Formulario Finanza

Giacomo Kirn

Luglio 2024

0 Introduzione

Questo Formulario è il risultato di appunti presi durante il corso. Di conseguenza conterrà inevitabilmente errori e imprecisioni. Nessun docente ha revisionato il contenuto.

1 Tassi di Interesse e Prezzi

Legenda

Simbolo	**Descrizione**
i_q	Tasso di interesse equivalentw per una frazione temporale $1/q$
$p(t, T)$	prezzo a pronti al tempo t che in T consegna 1
$p(t, S, T)$	prezzo a termine definito al tempo t con passaggio di denaro in S e scadenza in T
$L(t, (S), T)$	Curva dei tassi di interessa in capitalizzazione semplice
$y(t, (S), T)$	Curva dei tassi di interesse in capitalizzazione esponenziale (yield rate)
$x = \{x_1, ..., x_N\}$	Flussi di denaro
$DU(t, x)$	Duration del titolo al tempo t
$DU^2(t, x)$	Duration del secondo ordine
$C(t, x)$	Convecity di un titolo

Tassi Equivalenti

- $t' = t * q$
- Capitalizzazione Composta: $i_q = (1+i)^{\frac{1}{q}} - 1$
- Capitalizzazione Semplice: $i_q = \frac{1}{q}$

Prezzo Zero CB a Pronti con scadenza in T (Valore Nominale pari a 1)

- Capitalizzazione Semplice: $p(t, T) = \frac{1}{1+i_s(t,T)(T-t)}$
- Capitalizzazione Composta: $p(t, T) = \frac{1}{(1+i_c(t,T))^{T-t}}$
- Capitalizzazione Esponenziale: $p(t, T) = 1 * e^{-y(t,T)(T-t)}$

Tassi di Interesse a Pronti

- Capitalizzazione Semplice: $i_s(t, T) = L(t, T) = \frac{1-p(t,T)}{p(t,T)(T-t)}$
- Capitalizzazione Composta: $i_c(t, T) = p(t, T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$
- Capitalizzazione Esponenziale: $y(t, T) = -\frac{\ln p(t,T)}{T-t}$

Tassi di Interesse a Termine

- Capitalizzazione Semplice: $L(t, S, T) = -\frac{p(t,T)-p(t,S)}{(T-S)p(t,T)}$
- Capitalizzazione Composta: $e^{y(t,S,T)} - 1$
- Capitalizzazione Esponenziale: $y(t, S, T) = -\frac{ln(p(t,T))-ln(p(t,S))}{T-S}$

TIR

TIR $= i^*$ oppure $v^* = \frac{1}{(1+i^*)}$ che rende equa l'operazione:
$VA(0) = \sum_{n=0}^{N} x_n(1+i^*)^{-T_n} = \sum_{n=0}^{N} x_n v^{*T_n} = 0$ (valore attuale pari a 0 $\rightarrow$ operazione equa)

Valore Attuale

- $VA(0) = \sum_{s=0}^{T} x_s(1+i)^{-s}$
- $VA(t) = VA(0)(1+i)^t$

Bootstrap

- Per scadenze inferiori all'anno ($x \in [T_1, T_2]$): $i(t,x) = \frac{(T_2-x)i(t,T_1)+(x-T_1)i(t,T_2)}{T_2-T_1}$

Indici Temporali

- $DU(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)x_n e^{-y(T_n-t)}}{p(t,x)}$
- $DU^2(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)^2 x_n(1+i(t,T_n))^{-(T_n-t)}}{p(t,x)} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)^2 x_n e^{-y(T_n-t)}}{p(t,x)}$
- $C(t,x) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(T_n-t)(T_n-t+1)x_n(1+i(t,T_n))^{-T_n+t-2}}{\sum_{n=1}^{N} x_n(1+i(t,T_n))^{-T_n+t}}$

Approssimazioni

- Volatilità del Prezzo di un titolo $= -\frac{DU(0,x)}{1+i}$
- $\Delta p(t,x) = -DU(t,x)p(t,x)\Delta y + \frac{1}{2}p(t,x)DU^2(0,x)\Delta y^2$
- $\Delta p(0,x) = -\frac{1}{1+i}DU(0,x)p(0,x)\Delta i + \frac{1}{2}p(0,x)C(0,x)\Delta i^2$

2 Utilità Attesa e Scelte di Portafoglio

Legenda

Simbolo	Descrizione
$u(x)$	Funzione utilità
$\rho_u(\tilde{x})$	Premio per il rischio di una lotteria $\tilde{x}$
$CE(\tilde{x})$	Certo Equivalente di $\tilde{x}$
ρ	Correlazione tra rendimenti di due titoli
$\tilde{r}$	Rendimento di un portafoglio
$\tilde{r}_n$	Rendimento del titolo n-esimo
r_f	Rendimento del titolo privo di rischio
e	Vettore dei rendimenti attesi
w_n	Ammonatare di ricchezzo investita nel titolo n in $T = 0$
x	Ricchezza individuo in $T = 0$
V	Matrice Varianza-Covarianza
I	Vettore di 1

Utilità Attesa

- $u(CE(\tilde{x})) = \mathbb{E}[u(\tilde{x}]$
- $CE = \mathbb{E}[\tilde{x}] - \rho_u(\tilde{x})$

Portafoglio con 2 Titoli

- $\tilde{W} = w\tilde{r}_1 + (1-w)\tilde{r}_2$
- $\mathbb{E}[\tilde{W}] = w\mathbb{E}[\tilde{r}_1] + (1-w)\mathbb{E}[\tilde{r}_2]$
- $\sigma^2(\tilde{W}) = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$
- $\frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial w} = \mathbb{E}[u'(\tilde{W})(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)]$

Scelte di Portafoglio con titolo privo di rischio

- Per massimizzare il rendimento atteso di un portafoglio: $\mathbb{E}[u'(\tilde{W})(\tilde{r} - \tilde{r_f})] = 0$
- Per minimizzare la varianza: $\min_w w^T V w$
- Utilità Esponenziale: $w^* = \frac{1}{a}V^{-1}(e - r_f * I)$
- Utilità Quadratica: $w^* = \frac{1-bx\mathbb{E}[\tilde{r}]}{b}V^{-1}(e - r_f I) = \frac{(1-bxr_f)(\mathbb{E}[\tilde{r}]-r_f)}{b(\sigma^2+(\mathbb{E}[\tilde{r}]-r_f)^2)}$

3 Frontiera dei Portafogli

Legenda

Simbolo	Descrizione
$\tilde{r}$	Rendimento di un portafoglio
r_f	Rendimento del titolo privo di rischio
e	Vettore dei rendimenti attesi
w_n	Ammonatare di ricchezzo investita nel titolo n in $T = 0$
x	Ricchezza individuo in $T = 0$
V	Matrice Varianza-Covarianza
I	Vettore di 1
λ	Esposizione nel Portafoglio Tangente

Solo titoli Rischiosi

- $A = I^T V^{-1} e$
- $B = e^T V^{-1} e$
- $C = I^T V^{-1} I$
- $D = BC - A^2$
- $w^p = g + h\mathbb{E}[\tilde{r}_p]$
  - $g = (B(V^{-1}I) - A(V^{-1}e))\frac{1}{D}$
  - $h = (C(V^{-1}e) - A(V^{-1}I))\frac{1}{D}$
- Portafoglio a minima varianza globale: $w_{MVP} = \frac{V^{-1}I}{C}$, di rendimento: $\mathbb{E}[\tilde{r}_{MVP}] = \frac{A}{C}$
- Rendimento atteso Portafoglio: $= w^T e$
- Varianza Portafoglio: $= w^T V w$
- $\mathbb{E}[\tilde{r}^p_{zc}] = \frac{A}{C} - \frac{\frac{D}{C^2}}{\mathbb{E}[\tilde{r}_p] - \frac{A}{C}}$

In presenza di un titolo privo di Rischio

- $H = (e - r_f I)^T V^{-1}(e - r_f I) = B - 2Ar_f + Cr_f^2$
- $w^p = V^{-1}(e - r_f I)(\mathbb{E}[\tilde{r}_p] - r_f)\frac{1}{H}$
- Portafoglio Tangente: $w^e = \frac{V^{-1}(e - r_f I)}{I^T V^{-1}(e - r_f I)}$, di rendimento: $\mathbb{E}[\tilde{r}_e] = \frac{Ar_f - B}{Cr_f - A}$
- $\mathbb{E}[\tilde{r}_p] = \lambda\mathbb{E}[\tilde{r}_e] + (1 - \lambda)r_f$
  - $\lambda = \frac{(Cr_f - A)(\tilde{r} - r_f)}{(2Ar_f - B - Cr_f^2)}$
  - In caso di utlità esponenziale: $\lambda = I^T V^{-1}(e - r_f I)\frac{1}{a}$
- $\mathbb{E}[\tilde{r}_p] = w^T e + (1 - w^T I)r_f$

4 Modelli di Mercato e CAPM

Legenda

Simbolo	Descrizione
r_m	Rendimento Portafoglio di Mercato
x_0^i	Ricchezza Individuo i
x_0^m	Ricchezza Economia
S	Numero di Stati del Mondo
I	Numero di Individui
e_i	Dotazione Iniziale Individuo i
q_n	Prezzo del Titolo n in $t=0$
D	Matrice dei Dividendi
c	Piano di Consumo
$V(c)$	Valore di non Arbitraggio di c
π_s	Misura di Probabilità Neutrale al Rischio

Modelli di Mercato

- CAPM: $\mathbb{E}[r_q] = r_f + \beta(\mathbb{E}[r_m] - r_f)$
  - $\beta = \rho_q \frac{\sigma_q}{\sigma_m} = \frac{cov(r_m, r_q)}{\sigma^2(r_m)}$
- $w_n^m = \sum_{i=1}^{I} w_n^i \frac{x_0^i}{x_0^m}$
- $r_m = \sum_{n=1}^{N} w_n^m r^n$
- CCAPM: $\mathbb{E}[\tilde{r}_n] - r_f = \frac{cov(u'(\tilde{x}^m), \tilde{r}_n)}{cov(u'(\tilde{x}^m), \tilde{r}_m)}(\mathbb{E}[\tilde{r}_m] - r_f)$
- $m_s = \delta \frac{\pi_s u^{i'}(x_s)}{u^{i'}(x_0)}$
- Prezzo titolo privo di rischio $= \sum_{s=1}^{S} m_s$, rendimento $= r_f = \frac{1}{\sum_{s=1}^{S} m_s}$
- $q_n = \sum_{s=1}^{S} \delta \frac{\pi_s u^{i'}(x_s)}{u^{i'}(x_0)}$

State Price e Piani di Consumo

- $q = D^T m$ (se $\exists\ m < 0 \rightarrow \exists$ arbitraggio)
- $V(c) = m^T c = w^T q$
- $Dw = c$
- $\pi_s = \frac{m_s}{\sum_{i=1}^{S} m_i}$

APT

ESEMPIO ($\mathbb{E}[x_i] = 0$):

$$\begin{cases} r_1 = 1.1 + 0.3x_1 - 0.2x_2 \\ r_2 = 1.15 - 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ r_3 = 1.2 - 0.2x_1 + 0.4x_2 \end{cases}$$

- Portafoglio puro rispetto alla prima componente:

$$\begin{cases} 0.3w_1 - 0.4w_2 - 0.2w_3 = 1 \\ -0.2w_1 + 0.3w_2 + 0.4w_3 = 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

- Portafoglio puro rispetto alla seconda componente:

$$\begin{cases} 0.3w_1 - 0.4w_2 - 0.2w_3 = 0 \\ -0.2w_1 + 0.3w_2 + 0.4w_3 = 1 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

- Portafoglio privo di rischio:

$$\begin{cases} 0.3w_1 - 0.4w_2 - 0.2w_3 = 0 \\ -0.2w_1 + 0.3w_2 + 0.4w_3 = 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

- Portafoglio che replica: $r_4 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_2$

$$\begin{cases} 0.3w_1 - 0.4w_2 - 0.2w_3 = \beta \\ -0.2w_1 + 0.3w_2 + 0.4w_3 = \gamma \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

- In assenza di opportunità di arbitraggio: $e - r_f I = B\lambda$
  - $B = [\beta, \gamma]$
  - λ_k premio per il rischio fattore k

5 Derivati

Legenda

Simbolo	**Descrizione**
K	Strike Price
$S(t)$	Prezzo del Sottostante
$F(S(t))$	Payoff Derivato in t
u	Aumento Prezzo
d	Diminuzione Prezzo
π_u	MDP neutrale al rischio in up
π_d	MDP neutrale al rischio in down
Δ	Lunghezza Periodo
C	Prezzo NA Call
P	Prezzo NA Put
x	Quantità Sottostante
y	Quantità Bond

- Call: $F(S(t)) = [S(t) - K]^+$
- Put: $F(S(t)) = [K - S(t)]^+$
- $\pi_u = \frac{r_f - d}{u - d}$
- $\pi_d = \frac{u - r_f}{u - d}$
- $F(S(0)) = \frac{1}{r_f}(F(S(0)u)\pi_u + F(S(0)d)\pi_d)$ (un periodo)
- $F(S(0)) = r_f^{-\delta}(\sum_{k=0}^{M} \binom{M}{k} \pi_u^k \pi_d^{M-k} F(S(0)u^k d^{M-k}))$ (M periodi)
- Put Call Parity: $C + \frac{K}{r_f} = P + S$
- Copertura: trovare qtà. del Bond e del Sottostante tc:

$$\begin{cases} uS(0)x + r_f y = F(S(0)u) \\ dS(0)x + r_f y = F(S(0)d) \end{cases}$$

6 VaR e ES

Legenda

Simbolo	Descrizione
$VaR(t)$	Value at Risk in t
$L(t)$	Perdità in t
$S(t)$	Valore del Titolo in t
$r(t+1)$	Rendimento $= \frac{S(t+1)}{S(t)}$
$V(t)$	Valore di Mercato
y	Yield rate

Anticipazioni

- Rendimenti Logaritmici $= \log \frac{S(t+1)}{S(t)} \approx -L_{\%}(t+1)$
- $L_{\%}(t+1) = 1 - r(t+1)$

Da qua poi si ricava la distribuzione della perdita

VaR

- $\mathbb{P}(L(t+h) > VaR^p(t+h)) = p$
- $\mathbb{P}(L_{\%}(t+h) > VaR^p_{\%}(t+h))) = p$
- $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow VaR^p(t+h) = h\mu + \sqrt{h}\sigma\phi^{-1}(1-p)V(t)$
- $L(t+1) = DU(t)p(t)(y(t+1) - y(t)) \rightarrow VaR^p(t+h) = DU(t)p(t)\phi^{-1}(1-p)\sigma_y(t+1)\sqrt{h}$

ES

- $ES^p(t+h) = \frac{1}{p}\int_0^p VaR^u(t+h)du$
- $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow ES^p(t+1) = \mu + \sigma\frac{\phi(\phi^{-1}(1-p))}{p}$