SLAM理论与系统

同济大学计算机科学与技术学院
--朱亚萍

第二讲 三维空间的刚体运动

1. 点与坐标系
2. 旋转矩阵
3. 旋转向量和欧拉角
4. 四元数
5. 实践：Eigen

1. 点与坐标系

1. 点与坐标系

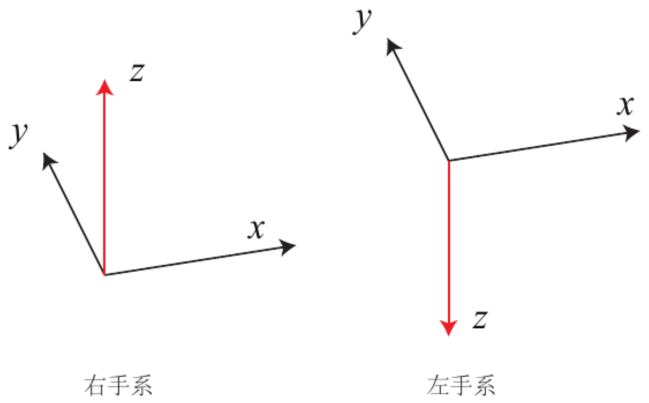
- 刚体：
  - 一种理想化的物理模型
  - 在任何外力作用下，其形状、大小和内部各点的相对位置保持不变的物体
- 不光有位置，还有自身的姿态 ➡ 位姿
  - 相机：三维空间的刚体 -- “处于空间（0，0，0）处，朝向正前方”

⇩

数学语言描述

1. 点与坐标系

- 点：空间中的基本元素，没有长度、体积
- 向量：某点指向另一点的箭头
- 向量的坐标：三维空间如何描述?
- 坐标系（参考系）：通常由3个正交的坐标轴组成（三维）



1. 点与坐标系

- 向量的坐标：三维空间如何描述?

组成空间的一组线性无关的向量 $\Rightarrow (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$

◆ 选定空间的一组基 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，

那么，任意向量 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$$

在这组基下的坐标为 $(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$。

◆ 坐标的取值：一是与向量本身有关，二是与坐标系（基）的选取有关。

1. 点与坐标系

- 向量的运算可由坐标运算表达
- 加法和减法：对应坐标相加/减
- 内积：（可以描述向量间的投影关系）

$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ ：向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的夹角

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |\boldsymbol{a}| \, |\boldsymbol{b}| \cos \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle .$$

- 外积：（向量，方向垂直于两个向量，模为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$，两个向量组成的四边形的有向面积）

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

1. 点与坐标系

- 外积：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{Vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{b} \triangleq \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{b}$$

- 定义$\boldsymbol{a}$的的反对称矩阵：

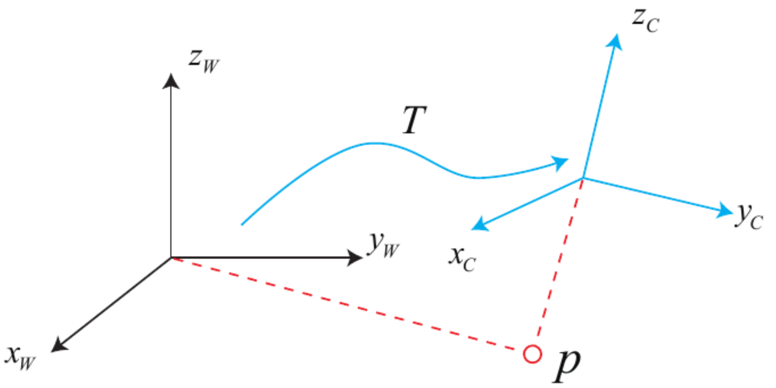
$$\boldsymbol{a}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

任意向量对应唯一一个反对称矩阵

外积$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$写成$\boldsymbol{a}$的反对称矩阵与$\boldsymbol{b}$ 的乘法，即 $\boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{b}$。

1. 点与坐标系

- SLAM中：
  - 固定的世界坐标系 VS 移动的机器人坐标系
  - 不同的传感器坐标系

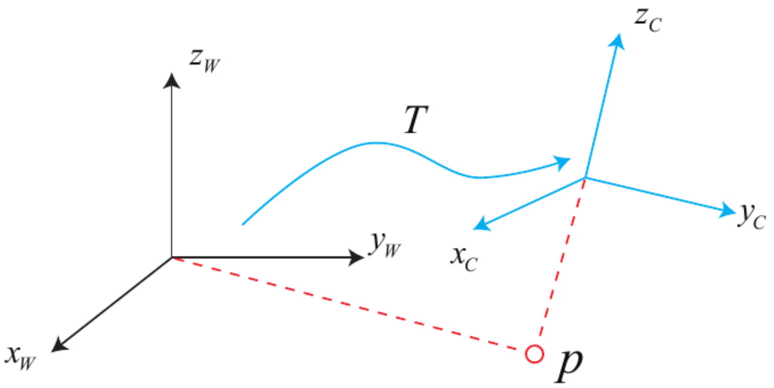


对于同一个向量$\boldsymbol{p}$，它在世界坐标系下的坐标$\boldsymbol{p}_{\mathrm{w}}$和在相机坐标系下的坐标$\boldsymbol{p}_{\mathrm{c}}$是不同的。

- 问题
  - 相机视野中的向量$\boldsymbol{p}$，在相机坐标系下$\boldsymbol{p}_{\mathrm{c}}$，世界坐标系下$\boldsymbol{p}_{\mathrm{w}}$
    - 两个坐标之间如何转换?
    - 如何计算同一个向量在不同坐标系里的坐标?

1. 点与坐标系

- 坐标系之间的运动：
  - 原点间的平移
  - 三个轴的旋转



- 刚体运动：由一个旋转加上一个平移组成
  - 同一个向量在各个坐标系下的长度和夹角不变
  - 相机运动（SLAM）
  - 相机坐标系到世界坐标系之间相差了一个欧式变换

由旋转和平移组成

平移用向量表示，旋转是什么？ 旋转矩阵

2. 旋转矩阵

2. 旋转矩阵

- 考虑一次旋转
  - 坐标系 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$发生了旋转，变成$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'})$
  - 向量$\boldsymbol{a}$不动，那么它的坐标如何变化?

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}\right]\begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{左乘} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_1^{'} & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_2^{'} & \mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_3^{'} \\ \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_1^{'} & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_2^{'} & \mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_3^{'} \\ \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_1^{'} & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_2^{'} & \mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3^{'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{'}$$

2. 旋转矩阵

- **R**称为旋转矩阵
- 可以验证：
  - R是一个正交矩阵（$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}$）；
  - R的行列式为1。
- 满足这两个性质的矩阵称为旋转矩阵。
- n维旋转矩阵的集合：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3' \\ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3' \end{bmatrix}$$

两组基的内积

$$SO(n) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n} | \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}, \det(\boldsymbol{R}) = 1\}.$$

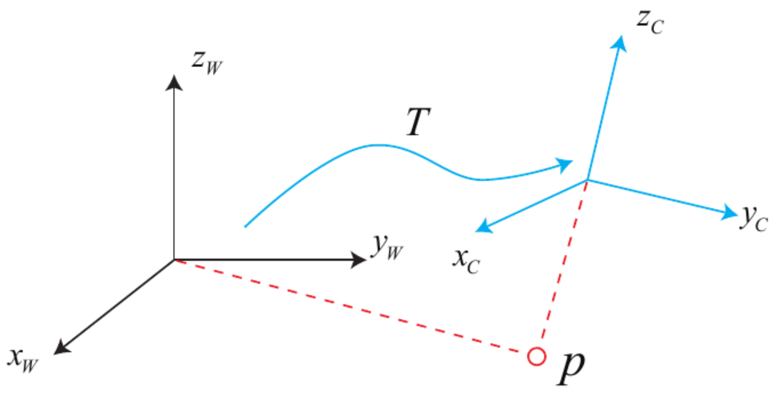
- $SO(n)$：Special Orthogonal Group（特殊正交群）

2. 旋转矩阵

- 把坐标系2的向量变换到坐标系1：$\mathbf{R}_{12}$
- 于是：从1到2的旋转可表达为：　$\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{R}_{21}\boldsymbol{a}_1$

　　反之，$\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{R}_{12}\boldsymbol{a}_2$ ➡ 从2到1

- 矩阵关系：　$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_{12}^{-1} = \mathbf{R}_{12}^{\mathrm{T}}$
- 旋转矩阵为正交阵：它的逆（转置）表示相反的旋转



$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$$

R^{T}刻画了一个相反的旋转

2. 旋转矩阵

- 欧式变换包含旋转和平移。
- 向量$\boldsymbol{a}$经过一次旋转（**R**）和一次平移（$\boldsymbol{t}$），得到 $\boldsymbol{a}'$

t：平移向量

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}.$$

- 两个坐标系间的运动可用**R**, $\boldsymbol{t}$完全描述
- 定义坐标系1、坐标系2，向量a在两个坐标系下的坐标为a1，a2，它们之间的关系为

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{t}_{12}.$$

  - 平移t_{12}对应坐标系1的原点指向坐标系2的原点的向量

2. 旋转矩阵

- 齐次坐标与变换矩阵

$$a' = Ra + t.$$

- 旋转加平移在表达复合情况（两次及以上的旋转）下有不便之处：

$$b = R_1 a + t_1, \quad c = R_2 b + t_2. \implies c = R_2 (R_1 a + t_1) + t_2.$$

形式上不再统一

- 齐次形式（Homogeneous）：末尾添1

$$\begin{bmatrix} a' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq T \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$$

齐次坐标

变换矩阵

$$\tilde{b} = T_1 \tilde{a}, \ \tilde{c} = T_2 \tilde{b} \quad \Rightarrow \tilde{c} = T_2 T_1 \tilde{a}.$$

齐次坐标

线性关系

2. 旋转矩阵

- 齐次坐标： $\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$

  乘以任意非零常数时仍表示同一坐标： $\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$

- 变换矩阵：左上角为旋转矩阵，右侧为平移向量，左下角零向量，右下角为1
- 变换矩阵（三维）的集合称为特殊欧氏群 SE(3) （Special Euclidean Group）：

$$SE(3) = \left\{ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} | \boldsymbol{R} \in SO(3), \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

表示反向变换

逆形式：

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T t \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

下一讲将深入介绍SO(3)和SE(3)。

2. 旋转矩阵

- T_{12}：从2到1的变换
- $b=Ta$：默认使用了齐次坐标； $b=Ra$：默认非齐次坐标
- C++：运算重载符

回顾：

- 坐标间的运动由欧式变换描述（平移加旋转）
- 旋转：SO(3)--旋转矩阵R；平移：向量--平移向量t
- 平移+向量：SE(3)--变换矩阵T

除了旋转矩阵/变换矩阵之外，还存在其他的表示方式。

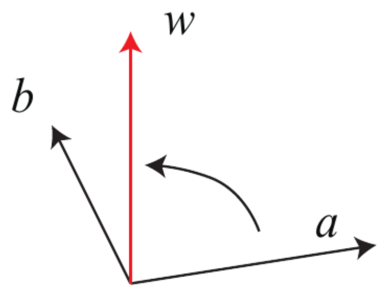
3. 旋转向量和欧拉角

3. 旋转向量与欧拉角

- 矩阵表示的缺点：
  - $\boldsymbol{R}$ 有9个元素，但仅包含3个自由度
  - 变换矩阵用16个量表示6自由度的变换

  冗余
  - 旋转矩阵必须是正交阵，且行列式为1；变换矩阵同理--估计/优化时受约束
- 能否以更少的元素表达旋转？

任意旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角刻画



- 旋转向量（Rotation Vector）or 角轴/轴角（Angle Axis）
  - 方向为旋转轴，长度为转过的角度
  - 只需一个三维向量即可描述旋转
  - 变换：旋转向量+平移向量 --6维

优势：
- 仅有三个量
- 无约束
- 更直观

3. 旋转向量与欧拉角

欧拉定理（Euler’s rotation theorem）：刚体在三维空间里的一般运动，可分解为刚体上某一点的平移，以及绕经过此点的旋转轴的转动。

- 旋转向量$\theta\boldsymbol{n}$：旋转轴为单位长度的向量$\boldsymbol{n}$，角度为θ
- 旋转矩阵$\boldsymbol{R}$和旋转向量$\theta\boldsymbol{n}$是同一个旋转的不同表达方式
  - 旋转向量→旋转矩阵：

罗德里格斯公式（Rodrigues’ s Formula）：

https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula

$$\boldsymbol{R} = \cos\theta\boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T + \sin\theta\boldsymbol{n}^\wedge.$$

  - 旋转矩阵→旋转向量：

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\boldsymbol{R}) &= \cos\theta\operatorname{tr}(\boldsymbol{I}) + (1-\cos\theta)\operatorname{tr}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T) + \sin\theta\operatorname{tr}(\boldsymbol{n}^\wedge)\\ &= 3\cos\theta + (1-\cos\theta)\\ &= 1+2\cos\theta.\end{aligned}$$

角度： $\theta = \arccos(\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{R})-1}{2}).$

轴： $\boldsymbol{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}.$

矩阵$\boldsymbol{R}$的特征值1对应的特征向量

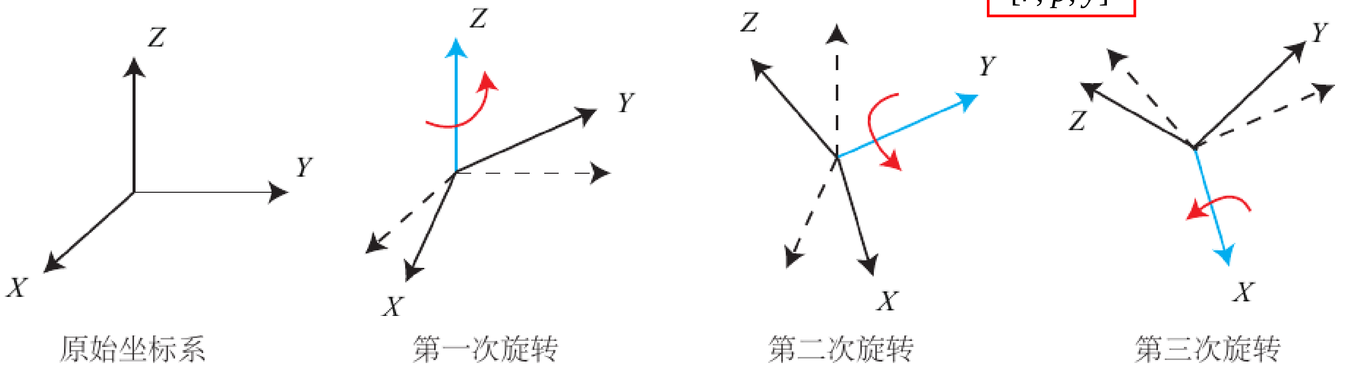
旋转轴上的向量在旋转之后不发生改变

3. 旋转向量与欧拉角

- 欧拉角（Euler Angles）--直观地描述旋转
  - 将一个旋转分解成3次绕不同轴的转动
  - 例，按Z-Y-X顺序转动（XYZ, ZYZ等）
  - 轴可以是固定轴或旋转之后的轴（动轴）
  - 常见的有：yaw-pitch-roll（偏航-俯仰-滚转）--ZYX
  - 不同领域的习惯有所不同

1. 绕物体的Z轴旋转，得到偏航角yaw；
2. 绕旋转之后的Y轴旋转，得到俯仰角pitch；
3. 绕旋转之后的X轴旋转，得到滚转角roll。

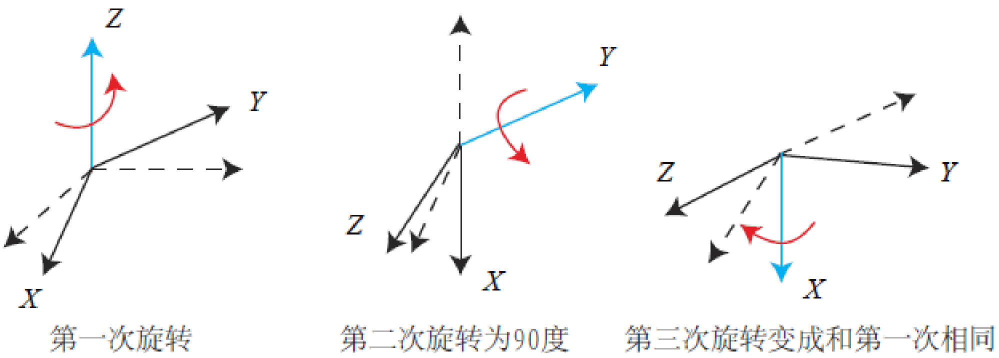
$[r, p, y]^T$



3. 旋转向量与欧拉角

- 万向锁（Gimbal Lock）
  - 欧拉角的奇异性问题
  - 在特定值时，旋转自由度减1；
  - Yaw-pitch-roll顺序下，当pitch为90度时，存在奇异性

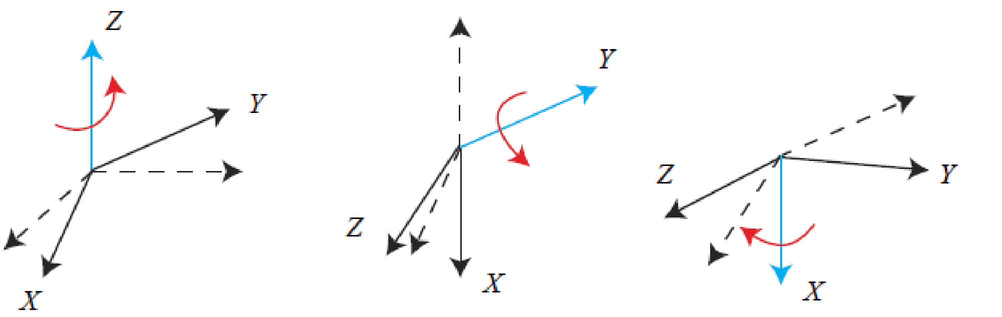
Z轴 → 旋转之后的y轴 → 旋转之后的x轴



倘若绕向顺序为z-y-x，那么绕y旋转90度的时候，当前的x轴正方向就会变得朝上或朝下，换言之x轴与z轴本身重合，而绕y轴的下一步操作就是绕x轴旋转，于是就相当于绕着初始z轴方向旋转，相当于少了一个自由度，所以称为万向锁。归根结底，欧拉角到旋转的映射并不是一个覆盖映射。

3. 旋转向量与欧拉角

- 万向锁（Gimbal Lock）
  - 欧拉角表示旋转：



第一次旋转　第二次旋转为90度　第三次旋转变成和第一次相同

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - 当pitch为90°时：

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - 进一步转化：

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0\\ -\cos(\alpha+\gamma) & \sin(\alpha+\gamma) & 0\end{bmatrix}$$

丢失了一个自由度

3. 旋转向量与欧拉角

- 由于万向锁的存在，欧拉角不适合插值或迭代，往往只用于人机交互中
- SLAM中很少直接用欧拉角表达姿态

旋转向量也有奇异性，发生在转角超过2π时而产生周期性

- 可以证明：仅用三个实数表达旋转时，不可避免地存在奇异性问题
- 2D场合（扫地机、无人驾驶等），采用欧拉角，其中一个（如偏航角）作为定位信息输出

4. 四元数

4. 四元数

- 旋转矩阵：9个量描述3个自由度的旋转，冗余性
- 欧拉角和旋转向量：紧凑但有奇异性

找不到不带奇异性的三维向量描述方式

复数：

- 乘 i 即转90度，乘 –i 转-90度
- 复平面的向量旋转θ角：复向量乘以 $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- 2D 情况下，可用单位复数表达旋转

四元数：

- 复数的扩充
- 描述三维旋转
- 3D 情况下，可用单位四元数表达旋转

4. 四元数

- 四元数（Quaternion）
  - 有三个虚部和一个实部：

$$\boxed{\boldsymbol{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,}$$

  - 虚部之间满足关系：

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases}.$$

自己与自己的乘法像复数
相互之间的乘法像外积

  - 用一个标量和一个向量表示：

$$\boldsymbol{q} = [s, \boldsymbol{v}], \quad s = q_0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3$$

4. 四元数

- 如何描述旋转?
  - 复数中乘以i表示旋转90°，在四元数中，乘以i时绕i轴旋转90°吗？
  - ij=k，是否意味着先绕i轴旋转90°，再绕j轴旋转90°，等于绕k轴旋转90°呢？
- 为理解旋转的计算方式，先看四元数间如何运算。

4. 四元数

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases} .$$

- **四元数的运算：** 四则运算、共轭、求逆、数乘

两个四元数： $\boldsymbol{q}_a = [s_a, \boldsymbol{v}_a] = s_a + x_a \mathrm{i} + y_a \mathrm{j} + z_a \mathrm{k}$

$\boldsymbol{q}_b = [s_b, \boldsymbol{v}_b] = s_b + x_b \mathrm{i} + y_b \mathrm{j} + z_b \mathrm{k}$

$$\boldsymbol{q}_a \pm \boldsymbol{q}_b = [s_a \pm s_b, \boldsymbol{v}_a \pm \boldsymbol{v}_b] .$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_a \boldsymbol{q}_b = \; & s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\ & + (s_a x_b + x_a s_b + y_a z_b - z_a y_b) i \\ & + (s_a y_b - x_a z_b + y_a s_b + z_a x_b) j \\ & + (s_a z_b + x_a y_b - y_b x_a + z_a s_b) k. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{q}_a \boldsymbol{q}_b = [s_a s_b - \boldsymbol{v}_a^T \boldsymbol{v}_b, s_a \boldsymbol{v}_b + s_b \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{v}_b]$$

$$\boldsymbol{q}_a^* = s_a - x_a i - y_a j - z_a k = [s_a, -\boldsymbol{v}_a].$$

$$\|\boldsymbol{q}_a\| = \sqrt{s_a^2 + x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}.$$

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^* / \|\boldsymbol{q}\|^2.$$

$$k\boldsymbol{q} = [ks, k\boldsymbol{v}] .$$

$$\boldsymbol{q}_a \cdot \boldsymbol{q}_b = s_a s_b + x_a x_b i + y_a y_b j + z_a z_b k.$$

4. 四元数

- 设点 $\boldsymbol{p}$ 经过旋转矩阵$\boldsymbol{R}$之后变成 $\boldsymbol{p}'$ ：

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}.$$

- 如何用四元数旋转一个空间点？
  - 将 $\boldsymbol{p}$的坐标用四元数表示（虚四元数）： $\boldsymbol{p} = [0, x, y, z] = [0, \boldsymbol{v}]$
  - 经过单位四元数$\boldsymbol{q}$指定的旋转之后的关系为：

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$$

  - 取出 $\boldsymbol{p}'$ 的虚部作为相应坐标。

- 四元数相比于角轴、欧拉角的优势：紧凑、无奇异性

4. 四元数

- 旋转向量到四元数：

$$\boldsymbol{q} = \left[\cos\frac{\theta}{2}, n_x \sin\frac{\theta}{2}, n_y \sin\frac{\theta}{2}, n_z \sin\frac{\theta}{2}\right]^T.$$

- 四元数到旋转向量：

实际中应选择最方便的形式

$$\begin{cases} \theta = 2\arccos q_0 \\ [n_x, n_y, n_z]^T = [q_1, q_2, q_3]^T / \sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

小结

- 本章介绍了：
  - 坐标系、点、向量的表达
  - 旋转矩阵/变换矩阵
  - 旋转向量、欧拉角
  - 四元数

实践

- Eigen库的使用
  - 输入一个随机矩阵，使用工具计算：转置、迹、逆、所有元素和、数乘
  - 坐标变换：

例子 设有小萝卜一号和小萝卜二号位于世界坐标系中。记世界坐标系为 W，小萝卜们的坐标系为 R_1 和 R_2。小萝卜一号的位姿为 $\boldsymbol{q}_1 = [0.35, 0.2, 0.3, 0.1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{t}_1 = [0.3, 0.1, 0.1]^{\mathrm{T}}$。小萝卜二号的位姿为 $\boldsymbol{q}_2 = [-0.5, 0.4, -0.1, 0.2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{t}_2 = [-0.1, 0.5, 0.3]^{\mathrm{T}}$。这里的 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 表达的是 $\boldsymbol{T}_{R_k,W}, k = 1, 2$，也就是世界坐标系到相机坐标系的变换关系。现在，小萝卜一号看到某个点在自身的坐标系下坐标为 $\boldsymbol{p}_{R_1} = [0.5, 0, 0.2]^{\mathrm{T}}$，求该向量在小萝卜二号坐标系下的坐标。

  - 显示运动轨迹