Obsah

1 Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

Obyčejná diferenciální rovnice popisuje vztah mezi neznámou funkcí jedné proměnné a jejími derivacemi.
Základní tvar obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu je

$$y'(t) = f(t, y)$$

kde hledáme funkci $y(t)$, která tuto rovnici splňuje.

1.1 Cauchyova úloha

ODR spolu s počáteční podmínkou

$$y(t_0) = y_0$$

tvoří Cauchyovu úlohu.
Počáteční podmínka určuje jedno konkrétní řešení z množiny všech řešení.

1.2 Obecné a partikulární řešení

1) Uvažujme rovnici

$$y'(t) = y$$

2) Jejím obecným řešením je

$$y(t) = Ce^t$$

3) Po dosazení počáteční podmínky

$$y(0) = 1$$

dostaneme partikulární řešení

$$y(t) = e^t$$

1.3 ODR vyššího řádu

Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu lze převádět na soustavy rovnic prvního řádu.
Tento převod je zásadní pro další metody řešení.
→ ODR vyššího řádu jako soustava

1.4 Způsoby řešení ODR

a) Analytické řešení V některých případech lze diferenciální rovnice řešit analyticky, typicky po převodu na lineární soustavu s konstantními koeficienty.

b) Numerické řešení Pokud analytické řešení neexistuje nebo je příliš složité, používají se numerické metody. Jde o počítání přibližné hodnoty $y(t)$ v diskrétních krocích. Základní metodou je explicitní Eulerova metoda.

c) Pokročilé numerické metody Pro vyšší přesnost a lepší stabilitu se používají pokročilejší metody, zejména Runge–Kuttovy metody.

2 Převod ODR vyššího řádu na soustavu 1. řádu

Numerické metody jsou standardně formulovány pro diferenciální rovnice prvního řádu. Proto je nutné obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu převést na soustavu rovnic prvního řádu. Tento postup přímo navazuje na obecný pojem obyčejné diferenciální rovnice.
→ obyčejné diferenciální rovnice

2.1 Obecný tvar ODR vyššího řádu

Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu ve tvaru

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Cílem je přepsat tuto rovnici jako soustavu rovnic prvního řádu.

2.2 Zavedení nových proměnných

Zavedeme nové proměnné odpovídající jednotlivým derivacím funkce $y(t)$

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= y', \\ y_3 &= y'', \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Tímto způsobem lze vyjádřit všechny derivace až do řádu $n-1$. Následně zapíšeme derivace jednotlivých proměnných

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

2.3 Příklad převodu – obecná nelineární rovnice

Uvažujme rovnici

$$y'' = t + y$$

Zavedeme nové proměnné

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= y' \end{aligned}$$

a zapíšeme odpovídající soustavu rovnic prvního řádu

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2, \\
y_2' &= t + y_1.
\end{aligned}
$$

2.4 Příklad převodu – lineární homogenní rovnice

Uvažujme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Zavedeme nové proměnné

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y, \\
y_2 &= y'
\end{aligned}
$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic prvního řádu

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2, \\
y_2' &= -3y_2 - 2y_1.
\end{aligned}
$$

— Takto získaná soustava může být dále řešena analytickynebo numerickypodle jejího typu.

3 Lineární soustavy s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$y'(t) = Ay(t),$$

kde $y(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor neznámých funkcí a A je konstantní matice. Řešení této soustavy je určeno vlastnostmi matice A, zejména jejími vlastními čísly a vlastními vektory.

3.1 Vlastní čísla matice A

Vlastní čísla matice A jsou dána charakteristickou rovnicí

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Na základě vlastních čísel lze určit tvar obecného řešení soustavy.

3.2 Typ řešení podle vlastních čísel

Typ vlastních čísel	Tvar řešení
Reálná různá λ_1, λ_2	$y = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$
Reálná stejná $\lambda_1 = \lambda_2$	$y = (c_1 v + c_2(tv + w))e^{\lambda t}$
Komplexní $\lambda = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha t}\left[c_1(v_1 \cos\beta t - v_2 \sin\beta t) + c_2(v_1 \sin\beta t + v_2 \cos\beta t)\right]$

Vektory v, v_1, v_2 označují vlastní (popř. zobecněné vlastní) vektory odpovídající příslušným vlastním číslům.

3.3 Příklad – reálná vlastní čísla

Uvažujme soustavu

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Charakteristický polynom je

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda),$$

odkud dostáváme vlastní čísla

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1.$$

Příslušné vlastní vektory jsou

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obecné řešení má tvar

$$y(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.4 Příklad – komplexní vlastní čísla

Uvažujme soustavu

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0,$$

odkud plyne

$$\lambda = \pm i, \quad \alpha = 0,\ \beta = 1.$$

Obecné řešení soustavy lze zapsat ve tvaru

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Takto získaná lineárně nezávislá řešení lze uspořádat do sloupců fundamentální matice soustavy. → fundamentální matice

4 Fundamentální matice

Uvažujme soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$y'(t) = A\,y(t),$$

kde A je konstantní matice.
V tomto případě lze řešení popsat pomocí **fundamentální matice** $\Phi(t)$, což je matice, jejíž sloupce tvoří lineárně nezávislá řešení dané soustavy.

Obecné řešení má tvar

$$y(t) = \Phi(t)\,c,$$

kde c je konstantní vektor.

4.1 Konstrukce fundamentální matice

Uvažujme soustavu

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y(t).$$

1) Vlastní čísla

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

2) Vlastní vektory

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Jednotlivá řešení

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) Fundamentální matice (sloupce odpovídají jednotlivým řešením)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

5) Obecné řešení

$$y(t) = \Phi(t)\,c = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

4.2 Tahák

Fundamentální matice je matice řešení lineární soustavy.
Její sloupce tvoří lineárně nezávislá řešení a obecné řešení lze vždy zapsat ve tvaru

$$y(t) = \Phi(t)\, c.$$

Fundamentální matice se konstruuje z vlastních čísel a příslušných vlastních vektorů matice A.

Fundamentální matice se využívá zejména při řešení nehomogenních soustav metodou variace konstant

5 Variace konstant (lineární soustava s pravou stranou)

Uvažujme nehomogenní lineární soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$y'(t) = Ay(t) + g(t),$$

kde A je konstantní matice a $g(t)$ je daná vektorová funkce. Metoda variace konstant umožňuje nalézt řešení této soustavy pomocí fundamentální matice odpovídající homogenní soustavě.

Tento postup přímo navazuje na pojem fundamentální matice.
$\rightarrow$ fundamentální matice

5.1 Homogenní soustava

Nejprve uvažujme homogenní soustavu

$$y'(t) = Ay(t).$$

Jejím obecným řešením je

$$y(t) = \Phi(t)\, c,$$

kde $\Phi(t)$ je fundamentální matice a c je konstantní vektor.

5.2 Metoda variace konstant

V metodě variace konstant již vektor c nepovažujeme za konstantní, ale za funkci času $c(t)$. Hledané řešení nehomogenní soustavy má tvar

$$y(t) = \Phi(t)\, c(t).$$

Dosazením tohoto tvaru do původní rovnice dostáváme vztah

$$y(t) = \Phi(t) \left(\int \Phi^{-1}(t)\, g(t)\, dt + c \right).$$

5.3 Tvar fundamentální matice

Ve většině praktických případů platí

$$\Phi(t) = e^{At},$$

odkud plyne

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At}.$$

Například pro diagonální matici A s vlastními čísly λ_1, λ_2 má fundamentální matice tvar

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \qquad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

6 Explicitní Eulerova metoda

Explicitní Eulerova metoda je numerická metoda pro přibližné řešení Cauchyovy úlohy

$$y'(t) = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Místo přesného řešení získáváme pouze aproximace řešení v diskrétních časových bodech.

6.1 Základní vzorec

Aproximační vztah má tvar

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n),$$

kde h je krok metody, $t_n = t_0 + nh$ a y_n je aproximace řešení v čase t_n.

6.2 Postup výpočtu

1) Je dána rovnice

$$y'(t) = f(t, y).$$

2) Zvolíme krok metody h. #### 3) Vyjdeme z počáteční podmínky

$$y_0 = y(t_0).$$

4) Vypočteme

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

5) Aktualizujeme čas

$$t_{n+1} = t_n + h.$$

6) Postup opakujeme pro zadaný počet kroků.

6.3 Příklad

Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y' = y, \qquad y(0) = 1, \qquad h = 0{,}1.$$

1) Krok 0

$$t_0 = 0, \qquad y_0 = 1.$$

2) Krok 1

$$y_1 = y_0 + hy_0 = 1 + 1 \cdot 0{,}1 = 1{,}1.$$

####### 3) Krok 2

$$y_2 = y_1 + hy_1 = 1{,}1 + 1{,}1 \cdot 0{,}1 = 1{,}21.$$

####### 4) Krok 3

$$y_3 = y_2 + hy_2 = 1{,}21 + 1{,}21 \cdot 0{,}1 = 1{,}331.$$

V bodě $t = 0{,}3$ tedy platí aproximace

$$y(0{,}3) \approx 1{,}331.$$

6.4 Eulerova metoda pro soustavy

Uvažujme soustavu

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2). \end{cases}$$

Explicitní Eulerova metoda se aplikuje na každou rovnici zvlášť

$$y_{1,n+1} = y_{1,n} + hf_1(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}),$$

$$y_{2,n+1} = y_{2,n} + hf_2(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}).$$

— Explicitní Eulerova metoda je jednoduchá, ale může být nestabilní pro některé typy úloh.
→ implicitní Eulerova metoda
→ stabilita a stiff problémy

7 Implicitní Eulerova metoda

Implicitní Eulerova metoda je numerická metoda pro řešení Cauchyovy úlohy

$$y'(t) = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Oproti explicitní Eulerově metodě je stabilnější a je vhodná zejména pro tuhé rovnice. Viz stabilita a tuhé rovnice

7.1 Základní vzorec

Implicitní Eulerova metoda je dána vztahem

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Na pravé straně se již vyskytuje hodnota y_{n+1}, proto není vzorec přímo použitelný a je nutné řešit rovnici pro y_{n+1}.

7.2 Postup výpočtu

1) Dosadíme do implicitního vztahu. #### 2) Vznikne (obecně nelineární) rovnice pro y_{n+1}. #### 3) Rovnici vyřešíme (ručně nebo numericky). #### 4) S vypočtenou hodnotou pokračujeme na další krok.

7.3 Příklad

Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y' = y, \qquad y(0) = 1, \qquad h = 0{,}1.$$

Použitím implicitního Eulerova vzorce dostaneme

$$y_{n+1} = y_n + hy_{n+1}.$$

Po úpravě

$$y_{n+1} - hy_{n+1} = y_n,$$
$$y_{n+1}(1 - h) = y_n,$$

tedy

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - h}.$$

7.4 Řešení nelineární rovnice

V obecném případě může vzniknout nelineární rovnice, například

$$y_{n+1} = y_n + h(y_{n+1})^2.$$

V takovém případě se hodnota y_{n+1} určuje numericky, typicky pomocí Newtonovy metody

8 Newtonova metoda

Newtonova metoda je numerická metoda pro řešení rovnice

$$F(x) = 0,$$

kde x je neznámá a $F(x)$ je (skalární nebo vektorová) funkce. Metoda je založena na lineární aproximaci funkce v okolí aktuálního odhadu řešení.

8.1 Iterační vzorec

Základní iterační vztah Newtonovy metody má tvar

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)F(x_k),$$

kde x_k je aktuální odhad řešení, $F(x_k)$ je hodnota funkce v bodě x_k a $J(x_k)$ je Jacobiho matice funkce F v bodě x_k.

8.2 Jacobiho matice

Jacobiho matice je matice parciálních derivací složek funkce F. Pro funkci

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

má Jacobiho matice tvar

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

8.3 Použití v implicitní Eulerově metodě

Při použití implicitní Eulerovy metody

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

nelze hodnotu y_{n+1} určit přímo, protože se vyskytuje na obou stranách rovnice. Rovnici proto přepíšeme do tvaru

$$F(y_{n+1}) = y_{n+1} - y_n - hf(t_{n+1}, y_{n+1}) = 0,$$

kterou řešíme Newtonovou metodou (viz implicitní Eulerova metoda).

8.4 Postup Newtonovy metody

1) Sestavíme rovnici

$$F(x) = 0.$$

2) Vypočteme Jacobiho matici $J(x)$. #### 3) Zvolíme počáteční odhad řešení, typicky $x_0 = y_n$. #### 4) Použijeme iterační vzorec

$$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)F(x_k).$$

8.5 Příklad (skalární rovnice)

Uvažujme rovnici

$$F(x) = x - hx^2 - 1 = 0.$$

Derivace má tvar

$$F'(x) = 1 - 2hx.$$

Newtonova iterace je dána vztahem

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - hx_k^2 - 1}{1 - 2hx_k}.$$

9 Stabilita a stiff problémy

9.1 Testovací rovnice

Základním nástrojem pro studium stability numerických metod je testovací rovnice

$$y' = \lambda y.$$

Jejím přesným řešením je

$$y(t) = e^{\lambda t} y_0.$$

Pokud $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, skutečné řešení klesá k nule. Tato rovnice se používá k testování stability numerických metod.

9.2 Absolutní stabilita

Numerická metoda je absolutně stabilní, pokud při řešení testovací rovnice

$$y' = \lambda y$$

dává řešení, které sice nemusí být nejpřesnější, ale klesá k nule stejně jako přesné řešení. Metoda se destabilizuje tehdy, když hodnoty y_n začnou růst.

9.3 Explicitní Eulerova metoda a stabilita

Pro explicitní Eulerovu metodu platí

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda) y_n.$$

Aby numerické řešení nerostlo, musí být splněna podmínka

$$|1 + h\lambda| < 1.$$

Pro reálné $\lambda < 0$ z toho plyne nerovnost

$$-2 < h\lambda < 0,$$

což znamená, že krok h musí být velmi malý.

9.4 Selhání explicitní Eulerovy metody

U rovnic s velmi záporným parametrem λ vychází podmínka stability ve tvaru

$$h < \frac{2}{|\lambda|}.$$

Numerická metoda je tedy nucena používat extrémně malý krok, aby se řešení nestalo nestabilním.

9.5 Stiff problém

Stiff problém je diferenciální rovnice nebo soustava rovnic, ve které se současně vyskytují rychlé a pomalé složky řešení. Tyto problémy typicky obsahují velmi záporná vlastní čísla a nutí explicitní numerické metody k použití velmi malého kroku.

9.6 Volba kroku

Velikost kroku je u stiff problémů omezena stabilitou metody, nikoli volbou uživatele. Parametr λ, který je vlastním číslem matice soustavy, přímo určuje maximální přípustnou velikost kroku.

10 Runge–Kuttovy metody

Runge–Kuttovy metody jsou numerické metody pro řešení Cauchyovy úlohy

$$y'(t) = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Na rozdíl od Eulerovy metody nevyužívají pouze jeden směr v počátečním bodě, ale kombinují více směrů uvnitř jednoho kroku. Metody jsou stále explicitní, ale dosahují výrazně vyšší přesnosti.

10.1 Typy Runge–Kuttových metod

Explicitní Runge–Kuttovy metody počítají nový krok přímo, bez řešení rovnic. Nejčastěji používanou metodou je metoda čtvrtého řádu (RK4).
Implicitní Runge–Kuttovy metody vyžadují řešení soustavy rovnic, často pomocí Newtonovy metody, a vyznačují se lepší stabilitou, zejména pro stiff problémy.

10.2 RK4 – Runge–Kuttova metoda čtvrtého řádu

Pro krok h definujeme

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Nová hodnota řešení je dána vztahem

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Jednotlivé hodnoty k_1, k_2, k_3, k_4 odpovídají směrům v počátečním bodě, ve středu kroku a na jeho konci. Výsledná hodnota je jejich váženým průměrem, což vede ke čtvrtému řádu přesnosti. Oproti Eulerově metodě je RK4 při stejném kroku výrazně přesnější.

10.3 Okrajové úlohy a metoda sítí

10.3.1 Cauchyova úloha

Cauchyova úloha je zadána počáteční podmínkou v jednom bodě intervalu

$$y'(t) = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Řešení se určuje postupně od počátečního bodu a je vhodné pro popis časového vývoje. Typicky se řeší metodami Eulerova typu nebo Runge–Kuttovými metodami.

10.3.2 Okrajová úloha

U okrajové úlohy jsou podmínky zadány na více bodech intervalu

$$y''(x) = f(x), \qquad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta.$$

Řešení musí splnit obě okrajové podmínky současně a určuje se globálně na celém intervalu.

10.3.3 Metoda sítí

Základní myšlenkou metody sítí je diskretizace intervalu $[a, b]$ na $N+1$ bodů

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N = b,$$

kde krok sítě je

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Derivace jsou nahrazeny konečnými diferencemi, například druhá derivace

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Tím vznikne diferenční rovnice, která představuje algebraický vztah mezi hodnotami v uzlech sítě. Pro každý vnitřní bod získáme jednu rovnici a neznámými jsou hodnoty

$$y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}.$$

Po dosazení okrajových podmínek

$$y_0 = \alpha, \qquad y_N = \beta$$

vznikne lineární soustava rovnic tvaru

$$Ay = b.$$