书面题

1. $2\lg(n+50)^5 < \sqrt{n} < 0.05n^{10}+3n^3+1 < 3^{2n} < 3^{3n} < (n^2+3)!$

2. (1) 计算数组A中大于val(50)的元素之和与小于val(50)的元素之和的差值

(2) 基础运算是A[i]与val比较的动作，即 A[i] < val 和 A[i] > val

(3) 每个元素都会进行两次比较，故执行了2n次

(4) 一个for循环，取决于循环次数，即数组长度，故时间复杂度为 $O(n)$.

3. (1) 判断二维数组A是否是对称矩阵

(2) 基础运算是 A[i][j] 和 A[j][i] 比较操作，即 if (A[i][j] != A[j][i])

(3) 最坏情况，即当A是对称矩阵时，外层循环从 $0\sim n-2$，内层循环从 $i+1 \sim n-1$，

故次数为 $\sum\limits_{i=0}^{n-2}\sum\limits_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum\limits_{i=0}^{n-2}(n-1)-(i+1)+1 = \sum\limits_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = \sum\limits_{i=0}^{n-2}(n-1) - \sum\limits_{i=0}^{n-2} i = (n-1)^2 - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

平均情况下，A[i][j] 和 A[j][i] 相等的概率为 $\frac{1}{2}$，外部循环执行 $n-1$ 次，内部循环从 $i+1$ 到 $n-1$，

故次数为 $\sum\limits_{i=0}^{n-2}\sum\limits_{j=i+1}^{n-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.

最好情况：只比较一次便返回false，只执行一次

(4) 由(3)分析可知，最坏情况 $O(n^2)$，(或者说是 $O(\frac{n^2}{2})$)，平均情况 $O(n^2)$ (或者说是 $\frac{n^2}{4}$)，最好情况 $O(1)$

4. a. $T(n) = T(n-1)+2$

$= T(n-2)+2+2$

$= T(n-3)+2+2+2$

$\cdots\cdots$

$= T(n-k)+2k$

$\cdots\cdots$

$= T(1)+2(n-1)$

$= 2n-1$

b. $T(n) = 2T(\frac{n}{2})+n$

$= 2[2T(\frac{n}{2^2})+\frac{n}{2}]+n$

$= 2^2T(\frac{n}{2^2})+2n$

$= 2^3T(\frac{n}{2^3})+3n$

$\cdots\cdots$

$= 2^kT(\frac{n}{2^k})+kn$

令 $\frac{n}{2^k}=1$，即 $k=\log_2 n$

$= nT(1)+n\log_2 n$

$= n+n\log_2 n$

c. $T(n) = T(n-1)+n^2$

$= T(n-2)+n^2+(n-1)^2$

$\cdots\cdots$

$= T(1)+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2$

$= n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $T(n)$ 表示第n个月兔子的对数，来自于两部分，第一为成年兔子对数，第二为幼兔对数

第n个月兔子 = 第n个月成年兔 + 第n个月幼兔

第n个月成年兔 = 第n-1个月成年兔 + 第n-1个月幼兔 = 第n-1个月兔子

第n个月幼兔 = 第n-1个月成年兔 = 第n-2个月成年兔 + 第n-2个月幼兔 = 第n-2个月兔子

故有 $T(n) = T(n-1)+T(n-2)$，$(n\geq 3)$，$T(1)=T(2)=1$

这是一个斐波那契数列，$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

又 $T(1)=1$，$T(2)=1$，故一年后 $T(12) = T(11)+T(10) = T(9)+T(10)+T(8)+T(9) = \cdots = 144$