

# Obsah

<b>1 Optimalizační metody</b>	<b>4</b>
1.1 Základní rozdělení metod . . . . .	4
1.2 Minimalizace podle počtu proměnných . . . . .	4
1.3 Optimalizace s omezením . . . . .	4
1.4 Matematické programování . . . . .	4
<b>2 Metody bez derivací</b>	<b>6</b>
2.1 Základní úloha . . . . .	6
2.2 Unimodala funkce . . . . .	6
2.3 Interval řešení . . . . .	6
2.4 Přesnost výpočtu . . . . .	6
2.5 Charakteristika metod bez derivací . . . . .	7
2.6 Přehled základních metod . . . . .	7
<b>3 Trisekce</b>	<b>8</b>
3.1 Základní myšlenka . . . . .	8
3.2 Rozdělení intervalu . . . . .	8
3.3 Rozhodovací pravidlo . . . . .	8
3.4 Podmínky použití . . . . .	8
3.5 Přesnost a ukončení . . . . .	9
3.6 Vlastnosti metody . . . . .	9
3.7 Zařazení mezi metody . . . . .	9
<b>4 Zlatý řez</b>	<b>10</b>
4.1 Základní myšlenka . . . . .	10
4.2 Zlatý poměr . . . . .	10
4.3 Volba bodů v intervalu . . . . .	10
4.4 Rozhodovací pravidlo . . . . .	10
4.5 Podmínky použití . . . . .	11
4.6 Přesnost a ukončení . . . . .	11
4.7 Vlastnosti metody . . . . .	11
4.8 Zařazení mezi metody . . . . .	11
<b>5 Fibonacciho metoda</b>	<b>12</b>
5.1 Základní myšlenka . . . . .	12
5.2 Fibonacciho posloupnost . . . . .	12
5.3 Volba bodů v intervalu . . . . .	12
5.4 Rozhodovací pravidlo . . . . .	12
5.5 Přesnost a ukončení . . . . .	13
5.6 Podmínky použití . . . . .	13
5.7 Vlastnosti metody . . . . .	13
5.8 Zařazení mezi metody . . . . .	13

<b>6 Metody s derivacemi</b>	<b>14</b>
6.1 Základní úloha . . . . .	14
6.2 Kořen a minimum funkce . . . . .	14
6.3 Charakter metod s derivacemi . . . . .	14
6.4 Počáteční bod . . . . .	15
6.5 Přesnost a ukončení . . . . .	15
6.6 Výpočet derivací . . . . .	15
6.7 Vlastnosti metod . . . . .	15
6.8 Zařazení mezi metody . . . . .	16
<b>7 Newtonova metoda (1D)</b>	<b>17</b>
7.1 Základní princip . . . . .	17
7.2 Newtonova metoda pro hledání kořene . . . . .	17
7.2.1 Vlastnosti . . . . .	17
7.3 Newtonova metoda pro hledání minima . . . . .	17
7.4 Podmínky použití . . . . .	18
7.5 Počáteční bod . . . . .	18
7.6 Přesnost a ukončení . . . . .	18
7.7 Výhody a nevýhody . . . . .	18
7.8 Zařazení mezi metody . . . . .	19
<b>8 Metody s více proměnnými</b>	<b>20</b>
8.1 Základní formulace úlohy . . . . .	20
8.2 Minimum funkce více proměnných . . . . .	20
8.3 Gradient . . . . .	20
8.4 Hessova matice . . . . .	20
8.5 Základní skupiny metod . . . . .	21
8.6 Charakteristika metod . . . . .	21
<b>9 Metoda největšího spádu</b>	<b>22</b>
9.1 Základní úloha . . . . .	22
9.2 Základní myšlenka . . . . .	22
9.3 Iterační vztah . . . . .	22
9.4 Volba velikosti kroku . . . . .	22
9.5 Podmínky použití . . . . .	22
9.6 Vlastnosti metody . . . . .	23
9.7 Přesnost a ukončení . . . . .	23
9.8 Zařazení mezi metody . . . . .	23
<b>10 Newton–Rhapsonova metoda</b>	<b>24</b>
10.1 Základní úloha . . . . .	24
10.2 Základní myšlenka . . . . .	24
10.3 Iterační vztah . . . . .	24
10.4 Podmínky použití . . . . .	24

10.5	Pozitivně definitní Hessova matice . . . . .	25
10.6	Počáteční bod . . . . .	25
10.7	Přesnost a ukončení . . . . .	25
10.8	Vlastnosti metody . . . . .	25
10.9	Zařazení mezi metody . . . . .	25
<b>11</b>	<b>Nelder–Meadova metoda (simplex)</b>	<b>26</b>
11.1	Základní úloha . . . . .	26
11.2	Základní myšlenka . . . . .	26
11.3	Počáteční simplex . . . . .	26
11.4	Hodnocení bodů . . . . .	26
11.5	Základní operace se simplexem . . . . .	26
11.5.1	Reflexe . . . . .	26
11.5.2	Expanze . . . . .	27
11.5.3	Kontrakce . . . . .	27
11.5.4	Redukce . . . . .	27
11.6	Podmínky použití . . . . .	27
11.7	Přesnost a ukončení . . . . .	27
11.8	Vlastnosti metody . . . . .	27
11.9	Zařazení mezi metody . . . . .	28
<b>12</b>	<b>Lagrangeovy multiplikátory</b>	<b>29</b>
12.1	Základní úloha . . . . .	29
12.2	Základní myšlenka . . . . .	29
12.3	Nutná podmínka extrému . . . . .	29
12.4	Lagrangián . . . . .	29
12.5	Postup výpočtu . . . . .	30
12.6	Podmínky použití . . . . .	30
12.7	Vlastnosti metody . . . . .	30
12.8	Použití . . . . .	30
12.9	Zařazení mezi metody . . . . .	30
<b>13</b>	<b>Matematické programování</b>	<b>31</b>
13.1	Základní formulace úlohy . . . . .	31
13.2	Lineární omezení . . . . .	31
13.3	Lineární účelová funkce . . . . .	31
13.4	Lineární programování (LP) . . . . .	31
13.5	Kvadratické programování (QP) . . . . .	32
13.6	Nelineární programování (NLP) . . . . .	32
13.7	Charakteristika matematického programování . . . . .	32

# 1 Optimalizační metody

Optimalizační metody slouží k hledání minima nebo maxima účelové funkce

$$\min f(x).$$

Tato kapitola představuje **přehledovou mapu témat**, nikoli detailní výklad. Slouží k rychlé orientaci a připomenutí hlavních oblastí předmětu.

## 1.1 Základní rozdělení metod

- **Metody bez derivací**

- nevyžadují znalost derivací, pracují pouze s hodnotami funkce
- typicky minimalizace jedné proměnné
- unimodalita, interval  $a,b$
- přehled v souboru Metody bez derivací

- **Metody s derivacemi**

- využívají první a často i druhou derivaci
- hledání kořenů a minim pomocí iteračních metod
- přehled v souboru Metody s derivacemi

## 1.2 Minimalizace podle počtu proměnných

- **Jedna proměnná**

- základní principy optimalizace
- interval, přesnost, unimodalita
- bezderivační a derivační metody

- **Více proměnných (bez omezení)**

- proměnná  $x \in \mathbb{R}^n$
- gradient, Hessova matice
- gradientní metody, Newtonovy metody
- přehled v souboru Metody s více proměnnými

## 1.3 Optimalizace s omezením

- **Rovnostní omezení**

- pohyb po omezené množině
- kolmost gradientů
- metoda Lagrangeových multiplikátorů

## 1.4 Matematické programování

- **Lineární programování (LP)**

- lineární účelová funkce
- lineární omezení

- **Kvadratické programování (QP)**

→ kvadratická účelová funkce

→ pozitivně definitivní matice

- **Nelineární programování (NLP)**

→ nelineární funkce a omezení

→ více lokálních extrémů

→ shrnuto v souboru Matematické programování

Tento soubor slouží jako **orientační uzel (mapa)**, ze kterého vedou odkazy na jednotlivá detailní témata.

## 2 Metody bez derivací

Metody bez derivací slouží k minimalizaci funkce jedné proměnné v situacích, kdy nejsou k dispozici derivace nebo je nechceme používat. Pracují výhradně s hodnotami funkce a jejich cílem je postupně zúžit interval, ve kterém se nachází minimum.

### 2.1 Základní úloha

- hledáme minimum funkce jedné proměnné
- obecný tvar úlohy

$$\min f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle \text{ nebo } x \in \mathbb{R}$$

- výsledkem je hodnota  $x^*$ , pro kterou má funkce nejmenší hodnotu

### 2.2 Unimodalita funkce

- **unimodální funkce** má právě jedno minimum
- funkce:
  - nejprve klesá
  - poté roste
- unimodalita je **základní podmínkou** použití metod bez derivací
- minimum je bod, kde se chování funkce mění z klesajícího na rostoucí

### 2.3 Interval řešení

- **interval**  $\langle a, b \rangle$  určuje oblast, ve které minimum hledáme
- funkce musí být:
  - spojitá
  - ideálně unimodální v celém intervalu
- metody bez derivací:
  - interval postupně zmenšují
  - minimum zůstává vždy uvnitř aktuálního intervalu

### 2.4 Přesnost výpočtu

- přesnost určuje kritérium ukončení algoritmu
- vyjadřuje, jak „dost dobrý“ výsledek požadujeme

Používaná kritéria:

- **Délka intervalu**

$$|a - b| < \epsilon$$

- **Velikost derivace**  
→ používá se hlavně u metod s derivacemi

$$|f'(x)| < \epsilon$$

- **Změna mezi iteracemi**

$$|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$$

## 2.5 Charakteristika metod bez derivací

- nevyžadují derivace
- pracují pouze s hodnotami  $f(x)$
- porovnávají funkční hodnoty v různých bodech
- iterativně zužují interval s minimem
- jsou:
  - robustní
  - jednoduché na pochopení
- nevýhody:
  - pomalejší než derivační metody
  - použitelné především pro jednu proměnnou

## 2.6 Přehled základních metod

- **Trisekce**  
→ rozdelení intervalu na třetiny  
→ jednoduchá, ale pomalejší
- **Zlatý řez**  
→ efektivní rozdelení intervalu pomocí konstantního poměru  
→ méně výpočtů funkčních hodnot
- **Fibonacciho metoda**  
→ optimalizovaná varianta zlatého řezu  
→ vyšší přesnost  
→ složitější implementace

Jednotlivé metody jsou podrobně rozpracovány v samostatných kapitolách: - Trisekce - Zlatý řez - Fibonacciho metoda

## 3 Trisekce

Metoda trisekce je **bezderivační metoda** pro minimalizaci **unimodální funkce jedné proměnné**. Patří mezi nejjednodušší intervalové metody a slouží především k pochopení základního principu zúžování intervalu s minimem.

### 3.1 Základní myšlenka

- minimum funkce leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$
- interval se v každém kroku rozdělí na **tři části**
- porovnáním funkčních hodnot se jedna třetina intervalu zahodí
- minimum zůstává vždy uvnitř nového, menšího intervalu

### 3.2 Rozdelení intervalu

V každé iteraci se zvolí dva body:

$$u = a + \frac{b-a}{3}, \quad v = b - \frac{b-a}{3}$$

- platí  $a < u < v < b$
- spočítají se hodnoty  $f(u)$  a  $f(v)$

### 3.3 Rozhodovací pravidlo

- pokud  $f(u) < f(v)$   
→ minimum leží v intervalu  $\langle a, v \rangle$
- pokud  $f(u) > f(v)$   
→ minimum leží v intervalu  $\langle u, b \rangle$
- v každém kroku se délka intervalu zmenší na  $\frac{2}{3}$  původní délky

### 3.4 Podmínky použití

- funkce je:
  - **spojitá**
  - **unimodální** na intervalu  $\langle a, b \rangle$
- derivace nejsou potřeba
- známe počáteční interval, ve kterém leží minimum

### 3.5 Přesnost a ukončení

- algoritmus končí, pokud:  
$$|a - b| < \epsilon$$
- výsledkem je interval obsahující bod minima
- za approximaci minima se často bere střed intervalu

### 3.6 Vlastnosti metody

- **výhody**
  - velmi jednoduchá
  - snadná implementace
  - robustní
- **nevýhody**
  - pomalejší než zlatý řez
  - v každé iteraci vyžaduje dva nové výpočty  $f(x)$
  - nevyužívá dříve vypočtené hodnoty

### 3.7 Zařazení mezi metody

- metoda **bez derivací**
- minimalizace **jedné proměnné**
- intervalová metoda

→ slouží jako základ pro efektivnější metody, zejména Zlatý řez

## 4 Zlatý řez

Metoda zlatého řezu je **bezderivační intervalová metoda** pro minimalizaci **unimodální funkce jedné proměnné**. Oproti trisekci je efektivnější, protože **znovu využívá již vypočtené funkční hodnoty** a snižuje počet volání funkce.

### 4.1 Základní myšlenka

- minimum funkce leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$
- interval se zužuje pomocí **pevného poměru**
- v každé iteraci se zahazuje část intervalu, ve které minimum neleží
- jedna funkční hodnota se přenáší do další iterace

### 4.2 Zlatý poměr

- používá se konstanta

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618$$

- doplňkový poměr

$$1 - \varphi \approx 0,382$$

### 4.3 Volba bodů v intervalu

V každé iteraci se volí body:

$$u = a + (1 - \varphi)(b - a), \quad v = a + \varphi(b - a)$$

- platí  $a < u < v < b$
- počítají se hodnoty  $f(u)$  a  $f(v)$
- při zúžení intervalu se **jeden z bodů znova použije**

### 4.4 Rozhodovací pravidlo

- pokud  $f(u) < f(v)$   
→ minimum leží v intervalu  $\langle a, v \rangle$
- pokud  $f(u) > f(v)$   
→ minimum leží v intervalu  $\langle u, b \rangle$
- nový interval je kratší než původní v konstantním poměru

## 4.5 Podmínky použití

- funkce je:
  - spojitá
  - **unimodální** na intervalu  $\langle a, b \rangle$
- derivace nejsou potřeba
- známe interval obsahující minimum

## 4.6 Přesnost a ukončení

- algoritmus se ukončí, pokud platí

$$|a - b| < \varepsilon$$

- výsledkem je interval obsahující minimum
- approximací minima je obvykle střed intervalu

## 4.7 Vlastnosti metody

- **výhody**
  - méně výpočtů funkčních hodnot než trisekce
  - efektivní a stabilní
  - jednoduchá implementace
- **nevýhody**
  - pomalejší než derivační metody
  - použitelná pouze pro jednu proměnnou

## 4.8 Zařazení mezi metody

- metoda **bez derivací**
- minimalizace **jedné proměnné**
- intervalová metoda

→ efektivnější varianta metody Trisekce  
→ základ pro Fibonacciho metodu

## 5 Fibonacciho metoda

Fibonacciho metoda je **bezderivační intervalová metoda** pro minimalizaci **unimodální funkce jedné proměnné**. Představuje optimalizovanou variantu metody zlatého řezu, která využívá **Fibonacciho posloupnost** k přesné řízenému zmenšování intervalu.

### 5.1 Základní myšlenka

- minimum funkce leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$
- počet iterací je **předem dán**
- interval se zužuje pomocí poměrů vycházejících z Fibonacciho posloupnosti
- metoda minimalizuje počet výpočtů funkčních hodnot

### 5.2 Fibonacciho posloupnost

- posloupnost je definována vztahem

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

- poměry po sobě jdoucích členů se blíží zlatému poměru
- tyto poměry určují polohu testovacích bodů v intervalu

### 5.3 Volba bodů v intervalu

- pro zvolený počet kroků  $N$  se v každé iteraci určují body pomocí poměrů

$$u = a + \frac{F_{N-2}}{F_N}(b - a), \quad v = a + \frac{F_{N-1}}{F_N}(b - a)$$

- porovnávají se hodnoty  $f(u)$  a  $f(v)$
- interval se zúží podobně jako u zlatého řezu

### 5.4 Rozhodovací pravidlo

- pokud  $f(u) < f(v)$   
→ minimum leží v intervalu  $\langle a, v \rangle$
- pokud  $f(u) > f(v)$   
→ minimum leží v intervalu  $\langle u, b \rangle$
- jeden bod se přenáší do další iterace

## 5.5 Přesnost a ukončení

- počet iterací  $N$  se volí tak, aby výsledná délka intervalu splňovala

$$|a - b| < \varepsilon$$

- přesnost je tedy **řízena dopředu** volbou  $N$
- výsledkem je interval obsahující bod minima

## 5.6 Podmínky použití

- funkce je:
  - spojitá
  - **unimodální** na intervalu  $\langle a, b \rangle$
- derivace nejsou potřeba
- známe požadovanou přesnost  $\varepsilon$

## 5.7 Vlastnosti metody

- **výhody**
  - velmi efektivní
  - minimální počet výpočtů  $f(x)$
  - přesně řízená přesnost
- **nevýhody**
  - složitější implementace
  - nutnost znát požadovanou přesnost předem
  - méně flexibilní než zlatý řez

## 5.8 Zařazení mezi metody

- metoda **bez derivací**
- minimalizace **jedné proměnné**
- intervalová metoda

→ optimalizovaná varianta Zlatého řezu

## 6 Metody s derivacemi

Metody s derivacemi slouží k hledání **kořenů** a **minim funkcí** pomocí informací o derivacích účelové funkce. Oproti metodám bez derivací jsou zpravidla **rychlejší**, ale kladou vyšší nároky na hladkost funkce a volbu počátečního bodu.

### 6.1 Základní úloha

- minimalizace funkce jedné proměnné

$$\min f(x)$$

- nebo hledání kořene funkce

$$f(x) = 0$$

- metody jsou obvykle **iterační**
- vyžadují **počáteční bod**  $x_0$

### 6.2 Kořen a minimum funkce

- **kořen funkce**

- hodnota  $x$ , pro kterou platí

$$f(x) = 0$$

- funkce protíná nebo se dotýká osy  $x$

- **minimum funkce**

- bod, kde má funkce nejmenší hodnotu
  - v minimu platí

$$f'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) > 0$$

- hledání minima se často převádí na hledání kořene derivace

### 6.3 Charakter metod s derivacemi

- využívají:

- **první derivaci**
  - často i **druhou derivaci**

- rozdíl mezi metodami není v principu, ale v cíli:

- hledání kořene
  - hledání minima

- typickým zástupcem je **Newtonova metoda**

## 6.4 Počáteční bod

- **počáteční bod**  $x_0$  je nutný pro iterační metody
- musí:
  - ležet v oblasti, kde existují derivace
  - být rozumně blízko řešení
- špatná volba může vést:
  - ke konvergenci k maximu
  - k inflexnímu bodu
  - k divergenci metody

## 6.5 Přesnost a ukončení

- výpočet se ukončuje při splnění některého z kritérií:
  - **velikost derivace**
$$|f'(x_k)| < \varepsilon$$
  - **změna mezi iteracemi**
$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$
  - **maximální počet iterací**

## 6.6 Výpočet derivací

- **analytický**
  - derivace dány vzorcem
  - rychlý a přesný
- **numerický**
  - derivace jsou pouze odhadnutý
  - pomalejší
  - méně stabilní

## 6.7 Vlastnosti metod

- **výhody**
  - rychlá konvergence
  - vysoká přesnost
- **nevýhody**
  - nutnost znalosti derivací
  - citlivost na počáteční bod
  - vyšší nároky na hladkost funkce

## 6.8 Zařazení mezi metody

- metody s derivacemi
- minimalizace jedné proměnné
- iterační metody

→ konkrétní postup je rozpracován v kapitole Newtonova metoda

## 7 Newtonova metoda (1D)

Newtonova metoda je **iterační derivační metoda** používaná pro hledání kořene funkce nebo **minima funkce jedné proměnné**. Patří mezi nejdůležitější metody optimalizace díky své **rychlé konvergenci** v okolí řešení.

### 7.1 Základní princip

- metoda vychází z **lokální lineární approximace** funkce
- v každém kroku se:
  - approximuje funkce tečnou
  - průsečík tečny s osou  $x$  určí nový odhad řešení
- metoda vyžaduje **počáteční bod**  $x_0$

### 7.2 Newtonova metoda pro hledání kořene

- hledáme bod, kde platí

$$f(x) = 0$$

- iterační vztah má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

#### 7.2.1 Vlastnosti

- velmi rychlá konvergence v okolí kořene
- citlivá na volbu počátečního bodu
- může divergovat nebo konvergovat k jinému kořeni

### 7.3 Newtonova metoda pro hledání minima

- minimum funkce nastává v bodě, kde

$$f'(x^*) = 0$$

- úloha se převede na hledání kořene derivace
- iterační vztah má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

## 7.4 Podmínky použití

- funkce je:
  - diferencovatelná
  - ideálně alespoň dvakrát diferencovatelná
- v bodě minima platí
$$f''(x^*) > 0$$
- derivace existují v okolí řešení

## 7.5 Počáteční bod

- volba počátečního bodu  $x_0$  je **kritická**
- špatná volba může vést:
  - ke konvergenci k maximu
  - k inflexnímu bodu
  - k divergenci metody
- počáteční bod volíme:
  - v blízkosti očekávaného minima
  - v oblasti, kde existují derivace

## 7.6 Přesnost a ukončení

- výpočet se ukončí, pokud platí alespoň jedna z podmínek:
$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$
$$|f'(x_k)| < \varepsilon$$
- případně po dosažení maximálního počtu iterací

## 7.7 Výhody a nevýhody

- **výhody**
  - velmi rychlá konvergence
  - vysoká přesnost
- **nevýhody**
  - nutnost znalosti derivací
  - citlivost na počáteční bod
  - může selhat daleko od řešení

## 7.8 Zařazení mezi metody

- metoda **s derivacemi**
- minimalizace **jedné proměnné**
- iterační metoda

→ zobecnění metody pro více proměnných je uvedeno v kapitole Newtonova–Rhapsonova metoda

## 8 Metody s více proměnnými

Metody s více proměnnými se zabývají minimalizací funkcí, jejichž argumentem je vektor proměnných. Navazují na metody jedné proměnné, ale pracují s geometricky složitějšími objekty, jako jsou gradienty a matice druhých derivací.

### 8.1 Základní formulace úlohy

- obecná optimalizační úloha má tvar

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- proměnná  $x$  je vektor
- úloha **nemá omezení vazbami**
- hledáme lokální nebo globální minimum funkce

### 8.2 Minimum funkce více proměnných

- minimum je bod, kde má funkce nejmenší hodnotu v okolí
- nutná podmínka minima

$$\nabla f(x^*) = 0$$

- postačující podmínka (lokální minimum)
  - Hessova matice je **pozitivně definitní**

### 8.3 Gradient

- **gradient** je vektor prvních parciálních derivací

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- určuje směr **největšího růstu** funkce
- směr největšího poklesu je opačný směr gradientu

### 8.4 Hessova matice

- **Hessova matice** je matice druhých parciálních derivací

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

- popisuje lokální zakřivení funkce
- používá se v Newtonových metodách

## 8.5 Základní skupiny metod

- **Gradientní metody**
  - využívají pouze gradient
  - jednoduché, ale pomalejší
  - viz Metoda největšího spádu
- **Newtonovy metody**
  - využívají gradient i Hessovu matici
  - velmi rychlé v okolí minima
  - viz Newtonova–Rhapsonova metoda
- **Bezderivační metody**
  - nevyžadují derivace
  - pracují pouze s hodnotami funkce
  - vhodné pro malé dimenze
  - viz Nelder–Meadova metoda

## 8.6 Charakteristika metod

- metody jsou většinou **iterační**
- vyžadují **počáteční bod**  $x_0$
- konvergence závisí na:
  - vlastnostech funkce
  - volbě počátečního bodu
  - použité metodě

## 9 Metoda největšího spádu

Metoda největšího spádu je **iterační derivační metoda** pro minimalizaci funkce **více proměnných bez omezení**. Patří mezi základní gradientní metody a slouží jako výchozí nástroj pro pochopení chování optimalizačních algoritmů ve vícerozměrném prostoru.

### 9.1 Základní úloha

- minimalizace funkce tvaru

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- funkce nemá omezení vazbami
- gradient funkce je znám

### 9.2 Základní myšlenka

- **gradient** určuje směr největšího růstu funkce
- pro minimalizaci se postupuje **opačným směrem**
- v každém kroku se provede posun ve směru záporného gradientu

### 9.3 Iterační vztah

- obecný tvar kroku

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

- $\alpha_k$  je **velikost kroku**
- volba kroku zásadně ovlivňuje chování metody

### 9.4 Volba velikosti kroku

- **konstantní krok**
  - jednoduchý
  - může vést k pomalé konvergenci nebo kmitání
- **proměnný krok**
  - volen např. minimalizací podél směru gradientu
  - stabilnější chování metody

### 9.5 Podmínky použití

- gradient existuje v celé oblasti řešení
- funkce je:
  - spojitá
  - diferencovatelná
- metoda konverguje zejména pro **konvexní funkce**

## 9.6 Vlastnosti metody

- **výhody**
  - jednoduchá
  - robustní
  - levná jedna iterace
- **nevýhody**
  - pomalá konvergence
  - klikatí se v úzkých údolích
  - silná závislost na volbě kroku

## 9.7 Přesnost a ukončení

- výpočet se ukončí, pokud platí

$$|\nabla f(x_k)| < \varepsilon$$

nebo

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

- případně po dosažení maximálního počtu iterací

## 9.8 Zařazení mezi metody

- metoda s derivacemi
- minimalizace více proměnných
- gradientní metoda

→ rychlejší, ale náročnější alternativa je Newtonova–Rhapsonova metoda

## 10 Newtonova–Rhapsonova metoda

Newtonova–Rhapsonova metoda je **iterační derivační metoda** pro minimalizaci **funkce více proměnných bez omezení**. Oproti gradientním metodám využívá kromě gradientu také **Hessovu matici**, což jí umožňuje velmi rychlou konvergenci v okolí minima.

### 10.1 Základní úloha

- minimalizace funkce tvaru

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- funkce nemá omezení vazbami
- gradient i Hessova matice jsou známy

### 10.2 Základní myšlenka

- funkce je v okolí aktuálního bodu **nahradena kvadratickou aproximací**
- minimum této approximace lze určit analyticky
- nový bod vznikne skokem přímo k minimu approximující funkce

### 10.3 Iterační vztah

- obecný iterační krok má tvar

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

- $H(x_k)$  je Hessova matice funkce v bodě  $x_k$
- metoda využívá informaci o zakřivení funkce

### 10.4 Podmínky použití

- funkce je:
  - diferencovatelná
  - alespoň dvakrát diferencovatelná v okolí řešení
- gradient existuje
- Hessova matice:
  - je invertibilní
  - je ideálně **pozitivně definitní**

## 10.5 Pozitivně definitní Hessova matice

- v bodě minima musí platit

$$v^T H v > 0, \quad v \neq 0$$

- funkce má v okolí bodu **miskovitý tvar**
- všechna vlastní čísla Hessovy matice jsou kladná
- v opačném případě může metoda směřovat:
  - k maximu
  - k sedlovému bodu

## 10.6 Počáteční bod

- volba počátečního bodu  $x_0$  je **kritická**
- metoda:
  - je velmi rychlá blízko minima
  - může selhat daleko od minima
- špatný počátek může vést k divergenci

## 10.7 Přesnost a ukončení

- výpočet se ukončí při splnění některého z kritérií:
$$|\nabla f(x_k)| < \varepsilon$$
$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$
- případně po dosažení maximálního počtu iterací

## 10.8 Vlastnosti metody

- **výhody**
  - velmi rychlá konvergence (kvadratická)
  - malý počet iterací
- **nevýhody**
  - drahý výpočet (Hessova matice, inverze)
  - citlivost na počáteční bod
  - může selhat mimo okolí minima

## 10.9 Zařazení mezi metody

- metoda s **derivacemi**
  - minimalizace **více proměnných**
  - Newtonova metoda
- bezderivační alternativa je Nelder–Meadova metoda

## 11 Nelder–Meadova metoda (simplex)

Nelder–Meadova metoda je **bezderivační metoda** pro minimalizaci **funkce více proměnných bez omezení**. Využívá geometrickou představu **simplexu** a pracuje pouze s hodnotami funkce, nikoli s jejími derivacemi.

### 11.1 Základní úloha

- minimalizace funkce tvaru

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- funkce nemá omezení vazbami
- derivace nejsou známy nebo je nechceme používat

### 11.2 Základní myšlenka

- metoda pracuje s **simplexem**:
  - v  $n$ -rozměrném prostoru má simplex  $n + 1$  vrcholů
- v každém kroku se:
  - vyhodnotí funkční hodnoty ve vrcholech
  - porovnají se hodnoty
  - nejhorší bod je nahrazen lepším
- simplex se postupně posouvá směrem k minimu

### 11.3 Počáteční simplex

- volí se  $n + 1$  bodů:
  - musí vyplnit okolí hledaného minima
- kvalita počátečního simplexu výrazně ovlivňuje chování metody

### 11.4 Hodnocení bodů

- ve vrcholech simplexu se spočítají hodnoty funkce
- body se seřadí podle velikosti funkčních hodnot:

$$f(x_{\text{nejlepší}}) < f(x_{\text{prostřední}}) < f(x_{\text{nejhorší}})$$

### 11.5 Základní operace se simplexem

#### 11.5.1 Reflexe

- **základní krok metody**
- nejhorší bod se odrazí přes těžiště zbylých bodů
- pokud je nový bod lepší než prostřední, je přijat

### 11.5.2 Expanze

- pokud je reflexní bod lepší než nejlepší
- simplex se zkusí rozšířit dále stejným směrem
- typický koeficient:

$$\alpha > 1 \quad (\text{často } \alpha = 2)$$

### 11.5.3 Kontrakce

- pokud reflexe nepřinese zlepšení
- simplex se zmenší směrem k lepším bodům
- typický koeficient:

$$\beta \in (0, 1) \quad (\text{často } \beta = 0,5)$$

### 11.5.4 Redukce

- použije se, pokud selžou předchozí kroky
- celý simplex se smrskne k nejlepšímu bodu
- používá se výjimečně

## 11.6 Podmínky použití

- funkce musí být **spočitatelná**
- derivace nejsou potřeba
- metoda je vhodná pro:
  - malé dimenze (typicky  $n < 10$ )

## 11.7 Přesnost a ukončení

- výpočet se ukončí, pokud platí

$$\max f(x_i) - \min f(x_i) < \varepsilon$$

- nebo po dosažení maximálního počtu iterací

## 11.8 Vlastnosti metody

- **výhody**
  - jednoduchá implementace
  - bez derivací
  - použitelná pro složité funkce
- **nevýhody**
  - pomalá
  - nespolehlivá ve vyšších dimenzích
  - nemá teoretické záruky konvergence

## 11.9 Zařazení mezi metody

- metoda **bez derivací**
- minimalizace **více proměnných**
- geometrická metoda (simplex)

→ alternativa k derivačním metodám, zejména Metodě největšího spádu

## 12 Lagrangeovy multiplikátory

Metoda Lagrangeových multiplikátorů slouží k hledání **extrémů funkce více proměnných s omezením**. Jedná se o **analytickou derivační metodu**, která umožňuje určit kandidáty minima nebo maxima na omezené množině.

### 12.1 Základní úloha

- hledáme extrém funkce

$$\min f(x)$$

- za rovnostního omezení

$$g(x) = 0$$

- proměnná  $x \in \mathbb{R}^n$

### 12.2 Základní myšlenka

- pohybujeme se pouze po množině dané omezením
- v bodě extrému platí:
  - **gradient funkce je rovnoběžný s gradientem omezení**
- gradienty jsou tedy **lineárně závislé**

### 12.3 Nutná podmínka extrému

- existuje skalár  $\lambda$  tak, že

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$$

- $\lambda$  je **Lagrangeův multiplikátor**
- multiplikátor vyjadřuje citlivost extrému na změnu omezení

### 12.4 Lagrangián

- zavede se pomocná funkce

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

- extrémy se hledají řešením soustavy rovnic

$$\nabla L(x, \lambda) = 0$$

## 12.5 Postup výpočtu

- 1) zavedení Lagrangiánu
- 2) výpočet parciálních derivací podle všech proměnných a multiplikátoru
- 3) řešení soustavy rovnic
- 4) získání **kandidátů extrému**

## 12.6 Podmínky použití

- funkce  $f(x)$  i omezení  $g(x)$  jsou diferencovatelné
- gradient omezení není nulový
- metoda řeší **pouze rovnostní omezení**

## 12.7 Vlastnosti metody

- **výhody**
  - elegantní
  - přesná
  - analytická
- **nevýhody**
  - složitější výpočty
  - neřeší nerovnostní omezení
  - poskytuje pouze kandidáty extrému

## 12.8 Použití

- optimalizace více proměnných
- úlohy s rovnostním omezením
- známé analytické derivace

## 12.9 Zařazení mezi metody

- metoda **s derivacemi**
- optimalizace **s omezením**
- analytická metoda

→ obecnější rámec optimalizace s omezeními je uveden v kapitole Matematické programování

## 13 Matematické programování

Matematické programování představuje **obecný rámec optimalizace s omezeními**, ve kterém hledáme minimum nebo maximum účelové funkce při splnění rovnostních a nerovnostních vazeb. Na rozdíl od klasických analytických metod je kláden důraz na **strukturu úlohy** a systematické algoritmy.

### 13.1 Základní formulace úlohy

- obecná optimalizační úloha má tvar

$$\min f(x)$$

- za podmínek

$$g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0$$

- proměnné jsou omezeny vazbami
- řešení leží v **přípustné oblasti**

### 13.2 Lineární omezení

- lineární omezení mají tvar

$$Ax \leq b$$

- vytvářejí **oblast přípustných řešení**
- v prostoru:

- v 2D mnohoúhelník
- ve vyšších dimenzích polyedr

- optimalizace probíhá pouze uvnitř této oblasti

### 13.3 Lineární účelová funkce

- lineární funkce:

- přímka (2D)
- rovina (3D)

- minimum nebo maximum vzniká na **hranici přípustné oblasti**
- vnitřek oblasti není překážkou

### 13.4 Lineární programování (LP)

- **účelová funkce**
  - lineární
- **omezení**

- lineární
- **proměnné**
  - spojité

Použití: - ekonomika - plánování výroby - alokace zdrojů

Vlastnosti: - úloha je **konvexní** - platí: - lokální minimum = globální minimum

### 13.5 Kvadratické programování (QP)

- **účelová funkce**

- kvadratická

$$\min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$$

- **omezení**

- lineární

Použití: - kvadratické členy v zadání - approximace nelineárních úloh

Vlastnosti: - pokud je matice  $Q$  **pozitivně definitivní** - úloha je konvexní - řešení je jednoznačné

### 13.6 Nelineární programování (NLP)

- **účelová funkce**

- nelineární

- **omezení**

- lineární i nelineární

Použití: - výskyt funkcí typu: - sin, cos, exp - vyšší mocniny

Vlastnosti: - může existovat více lokálních minim - bez konvexity: - není zaručeno globální řešení - často se používají: - Lagrangeovy multiplikátory

### 13.7 Charakteristika matematického programování

- optimalizace s omezeními
- důraz na:

- strukturu účelové funkce
- typ omezení

- volba metody závisí na:

- linearitě

- konvexitě
- rozměru úlohy

Tato kapitola uzavírá přehled optimalizačních metod a poskytuje **systematický pohled** na optimalizaci s omezeními používanou v technické a aplikované matematice.