

$(A - \lambda I)x = 0$

当 $\lambda_1 = 5$ 时，特征向量为 $\begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$ 当 $\lambda_2 = 2$ 时，特征向量为 $\begin{pmatrix} -0.447 \\ 0.894 \end{pmatrix}$

案例实践

◆ 使用代码解以下方程

求解以下矩阵的特征值与特征向量：$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

特征向量与特征值

◆ 图像的SVD分解

对一幅图像的SVD分解为三个部分：

U **矩阵**：包含了“左奇异向量”，可以想象成是一组基础的图像模式。
Σ矩阵：包含了“奇异值”，表明了每个图像模式的重要性或权重。较大的奇异值对应于图像中更重要的特征。
V **矩阵**：包含了“右奇异向量”，它与U矩阵类似，但从不同的角度描述了图像的特征。

通过这种分解，图像转化成一系列的模式和对应的权重。可通过用较少的数据来描述一幅图像，同时保留其关键特征。

案例实践

◆ 对图像进行SVD分解