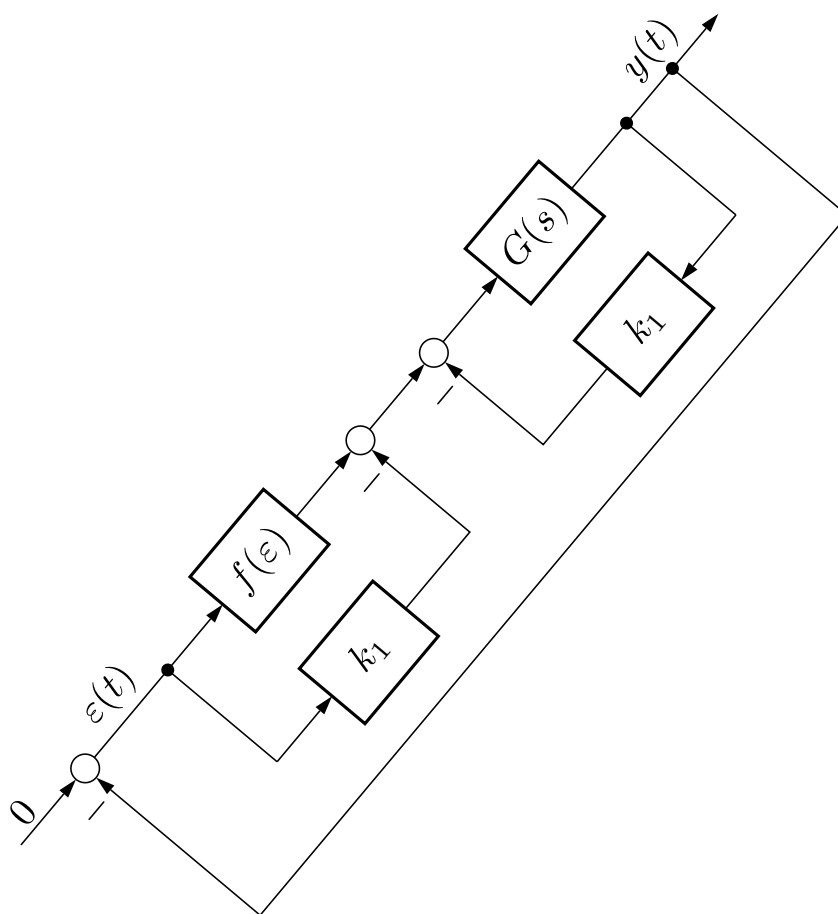


Elementarz automatyki dla elektryków



23 lutego 2015

Spis treści

Rozdział 1. Wprowadzenie	7
1.1. Podstawowe pojęcia automatyki	7
Rozdział 2. Przekształcenie Laplace’a	9
2.1. Podstawowe zasady	9
2.2. Transformacja sygnałów	11
2.3. Przekształcenie odwrotne	11
2.4. Rozwiązanie równań różniczkowych zwyczajnych	14
2.5. Element oscylacyjny – równanie różniczkowe 2. rzędu	18
Rozdział 3. Modele matematyczne	23
3.1. Najpopularniejsze typy modeli matematycznych	23
3.2. Wyznaczanie modeli matematycznych układów dynamicznych	24
3.2.1. Podstawowe wzory i zasady mechaniki	24
3.2.2. Podstawowe wzory i prawa elektrotechniki	27
3.3. Zasada najmniejszego działania	28
3.4. Przykłady z wykorzystaniem równania Lagrange’a i praw Newtona	28
3.5. Modele mechaniczne i elektromechaniczne	31
3.6. Modele obwodów elektrycznych	38
3.7. Modele pozostałe	42
3.8. Model wirującego układu dwumasowego	45
3.8.1. Połączenie sprężyste	45
3.8.2. Luz sprzęgłowy lub przekładniowy	47
3.8.3. Modelowanie układu dwumasowego	49
Rozdział 4. Charakterystyki podstawowych układów dynamicznych	53
4.1. Podział charakterystyk	53
4.2. Element proporcjonalny	55
4.2.1. Charakterystyki skokowe	55
4.3. Element inercyjny	55
4.3.1. Charakterystyki skokowe	56
4.3.2. Charakterystyki częstotliwościowe	56
4.4. Element całkujący idealny	57
4.4.1. Charakterystyki skokowe	57
4.4.2. Charakterystyki częstotliwościowe	58
4.5. Element całkujący z inercją	58
4.5.1. Charakterystyki skokowe	58
4.5.2. Charakterystyki częstotliwościowe	59
4.6. Element różniczkujący idealny	59
4.6.1. Charakterystyki skokowe	59
4.6.2. Charakterystyki częstotliwościowe	60
4.7. Element różniczkujący z inercją	60
4.7.1. Charakterystyki skokowe	60

4.7.2. Charakterystyki częstotliwościowe	61
4.8. Element inercyjny 2. rzędu	61
4.8.1. Charakterystyki skokowe $T_1 \neq T_2$	61
4.8.2. Charakterystyki częstotliwościowe	62
4.8.3. Charakterystyki skokowe $T_1 = T_2 = T$	63
4.8.4. Charakterystyki częstotliwościowe $T_1 = T_2 = T$	63
4.9. Element inercyjny n-rzędu	64
4.9.1. Charakterystyki skokowe	64
4.9.2. Charakterystyki częstotliwościowe	65
4.10. Element oscylacyjny	65
4.10.1. Charakterystyki skokowe $0 < \xi < 1$	66
4.10.2. Charakterystyki częstotliwościowe $0 < \xi < 1$	67
4.10.3. Charakterystyki skokowe $\xi = 0$	68
4.10.4. Charakterystyki częstotliwościowe $\xi = 0$	69
4.10.5. Charakterystyki skokowe $-1 < \xi < 0$	70
4.10.6. Charakterystyki częstotliwościowe $-1 < \xi < 0$	70
4.11. Element opóźniający	70
4.11.1. Charakterystyki skokowe	71
4.11.2. Charakterystyki częstotliwościowe	72
4.12. Podsumowanie	72
Rozdział 5. Algebra schematów blokowych	75
5.1. Podstawowe zasady	75
5.2. Przykłady	78
5.3. Schemat zastępczy silnika obcowzbudnego prądu stałego	81
5.4. Regulacja prądu twornika	86
Rozdział 6. Podstawy układów regulacji automatycznej	89
6.1. Zadania układu automatycznej regulacji	89
6.2. Podział regulatorów	90
6.3. Konwencjonalne regulatory działania ciągłego	91
6.4. Właściwości układów regulacji	91
Rozdział 7. Algebraiczne kryteria stabilności	93
7.1. Narodziny Automatyki	93
7.2. Podstawy teoretyczne	96
7.3. Kryteria stabilności	97
7.4. Przykłady obliczeniowe	99
Rozdział 8. Kryterium Nyquista	105
8.1. Stabilność zamkniętych układów regulacji	106
8.2. Zapas stabilności	113
8.3. Zestawienie charakterystyk częstotliwościowych	115
Rozdział 9. Transmitancja a równanie stanu	119
9.1. Rozwiązanie równania stanu	121
Rozdział 10. Optymalizacja parametryczna regulatorów	123
10.1. Regulator PID	123
10.2. Wskaźniki jakości regulacji	124
10.2.1. Bezpośrednie wskaźniki jakości	124
10.2.2. Całkowe wskaźniki jakości	125
10.2.3. Odpornościowe wskaźniki jakości	126
10.3. Metoda Zieglera-Nicholsa	128
10.4. Kryterium modułowe	129

10.5. Kryteria całkowite	135
10.6. Kryterium symetryczne	137
Rozdział 11. Stabilność – jakościowa teoria równań różniczkowych	143
11.1. I METODA LAPUNOWA- metoda linearyzacji	144
11.2. Linearyzacja	144
11.3. II metoda LAPUNOWA	147
Rozdział 12. Stabilność układu Lurie	149
12.1. Układy regulacji z jedną nieliniowością	149
12.1.1. Hipoteza Ajzermana (1949r.)	150
12.1.2. Przesunięcie widma	150
12.1.3. Kryterium koła	151
12.1.4. Kryterium Popova	152
12.2. Przykłady obliczeniowe – kryterium koła	153
Rozdział 13. Transformacja \mathcal{Z}	163
Dodatek A. Wielomiany przedziałowe	165
Dodatek B. Wykres Wyszniegradzkiego	167
Bibliografia	171

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1. Podstawowe pojęcia automatyki

Automatyka - jest dziedziną wiedzy zajmującą się zagadnieniami sterowania procesami. Zawiera ona teorię sterowania i automatyzację czyli wprowadzenie urządzeń realizujących to sterowanie.

Sterowanie procesem - polega na oddziaływaniu na strumieniu energii i/lub materiału w taki sposób, aby zrealizowany został zamierzony przebieg procesu.

Sygnał - dowolna wielkość fizyczna występująca w procesie sterowania, będąca funkcją **czasu** i wykorzystywana do przekazywania informacji. Informacja ta może być zawarta w kształcie przebiegu sygnału lub jego wartości.

Element automatyki - zwany również **obiektem** jest dowolnym podzespołem, zespołem lub urządzeniem występującym w układzie automatyki. Można wyróżnić w nim sygnał wejściowy oraz wyjściowy.

Układ automatyki - Zespół elementów biorących udział w sterowaniu danym procesem, uporządkowany na zasadzie ich wzajemnej współpracy tzn. zgodnie z kierunkiem przekazywania sygnałów.

Sterowanie - oddziaływanie na dany proces w sposób zamierzony mający doprowadzić do spełnienia określonego celu.

Regulacja - sterowanie z wykorzystaniem sygnałów pomiarowych uzyskanych z danego procesu. Oznacza to występowanie w układzie automatyki sprzężenia zwrotnego. Układy takie nazywa się zamkniętymi układami regulacji.

Model matematyczny - opisuje zjawiska zachodzące w procesie i poszczególnych elementach. Wszystkich zależności nie da się uwzględnić i dlatego stosuje się opisy uproszczone, które uwzględniają najważniejsze, z punktu widzenia automatyki, właściwości. Najczęściej stosuje się modele typu wejście-wyjście, podające wpływ sygnału wejściowego na wyjściowy.

Model statyczny - model matematyczny, który nie posiada zależności od czasu $y = f(u)$, np. $y = 3 * \cos(u)e^u$

Model dynamiczny - model matematyczny, który uwzględnia zależność od czasu, czyli dynamikę. Takie modele najczęściej są zapisywane w postaci równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych, np.

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \sqrt{y(t)} + u^2(t)$$

Model dynamiczne, na potrzeby teorii sterowania, zapisuje się najczęściej w postaci transmitancji lub równania stanu.

Model liniowy - model dynamiczny, w którym wykorzystuje się opis w postaci liniowego równania różniczkowego, którego współczynniki mogą być zmienne w czasie, np.

$$10\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + y(t) = -u(t)$$

Model nieliniowy - model dynamiczny, w którym wykorzystuje się opis w postaci nieliniowego równania różniczkowego.

Rachunek operatorowy - polega na znalezieniu przekształcenia Laplace'a pozwalającego przetransformować liniowe równanie różniczkowo-całkowe na zwykłe równanie algebraiczne. Przekształcenie to można traktować jako *prawo odpowiedniości* między dwoma zbiorami.

Równanie stanu - macierzowy zapis układu n równań różniczkowych zwyczajnych:

równania liniowe stacjonarne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^r \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

gdzie A, B, C, D są kolejno macierzą stanu, wejść, wyjść i bezpośredniego sterowania, natomiast x nazywane jest wektorem stanu, u sterowaniem, a y wyjściem. Stacjonarność oznacza niezależność od czasu elementów wszystkich macierzy.

równania nieliniowe :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (1.2)$$

Transmitancja operatorowa - jest stosowana jako model matematyczny elementu automatyki, którego opis można przedstawić w postaci liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach. Transmitancja jest ilorazem transformat Laplace'a sygnału wyjściowego i wejściowego:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1.3)$$

transmitancję można również wyznaczyć na podstawie równania stanu (1.1):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.4)$$

Zera transmitancji - pierwiastki licznika transmitancji (1.3).

Bieguny transmitancji - pierwiastki mianownika transmitancji (1.3).

Stabilność układu liniowego - układ liniowy nazywamy stabilnym, jeżeli dla wszystkich stanów początkowych x_0 , przy dowolnym i ograniczonym sygnale wejściowym, sygnał wyjściowy pozostaje ograniczony. Dla układów stacjonarnych (np. opisanych transmitancją) można problem stabilności uprościć do: system jest stabilny jeśli wszystkie jego bieguny (wartości własne) leżą w lewej otwartej półpłaszczyźnie Gaussa.

Asymptotyczna stabilność - Jeżeli po ustaniu wymuszenia, jakiemu był poddawany układ dynamiczny, stan systemu (również sygnał wyjściowy) dąży do punktu równowagi (zera) to układ nazywamy *asymptotycznie stabilnym*.

Absolutna stabilność - dla układu Lurie rozważa się *absolutną stabilność*, która gwarantuje asymptotyczną stabilność zamkniętego układu regulacji z jednym elementem nieliniowym (często umieszczanym w sprzężeniu zwrotnym) oraz z liniową dynamiką. Twierdzenia (Popova i koła) określające absolutną stabilność układu Lurie stanowią warunek wystarczający.

Rozdział 2

Przekształcenie Laplace'a

2.1. Podstawowe zasady

Podstawą przekształcenia Laplace'a jest twierdzenie, że każdej funkcji ciągłej i zbieżnej $f(t)$ odpowiada jej postać operatorowa $F(s)$ według zależności

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)]$$

Przykład 1. Obliczyć postać operatorową funkcji $f_1(t) = 1$ oraz $f_2(t) = e^{at}$

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$F_2(s) = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^u = \frac{1}{a-s} \lim_{u \rightarrow \infty} e^{(a-s)u} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

W podręcznikach z dziedziny automatyki znajdują się tabele z odpowiednimi postaciami operatorowymi podstawowych funkcji czasowych.

Podstawowe właściwości przekształcenia Laplace'a to:

1. Liniowość:

Jeśli $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = f_1(s)$ i $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = f_2(s)$ to $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\} = f_1(s) + f_2(s)$

Jeśli $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$ to $\mathcal{L}\{af(t)\} = af(s)$

2. Transformata całki:

Jeśli $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$ to $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{f(s)}{s}$

3. Transformata pochodnej:

Jeśli funkcja $f(t)$ ma dla $t > 0$ pochodną $f'(t)$ i istnieje jej transformata

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = f'(s)$ to $\mathcal{L}\{f(t)\} = sf(s) - f(0^+)$

Podobnie dla drugiej pochodnej $f''(t)$: $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2f(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$

4. Przesunięcie w dziedzinie zespolonej:

Jeśli $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$ to $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = f(s-a)$

5. Przesunięcie w dziedzinie czasu:

Jeśli $\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s)$ to dla $t_0 \geq 0$ transformata jest w postaci $\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0}f(s)$

6. Twierdzenie graniczne o transformacie Laplace'a:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s)$$

Tabela 2.1. Tablice transformat Laplace'a i \mathcal{Z} podstawowych funkcji

$f(t)$	$f(nT_p)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$\hat{F}(z) = \mathcal{Z}\{f(nT_p)\}$
$\delta(t)$	$\delta(nT_p)$	1	1
$\delta(t - kT_p)$	$\delta[(n - k)T_p]$	$e^{-kT_p s}$	z^{-k}
$\mathbb{1}(t)$	$\mathbb{1}(nT_p)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	nT_p	$\frac{1}{s^2}$	$T_p \frac{z}{(z-1)^2}$
t^2	$(nT_p)^2$	$\frac{2}{s^3}$	$T_p^2 \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$e^{-a(nT_p)}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_p}}$
e^{at}	$e^{a(nT_p)}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{z}{z-e^{aT_p}}$
$\sin \omega t$	$\sin \omega(nT_p)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T_p}{z^2 - 2z \cos \omega T_p + 1}$
$\cos \omega t$	$\cos \omega(nT_p)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T_p}{z^2 - 2z \cos \omega T_p + 1}$
$\cos \frac{\pi}{T_p} t$	$\cos \underbrace{n\pi}_{\omega = \frac{\pi}{T_p}} = (-1)^n$	—	$\frac{z}{z+1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-a(nT_p)} \sin \omega(nT_p)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT_p} \sin \omega T_p}{z^2 - 2ze^{-aT_p} \cos \omega T_p + e^{-2aT_p}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-a(nT_p)} \cos \omega(nT_p)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_p} \cos \omega T_p}{z^2 - 2ze^{-aT_p} \cos \omega T_p + e^{-2aT_p}}$
$e^{-at} \cos \frac{\pi}{T_p} t$	$e^{-a(nT_p)} \cos \underbrace{n\pi}_{\omega = \frac{\pi}{T_p}} = (-e^{-aT_p})^n$	—	$\frac{z}{z+e^{-aT_p}}$
$(-a)^{\frac{t}{T_p}}$	$(-a)^{\frac{nT_p}{T_p}} = (-a)^n$	—	$\frac{z}{z+a}$
$a^{\frac{t}{T_p}}$	$a^{\frac{nT_p}{T_p}} = a^n$	$\frac{1}{s - \frac{1}{T_p} \ln a}$	$a \geq 0, \quad \frac{z}{z-a}$
$f(t - kT_p)$	$f[(n - k)T_p]$	$F(s) \cdot e^{-kT_p s}$	$z^{-k} \hat{F}(z)$

2.2. Transformacja sygnałów

1. Wyznaczyć transformatę Laplace'a sygnału (funkcji) $y(t) = ch(at) = \frac{1}{2} [e^{at} + e^{-at}]$,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

i dalej

$$y(s) = \mathcal{L}\{ch(at)\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{2} \frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

2. Wyznaczyć transformatę Laplace'a sygnału (funkcji) $y(t) = sh(at) = \frac{1}{2} [e^{at} - e^{-at}]$

$$y(s) = \mathcal{L}\{sh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

3. funkcja skokowa (Heaviside'a) opóźniona o 10 sekund $y(t) = 2 \cdot \mathbb{1}(t-10) \leftarrow$ jest to przesunięcie w dziedzinie czasu

Należy wykorzystać *twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu*, czyli z $\mathcal{L}\{\mathbb{1}(t)\} = \frac{1}{s}$ wynika $y(s) = 2 \cdot e^{-10s} \cdot \frac{1}{s}$

4. Wyznaczyć transformatę Laplace'a $y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$ powyższą funkcję można zapisać jako sumę

$y(t) = t \cdot \mathbb{1}(t) + (-t-1) \cdot \mathbb{1}(t-1)$ i w dziedzinie operatorowej $y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}$

5. Wyznaczyć transformatę Laplace'a $y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ \pi e^{\pi-t}, & t > \pi \end{cases}$

$$y(t) = t \cdot \mathbb{1}(t) + (-t-\pi) \cdot \mathbb{1}(t-\pi) + \pi e^{-t} \cdot \mathbb{1}(t-\pi)$$

$$y(s) = \frac{1}{s} + \left(-\frac{1}{s^2}e^{-s\pi} - \frac{\pi}{s}e^{-s\pi}\right) + \frac{\pi}{s+1}e^{-s\pi}$$

6. Wyznaczyć transformatę Laplace'a $y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2 - 2t - 2, & t \geq 1 \end{cases}$ należy tu przesunąć funkcję do zera

$$y(t+1) = (t+1)^2 - 2(t+1) - 2 = t^2 - 3$$

$$y(t) = 0 \cdot \mathbb{1}(t) + (t^2 - 3) \cdot \mathbb{1}(t-1)$$

$$y(s) = \frac{2}{s^3}e^{-s} - \frac{3}{s}e^{-s}$$

2.3. Przekształcenie odwrotne

Istnieje kilka metod uzyskania postaci czasowej funkcji $f(t)$ w oparciu o jej postać operatorową $F(s)$. Metodą najbardziej prostą jest rozłożenie funkcji $F(s)$ na ułamki proste i dla uzyskanego każdego składnika odszukanie w tablicach odpowiedniej funkcji czasowej. Zgodnie z tą metodą funkcję

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)^m} = \frac{N(s)}{M(s)}$$

można przedstawić w postaci

$$F(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{B_1}{s-s_n} + \frac{B_2}{(s-s_n)^2} + \dots + \frac{B_m}{(s-s_n)^m}$$

gdzie kolejne współczynniki są w postaci $A_k = \frac{N(s)(s-s_k)}{M(s)} \Big|_{s=s_k}$, $B_m = \frac{N(s)(s-s_n)^m}{M(s)} \Big|_{s=s_n}$

$$B_{m-1} = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} [B_m] \Big|_{s=s_n}, B_{m-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [B_m] \Big|_{s=s_n}$$

Inną metodą na wyznaczenie współczynników jest wykorzystanie rozkładu na ułamki proste.

Przykład 2. Dla funkcji $\frac{Ks+L}{(s-a)(s-b)}$ ułamki proste mają postać $\frac{A}{(s-a)}$, $\frac{B}{(s-b)}$. Suma tych ułamków

$$\frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)} = \frac{Bs - Ba + As - Ab}{(s-a)(s-b)} = \frac{(B+A)s + (-Ba - Ab)}{(s-a)(s-b)}$$

powinna być równa $\frac{Ks+L}{(s-a)(s-b)}$.

W związku z tym szukane współczynniki A i B wyznacza się porównując współczynniki przy jednakowych potęgach operatora s w liczniku, czyli

$$A + B = K, \quad -Ba - Ab = L$$

Przykład 3. Dla funkcji $\frac{Ks+L}{(s-a)^2}$ ułamki proste mają postać $\frac{A}{(s-a)^2}$ i $\frac{B}{s-a}$, czyli

$$\frac{A}{(s-a)^2} + \frac{B}{s-a} = \frac{A + Bs - Ba}{(s-a)(s-a)} = \frac{Bs + (A - Ba)}{(s-a)^2} = \frac{Ks + L}{(s-a)^2}$$

Szukane współczynniki A i B wyznacza się porównując współczynniki licznika:

$$B = K, \quad A - Ba = L$$

Przykład 4. Dla funkcji $\frac{Ks^2 + Ls + M}{(s-a)(s^2 + bs + c)}$ ułamki proste mają postać $\frac{A}{s-a}$ i $\frac{Bs + C}{s^2 + bs + c}$ więc

$$\begin{aligned} \frac{A}{s-a} + \frac{Bs + C}{s^2 + bs + c} &= \frac{A(s^2 + bs + c) + (Bs + C)(s-a)}{(s-a)(s^2 + bs + c)} = \\ &= \frac{(A+B)s^2 + (Ab - Ba + C)s + (Ac - Ca)}{(s-a)(s^2 + bs + c)} = \frac{Ks^2 + Ls + M}{(s-a)(s^2 + bs + c)} \end{aligned}$$

Szukane współczynniki A, B i C wyznacza się porównując współczynniki licznika (przy jednakowych potęgach operatora s):

$$A + B = K, \quad Ab + Ba + c = L, \quad Ac - Ca = M$$

Przykład 5. Znaleźć postać czasową funkcji

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s(s+3)^3}$$

Zgodnie z podaną metodą funkcję tę można rozłożyć na ułamki proste

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s-0)(s+3)^3} = \frac{A_1}{s-0} + \frac{B_1}{s+3} + \frac{B_2}{(s+3)^2} + \frac{B_3}{(s+3)^3}$$

gdzie

$$A_1 = \frac{(s^2 + 2s + 1)(s-0)}{(s+3)^3(s-0)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{27}$$

$$B_3 = \frac{(s^2 + 2s + 1)(s+3)^3}{s(s+3)^3} \Big|_{s=-3} = -\frac{4}{3}$$

$$B_2 = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[\frac{(s^2 + 2s + 1)(s+3)^3}{s(s+3)^3} \right] \Big|_{s=-3} = \frac{d}{ds} (s + 2 + s^{-1}) \Big|_{s=-3} = (1 - s^{-2}) \Big|_{s=-3} = \frac{8}{9}$$

$$B_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{(s^2 + 2s + 1)(s+3)^3}{s(s+3)^3} \right] \Big|_{s=-3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} (s + 2 + s^{-1}) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{2} (2s^{-3}) \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{27}$$

Po podstawieniu uzyskuje się

$$F(s) = \frac{1}{27} \frac{1}{s} - \frac{1}{27} \frac{1}{s+3} + \frac{8}{9} \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{4}{3} \frac{1}{(s+3)^3}$$

i po odszukaniu w tablicach odpowiedników funkcji czasowych dla poszczególnych składników

$$f(t) = \frac{1}{27} (1 - e^{-3t} + 24te^{-3t} - 36t^2e^{-3t})$$

Przykład 6. Wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs}{s^2+4} + \frac{D}{s^2+4} = \\ &= \frac{A(s^3 + s^2 + 4s + 4) + B(s^2 + 4) + C(s^3 + 2s^2 + s) + D(s^2 + 2s + 1)}{(s+1)^2(s^2+4)} \end{aligned}$$

w wyniku uzyskuje się układ równań

$$A + C = 0, A + B + 2C + D = 0, 4A + C + 2D = 0, 4A + 4B + D = 1,$$

który można rozwiązać metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \frac{2}{25}, B = \frac{1}{5}, C = -\frac{2}{25}, D = -\frac{3}{25}$$

$$y(t) = \frac{2}{25} e^{-t} + \frac{1}{5} e^{-t} \cdot t - \frac{2}{25} \cos 2t - \frac{3}{50} \sin 2t$$

2.4. Rozwiązanie równań różniczkowych zwyczajnych

Przekształcenie Laplace'a może być pomocne przy rozwiązywaniu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Procedura postępowania wymaga przekształcenia równania różniczkowego na postać operatorową (z uwzględnieniem warunków początkowych), dokonania rozkładu funkcji operatorowej na ułamki proste i przejścia na postać czasową poszczególnych składników tej funkcji. Dla układu liniowego opisanego transmitancją $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ odpowiedź na dowolne wymuszenie $u(s)$ jest kombinacją liniową składników

$$1, t, t^i, e^{-\alpha t}, t^l e^{-\alpha t}, \sin \omega_0 t, t^l e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t), t^l e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \quad (2.1)$$

Dla ogólnego przypadku

$$y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^i (s + \alpha_1)^{k+1} [(s + \alpha_2)^2 + \omega_0^2]^{l+1} \dots}$$

Czyli dla wymuszenia $u(s)$ otrzymuje się transformatę Laplace'a sygnału wyjściowego $y(s)$ – po rozkładzie na ułamki proste:

$$y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \dots + \frac{A_{i+1}}{s^{i+1}} + \frac{B_1^1}{(s + \alpha_1)} + \dots + \frac{B_{z+1}^1}{(s + \alpha_1)^{k+1}} + \dots + \frac{B_1^p}{(s + \alpha_p)} + \dots + \frac{B_{r+1}^p}{(s + \alpha_p)^{r+1}} + \frac{C_1}{(s^2 + \omega_1^2)} + \dots + \frac{C_{k+1}}{(s^2 + \omega_1^2)^{k+1}} + \dots + \frac{D_1}{(s + \alpha_r)^2 + \omega_r^2} + \dots + \frac{D_{k+1}}{[(s + \alpha_r)^2 + \omega_r^2]^{k+1}}$$

Współczynniki A_i , B_i , C_i , D_i w takim zapisie są stosownymi wielomianami operatora s . Obliczając $\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\}$ otrzymuje się kombinację liniową składników (4.3).

Przykład 7. Rozwiązać równanie różniczkowe w postaci $2\dot{y}(t) + y(t) = 2$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$.

Przejście na postać operatorową

$$2sy(s) - 2 \cdot \underbrace{1}_{y(0)} + y(s) = \frac{2}{s}$$

i pogrupowanie wyrażeń $y(s)(2s + 1) = \frac{2s + 2}{s}$, a następnie wyznaczenie $y(s)$ oraz rozkład na ułamki proste

$$y(s) = \frac{2s + 2}{s(2s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s + 1}$$

Porównanie liczników w celu wyznaczenia współczynników A i B :

$$(2A + B)s + A = 2s + 2 \implies A = 2, B = -2$$

Oznacza to, że rozwiązaniem w dziedzinie operatorowej jest $y(s) = \frac{2}{s} + \frac{-2}{2s+1}$ i po odczytaniu z tablic otrzymuje się rozwiązanie w dziedzinie czasu:

$$y(t) = 2 - e^{-\frac{1}{2}t}$$

Przykład 8. Rozwiązać równanie różniczkowe w postaci $\ddot{y}(t) = e^{-t}$ z warunkiem początkowym $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Przejdźcie na postać operatorową

$$s^2 y(s) = \frac{1}{s+1}$$

i pogrupowanie wyrażań, a następnie wyznaczenie $y(s)$ oraz rozkład na ułamki proste

$$y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

Porównanie liczników w celu wyznaczenia współczynników A , B i C :

$$(A+C)s^2 + (A+B)s + B = 1 \implies B = 1, A+B = 0, A+C = 0 \implies A = -1, C = 1$$

Oznacza to, że rozwiązaniem w dziedzinie operatorowej jest $y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$ i po odczytaniu z tablic otrzymuje się rozwiązanie w dziedzinie czasu:

$$y(t) = -1 + t + e^{-t}$$

Zadanie 1. Rozwiązać równanie różniczkowe w postaci $10\ddot{y}(t) = 2e^{-t}$ z warunkiem początkowym $\dot{y}(0) = -2$.

Należy wykorzystać właściwość transformaty pochodnej.

Przykład 9. Rozwiązać równanie różniczkowe w postaci $\ddot{y}(t) + y(t) = 0$ z warunkiem początkowym $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$.

Przejdźcie na postać operatorową

$$\underbrace{(s^2 y(s) - 2s - 1)}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}} + y(s) = 0$$

i pogrupowanie wyrażań, a następnie wyznaczenie $y(s)$

$$y(s) = \frac{2s+1}{s^2+1} = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

W tym przypadku nie jest wymagany rozkład na ułamki proste i po odczytaniu z tablic uzyskuje się wynik w dziedzinie czasu

$$y(t) = 2 \cos t + \sin t$$

Przykład 10. Napisać transformatę Laplace'a rozwiązania równania $3\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$ z warunkiem początkowym $y(0) = 4$, $\dot{y}(0) = 5$.

Przejdźcie na postać operatorową

$$3 \underbrace{(s^2 y(s) - 4s - 5)}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}} + 2 \underbrace{(s y(s) - 4)}_{\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}} + y(s) = 0$$

i pogrupowanie wyrażań $y(s)(3s^2 + 2s + 1) - (12s + 23) = 0$, a następnie wyznaczenie

$$y(s) = \frac{12s + 23}{3s^2 + 2s + 1}$$

Zadanie 2. Wyznaczyć odwrotną transformację Laplace'a dla powyższego wyniku.

Należy przekształcić funkcję wymierną $y(s)$, tak aby doprowadzić mianownik do standardowej postaci $(s + a)^2 + \omega^2$, a następnie należy skorzystać z tablic.

Przykład 11. Rozwiązać równanie różniczkowe w postaci $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = e^{-2t}$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$.

Przejdźcie na postać operatorową

$$\underbrace{(s^2 y(s) - 1)}_{\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}} + y(s) = \frac{1}{s+2}$$

prowadzące do

$$y(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Należy tu zwrócić uwagę na postać rozkładu na ułamki proste, która jest identyczna z przedstawioną w przykładzie 4.

Po porównaniu liczników uzyskuje się $A = -\frac{1}{3}, B = C = \frac{1}{3}$ i uzyskuje się rozwiązanie

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}\cos t + \frac{1}{3}\sin t$$

Przykład 12. Rozwiązać równanie różniczkowe w postaci

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 2$$

przy warunkach początkowych $y(0) = 1$ i $\dot{y}(0) = 0.5$.

Po przejściu na postać operatorową uzyskuje się

$$2[s^2 y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 3[sy(s) - y(0)] + y(s) = 2\frac{1}{s}$$

i po podstawieniu warunków początkowych

$$2s^2 y(s) - 2s - 1 + 3sy(s) - 3 + y(s) = \frac{2}{s}$$

oraz

$$y(s) [2s^2 + 3s + 1] = \frac{2}{s} + 2s + 4$$

$$y(s) [2s^2 + 3s + 1] = \frac{2s^2 + 4s + 2}{s}$$

$$y(s) = \frac{2(s+1)^2}{2s(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{s+1}{s(s+\frac{1}{2})} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\frac{1}{2}}$$

Współczynniki rozkładu na ułamki proste wynoszą $A_1 = 2$ oraz $A_2 = -1$. Stąd można zapisać

$$X(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}} = \frac{2}{s} - 2\frac{1}{2s+1}$$

i po odczytaniu z tablic uzyskuje się rozwiązanie w dziedzinie czasu

$$x(t) = 2 - e^{-\frac{t}{2}}$$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie różniczkowe:

1. $\dot{y}(t) + y(t) = 3, \quad y(0) = -1,$
2. $3\dot{y}(t) + y(t) = 3e^{-2t}, \quad y(0) = 10,$
3. $2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) = \sin(2\pi t), \quad \dot{y}(0) = 1, \quad y(0) = -2,$
4. $3\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 1, \quad \ddot{y}(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = -2, \quad y(0) = -1,$
5. $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 3y(t) = e^{-2t} \sin(2t), \quad \dot{y}(0) = -1, \quad y(0) = 0,$
6. $\ddot{y}(t) = 1 + \sin(4\pi t), \quad \dot{y}(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

Przykład 13. Bez rozwiązywania równania różniczkowego $T\dot{y}(t) + y(t) = u(t), u(t) = 5, y(0) = 0$ wyznaczyć wartość początkową i końcową oraz wartość pochodnej w chwili $t = 0$.

W tym celu należy obliczyć transformatę $y(s) = \frac{5}{s(Ts+1)}$ i dalej wystarczy zastosować twierdzenie graniczne o transformacie Laplace'a (str. 9)

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{5}{s(Ts+1)} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{5}{s(Ts+1)} = 5$$

Aby obliczyć wartość początkową lub końcową sygnału $\dot{y}(t)$ należy pomnożyć transformatę $y(s)$ przez s i wykorzystać twierdzenia graniczne

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot sy(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{5s}{s(Ts+1)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{5}{T + \frac{1}{s}} = \frac{5}{T}$$

Zadanie 4. Należy samodzielnie policzyć wartość końcową $\dot{y}(t)$.

Przykład 14. Wymuszenie sinusoidalne elementu **inercyjnego pierwszego rzędu**, który opisany jest równaniem różniczkowym w postaci

$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

gdzie $T > 0$ jest parametrem elementu nazywanym stałą czasową, natomiast $u(t)$ jest sygnałem wymuszającym i w tym przypadku ma postać $u(t) = \sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$.

Równanie w postaci operatorowej przyjmuje postać

$$sy(s) + y(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow y(s)[s+1] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow y(s) = \frac{\omega_0}{(s+1)(s^2 + \omega_0^2)}$$

następnie stosuje się rozkład na ułamki proste

$$y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{C\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow A(s^2 + \omega_0^2) + B(s^2 + s) + C\omega_0(s+1) = \omega_0$$

który prowadzi do równań liniowych

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$B + C\omega_0 = 0 \Rightarrow -A + \omega_0 - A\omega_0^2 = 0$$

$$A\omega_0^2 + C\omega_0 = \omega_0 \Rightarrow C\omega_0 = \omega_0 - A\omega_0^2 \Rightarrow A(1 + \omega_0^2) = \omega_0$$

$$A = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

$$B = -\frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2}$$

$$C = 1 - A\omega_0 = 1 - \frac{\omega_0^2}{1 + \omega_0^2} = \frac{1 + \omega_0^2 - \omega_0^2}{1 + \omega_0^2} = \frac{1}{1 + \omega_0^2}$$

i ostatecznie uzyskuje się rozwiązanie w dziedzinie operatora s

$$y(s) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s + 1} - \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{1 + \omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

i po odczytaniu z tablic wyznacza się rozwiązanie w dziedzinie czasu

$$y(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} e^{-t} - \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{1 + \omega_0^2} \sin(\omega_0 t)$$

które po uporządkowaniu można przedstawić w następującej postaci

$$y(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} \left[e^{-t} - 1 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] \quad (2.2)$$

W równaniu (2.2) występuje suma funkcji sinus i cosinus o identycznym argumentem i wynik ten można sprowadzić do jednej funkcji trygonometrycznej i przesunięcia fazowego. W tym celu wykorzystuje się wzór trygonometryczny: $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$, gdzie $\beta = \arctg \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \arctg(\frac{1 \cdot \omega_0}{1}) = \arctg(\omega_0)$.

Uzyskuje się ostateczny wynik:

$$y(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2} [e^{-t} + \sin(\omega_0 t - \beta)]$$

2.5. Element oscylacyjny – równanie różniczkowe 2. rzędu

W tym podrozdziale przedmiotem rozważań będzie równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu w postaci ogólnej, które stanowi uogólnienie dotychczasowych rozważań. Uzyskiwane wyniki zależą od parametrów równania i w tym przypadku są to ξ , ω_0 .

Ogólną postacią tego równania jest:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = u(t) \quad (2.3)$$

Przykład 15. Rozważa się przypadek : $\ddot{y}(t) + 20\xi\dot{y}(t) + 100y(t) = 200$, czyli $\omega_0 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, ξ jest parametrem i bada się jego wpływ na rozwiązania $y(t)$. Warunki początkowe przyjmujemy za zerowe ($y(0^+) = \dot{y}(0^+) = 0$)

Wówczas

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + 20\xi\dot{y} + 100y\} = \mathcal{L}\{200\} \Rightarrow s^2 y(s) + 20\xi s y(s) + 100y(s) = \frac{200}{s}$$

i dalej

$$y(s)[s^2 + 20\xi s + 100] = \frac{200}{s}$$

co prowadzi do

$$y(s) = \frac{200}{s(s^2 + 20\xi s + 100)} \quad (2.4)$$

Z postaci mianownika równania (2.4) widać, że jego zera (pierwiastki) zależą silnie od wartości parametru ξ – w zależności od jego wartości mogą być rzeczywiste lub zespolone. Oznacza to, że transformata (2.4) nie ma ogólnego rozwiązania.

Istnieją cztery warianty rozwiązania równania (2.3) zależne od ξ :

1. $\xi \geq 1$ funkcja aperiodyczna
2. $\xi = 0$ funkcja oscylacyjna (periodyczna)
3. $0 < \xi < 1$ funkcja oscylacyjna z tłumieniem
4. $\xi < 0$ funkcja oscylacyjna narastająca (niestabilna)

W dalszej części rozważane są **rozwiązania ogólne**:

- **gdy $\xi > 1$** dla przykładu przyjmuje się $\xi = 1.25 \Rightarrow y(s)[s^2 + 25s + 100] = y(s)(s + 5)(s + 20)$ i wyrażenie podstawowe rozkłada się na ułamki proste

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 20} + \frac{C}{s + 5} = \frac{A(s^2 + 25s + 100) + B(s^2 + 5s) + C(s^2 + 20s)}{s(s^2 + 25s + 100)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ 25A + 5B + 20C = 0 \\ 100A = 200 \end{array} \right\} A = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B + C = 2 \\ 5B + 20C = -50 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -50 \end{bmatrix}$$

i można tu wykorzystać metodę eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -40 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 + \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{2}{3} \\ B = -\frac{8}{3} \end{array} \right\}$$

i ostatecznie uzyskuje się wynik w dziedzinie operatorowej

$$y(s) = \frac{2}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s + 20} - \frac{\frac{8}{3}}{s + 5}$$

a po odczytaniu z tablic wynik w dziedzinie czasu

$$y(t) = 2 + \frac{2}{3}e^{-20t} - \frac{8}{3}e^{-5t}$$

Na podstawie uzyskanego rozwiązania można wyznaczyć $\ddot{y}(t) = 0$ czyli $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 y(s)\}$ co prowadzi do

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = \frac{s^2}{s(s + 20)(s + 5)} = \frac{A}{s + 20} + \frac{B}{s + 5}, B = \frac{4}{3}C = -\frac{1}{3}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{4}{3}e^{-20t} - \frac{1}{3}e^{-5t}$$

po przyrównaniu do 0 ostatniego wyniku można wyliczyć punkt przegięcia funkcji

$$4e^{-20t_p} = e^{-5t_p} \frac{e^{-20t_p}}{e^{-5t_p}} = e^{-15t_p} = \frac{1}{4} - 15t_p = -1.386$$

Oznacza to, że $t_p = 0.0924s$.

- **gdy** $\xi = 0$ co prowadzi do transformaty Laplace'a w postaci

$$y(s) = \frac{200}{s(s^2 + 100)}$$

i dokonując rozkładu na ułamki proste uzyskuje się

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs}{s^2 + 100} + \frac{10C}{s^2 + 100} = \frac{A(s^2 + 100) + Bs^2 + 10Cs}{s(s^2 + 100)}$$

Z porównania liczników wynika $A + B = 0$, $10C = 0$, $100A = 200 \Rightarrow A = 2$, $B = -2$ i dalej

$$y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2 + 100} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 2 - 2 \cos(10t) \quad (2.5)$$

Z równania (2.5) wynika, że rozwiązanie $y(t)$ ma charakter oscylacyjny niegasnący.

- **gdy** $0 < \xi < 1$ w tym przypadku nie ma możliwości na rozkład mianownika inny niż:
 $s^2 + 20\xi s + 100 = (s + a)^2 + \omega^2$ (z tablic transformat)

$$s^2 + 20\xi s + 100 = s^2 + 2as + a^2 + \omega^2$$

więc $a = 10\xi$, $100 = 100\xi^2 + \omega^2 \Rightarrow \omega = 10\sqrt{1 - \xi^2}$

i dalej

$$y(s) = \frac{200}{s(s^2 + 20\xi s + 100)} = \frac{A}{s} + \frac{B(10\sqrt{1 - \xi^2})}{(s + 10\xi)^2 + (10\sqrt{1 - \xi^2})^2} + \frac{C(s + 10\xi)}{(s + 10\xi)^2 + (10\sqrt{1 - \xi^2})^2}$$

dla przykładu przyjmuje się: $\xi = \frac{6}{10}$, $a = 6$; $\omega = 10\sqrt{\frac{100 - 36}{100}} = 10 \cdot \frac{8}{10} = 8$

i wówczas można przeprowadzić rozkład na ułamki proste

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{8B}{(s + 6)^2 + 8^2} + \frac{C(s + 6)}{(s + 6)^2 + 8^2} = \frac{A(s^2 + 12s + 100) + 8Bs + C(s^2 + 6s)}{s(s^2 + 12s + 100)}$$

proceedzi on do układu równań liniowych

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 12A + 8B + 6C &= 0 \\ 100A &= 200 \Rightarrow A = 2, C = -2 \\ 24 + 8B - 12 &= 0 \Rightarrow B = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

i uzyskuje się rozwiązanie w postaci

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 - \frac{3}{2}e^{-6t} \sin(8t) - 2e^{-6t} \cos(8t) = 2 - e^{-6t} \left(\frac{3}{2} \sin(8t) + 2 \cos(8t) \right) \\ &= 2 \left[1 - e^{-6t} \underbrace{\left(\frac{3}{4} \sin(8t) + \cos(8t) \right)}_{\text{wymaga normalizacji } \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{5}{4}} \right] \\ &= 2 \frac{5}{4} \left[1 - \frac{5}{4} e^{-6t} \left(\underbrace{\frac{3}{5}}_{\cos \beta} \sin(\underbrace{8t}_{\alpha}) + \underbrace{\frac{4}{5}}_{-\sin \beta} \cos(\underbrace{8t}_{\alpha}) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Wykorzystanie wzoru trygonometrycznego $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$ prowadzi do

$$\beta = \arctg \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\arctg \frac{4 * 5}{5 * 3} = -\arctg \frac{4}{3} = -0.93 \text{ rad} \Rightarrow -53.13^\circ$$

i ostatecznie uzyskuje się rozwiązanie

$$y(t) = 2 \left[1 - \frac{5}{4} e^{-6t} \sin(8t + 0.93) \right]$$

Na tej podstawie można podać ogólne rozwiązanie dla elementu oscylacyjnego tłumionego

Ogólna postać rozwiązania dla $0 < \xi < 1$:

$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y = k\omega_0^2 u_0$, u_0 - wartość stała (wymuszenie)

$$y(t) = ku_0 \left[1 - \frac{e^{-\omega_0 \xi t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \right], \varphi = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (2.7)$$

ξ - współczynnik tłumienia

ω_0 - pulsacja drgań własnych nie tłumionych (jeśli $\xi = 0$ - rozwiązanie dla przypadku 2)

ω_N - pulsacja drgań własnych tłumionych $\omega_N = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$

k - wzmacnienie

- **gdy $\xi < 0$** przebieg oscylacyjny rozbiegający (niestabilny). W celach demonstracyjnych przyjmuje się następujące parametry:

$$\xi = -\frac{6}{10} \Rightarrow a = -6, \omega = 8$$

i dalej $\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{at} \sin(\omega t)$

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{8B}{(s-6)^2 + 8^2} + \frac{C(s-6)}{(s-6)^2 + 8^2} = \frac{A(s^2 - 12s + 100) + 8Bs + C(s^2 - 6s)}{s(s^2 - 12s + 100)}$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach powyższe równanie prowadzi do układu równań liniowych

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -12A + 8B - 6C &= 0 \\ 100A &= 200 \end{aligned}$$

z którego wynika $A = 2$, $C = -2$, $B = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ i postępując podobnie jak dla przypadku $0 < \xi < 1$ uzyskuje się wynik rozwiązania równania

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 + \frac{3}{2} e^{6t} \sin(8t) - 2 e^{6t} \cos(8t) = 2 \left[1 + \frac{5}{4} e^{6t} \left(\frac{3}{5} \sin(8t) - \frac{4}{5} \cos(8t) \right) \right] \\ &= 2 \left[1 + \frac{5}{4} e^{6t} \sin(8t - 0.93) \right], \quad \beta = \arctg \left[\left(-\frac{4}{5} \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \right] = \arctg \frac{4}{3} = 0.93 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Należy zwrócić uwagę na wykładnik funkcji eksponencjalnej jest dodatni i oznacza to, że uzyskane rozwiązanie ma charakter oscylacyjny rozbiegający (kolejne wartości ekstremów funkcji $y(t)$ oddalają się od siebie wraz z upływem czasu). W automatyce takie zjawisko nazywane jest **niestabilnością układu dynamicznego**.

Rozdział 3

Modele matematyczne

W układach automatyki wyznacza się modele matematyczne rzeczywistych obiektów regulacji, które wykorzystywane są następnie w modelowaniu i optymalizacji parametrycznej regulatorów. Każdy model powinien zawierać wyrażenia nieliniowe oraz równania różniczkowe cząstkowe, ale dalsze ich zastosowanie w optymalizacji parametrycznej (doborze nastaw) regulatorów jest bardzo trudne. Z tego powodu najczęściej wszelkie procesy opisuje się przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych, które poddaje się linearyzacji.

3.1. Najpopularniejsze typy modeli matematycznych

Najczęściej modele matematyczne zapisuje się w następujących postaciach:

- *Nieliniowe równanie różniczkowe* jest najbardziej ogólnym i naturalnym zapisem dynamiki danego procesu:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (3.1)$$

gdzie x i u są wektorami funkcji odpowiednio w n i m wymiarowej przestrzeni.

- *Liniowe równanie różniczkowe* o stałych współczynnikach a_i , b_j (w odróżnieniu od zapisu (3.1) funkcja $x(t) \in \mathbb{R}$, czyli jest skalarna):

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad (3.2)$$

Często stosuje się oznaczenia $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$, $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$.

- *Transmitancja operatorowa* (gdy rozwiązanie równania (3.2) w dziedzinie czasu jest równe $y(t) = x(t)$, to $y(s) = \mathcal{L}(y(t))$):

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (3.3)$$

- *Liniowe stacjonarne równanie stanu*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^r \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

gdzie A , B , C , D są kolejno macierzą stanu, wejść, wyjść i bezpośredniego sterowania, natomiast x nazywane jest wektorem stanu, u sterowaniem, a y wyjściem. Stacjonarność oznacza niezależność od czasu elementów wszystkich macierzy.

Równanie stanu (3.4) może zostać przeliczone do postaci transmitancji (3.3):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.5)$$

W wielu przypadkach równanie nieliniowe (3.1) jest trudne w analizie oraz dalszym wykorzystaniu w syntezie układu regulacji, więc często dokonuje się jego linearyzacji do postaci (3.2).

3.2. Wyznaczanie modeli matematycznych układów dynamicznych

Procedura wyznaczania deterministycznego ciągłego o parametrach skupionych modelu matematycznego układu rzeczywistego:

1. Określenie zmiennych uogólnionych – zmiennych niezależnych oraz zmiennych sterujących.
2. Określenie założeń dotyczących działania układu rzeczywistego:
 - pominięcie zjawisk fizycznych, które nie są istotne w przetwarzaniu energii lub ich wpływ na działanie układu jest mało istotny,
 - linearyzacja charakterystyk statycznych jeśli nie są one istotą działania układu rzeczywistego.
3. Wykorzystanie praw i zasad fizyki w określeniu ciągłych równań różniczkowych poszczególnych elementów układu rzeczywistego:
 - prawa dynamiki Newtona, prawo zachowania pędu, prawo zachowania momentu pędu, prawo zachowania energii,
 - zasada d’Alamberta,
 - formalizm Lagrange’a,
 - formalizm Hamiltona,
 - prawa Kirchhoffa, Ohma, indukcji magnetycznej.
4. Eliminacja zbędnych (nadmiarowych lub wzajemnie zależnych) zmiennych. Uproszczenia, przekształcenia lub linearyzacja równań.

3.2.1. Podstawowe wzory i zasady mechaniki

Do podstawowych wzorów z zakresu mechaniki należą [feynman, banach, taylor]:

- prędkość: $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$,
- droga: $s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$,
- przyspieszenie: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$,
- pęd (ilość ruchu): $p(t) = mv(t)$,
- siła (II prawo Newtona): $F(t) = \frac{d}{dt} [m(t)v(t)]$,
- energia kinetyczna: $T(t) = E_k(t) = \frac{1}{2}m(t)v(t)$,
- energia potencjalna: $U(t) = E_p(t) = m(t)gh(t)$,
- prawo powszechnego ciążenia – każde ciało przyciąga inne ciało z siłą: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, gdzie $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$; G zostało wyznaczone w doświadczeniu Cavendisha,
- pole grawitacyjne C ciała o masie m_1 . Służy do określenia siły działającej na dowolne ciało m_2 umieszczone w polu grawitacyjnym C : $F = m_2 C$, $C = -\frac{Gm_1 \underline{r}}{r^3}$, gdzie \underline{r} jest wektorem w przestrzeni Euklidesowej,
- praca jest równoważna zmianie energii (np. podnoszenie ciężarów), gdy siła działa wzdłuż drogi ds : $dE = W = F \cdot ds$; praca wykonana przez siłę na drodze z s_1 do s_2 jest całką krzywoliniową z iloczynu skalarnego $F \cdot ds$: $\Delta E = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$; oznacza to, że pracę wykonuje składowa siły w kierunku ruchu,

- *moc* jest szybkością zmiany energii kinetycznej ciała (moc jest pracą wykonaną w 1 sekundzie):

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}mv(t)\right)}{dt} = m \frac{dv(t)}{dt} v(t) = F \cdot v, \quad P = F \cdot v,$$

- *moment pędu* \underline{L} jest iloczynem wektorowym promienia \underline{r} i pędu \underline{p} : $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ lub w postaci skalarnej

$$L = mvr = mr\omega \cdot r = m\omega r^2 = \underbrace{xp_y - yp_x}_{\text{il. wektorowy}} = r \cdot p_{\text{styczne}},$$

- *moment siły* (moment) \underline{M} jest iloczynem wektorowym promienia \underline{r} i siły \underline{F} : $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$; równanie $\dot{\underline{L}} = \underline{M}$ jest odpowiednikiem II prawa dynamiki Newtona,

- **Ruch obrotowy:**

- przemieszczenie kątowe: $s(t) = r\alpha(t)$,

- prędkość kątowa: $\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$,

- przyspieszenie kątowe: $a_\omega(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$,

- prędkość w ruchu postępowym: $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(r\alpha(t))}{dt} = r \frac{d\alpha(t)}{dt} = r\omega(t)$,

- przyspieszenie w ruchu postępowym: $a_v(t) = \frac{dv(t)}{dt} = r a_\omega(t)$,

- moment bezwładności: $J = \int (x_i^2 + y_i^2) dm = \int r_i^2 dm \approx \sum_i m_i r_i^2$,

- energia kinetyczna dla masy skupionej:

$$T = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v=r\omega} = \frac{mr^2\omega^2}{2}$$

- energia kinetyczna dla bryły sztywnej:

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

- moment pędu: $L = J\omega$,

- moment siły: $M = xF_y - yF_x$, gdzie (x, y) oznacza współrzędne, a F_x, F_y siły kierunkowe;

Natomiast II prawo dynamiki Newtona przyjmuje postać $M = \frac{dL}{dt}$,

- praca: $dW = F_x dx + F_y dy = (xF_y - yF_x) d\alpha = M d\alpha$,

- moc: $P = M\omega$,

Energia jest skalarną wielkością fizyczną, która charakteryzuje stan układu fizycznego jako jego zdolność do wykonania pracy. W układach mechanicznych energię można magazynować w postaci potencjalnej (elementy sprężyste, masa w polu grawitacyjnym) lub w postaci kinetycznej (poruszająca się masa) oraz energia może być rozpraszana (tłumienie), czyli zamieniana na energię cieplną. Energię dzieli się na:

- grawitacyjną,
- sprężystą,

- kinetyczną,
- cieplną,
- elektryczną,
- chemiczną,
- promienistą,
- jądrową,
- masy.

Zasada zachowania energii [feynman] rządzi wszystkimi zjawiskami przyrodniczymi tzn. obowiązuje bezwarunkowo. Istnieje pewna wielkość - *energia całkowita* - która podczas różnorodnych przemian nie ulega zmianom. Energię całkowitą wyznacza się jako sumę wszystkich postaci energii jeżeli układ nie pobiera i nie oddaje energii na zewnątrz (*układ izolowany* lub *autonomiczny*). Twierdzenie takie ma charakter matematyczny i oznacza, że pewna liczba pozostaje stała „podczas gdy coś się dzieje”. Zasada zachowania energii „stwierdza jedynie fakt, że jeżeli obliczy się pewną wielkość, a następnie poczeka aż przyroda dokona swych sztuczek i obliczy się tę samą wielkość powtórnie, to stwierdza się, że otrzymany wynik jest identyczny”.

Zasada zachowania pędu [banach]: jeżeli suma sił, działających na układ punktów, jest równa zero to środek masy jest w spoczynku lub w ruchu jednostajnie prostoliniowym, a pęd ogólny układu jest wektorem stałym.

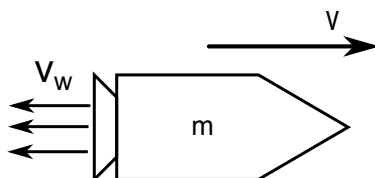
Z zasady tej wynika, że:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

i zależność ta jest równoważna II prawu Newtona.

Przykład 16. *Ruch rakiety* [Taylor, Banach].

Na rysunku 3.1 przedstawiona jest schematycznie zasada działania rakiety o masie m .



Rysunek 3.1. Opis ruchu rakiety

Siła ciągu jest równa $F_c = -\dot{m}v_w$, gdzie prędkość gazów wylotowych v_w jest odwrotnie skierowana niż prędkość rakiety v . Wówczas ruch rakiety opisuje równanie Ciołkowskiego w postaci:

$$m\dot{v} = -\dot{m}v_w + F_z$$

gdzie F_z jest siłami grawitacji i oporu powietrza.

Zasada zachowania momentu pędu [banach]: jeżeli moment siły \underline{M} względem pewnej osi jest równy zero, to moment pędu \underline{L} względem tej osi jest stały i prędkość polowa rzutu ruchu na płaszczyznę prostopadłą do tej osi jest stała. Z zasady tej wynika

$$\underline{\dot{L}} = \underline{M}$$

Inaczej zasadę tę można określić jako: *zewnątrzny moment siły działający na dowolny układ jest równy szybkości zmian całkowitego momentu pędu.*

Pojęcie **tarcia** związane jest z siłami przeciwdziałającymi występowaniu prędkości względnych (np. dwóch stykających się ciał, powietrza względem kuli), czyli zawsze istnieje tu zależność siły tarcia od prędkości. Przeciwdziałanie ruchowi jest związane ze zjawiskiem rozpraszania energii. Wyrażenia określające tarcie są prawami empirycznymi, które wynikają z wielu skomplikowanych czynników i dokładny opis tych zjawisk jest trudny. Dlatego przyjmuje się pewne uogólnienia i związane są one z ośrodkiem, w którym odbywa się ruch, prędkością oraz obiektami (ciałami) znajdującymi się w ruchu.

Wprowadza się 3 podstawowe zależności [feynman t.1.1., cannon] pozwalające na określenie sił F_t lub momentów sił M_t tarcia (współczynnik c jest związany z kształtem ciała znajdującego się w ruchu):

- $F_t \approx c v^k$, $M_t \approx c \omega^k$, $k = 1.5 \div 3$ – siły tarcia występujące przy przepływie zaburzonym i związane są z wysokimi prędkościami, które prowadzą do powstawania wirów turbulencyjnych ośrodka względem poruszającego się obiektu (ciała), np. lecący samolot, pompa, wentylator, dmuchawa.
- $F_t \approx c v$, $M_t \approx c \omega$ – *tarcie lepkie (wiskotyczne)* związane jest z niewielkimi prędkościami, brakiem powstawania wirów turbulencyjnych oraz regularnością ciał wykonujących ruch. Mówi się wówczas o *przepływie laminarnym*. Przykładami może być tu: kulka w cieczy lub powietrzu, tarcie powietrza w ruchu wahadła, generator elektryczny (obciążenie generatorowe).
- $F_t \approx c \cdot \text{sign}(v)$, $M_t \approx c \cdot \text{sign}(\omega)$ – *tarcie suche* lub *tarcie ślizgu* jest najbardziej skomplikowane, ponieważ w skali atomowej obie powierzchnie ślizgu są nieregularne. Wówczas występuje wiele punktów styczności, gdzie atomy mocno się przyciągają, a gdy jedno ciało zostanie przesunięte dalej atomy rozłączają się i zaczynają drgać. Takie ruchy atomów oznaczają występowanie energii kinetycznej, która prowadzi do ogrzania się obu ciał (energia cieplna).

3.2.2. Podstawowe wzory i prawa elektrotechniki

- Strumień skojarzony z uzwojeniem (cewka) dla indukcyjności L bez nasycień: $\psi(t) = Li(t)$,
- Spadki napięcia na elementach liniowych:
 - Idealny rezystor: $u(t) = Ri(t)$,
 - Idealny kondensator: $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$,
 - Idealna cewka: $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$,
- *I prawo Kirchhoffa*: suma prądów wpływających do węzła i z niego wypływających musi być w każdej chwili równa 0:

$$\sum_{\text{węzeł}} i(t) = 0,$$

- *II prawo Kirchhoffa*: suma wszystkich spadków napięcia wzdłuż dowolnego zamkniętego obwodu musi być w każdej chwili równa 0:

$$\sum_{\text{obwód}} u(t) = 0,$$

- *prawo Ohma*: napięcie (różnica potencjałów) pomiędzy dwoma końcami przewodnika jest proporcjonalne do natężenia prądu płynącego przez przewodnik (dla rezystancji $R = \text{const.}$):

$$u(t) = Ri(t),$$

- *Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya*: w obwodzie znajdującym się w zmiennym polu magnetycznym indukuje się siła elektromotoryczna (SEM) $e(t)$. Inaczej prawo to można wyrazić

ww postaci: jeśli strumień ψ sprzężony z obwodem ulega zmianom, to w obwodzie indukuje się SEM $e(t)$:

$$e(t) = -\frac{d\psi(t)}{dt},$$

Znak „-” oznacza, że SEM przeciwdziała przyczynie jej powstania. Przypadkiem szczególnym jest tu przecinanie linii pola magnetycznego (o indukcji B) przez przewód o długości l z prędkością v , wówczas SEM wynosi: $e = BLv$,

3.3. Zasada najmniejszego działania

Uniwersalną metodą do wyznaczania modelu matematycznego obiektu regulacji jest **ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA HAMILTONA** (Biszytyga 1989, Pułaczewski, Szacka & Manitiusz 1974, Rusek 1993). W myśl tej zasady układ scharakteryzowany jest przez funkcję skalarną (argumentami są tu położenia i prędkości uogólnione oraz czas) – funkcja Lagrange’a.

Ruch rzeczywisty tego układu (obektu) zachodzący pod działaniem sił przy przejściu z jednego położenia w drugie przebiega tak, że minimalizuje funkcjonal.

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

Warunkiem osiągnięcia minimum przez J jest równanie (Lagrange’a) w postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}_i} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dx_i} = \frac{dP_{we}}{d\dot{x}_i} - \frac{1}{2} \frac{dP_{di}}{d\dot{x}_i} \quad (3.6)$$

gdzie prawa strona równania uwzględnienia straty energii przy pokonywaniu sił oporu w czasie ruchu oraz energii dostarczonej. Natomiast przez x_i oznacza się współrzędne uogólnione: przesunięcie, kąt obrotu, ładunek elektryczny oraz $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ prędkości uogólnione (tab. 3.1).

Natomiast funkcja \mathcal{L} jest określona jako różnica energii kinetycznej i potencjalnej układu dynamicznego

$$\mathcal{L} = \sum E_k - \sum E_p \quad (3.7)$$

Dodatkowo użyteczne może być tu równanie na energię potencjalną ciała znajdującego się na wysokości h

$$E_p = mgh$$

3.4. Przykłady z wykorzystaniem równania Lagrange’a i praw Newtona

Przykład 17. Obwód szeregowy elektryczny RL

$$E_k = \frac{1}{2} L (\dot{q})^2, \quad E_p = 0, \quad P_{we} = Ui$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} L (\dot{q})^2 - 0, \quad P_{di} = Ri^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (L\dot{q}) = \frac{d}{dt} (Li) = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq} = 0, \quad \frac{dP_{we}}{di} = U, \quad \frac{dP_{di}}{di} = 2Ri$$

Tabela 3.1. Zestawienie współrzędnych i prędkości uogólnionych

Układ		E_k	E_p	P_{di}	P_{we}	wsp. uogól.	
Elektryczny		$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L(\dot{q})^2$	$\frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	$Ri^2 = R(\dot{q})^2$	$Ui = U\dot{q}$	q	Ładunek elektr. [1C=1As]
Mechaniczny	ruch postępowy	$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$	sprężyst. $\frac{1}{2}kx^2$	$R_v v^2 = R_v(\dot{x})^2$	$Fv = F\dot{x}$	x	położenie [m]
	ruch obrotowy	$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(\dot{\alpha})^2$	sprężyst. $\frac{1}{2}K\alpha^2$	$R_\omega \omega^2 = R_\omega(\dot{\alpha})^2$	$M\omega = M\dot{\alpha}$	α	kąt [rad]
m – masa J – moment bezwładności			k, K – wsp. sprężystości	R_i – opór	F – siła M – moment		

$$L \frac{di}{dt} = U - Ri$$

Przykład 18. Obwód szeregowy elektryczny RC

$$E_k = 0, \quad E_p = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad P_{we} = Ui$$

$$\mathcal{L} = 0 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad P_{di} = Ri^2$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq} = -\frac{q}{C}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} \right) = 0$$

$$\frac{\dot{q}}{C} = U - Ri, \quad q = \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = U - Ri$$

Przykład 19. Obwód szeregowy elektryczny LC

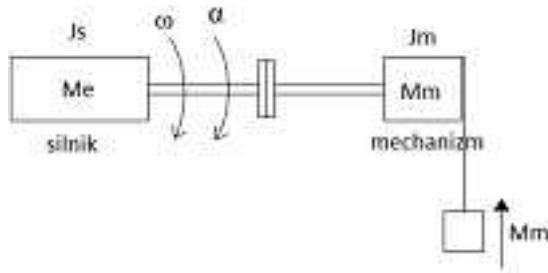
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Li^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{di} \right) = L \frac{di}{dt}, \quad \frac{d\mathcal{L}}{dq} = -\frac{q}{C}$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U, \quad q = \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = U$$

Przykład 20. Równanie momentów wirującego układu dwumasowego (silnik i maszyna robocza). Przedstawiony model został uzyskany podobnie do (Biszyga 1989).



W modelu matematycznym wprowadza się wypadkowy moment bezwładności oraz zmienną uogólnioną:

$$J = J_s + J_m, \quad x_i = \alpha, \quad \dot{x}_i = \omega = \dot{\alpha}$$

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2, \quad E_p = \int M_m d\alpha, \quad P_{di} = R_\omega \omega^2, \quad P_{we} = M_e \omega$$

Równanie Lagrange'a przyjmuje postać:

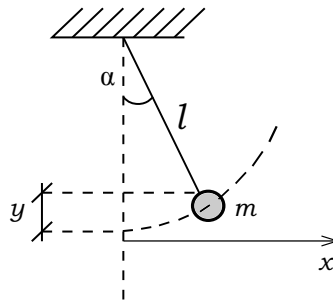
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dJ\frac{\omega^2}{2}}{d\omega} \right) - \frac{dJ\frac{\omega^2}{2}}{d\alpha} + \frac{d(\int M_m d\alpha)}{d\alpha} + \frac{1}{2} \frac{dR_\omega \omega^2}{d\omega} = \frac{dM_e \omega}{d\omega}$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{2} \frac{dJ}{dt} + M_m + R_\omega \omega = M_e$$

Innym sposobem wyznaczenia równania ruchu układu mechanicznego jest zastosowanie **zasady d'Alemberta** – równowagi dynamicznej: suma sił (momentów sił) jest równa sile bezwładności. Wówczas dla stałej wartości momentu bezwładności J równanie ruchu można zapisać jako:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_m - R_\omega \omega \quad (3.8)$$

Przykład 21. Wahadło matematyczne ze współczynnikiem tarcia b .



Rysunek 3.2. Model wahadła matematycznego

Długość łuku oznaczono przez S .

$$\begin{aligned}
 y &= l(1 - \cos \alpha), \quad x = l \sin \alpha, \quad v = \frac{dS}{dt}, \quad S = l\alpha \\
 E_k &= \frac{1}{2}mv = \frac{1}{2}m(l\dot{\alpha})^2, \quad E_p = mgy = mgl(1 - \cos \alpha) \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} &= \frac{dP_{we}}{d\dot{\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{dP_{di}}{d\dot{\alpha}} \\
 \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\alpha}} &= \frac{dE_k}{d\dot{\alpha}} = ml^2\dot{\alpha}, \quad \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = -\frac{dE_p}{d\alpha} = -mgl \sin \alpha \\
 P_{we} &= 0, \quad P_{di} = b(\dot{\alpha})^2, \quad \frac{1}{2} \frac{dP_{di}}{d\dot{\alpha}} = b\dot{\alpha} \\
 ml^2\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl \sin \alpha &= 0
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.5. Modele mechaniczne i elektromechaniczne

Przykład 22. Miernik odśrodkowy (regulator odśrodkowy) Przykład zaczerpnięto z [biesiekierski 1973]. Na rysunku 3.3 przedstawiony został element odśrodkowy, który można opisać nieliniowym równaniem różniczkowym, a po linearyzacji w punkcie pracy można wyznaczyć transmitancję operatorową. Sygnałem wejściowym jest przyrost prędkości kątowej ω , a sygnałem wyjściowym przesunięcie x tulei miernika.

Dane są następujące parametry: masa wszystkich ciężarków, sprowadzona do punktu M , długość prętów ukośnych, masa części ruchomych sprowadzona do punktu B .

W obliczeniach uwzględnia się: siłę sprężyny, siłę tarcia lepkościowego i tłumika, siłę bezwładności, siły ciężaru wszystkich części ruchomych.

Wprowadza się następujące oznaczenia (rys.3.3 i rys. 3.4):

m – masa wszystkich ciężarków sprowadzona do punktu M ,

l_1, l_2, l_3 – długość prętów ukośnych,

m_r – masa części ruchomych sprowadzona do punktu B ,

F_s – siła sprężyny,

F_t – siła tarcia lepkościowego i tłumika,

F_b – siła bezwładności,

$r = z_M$ – odległość punktu M od osi x ,

$l = l_1 + l_2$,

V_A, V_M – prędkości liniowe ruchu obrotowego punktów A i M dookoła wspólnego środka obrotu o współrzędnych (a, b) ,

α, β – kąty określone na rysunku 3.4.a,

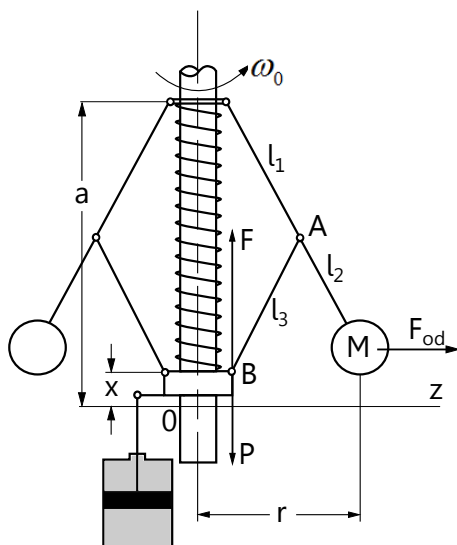
b – promień tulei i kołnierza, do którego są przymocowane pręty ukośne utrzymujące ciężarki

Schemat elementu odśrodkowego przedstawia się w prostokątnym układzie współrzędnych z, x . Oś x pokrywa się z osią obrotu miernika prędkości, a oś z jest określona przez położenie punktu B , gdy $\omega = 0$, czyli tuleja poddana jedynie działaniu siły sprężyny znajduje się w położeniu $x = 0$. Sygnał wyjściowy x jest określony rzędą punktu B .

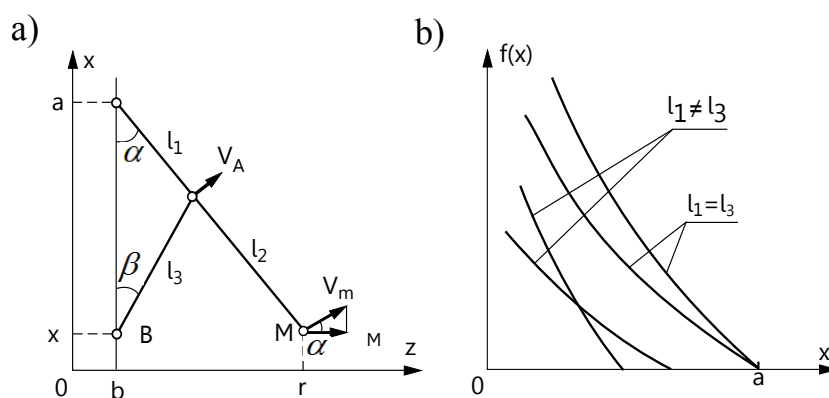
Siłą aktywną w układzie jest siła odśrodkowa działająca na ciężarki:

$$F_{od} = mr\omega^2 \tag{3.10}$$

Na tuleję działa, więc siła odśrodkowa F przeniesiona do punktu B (rys. 3.3 i rys. 3.4.a) oraz siły reakcji, które także należy sprowadzić do punktu B .



Rysunek 3.3. Model fizyczny miernika odśrodkowego



Rysunek 3.4. Oznaczenia dla miernika odśrodkowego

Siłę odśrodkową wyznaczamy przyrównując moce:

$$F\dot{X}_B = F_{od}\dot{Z}_M \implies F = F_{od} \frac{\dot{Z}_M}{\dot{X}_B} \quad (3.11)$$

Przyjmuje się oznaczenia: \dot{X}_B i \dot{Z}_M – odpowiednie składowe prędkości ruchu punktów B i M. Składową \dot{Z}_M znajduje się na podstawie zależności:

$$\dot{Z}_M = V_M \cos \alpha = V_A \frac{l}{l_1} \cos \alpha = \dot{X}_B \frac{l}{l_1} \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} \quad (3.12)$$

Podstawiając (3.12) do (3.11) i uwzględniając (3.10), otrzymuje się:

$$F = m \frac{l}{l_1} \frac{r}{\tan \alpha + \tan \beta} \omega^2 = k_1 f_1(r, \alpha, \beta) \omega^2 \quad (3.13)$$

gdzie:

$$k_1 = m \frac{l}{l_1}, \quad f_1(r, \alpha, \beta) = \frac{r}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

Z rys. 3.4.a wynikają związki geometryczne:

$$r = b + l \sin \alpha, \quad x = a - l_1 \cos \alpha - l_3 \cos \beta \quad (3.14)$$

gdzie $\alpha = l_1 + l_3$.

Z wyrażenia (3.14) widać, że zmienne r, x, α i β są związane ze sobą funkcją nieliniową, którą oznacza się jako:

$$f_1(r, \alpha, \beta) = f(x) \quad (3.15)$$

Jeśli $l_3 = l_1$, to $\alpha = \beta$, $a = 2l_1$, wówczas:

$$f_1(r, \alpha) = f(x) = (2l_1 - x) \left[\frac{b}{2\sqrt{4l_1^2 - (2l_1 - x)^2}} + \frac{l}{4l_1} \right]$$

(Podstawiając (3.15) do (3.13) otrzymuje się:

$$F = k_1 f(x) \omega^2 \quad (3.16)$$

Wyrażenie (3.16) linearyzuje się w otoczeniu punktu równowagi $\omega = \omega_0, x = x_0$

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \bigg|_{x_0} \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right) \bigg|_{\omega_0} \Delta \omega = k_1 \omega_0^2 D_0 \Delta x + 2k_1 \omega_0 E \Delta \omega \quad (3.17)$$

gdzie

$$D_0 = \frac{df(x)}{dx} \bigg|_{x=x_0}, \quad E = f(x) \bigg|_{x=x_0}$$

W rozważanym punkcie równowagi siła reakcji $P = F_s + F_B$. F_B jest siłą ciężaru części ruchomych (głównie ciężarków) sprowadzoną do punktu B. Zależy ona także od położenia tulei x . Zależność ta jest nieliniowa, lecz w przybliżeniu można przyjąć, że $F_B = \text{const}$.

Warunek równowagi sił dla małych przyrostów ma, więc postać:

$$\Delta F_b + \Delta F_t + \Delta F_s = \Delta P = \Delta F$$

lub

$$m_r \Delta \ddot{x} + c_1 \Delta \dot{x} + c_2 \Delta x = k_1 \omega_0^2 D_0 \Delta x + 2k_1 \omega_0 E \Delta \omega \quad (3.18)$$

gdzie:

\dot{x}, \ddot{x} – prędkość i przyspieszenie tulei,

c_1 – współczynnik tłumienia,

c_2 – współczynnik sprężystości sprężyny.

Równanie (3.18) zapisuje się w postaci operatorowej:

$$(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1) \Delta x(t) = k \Delta \omega(t) \quad (3.19)$$

gdzie

$$T_1 = \frac{c_1}{c_2 - k_1 \omega_0^2 D_0}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{m_r}{c_2 - k_1 \omega_0^2 D_0}}, \quad k = \frac{2k_1 \omega_0 E}{c_2 - k_1 \omega_0^2 D_0}$$

Dla mierników odśrodkowych z rys. 3.4.a realizowanych, praktycznie funkcja $f(x)$ jest malejąca. Wówczas współczynnik D_0 ma znak ujemny. Należy to uwzględnić przy obliczaniu parametrów k, T_1, T_2 i przy zapisie równań (3.18) i (3.19).

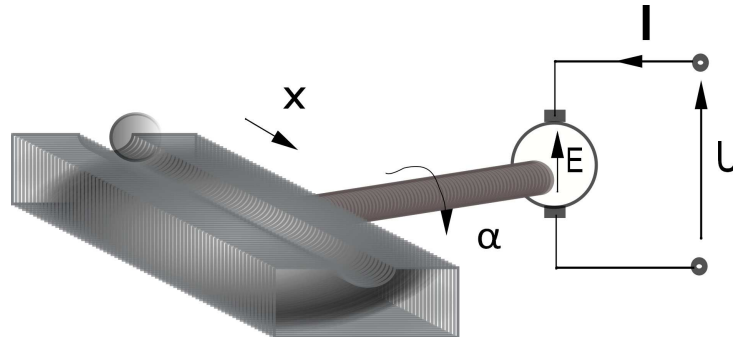
Transmitancja operatorowa odśrodkowego miernika prędkości obrotowej ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}$$

ale należy pamiętać, że parametry T_1, T_2 zmieniają się w zależności od punktu pracy urządzenia odśrodkowego.

Przykład 23. Belka i Kula

Na rysunku 3.5 przedstawiony jest schemat układu stabilizacji położenia kuli na belce. Elementem wykonawczym jest silnik obcowzbudny prądu stałego, którego sygnałem sterującym jest prąd twornika I .



Rysunek 3.5. Model belki i kuli

Założenia: pomija się fizyczne zjawiska toczenia kuli (bezwładności kuli) oraz dynamikę silnika elektrycznego.

Zmienne uogólnione: położenie katowe α wału silnika oraz położenie x kuli na belce (prędkość i przyspieszenie kuli zależy od zmian położenia w czasie). Sygnałem sterującym jest prąd twornika I . Moment elektromagnetyczny silnika jest proporcjonalny do prądu I (k jest współczynnikiem proporcjonalności):

$$M_e(t) = kI(t) \quad (3.20)$$

A równanie ruchu (II prawo Newtona) po pominięciu oporów tarcia jest w postaci (J jest momentem bezwładności silnika i belki):

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = kI \quad (3.21)$$

Ruch kuli (po pominięciu jej bezwładności) o masie m z uwzględnieniem siły grawitacji g i tarcia b kuli o belkę jest w postaci:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - b\dot{x} \quad (3.22)$$

W równaniu (3.22) sygnałem wymuszającym (wejściowym) jest kąt α obrotu wału silnika. Oznacza to, że układ równań różniczkowych opisujących model fizyczny przedstawiony na rysunku 3.5 jest w postaci:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{k}{J} I \\ m\ddot{x} + b\dot{x} = mg \sin \alpha \end{cases} \quad (3.23)$$

Równocześnie drugie z równań (3.23) jest nieliniowe (funkcja $\sin \alpha$) i przyjmując, że kąt obrotu α jest niewielki (przyjmuje się $\sin \alpha \approx \alpha$) można dokonać linearyzacji:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = mg\alpha \quad (3.24)$$

i w postaci operatorowej (po dokonaniu transformacji Laplace'a równania (3.24)) uzyskuje się:

$$ms^2x(s) + bsx(s) = mga(s)$$

Wówczas transmitancja jest równa:

$$G_k(s) = \frac{x(s)}{\alpha(s)} = \frac{mg}{s(ms + b)} = \frac{g}{s(s + \frac{b}{m})} \quad (3.25)$$

Natomiast model matematyczny silnika, na podstawie równania (3.21), zapisuje się jako transmitancję:

$$G_I(s) = \frac{\alpha(s)}{I(s)} = \frac{k/J}{s^2} \quad (3.26)$$

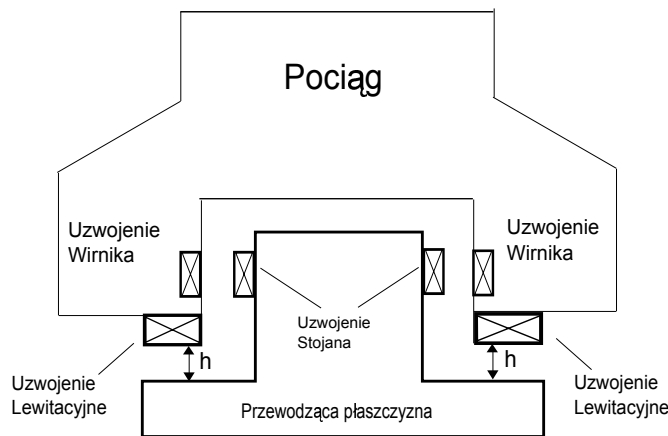
Zgodnie z rysunkiem 3.5 transmitancje (3.25) i (3.26) połączone są szeregowo, więc zlinearyzowany model matematyczny układu można zapisać w następującej postaci

$$G(s) = G_I(s)G_k(s) = \frac{x(s)}{I(s)} = \frac{gk/J}{s^3(s + \frac{b}{m})} \quad (3.27)$$

Transmitancja (3.27) jest przybliżeniem nieliniowego modelu matematycznego (3.23) i zaleca się dokonywać obliczeń układów regulacji dla modelu (3.27), natomiast badania symulacyjne powinny być przeprowadzane dla modelu (3.23).

Przykład 24. Zjawisko Lewitacji Magnetycznej

Zjawisko lewitacji magnetycznej z uwagi na niewielkie tarcie wykorzystywane jest w pociągach Maglev rozwijających duże prędkości. Na rysunku 3.6 przedstawiony jest wagon o masie m , który powinien być utrzymywany na wysokości $h = h_0$.



Rysunek 3.6. Model lewitacji magnetycznej – kolej Maglev

Założenia: pomija się opory tarcia powietrza i nierównomierny rozkład masy pociągu oraz przyjmuje się liniowość uzwojenia lewitacyjnego $K = \text{const.}$.

Zmienne uogólnione: położenie h (wielkość szczeliny powietrznej) wagonu. Natomiast sygnałem sterującym jest prąd i w uzwojeniu lewitacyjnym.

Wagon unosi się w szczelinie powietrznej i siła lewitacji F jest sterowana poprzez prąd i w uzwojeniu lewitacyjnym (siła jest proporcjonalna do kwadratu prądu i i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości h):

$$F = K \frac{i^2}{h^2}$$

gdzie K jest współczynnikiem proporcjonalności.

Wówczas z zasady d’Alamberta (w stanie równowagi dynamicznej suma sił przyłożonych do układu jest równoważona przez siłę bezwładności) można zapisać równanie:

$$m\ddot{h} = mg - \frac{Ki^2}{h^2}$$

i po przekształceniu przyjmuje ono postać

$$\ddot{h} = g - \underbrace{\frac{Ki^2}{mh^2}}_{f(h,i)} \quad (3.28)$$

Równanie (3.28) jest nieliniowym równaniem różniczkowym i powinno być wykorzystywane w badaniach symulacyjnych. W celu przeprowadzenia linearyzacji równania (3.28) przyjmuje się punkt równowagi (h_0, i_0) , który wyznaczany jest dla $\dot{h} = \dot{i} = 0$. Wówczas otrzymuje się zależność

$$\frac{Ki_0^2}{mg} = h_0^2$$

W linearyzacji równania ruchu wykorzystuje się $\Delta h = h - h_0$, $\Delta i = i - i_0$ więc $\dot{\Delta h} = \dot{h}$ oraz $\ddot{\Delta h} = \ddot{h}$

$$\ddot{\Delta h} = f(h, i) = f(h_0, i_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_0 \\ i=i_0}} \Delta h + \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{\substack{h=h_0 \\ i=i_0}} \Delta i + \dots$$

Ponieważ $f(h_0, i_0) = 0$ oraz pomijając czynniki wyższego rzędu w rozwinięciu w szereg Taylora otrzymuje się:

$$\ddot{\Delta h} = \frac{2Ki_0^2}{mh_0^3} \Delta h - \frac{2Ki_0^2}{mh_0^2} \Delta i$$

Po wykorzystaniu warunku na punkt równowagi uzyskuje się:

$$\ddot{\Delta h} = \frac{2g}{h_0} \Delta h - \frac{g}{i_0} \Delta i$$

Po zastosowaniu transformaty Laplace’a wyznacza się transmitancję

$$G(s) = \frac{\Delta h(s)}{\Delta i(s)} = \frac{-g/i_0}{s^2 - 2g/h_0} \quad (3.29)$$

Model matematyczny (3.29) nazywany jest modelem przyrostowym. Mianownik transmitancji (3.29) posiada dwa pierwiastki (bieguny): $s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2g}{h_0}}$ i dodatnia wartość pierwiastka oznacza, że rozwiązania układu są funkcjami narastającymi czyli transmitancja (3.29) opisuje element niestabilny.

Przykład 25. Model Suwnicy

Na rysunku 3.7 przedstawiony został fizyczny model suwnicy, gdzie zaznaczono:

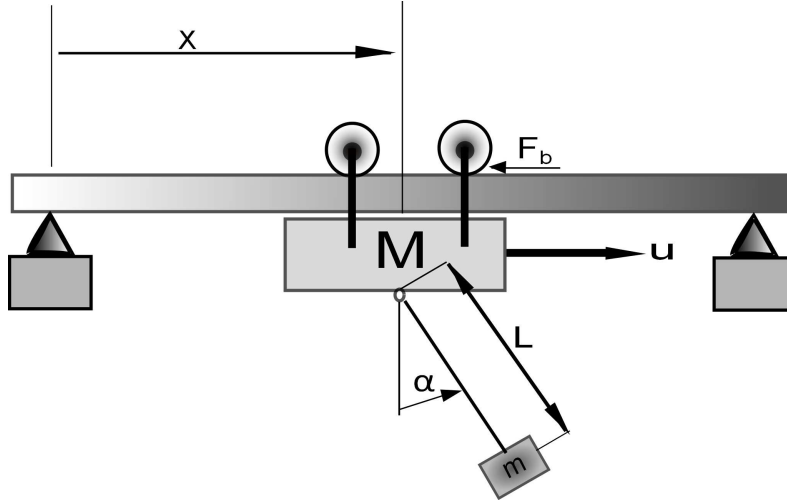
M - masa wózka,

m - masa przenoszonego przedmiotu,

F_b - siła tarcia rolek $F_b = -b\dot{x}$,

F - siła reakcji pomiędzy wózkiem a wahadłem,

L - długość ramienia (wahadła).



Rysunek 3.7. Model fizyczny suwnicy

Założenia: pomija się opory tarcia powietrza, przyjmuje się, że połączenie L nie ma masy (brak momentu bezwładności).

Zmienne uogólnione: położenie $x = x(t)$ wózka oraz kąt $\alpha = \alpha(t)$ pod jakim znajduje się ramię L w stosunku do położenia x . Natomiast sygnałem sterującym jest siła u działająca na wózek, która najczęściej wytwarzana jest przez silnik elektryczny.

Model wózka wyprowadza się na podstawie praw Newtona

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + F \sin \alpha = u \quad (3.30a)$$

Natomiast model wahadła zapisuje się w postaci dwóch równań (w osi ruchu wózka x i w osi działania siły grawitacji g):

$$m \frac{d^2(x + L \sin \alpha)}{dt^2} = F \sin \alpha \quad (3.30b)$$

$$m \frac{d^2(L \cos \alpha)}{dt^2} = F \cos \alpha + mg \quad (3.30c)$$

W równaniach (3.30) występują pochodne funkcji złożonej (kąt α jest funkcją czasu), które wynoszą odpowiednio:

$$\frac{d^2(\sin \alpha)}{dt^2} = \frac{d}{dt}[\dot{\alpha} \cos \alpha] = \ddot{\alpha} \cos \alpha - (\dot{\alpha})^2 \sin \alpha \quad (3.31a)$$

$$\frac{d^2(\cos \alpha)}{dt^2} = \frac{d}{dt}[-\dot{\alpha} \sin \alpha] = -\ddot{\alpha} \sin \alpha - (\dot{\alpha})^2 \cos \alpha \quad (3.31b)$$

Po podstawieniu (3.31) do równań (3.30b) i (3.30c) uzyskuje się zależności opisujące ruch wahadła:

$$m\ddot{x} + mL\ddot{\alpha} \cos \alpha - mL(\dot{\alpha})^2 \sin \alpha = F \sin \alpha \quad (3.32a)$$

$$-mL\ddot{\alpha} \sin \alpha - mL(\dot{\alpha})^2 \cos \alpha = F \cos \alpha + mg \quad (3.32b)$$

Po podstawieniu do równania (3.30a) wyrażenia (3.32a) uzyskuje się równanie ruchu wózka w następującej postaci:

$$(m + M)\ddot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\alpha} \cos \alpha - mL(\dot{\alpha})^2 \sin \alpha = u \quad (3.33)$$

W celu eliminacji siły reakcji F z równań (3.32) należy równanie (3.32a) podzielić przez $\sin \alpha$, a równanie (3.32b) podzielić przez $\cos \alpha$ i równania te należy odjąć stronami. W wyniku uzyskuje się:

$$L\ddot{\alpha} = -\ddot{x} \cos \alpha - g \sin \alpha \quad (3.34)$$

Równania (3.33) i (3.34) zawierają drugie pochodne zmiennych uogólnionych x oraz α i muszą być dalej przekształcane. Po podstawieniu równania (3.34) do (3.33) oraz po pomnożeniu równania (3.33) przez $\cos \alpha$ i podstawieniu $\ddot{x} \cos \alpha = -L\ddot{\alpha} - g \sin \alpha$ (na podstawie (3.34)) otrzymuje się układ nieliniowych równań różniczkowych opisujących ruch suwnicy w postaci:

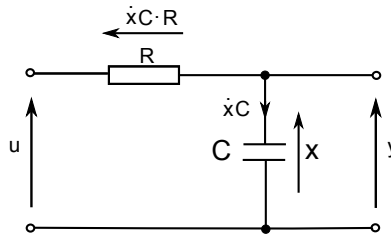
$$\begin{cases} (m \sin^2 \alpha + M)\ddot{x} + b\dot{x} - mL(\dot{\alpha})^2 \sin \alpha - mg \sin \alpha \cos \alpha = u \\ (m - m \cos \alpha + M)L\ddot{\alpha} + (m + M)g \sin \alpha - b\dot{x} \cos \alpha + mL(\dot{\alpha})^2 \sin \alpha \cos \alpha = -u \cos \alpha \end{cases} \quad (3.35)$$

Linearyzację równań (3.35) można przeprowadzić dla $\alpha \approx 0$. Wówczas przyjmuje się $\sin \alpha \approx \alpha$ i $\cos \alpha \approx 1$ oraz pomija wyrazy wyższego rzędu ($\sin^2 \alpha = 0$, $(\dot{\alpha})^2 = 0$) i równania przyjmują postać:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + b\dot{x} - mg\alpha = u \\ ML\ddot{\alpha} + (m + M)g\alpha - b\dot{x} = -u \end{cases} \quad (3.36)$$

3.6. Modele obwodów elektrycznych

Przykład 26. Wyznaczyć model matematyczny obwodu elektrycznego z rysunku 3.8.



Rysunek 3.8. Obwód RC – filtr dolnoprzepustowy pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} y &= x \\ u &= \dot{x}CR + x \\ \dot{x} &= \underbrace{-\frac{1}{RC}x}_A + \underbrace{\frac{1}{RC}u}_B \\ y &= x \end{aligned}$$

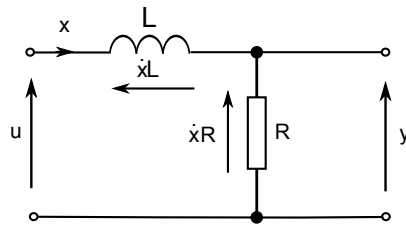
$$A = -\frac{1}{RC} \quad B = \frac{1}{RC} \quad C = 1 \quad D = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$G(s) = 1 \cdot \left(s + \frac{1}{RC}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{RC} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Współczynnik $T = RC$ nazywany jest stałą czasową.

Przykład 27. Wyznaczyć model matematyczny obwodu z rysunku 3.9.



Rysunek 3.9. Obwód RL

$$u = \dot{x}L + xR$$

$$y = xR$$

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x + \frac{1}{L}u$$

$$y = xR$$

$$A = -\frac{R}{L} \quad B = \frac{1}{L} \quad C = R \quad D = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D = R \cdot \left(s + \frac{R}{L}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}} = \frac{1}{\frac{L}{R}s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

gdzie $T = \frac{L}{R}$ jest stałą czasową obwodu przedstawionego na rysunku 3.9.

Dla przypadku gdy sygnałem wyjściowym jest prąd x płynący w obwodzie należy przyjąć równanie wyjścia w postaci $y = x$, czyli macierz $C = 1$ i wówczas transmitancja jest w postaci:

$$G(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{L}{R}s + 1}$$

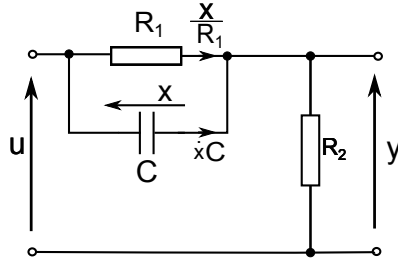
Przykład 28. Wyznaczyć model matematyczny obwodu z rysunku 3.10.

$$y = R_2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \dot{x}C\right)$$

$$u = x + y = x + x\frac{R_2}{R_1} + \dot{x}R_2C$$

$$u = \dot{x}R_2C + x\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$y = R_2C\dot{x} + x\frac{R_2}{R_1}$$



Rysunek 3.10. Obwód RCR

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{R_2 C} x + \frac{1}{R_2 C} \cdot u \\ y = -x + u \end{cases} \quad (3.37)$$

Na podstawie równań (3.37) można wyznaczyć postać równania stanu:

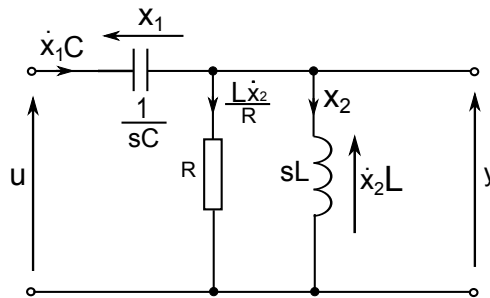
$$A = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \quad B = \frac{1}{R_2 C}, \quad C = -1, \quad D = 1$$

oraz transmitancję operatorową:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D = -1 \cdot \left(s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 C} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{R_2 C} + 1$$

$$\begin{aligned} G(s) &= 1 - \left(\frac{\frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2 C}} \right) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{R_2 C} \cdot R_1 R_2 C}{s R_1 R_2 C + R_1 + R_2} \right) = 1 - \left(\frac{R_1}{s R_1 R_2 C + R_1 + R_2} \right) = \\ &= \frac{s R_1 R_2 C + R_1 + R_2 - R_1}{s R_1 R_2 C + R_1 + R_2} = \frac{R_2 (s R_1 C + 1)}{R_2 \left(s R_1 C + \frac{R_1}{R_2} + 1 \right)} = \frac{R_1 C s + 1}{R_1 C s + \frac{R_1}{R_2} + 1} \end{aligned}$$

Przykład 29. Wyznaczyć model matematyczny obwodu z rysunku 3.11.



Rysunek 3.11. Obwód RLC

Równanie stanu:

$$\begin{aligned} u &= x_1 + y \\ \dot{x}_2 L &= u - x_1 \end{aligned}$$

$$u = x_1 + \dot{x}_2 L$$

$$\dot{x}_1 C = \frac{L \dot{x}_2}{R} + x_2$$

$$\dot{x}_1 C = \frac{u - x_1}{R} + x_2$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{RC} + \frac{x_2}{C} + \frac{u}{RC}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1}{L} + \frac{u}{L}$$

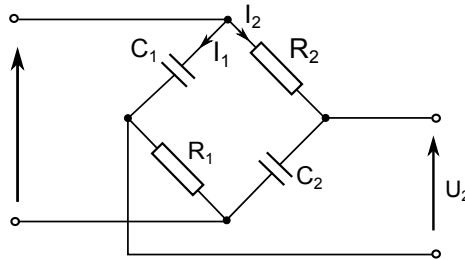
$$y = -x_1 + u$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad C = [-1 \quad 0] \quad D = 1$$

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\frac{RLs}{R+Ls}}{\frac{1}{sC} + \frac{RLs}{R+Ls}} = \frac{RLs}{\frac{R+sL}{sC} + RLs} = \frac{RLCs^2}{RLCs^2 + sL + R}$$

Przykład 30. Wyznaczyć model matematyczny obwodu z rysunku 3.12.



Rysunek 3.12. Mostek pomiarowy lub przesuwnik fazowy

$$U_1(s) = \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} \right) I_1(s)$$

$$U_1(s) = \left(R_2 + \frac{1}{sC_2} \right) I_2(s)$$

$$U_2(s) = \frac{1}{sC_2} I_2(s) - R_1 I_1(s)$$

Stąd otrzymuje się bezpośrednio transmitancję przesuwnika w postaci:

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{T_2 s + 1} - \frac{T_1 s}{T_1 s + 1}$$

gdzie przyjmuje się oznaczenia (stałe czasowe) jako:

$$T_1 = R_1 C_1$$

$$T_2 = R_2 C_2$$

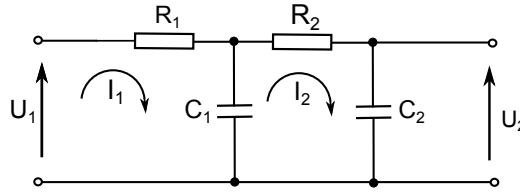
Wówczas transmitancja operatorowa jest w postaci:

$$G(s) = \frac{-T_1 T_2 s^2 + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (3.38)$$

W przypadku gdy $T_1 = T_2 = T$ transmitancja przesuwnika przyjmuje postać:

$$G(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT}$$

Przykład 31. Wyznaczyć model matematyczny obwodu z rysunku 3.13.



Rysunek 3.13. Obwód RCRC

Transmitancję wyznacza się przy zastosowaniu prądów oczkowych:

$$U_1(s) = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 s} \right) I_1(s) - \frac{1}{C_1 s} I_2(s)$$

$$0 = \frac{-1}{C_1 s} I_1(s) + \left(\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} + R_2 \right) I_2(s)$$

$$U_2(s) = \frac{1}{C_1 s} I_2(s)$$

stąd:

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{(C_1 R_1 s + 1)(C_2 R_2 s + 1) + C_2 R_1 s}$$

lub inaczej:

$$G(s) = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + T_{12}) s + 1}$$

gdzie:

$$T_1 = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad T_{12} = R_1 C_2$$

3.7. Modele pozostałe

Tabela 3.2: Modele elementów automatyki

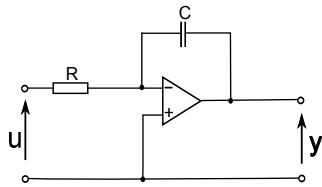
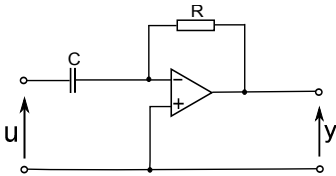
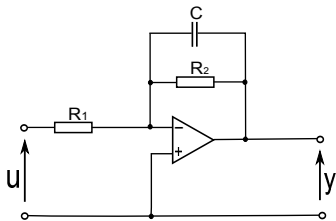
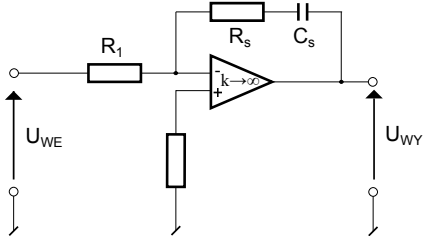
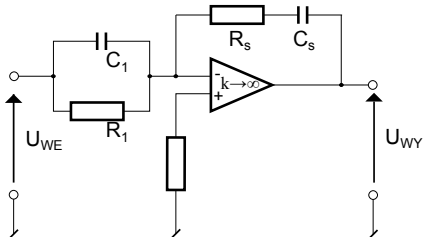
Nazwa	Schemat	Transmitancja
Integrator		$\frac{y(s)}{u(s)} = -\frac{1}{RCs}$
Układ różniczkujący		$\frac{y(s)}{u(s)} = -RCs$
Układ inercyjny		$\frac{y(s)}{u(s)} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{R_2Cs + 1}$
Regulator PI		$G_R(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} =$ $= -k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right),$ $k_p = \frac{R_s}{R_1}, T_i = R_s C_s$
Regulator PID		$G_R(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} =$ $= -k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right),$ $k_p = \frac{R_s}{R_1} + \frac{C_1}{C_s},$ $T_i = R_s C_s + R_1 C_1,$ $T_d = \frac{R_s C_s R_1 C_1}{T_i}$
kontynuacja na następnej stronie		

Tabela 3.2: Modele elementów automatyki

Nazwa	Schemat	Transmitancja
Siłownik hydrauliczny		$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \approx \frac{K}{s}$ <p> M- masa obciążenia b- współczynnik tarcia T- stała czasowa, która zależy dodatkowo od masy K- wzmacnienie zależne od powierzchni tłoka, gęstości oleju i jego ciśnienia oraz tarcia </p>
Potencjometr		$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$
Wzmacniacz		$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_a}{s\tau + 1}$
Przekładnia zębata		$i = \frac{\omega_e}{\omega_m},$ $J_c = J_e + \frac{J}{i^2}$ <p> i - przełożenie przekładni, J_c - całkowity moment bezwładności </p>

kontynuacja na następnej stronie

Tabela 3.2: Modele elementów automatyki

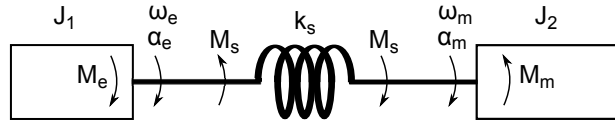
Nazwa	Schemat	Transmitancja
Silnik obcowzbudny		$\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{\frac{B}{R}s}{BTs^2 + Bs + 1}$ $\frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{\psi_e}}{BTs^2 + Bs + 1}$ $\frac{\alpha(s)}{\omega(s)} = \frac{1}{s}$ $B = J \frac{R}{\psi_e^2},$ $T = \frac{L}{R}$ <p>J - moment bezwładności ψ_e - strumień skojarzony</p>
System grzewczy		$y(s) = \frac{R}{RCs + 1} u(s) + \frac{1}{RCs + 1} x(s)$ <p>u - ogrzewanie [kcal/s] x, y - temperatura powietrza [°C] R - rezystancja termiczna [°C*s/kcal] C - pojemność termiczna ogrzewanej przestrzeni [kcal/°C]</p>

3.8. Model wirującego układu dwumasowego

3.8.1. Połączenie sprężyste

Pełna analiza teoretyczna zagadnienia połączeń sprężystych jest skomplikowana. Dokładnym modelem matematycznym takiego napędu jest układ dynamiczny o parametrach rozłożonych (?). Z przesłanek praktycznych i eksploatacyjnych układów napędowych wynikają jednak pewne możliwe do zaakceptowania uproszczenia modelu (Ciepiela 1992). Najczęściej przyjmuje się, jak następuje (rys. 3.14):

- masy wirujące (silnika i maszyny roboczej) są skupione i doskonale sztywne oraz połączenie traktujemy jako bezmasowe,
- odkształcenie połączenia jest sprężyste (zgodne z prawem Hooke'a),
- brak strat energii na histerezę odkształcenia,
- siły i momenty są przyłożone do mas skupionych,
- siły tarcia są pomijalnie małe,
- luz przekładniowy jest pomijalnie mały (zob. podrozdz. 3.8.2).



Rysunek 3.14. Układ dwumasowy – sprężyste połączenie silnika z maszyną roboczą

W układzie dwumasowym moment skręcający M_s zależy od różnicy dróg kątowych silnika α_e i mechanizmu napędzanego α_m oraz współczynnika sprężystości na skręcanie k_s i wynosi:

$$M_s(t) = k_s \Delta \alpha(t) = k_s (\alpha_e(t) - \alpha_m(t)) \quad (3.39)$$

przy czym:

$$k_s = \frac{J_p G}{l}, \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

gdzie G jest modułem sprężystości na skręcanie, l, d, J_p odpowiednio długością, średnicą i biegunowym momentem bezwładności poprzecznego przekroju kołowego wału.

Układ z rysunku 3.14 jest opisany następującymi równaniami:

$$J_1 \frac{d^2 \alpha_e(t)}{dt^2} = M_e(t) - M_s(t), \quad \omega_e(t) = \frac{d\alpha_e(t)}{dt} \quad (3.40a)$$

$$J_2 \frac{d^2 \alpha_m(t)}{dt^2} = M_s(t) - M_m(t), \quad \omega_m(t) = \frac{d\alpha_m(t)}{dt} \quad (3.40b)$$

Analityczne rozwiązanie tych równań wyznacza się, podstawiając zależność (3.39) postaci:

$$\alpha_e(t) = \frac{M_s(t)}{k_s} + \alpha_m(t) \quad (3.41)$$

do równania (3.40), co prowadzi do równania różniczkowego:

$$\frac{J_1}{k_s} \frac{d^2 M_s}{dt^2} + J_1 \frac{d^2 \alpha_m}{dt^2} = M_e - M_s. \quad (3.42)$$

Uwzględniając (3.40b), można wyeliminować drugą pochodną położenia α_m :

$$\frac{d^2 \alpha_m}{dt^2} = \frac{M_s}{J_2} - \frac{M_m}{J_2} \quad (3.43)$$

w konsekwencji uzyskując równanie różniczkowe opisujące moment skręcający wału:

$$\frac{J_1}{k_s} \frac{d^2 M_s}{dt^2} + \frac{J_1}{J_2} M_s - \frac{J_1}{J_2} M_m = M_e - M_s \quad (3.44)$$

Po uporządkowaniu otrzymuje się zależność:

$$\frac{1}{k_s} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \frac{d^2 M_s}{dt^2} + M_s - \frac{J_1}{J_1 + J_2} M_m = \frac{J_2}{J_1 + J_2} M_e \quad (3.45)$$

Równanie (3.45) można zapisać w postaci zwartej (Ciepiela 1992):

$$\frac{1}{\Omega_{12}^2} \frac{d^2 M_s}{dt^2} + M_s = \gamma_2 M_e + \gamma_1 M_m \quad (3.46)$$

gdzie $\gamma_1 = \frac{J_1}{J_1 + J_2}$ jest względnym momentem bezwładności silnika, $\gamma_2 = \frac{J_2}{J_1 + J_2}$ jest względnym momentem bezwładności agregatu, $\Omega_{12} = \sqrt{\frac{k_s(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}$ jest pulsacją drgań własnych zespolonego układu.

Równanie dynamiki mas (3.46) można uściślić dla pewnych stanów pracy napędu, np. stanów awaryjnych w przypadku zatarcia się łożysk. Wówczas przyjmuje ono jedną z postaci:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{d^2 M_s}{dt^2} &= M_e - M_s & \text{dla } J_2 \rightarrow \infty \\ \frac{1}{\Omega_2^2} \frac{d^2 M_s}{dt^2} &= M_m - M_s & \text{dla } J_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

gdzie $\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_s}{J_1}}$ jest pulsacją drgań własnych silnika, $\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_s}{J_2}}$ jest pulsacją drgań własnych agregatu. Stanom awaryjnym odpowiadają warunki, gdy $J_2 \rightarrow \infty$ i $M_m = 0$ lub $J_1 \rightarrow \infty$ i $M_e = 0$.

Rozwiązanie równania (3.46) można wyznaczyć, jeżeli znany jest moment elektromagnetyczny i moment obciążenia przy zadanych warunkach początkowych momentu skręcającego $M_s(0)$, $\dot{M}_s(0)$. Jeżeli przyjmie się, że istnieje układ regulacji, który zapewnia stałość momentu elektromagnetycznego $M_e(t) = M_{eu} \mathbb{1}(t)$ oraz z procesu technologicznego wynika, że moment obciążenia jest stały i wynosi $M_m = M_{mu} \mathbb{1}(t)$, to wówczas rozwiązanie (3.46) dla zerowych warunków początkowych wynosi:

$$M_s(t) = \underbrace{(\gamma_2 M_{eu} + \gamma_1 M_{mu})}_{A_m} \left[\sin(\Omega_{12} t - \frac{\pi}{2}) + 1 \right] \quad (3.47)$$

i z podstawowych równań (3.40) można wyznaczyć odpowiednio przebiegi ω_e i ω_m :

$$\omega_e(t) = \frac{1}{J_1 + J_2} \left[(M_{eu} - M_{mu})t + \frac{A_{\omega_e}}{\Omega_{12}} \sin(\Omega_{12} t) \right] \quad (3.48)$$

$$\omega_m(t) = \frac{1}{J_1 + J_2} \left[(M_{eu} - M_{mu})t - \frac{A_{\omega_m}}{\Omega_{12}} \sin(\Omega_{12} t) \right] \quad (3.49)$$

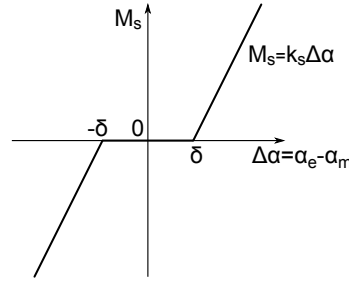
gdzie $A_{\omega_e} = \frac{J_2}{J_1} M_{eu} + M_{mu}$ i $A_{\omega_m} = M_{eu} + \frac{J_1}{J_2} M_{mu}$.

Stosunek amplitud składowych oscylacyjnych wynosi $\frac{A_{\omega_e}}{A_{\omega_m}} = \frac{J_2}{J_1}$, dla $J_2 > J_1$, uzyskuje się $A_{\omega_m} > A_{\omega_e}$.

3.8.2. Luz sprzęgłowy lub przekładniowy

W układach napędowych oprócz połączenia sprężystego może pojawić się dodatkowo luz sprzęgłowy lub przekładniowy, oznaczany δ . Obecność luzu powoduje, że układ napędowy staje się nieliniowy i jego analizę można przeprowadzić w dwóch etapach. Etap 1 obejmuje dynamikę układu „rozłączonego”, natomiast w etapie 2 rozważa się układ „sprzęgnięty”, bez luzu.

Na rysunku 3.15 przedstawiona jest typowa charakterystyka luzu przekładniowego lub sprzęgłowego.



Rysunek 3.15. Charakterystyka luzu przekładniowego

W analizie dynamiki takiego układu przyjmuje się, że moment obciążenia maszyny roboczej jest nieistotny ($M_{mu} = 0$), natomiast wymuszeniem jest moment elektromagnetyczny o charakterze skokowym o wartości M_{eu} . Warunki początkowe na zmienne dynamiczne w etapie 1 przyjmuje się zero:

$$\alpha_e(0) = \alpha_m(0) = 0, \quad \omega_e(0) = \omega_m(0) = 0, \quad M_s(0) = 0$$

Poniżej przedstawiono rozwiązanie problemu (indeks górny w rozwiązaniach oznacza numer analizowanego etapu):

Etap 1 W układzie rozłączonym zachodzi $|\alpha_e(t) - \alpha_m(t)| < \delta$, więc z przyjętych warunków początkowych wynika, że $M_s(t) = 0$ i dynamikę opisuje równanie:

$$J_1 \frac{d^2 \alpha_e(t)}{dt^2} = M_{eu} \quad (3.50)$$

i rozwiązaniem są następujące przebiegi:

$$\omega_e^1(t) = \frac{M_{eu}}{J_1} t, \quad \omega_m^1(t) = 0, \quad \alpha_m^1(t) = 0$$

Etap ten kończy się po czasie $t_1 = \sqrt{\frac{2\delta M_{eu}}{J_1}}$, po którym położenie i prędkość kątowa wynoszą:

$$\alpha_e^1(t_1) = \frac{M_{eu}}{J_1} \frac{t_1^2}{2} = \delta, \quad \omega_e^1(t_1) = \sqrt{\frac{2\delta M_{eu}}{J_1}} = \omega_{e0}$$

W chwili t_1 układ spełnia warunki etapu drugiego.

Etap 2 W układzie sprzęgniętym pojawia się moment skręcający i dalej dynamikę opisuje równanie (3.46). W celu uproszczenia postaci rozwiązań przyjmuje się definicyjnie początek etapu drugiego w punkcie $t \leftarrow t - t_1 = 0$ (przesunięcie osi czasu) oraz warunki początkowe w tym punkcie równe:

$$M_s(t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dM_s(t)}{dt} \right|_{t=0} = k_s \omega_{e0}$$

Rozwiązanie równania na moment skręcający oraz prędkości kątowe otrzymuje się w następującej postaci:

$$M_s(t) = \gamma_2 M_{eu} [A_{ms} \sin(\Omega_{12} t - \varphi) + 1] \quad (3.51a)$$

$$\omega_e^2(t) = \frac{M_{eu}}{J} \left\{ t - \frac{A_{ms}}{\Omega_{12}} [\cos \varphi - \cos(\Omega_{12} t - \varphi)] \right\} + \omega_{e0} \quad (3.51b)$$

$$\omega_m^2(t) = \frac{M_{eu}}{J} \left\{ t + \frac{A_{ms}}{\Omega_{12}} [\cos \varphi - \cos(\Omega_{12} t - \varphi)] \right\} \quad (3.51c)$$

gdzie: $J = J_1 + J_2$, $A_{ms} = \sqrt{1 + \frac{2\delta k_s}{\gamma_2 M_{eu}}}$ i $\varphi = \arctg \sqrt{\frac{\gamma_2 M_{eu}}{2\delta k_s}}$.

Etap 2 kończy się w chwili t_2 (w nowej skali czasu), kiedy prędkość kątowna maszyny roboczej ω_m jest na tyle duża, że następuje rozłączenie układu dwumasowego i wejście w stan luzu. Wówczas dynamikę opisuje ponownie równanie (3.50) z niezerowymi warunkami początkowymi $\alpha_e^2(t_2)$, $\alpha_m^2(t_2)$, $\omega_e^2(t_2)$, $\omega_m^2(t_2)$, $M_s(t_2) = 0$.

Przedstawiony proces powtarza się dotąd, dopóki w układzie działa wymuszenie momentem elektromagnetycznym silnika.

Z zależności (3.51) wynika, że luz przekładniowy w układzie napędowym ma duży wpływ na wielkość amplitudy A_{ms} składowych okresowych prędkości kątowych.

3.8.3. Modelowanie układu dwumasowego

Dopełnieniem analizy teoretycznej układu napędowego z połączeniem sprężystym jest jego analiza modelowa w środowisku Matlab-Simulink. Przykładowe badania symulacyjne przeprowadzono dla napędu z silnikiem obcowzbudnym prądu stałego, którego model został opisany równaniami (??), a schemat blokowy przedstawia rysunek ??.

Aby możliwa była symulacja układu dwumasowego, równanie modelu połączenia sprężystego (3.39) i (3.40) uzupełnia się równaniami silnika.

Po przekształceniu równań modelu (3.39) i (3.40) do postaci operatorowej otrzymuje się równania napędu:

$$\begin{cases} M_s(s) = k_s(\alpha_e(s) - \alpha_m(s)) \\ sJ\omega_e(s) = M_e(s) - M_s(s) \\ sJ\omega_m(s) = M_s(s) - M_m(s) \end{cases} \quad (3.52)$$

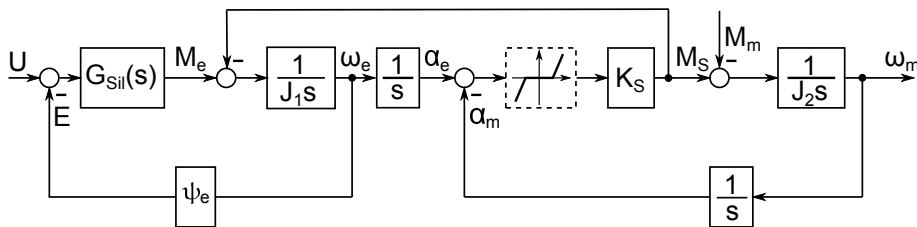
gdzie $\omega_e(s) = s\alpha_e(s)$ i $\omega_m(s) = s\alpha_m(s)$.

Z zależności (??) wyznacza się transmitancję obwodu twornika silnika:

$$\underbrace{\frac{\psi_e/R}{Ts+1}}_{G_{Sil}(s)} \left[U(s) - \underbrace{\psi_e \omega_e(s)}_{E(s)} \right] = M_e(s) \quad (3.53)$$

której sygnałem wyjściowym jest moment elektromagnetyczny silnika.

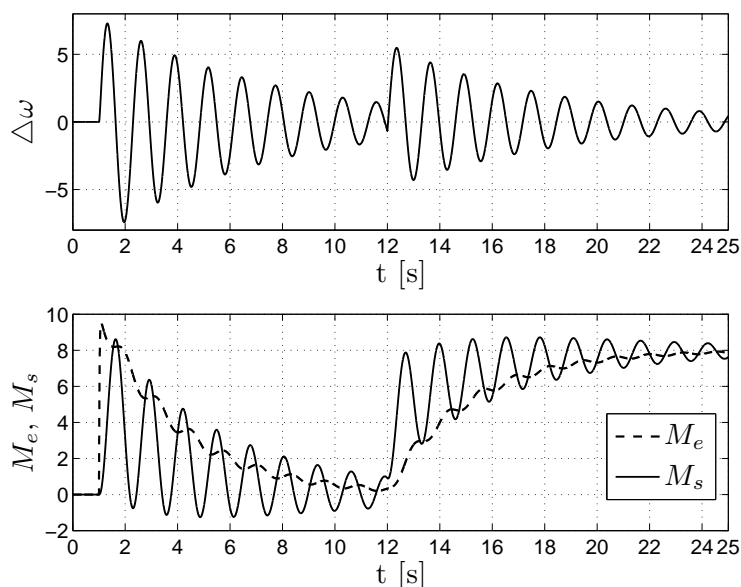
Korzystając z równań (3.52), (3.53) oraz charakterystyki luzu przekładniowego, tworzy się schemat blokowy przedstawiony na rysunku 3.16.



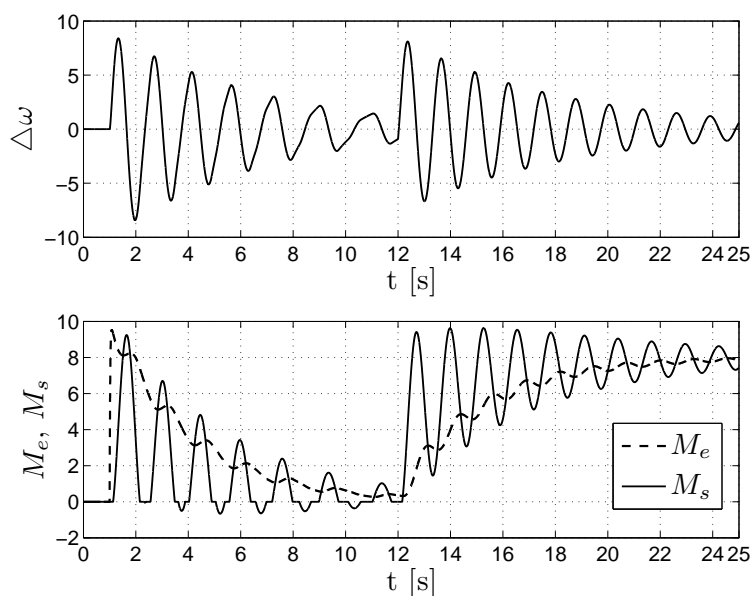
Rysunek 3.16. Schemat blokowy modelu układu dwumasowego z połączeniem sprężystym i z luzem

W schemacie blokowym linią przerywaną zaznaczono blok realizujący luz przekładniowy, który w rzeczywistych układach napędowych nie jest stały i rośnie wraz ze zwiększaniem się zużycia materiałowego połączeń mechanicznych silnika i maszyny roboczej.

Na rysunkach 3.17 i 3.18 zaprezentowano wyniki badań symulacyjnych dla układu bez modelu luzu i z modelem luzu przekładniowego. Modelowany był napęd z silnikiem obcowzbudnym o parametrach uogólnionych: $R = 79,3 [\Omega]$, $L = 1,5 [\text{H}]$, $\psi_e = 3,58 [\text{Vs}]$. Rysunki przedstawiają przebiegi rozruchu napędu (w chwili $t = 1 [\text{s}]$) i udarowe obciążenie momentem $M_m = 8 [\text{Nm}]$ (w chwili $t = 12 [\text{s}]$).



Rysunek 3.17. Przebiegi dla układu dwumasowego bez luzu przekładniowego



Rysunek 3.18. Przebiegi dla układu dwumasowego z luzem przekładniowym

Badania przeprowadzono dla luzu przekładniowego $\delta = 15^\circ$. Przyjęta wartość jest większa niż

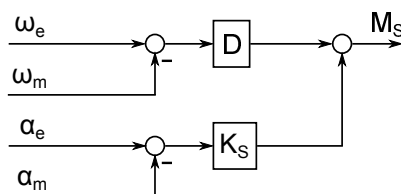
w układach rzeczywistych. Zrobiono to celowo, żeby podkreślić efekty nieliniowości wynikające z istnienia luzu.

Przedstawione przebiegi mają charakter oscylacyjny tłumiony. Tłumienie związane jest z rezystancją twornika silnika (rozpraszanie energii). Różnica prędkości $\Delta\omega = \omega_e - \omega_m$ na rysunkach 3.17 i 3.18 wskazuje, że oscylacje w układzie z luzem przekładniowym są większe niż w układzie bez luzu. Jest to spowodowane rozsprzęganiem się układu. Efekt ten widoczny jest na krzywej momentu skręcającego M_s , którego wartości chwilowe są równe 0 Nm.

W połączeniu sprężystym można uwzględnić tłumienie mechaniczne D (Zawirski 2005, ?). Równanie (3.52) opisujące moment skręcający przekształca się wówczas do następującej postaci:

$$M_s(s) = k_s(\alpha_e(s) - \alpha_m(s)) + D(\omega_e(s) - \omega_m(s))$$

Otrzymany model powstawania momentu skręcającego $M_s(s) = k_s(\alpha_e(s) - \alpha_m(s))$ (rys. 3.19) należy uwzględnić w układzie z rysunku 3.16.



Rysunek 3.19. Powstawanie momentu skręcającego z uwzględnieniem tłumienia (bez luzu przekładniowego)

Modele rzeczywistych układów dwumasowych, w których elementem napędzającym jest silnik elektryczny, uzupełniane są równaniami elektromagnetycznymi silnika. Wówczas transmitancja takiego układu napędowego (z pominięciem luzu) jest transmitancją co najmniej trzeciego rzędu, a przebiegi przejściowe mają generalnie charakter oscylacyjny tłumiony.

Rozdział 4

Charakterystyki podstawowych układów dynamicznych

4.1. Podział charakterystyk

Charakterystyki czasowe – dla transmitancji $G(s)$ wyznacza się odpowiedź $y(s)$ na wymuszenie skokowe $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$ i w dalszej kolejności wylicza się odpowiedź czasową $y(t)$. Użyteczną metodą jest tu przekształcenie Laplace’a. Takie charakterystyki nazywane są również *odpowiedziami skokowymi układu dynamicznego*.

Odpowiedzi czasowe elementów automatyki opisanych transmitancjami wyznacza się jako:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)u(s)\} \quad (4.1)$$

i dla ogólnego przypadku otrzymuje się transformatę Laplace’a w postaci:

$$y(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^i (s + \alpha_1)^{k+1} [(s + \alpha_2)^2 + \omega_0^2]^{l+1} \dots}$$

gdzie wykładniki i, h, k, l, p, r są liczbami naturalnymi, a współczynniki a, b, α, ω należą do zbioru liczb rzeczywistych.

Po rozkładzie na ułamki proste uzyskuje się wyrażenie:

$$y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \dots + \frac{A_{i+1}}{s^{i+1}} + \frac{B_1^1}{(s+\alpha_1)} + \dots + \frac{B_{z+1}^1}{(s+\alpha_1)^{k+1}} + \dots + \frac{B_1^p}{(s+\alpha_p)} + \dots + \frac{B_{r+1}^p}{(s+\alpha_p)^{r+1}} + \frac{C_1}{(s^2+\omega_1^2)} + \dots + \frac{C_{k+1}}{(s^2+\omega_1^2)^{k+1}} + \dots + \frac{D_1}{(s+\alpha_r)^2+\omega_r^2} + \dots + \frac{D_{l+1}}{[(s+\alpha_r)^2+\omega_r^2]^{k+1}} \quad (4.2)$$

gdzie współczynniki $A_{i+1}, B_{k+1}, C_{h+1}, D_{l+1}$ są stosownymi wielomianami operatora s .

Po odczytaniu z tablic transformaty Laplace’a oryginałów poszczególnych funkcji wyrażenia (4.2) otrzymuje się odpowiedź $y(t)$, która jest kombinacją liniową składników:

$$1, t, t^i, e^{-\alpha t}, t^l e^{-\alpha t}, \sin \omega_0 t, t^l e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t), t^l e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \quad (4.3)$$

Charakterystyki częstotliwościowe – dla transmitancji $G(s)$ wyznacza się charakterystyki częstotliwościowe poprzez podstawienie $s = j\omega$:

$$G(j\omega) \quad G(s)|_{s=j\omega} = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (4.4)$$

Transmitancja $G(j\omega)$ nazywana jest *transmitancją widmową* i jest podstawą do wyznaczenia dowolnej charakterystyki częstotliwościowej. Funkcja $P(-\omega) = P(\omega)$, czyli jest funkcją parzystą, a $Q(-\omega) = -Q(\omega)$ jest funkcją nieparzystą.

Przeprowadza się następującą klasyfikację charakterystyk częstotliwościowych:

$|G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$ - charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ - charakterystyka fazowa

$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ – charakterystyka amplitudowo – fazowa

$L_m(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$ – charakterystyka logarytmiczna amplitudowa

Charakterystyka logarytmiczna amplitudowo – częstotliwościowa wyrażona jest w dB

1dB to: $20 \lg |G(j\omega)| = 1$

$$\lg |G(j\omega)| = \frac{1}{20}$$

$$|G(j\omega)| = 10^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{10} = 1.122$$

$$3\text{dB to: } |G(j\omega)| = 10^{\frac{3}{20}} = \sqrt[20]{10^3} = 1.413 \approx \sqrt{2}$$

Niewątpliwą zaletą logarytmicznych charakterystyk amplitudowych jest przedstawienie iloczynu transmitancji (połączenie szeregowo elementów) jako sumy poszczególnych charakterystyk logarytmicznych, co wynika z właściwości logarytmu:

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log(|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|) = 20 \log |G_1(j\omega)| + 20 \log |G_2(j\omega)| \quad (4.5)$$

Układy minimalno i nieminimalnofazowe

System stabilny nazywany jest minimalnofazowy, jeśli nie posiada opóźnień lub zer w prawej półpłaszczyźnie (Górecki 1993, Zhou & Doyle 1998, Skogestad & Postlethwaite 2005). W układach minimalnofazowych przebieg charakterystyki fazowej jest określony jednoznacznie przez charakterystykę amplitudową i ścisły związek jest podany poprzez relację wzmocnienie – faza (Bode gain – phase relationship) podaną w 1945 roku przez Bodego. Zależność tą wyraża się dla określonej częstotliwości ω_x (Górecki 1993, Pułaczewski et al. 1974, Zhou & Doyle 1998):

$$\varphi(\omega_x) = LG(j\omega_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |G|}{d \nu} \ln \left(\operatorname{ctgh} \left(\frac{|v|}{2} \right) \right) d\nu, \nu = \ln \left(\frac{\omega}{\omega_x} \right), \operatorname{ctgh} \frac{|v|}{2} = \frac{e^{\frac{|v|}{2}} + e^{-\frac{|v|}{2}}}{e^{\frac{|v|}{2}} - e^{-\frac{|v|}{2}}}$$

natomiast przejście podał (Lurie & Enright 2000)

$$\varphi(\omega_x) = LG(j\omega_x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{d \ln |G|}{d \ln \omega}}_{N(\omega)} \ln \left| \frac{\omega + \omega_x}{\omega - \omega_x} \right| \cdot \frac{d\omega}{\omega}$$

Nazwa system minimalnofazowy oznacza, że charakterystyka fazowa ma minimalne możliwe przesunięcie fazowe dla określonej charakterystyki amplitudowej $|G(j\omega)|$.

$N(\omega_x) = \left. \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d \ln \omega} \right|_{\omega=\omega_x}$ – lokalne nachylenie ch-ki amplitudowej w otoczeniu pulsacji ω_x (slope)

jeśli wartość $N(\omega_x) = -k$ w otoczeniu ω_x oznacza to, że charakterystyka amplitudowa ma w tym miejscu nachylenie lokalne $-k \cdot 20\text{dB/dek}$

Z uwagi na fakt, że $\ln \left(\operatorname{ctgh} \frac{|v|}{2} \right)$ oraz $\ln \left| \frac{\omega + \omega_x}{\omega - \omega_x} \right|$ szybko maleją wraz z odchyłką od punktu ω_x , zmiany fazy $\varphi(\omega)$ zależą głównie od nachylenia charakterystyki amplitudowej $N(\omega_x)$. Oprócz tego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| \frac{\omega + \omega_x}{\omega - \omega_x} \right| \cdot \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi^2}{2}$$

Można wykorzystać aproksymację (Skogestad & Postlethwaite 2005, Lurie & Enright 2000)

$$\varphi(\omega_x) = LG(j\omega_x) \approx \frac{\pi}{2} \cdot N(\omega_x)$$

Dla układów minimalnofazowych można stwierdzić, że dla $\omega \rightarrow \infty$ granica przesunięcia fazowego wynosi $-(n-m)\frac{\pi}{2}$, gdzie n jest stopniem mianownika transmitancji, a m licznika transmitancji.

Przebieg ch-ki fazowej jest szczególnie ważny w otoczeniu pulsacji ω_c (pulsacja przecięcia ch-ki amplitudowej), dla której wyznacza się zapas fazy (Zhou & Doyle 1998):

$G(j\omega_c) = 1 \Rightarrow \pi + LG(j\omega_c)$ jest zapasem fazy

Układy nieminimalnofazowe charakteryzują się większymi przesunięciami fazowymi niż opisane wyżej.

Nieminimalnofazowość może być spowodowana zerem lub biegunem transmitancji znajdującym się w prawej półpłaszczyźnie lub elementem opóźniającym.

Typowym przykładem jest porównanie transmitancji $G_1(s) = K$ i $G_2(s) = Ke^{-\tau s}$. Obydwie transmitancje mają identyczne ch-ki amplitudowe, natomiast różnią się ch-kami fazowymi.

$$Ke^{-j\omega\tau} = K[\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)]$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg} \frac{-K \sin(\omega\tau)}{+K \cos(\omega\tau)} = \operatorname{atg}[-\operatorname{tg}(\omega\tau)] = -\omega\tau$$

Układy wszechprzepustowe (all-pass) – są układami nieminimalnofazowymi, w których bieguny transmitancji są lustrzanym odbiciem zer (leżących w prawej półpłaszczyźnie) względem osi urojonej. Układy te charakteryzują się charakterystyką amplitudową równą 1 dla wszystkich częstotliwości.

$$G_1(s) = 1, \quad G_2(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{s^2-s+2}{s^2+s+2}, \quad G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{(s+\bar{z}_1)(s+\bar{z}_2)\dots}$$

4.2. Element proporcjonalny

4.2.1. Charakterystyki skokowe

$$y(t) = Ku(t) \tag{4.6a}$$

$$y(s) = Ku(s) \tag{4.6b}$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = K$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0}{s}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = Ku_0 \mathbb{1}(t)$$

4.3. Element inercyjny

4.3.1. Charakterystyki skokowe

T - stała czasowa, K - wzmacnienie

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (4.7a)$$

$$Tsy(s) + y(s) = Ku(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (4.7b)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0}{s(Ts + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts + 1}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = Ku_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Transmitancja elementu inercyjnego posiada jeden biegun ($M(s) = 0$):

$$M(s) = Ts + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{T}$$

4.3.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1}$$

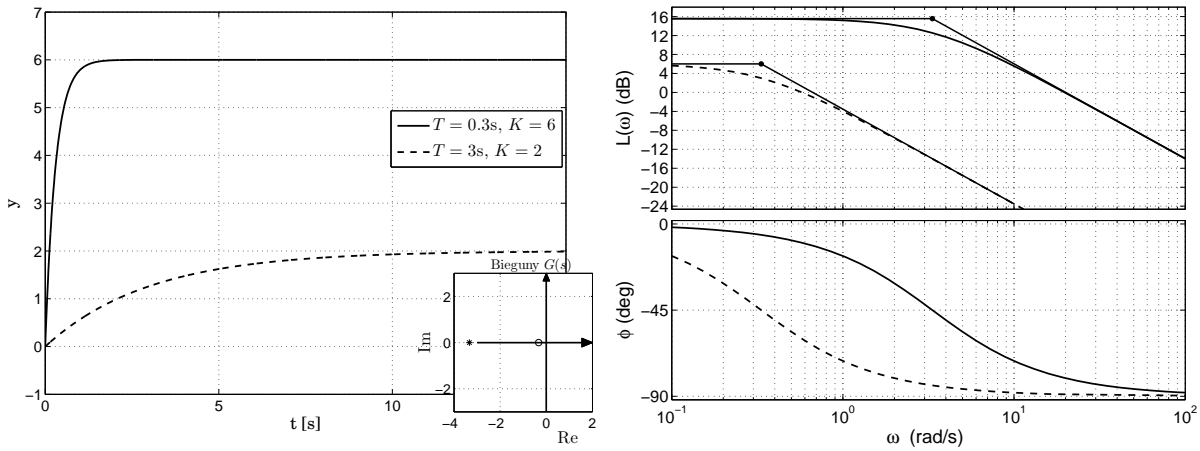
$$G(j\omega) = \left(\frac{K}{j\omega T + 1} \right) \left(\frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} \right) = \frac{K(1 - j\omega T)}{T^2\omega^2 + 1} = \left(\underbrace{\frac{K}{T^2\omega^2 + 1}}_{P(\omega)} \right) + j \left(\underbrace{\frac{-KT\omega}{T^2\omega^2 + 1}}_{Q(\omega)} \right)$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{K^2 + K^2 T^2 \omega^2}{(T^2 \omega^2 + 1)^2}} = K \sqrt{\frac{T^2 \omega^2 + 1}{(T^2 \omega^2 + 1)^2}} = \frac{K}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \quad (4.8)$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \text{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \text{atg}(-\omega T) = -\text{atg}(\omega T)$$



Rysunek 4.1. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementu inercyjnego 1. rzędu o różnych parametrach

4.4. Element całkujący idealny

4.4.1. Charakterystyki skokowe

K - wzmacnienie lub stała całkowania

$$\dot{y}(t) = Ku(t) \Rightarrow y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (4.9a)$$

$$sy(s) = Ku(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K}{s} \quad (4.9b)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0}{s^2}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = Ktu_0 \mathbb{1}(t)$$

Element całkujący (integrator) posiada jeden biegun zerowy:

$$M(s) = s = 0 \Rightarrow s = 0$$

4.4.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = \frac{1}{T_i s} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{1}{T_i j\omega}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_i j\omega} = \underbrace{0}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-1}{T_i \omega}}_{Q(\omega)}$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{1}{T_i \omega}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left(\frac{1}{T_i \omega} \right) = \underbrace{20 \log(1)}_0 - 20 \log(T_i \omega) = -20 \log(T_i \omega)$$

$$\varphi(\omega) = \text{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \text{atg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

4.5. Element całujący z inercją

4.5.1. Charakterystyki skokowe

$$T \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K u(t) \quad (4.10a)$$

$$Ts^2 y(s) + sy(s) = Ku(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (4.10b)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{K u_0}{s^2 (Ts + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{Ts + 1}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = \left[K u_0 t - T K u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \mathbb{1}(t)$$

Element ten posiada dwa bieguny:

$$M(s) = s(Ts + 1) = 0 \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{T}, s_2 = 0$$

4.5.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)}$$

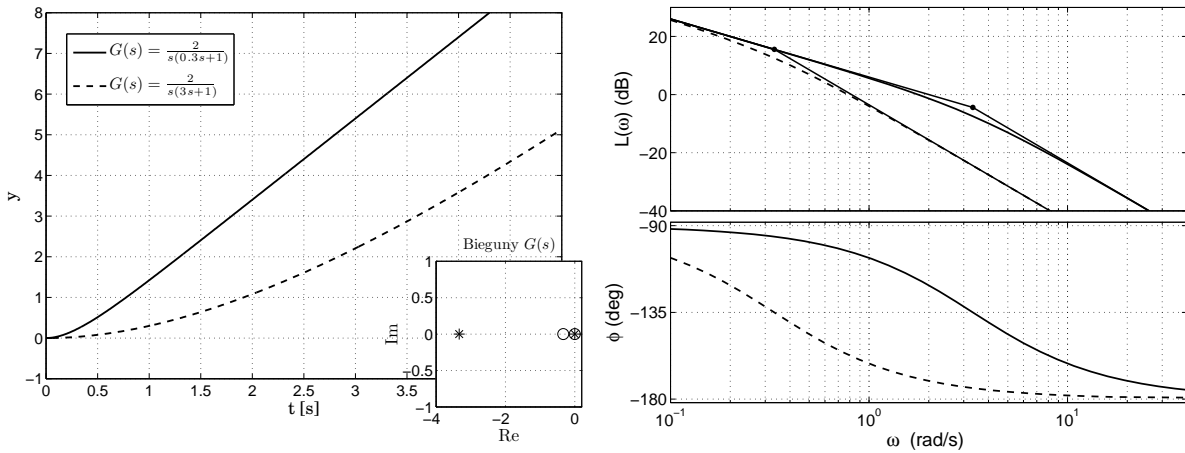
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)} = \left(\frac{-KT}{\underbrace{T^2\omega^2+1}_{P(\omega)}} \right) + j \left(\frac{-K}{\underbrace{\omega(T^2\omega^2+1)}_{Q(\omega)}} \right)$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{K^2(1+T^2\omega^2)}{\omega^2(1+T^2\omega^2)}} = \frac{K}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left(\frac{K}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}} \right) = 20 \log K - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1+T^2\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{atg}(\omega T)$$



Rysunek 4.2. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementów całkująco-inercyjnego o różnych parametrach

4.6. Element różniczkujący idealny

4.6.1. Charakterystyki skokowe

$$y(t) = K \dot{u}(t) \quad (4.11a)$$

$$y(s) = Ksu(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = Ks \quad (4.11b)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = Ku_0$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = Ku_0 \delta(t)$$

4.6.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = Ks = T_d s \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = j\omega T_d$$

$$G(j\omega) = T_d j\omega = \underbrace{0}_{P(\omega)} + j \underbrace{T_d \omega}_{Q(\omega)}$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = T_d \omega$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log(T_d \omega)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \operatorname{atg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

4.7. Element różniczkujący z inercją

4.7.1. Charakterystyki skokowe

$$T \dot{y}(t) + y(t) = K \dot{u}(t) \quad (4.12a)$$

$$Ts y(s) + y(s) = Ks u(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{Ks}{Ts + 1} \quad (4.12b)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0}{Ts+1}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = \frac{Ku_0}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Transmitancja (4.12b) charakteryzuje się jednym biegunem:

$$M(s) = Ts + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{T}$$

4.7.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = \frac{Ks}{Ts+1} = \frac{T_d s}{Ts+1} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{T_d j\omega}{j\omega T + 1} \quad T < T_d$$

$$G(j\omega) = \left(\frac{T_d j\omega}{j\omega T + 1} \right) \left(\frac{j\omega T - 1}{j\omega T - 1} \right) = \left(\underbrace{\frac{TT_d \omega^2}{\omega^2 T^2 + 1}}_{P(\omega)} \right) + j \left(\underbrace{\frac{T_d \omega}{\omega^2 T^2 + 1}}_{Q(\omega)} \right)$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{T_d^2 \omega^2 + T^2 T_d^2 \omega^4}{(\omega^2 T^2 + 1)^2}} = \sqrt{\frac{T_d^2 \omega^2 (\omega^2 T^2 + 1)}{(\omega^2 T^2 + 1)^2}} = \frac{T_d \omega}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log(T_d \omega) - 20 \log \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \text{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \text{atg} \left(\frac{1}{T\omega} \right)$$

4.8. Element inercyjny 2. rzędu

4.8.1. Charakterystyki skokowe $T_1 \neq T_2$

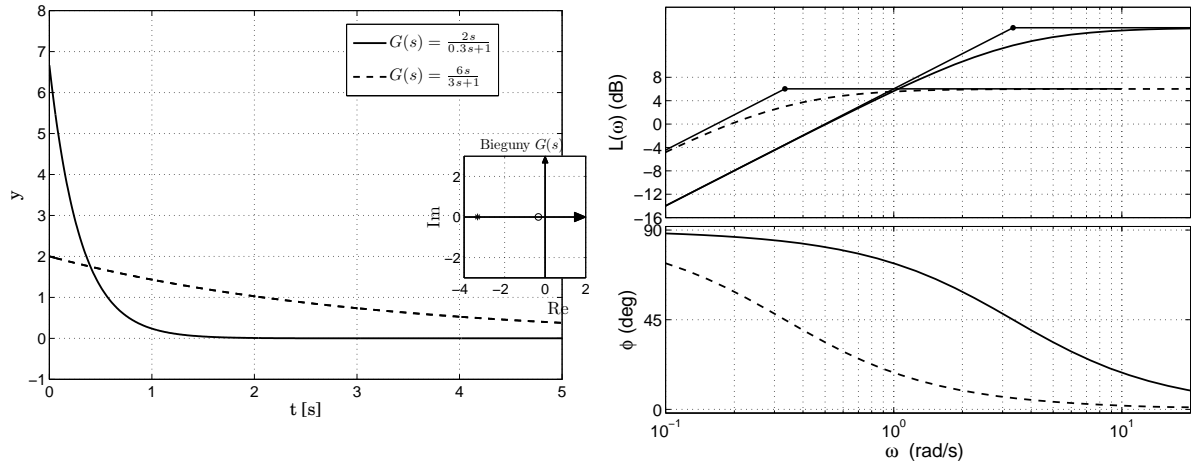
$$T_1 T_2 \ddot{y}(t) + (T_1 + T_2) \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (4.13a)$$

$$T_1 T_2 s^2 y(s) + (T_1 + T_2) s y(s) + y(s) = Ku(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (4.13b)$$



Rysunek 4.3. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementów różniczkująco-inercyjnego o różnych parametrach

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{T_1s+1} + \frac{C}{T_2s+1}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0\mathbb{1}(t)} = \left[Ku_0 \left(1 + \frac{T_2}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_1}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \right] \mathbb{1}(t)$$

Element inercyjny 2. rzędu posiada dwa bieguny:

$$M(s) = (T_1s+1)(T_2s+1) = 0 \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{T_1}, s_2 = -\frac{1}{T_2}$$

4.8.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)} = \frac{K(1-\omega^2 T_1 T_2)}{\underbrace{(1-\omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2 (T_1+T_2)^2}_{P(\omega)}} + j \frac{-K\omega(T_1+T_2)}{\underbrace{(1-\omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2 (T_1+T_2)^2}_{Q(\omega)}}$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 (T_1^2 + \omega^2 T_1^2 T_2^2 + T_2^2)}}{(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2 (T_1 + T_2)^2}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 (T_1^2 + \omega^2 T_1^2 T_2^2 + T_2^2)} \\ - 20 \log \left[(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2 (T_1 + T_2)^2 \right] \\ \varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \operatorname{atg} \left(-\frac{\omega(T_1 + T_2)}{1 - \omega^2 T_1 T_2} \right) = -\operatorname{atg} \left(\frac{\omega(T_1 + T_2)}{1 - \omega^2 T_1 T_2} \right)$$

4.8.3. Charakterystyki skokowe $T_1 = T_2 = T$

$$T^2 \ddot{y}(t) + 2T \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (4.14a)$$

$$T^2 s^2 y(s) + 2Ts y(s) + y(s) = Ku(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja dla tego szczególnego przypadku jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2Ts + 1} = \frac{K}{(Ts + 1)^2} \quad (4.14b)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0}{s(Ts + 1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts + 1} + \frac{C}{(Ts + 1)^2} \\ y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = \left[Ku_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{T} t e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \mathbb{1}(t)$$

Transmitancja (4.14b) posiada jeden podwójny biegun:

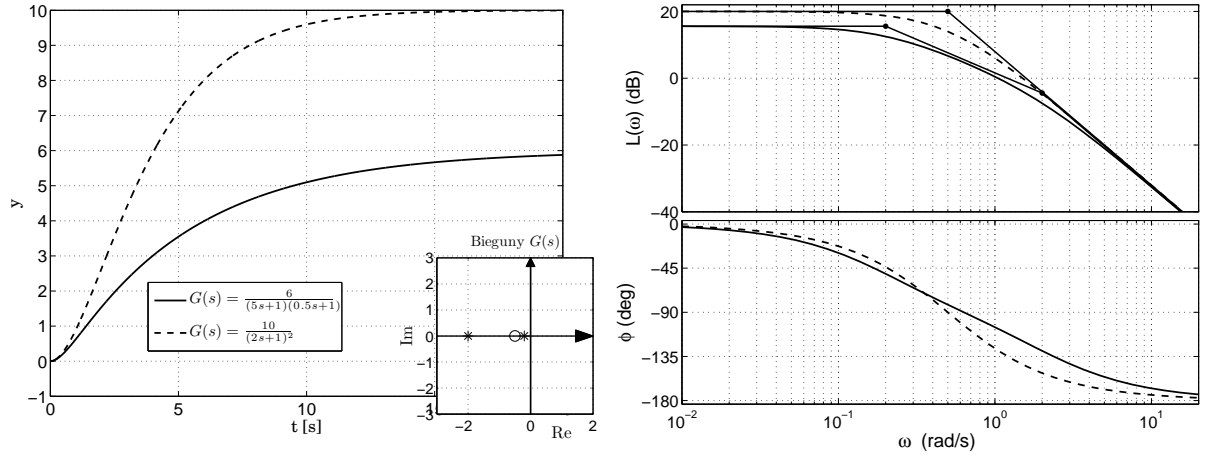
$$M(s) = (Ts + 1)^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{T}$$

4.8.4. Charakterystyki częstotliwościowe $T_1 = T_2 = T$

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T + 1)^2} \\ G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T + 1)^2} = \frac{K(1 - \omega^2 T^2)}{\underbrace{(1 + \omega^2 T^2)^2}_{P(\omega)}} + j \frac{-2KT\omega}{\underbrace{(1 + \omega^2 T^2)^2}_{Q(\omega)}} \\ A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K - 20 \log (1 + \omega^2 T^2)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \operatorname{atg} \left(-\frac{2T\omega}{1 - \omega^2 T^2} \right) = -\operatorname{atg} \left(\frac{2T\omega}{1 - \omega^2 T^2} \right)$$



Rysunek 4.4. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementów inercyjnego 2. rzędu o różnych parametrach

4.9. Element inercyjny n-rzędu

$$T_n = \dots T_1 = T$$

4.9.1. Charakterystyki skokowe

$$T^n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \dots + nT \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = Ku(t) \quad (4.15a)$$

$$T^n s^n y(s) + \dots + nTs y(s) + y(s) = Ku(s)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad (4.15b)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0}{s(Ts + 1)^n} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{Ts + 1} + \frac{B_2}{(Ts + 1)^2} + \dots + \frac{B_n}{(Ts + 1)^n}$$

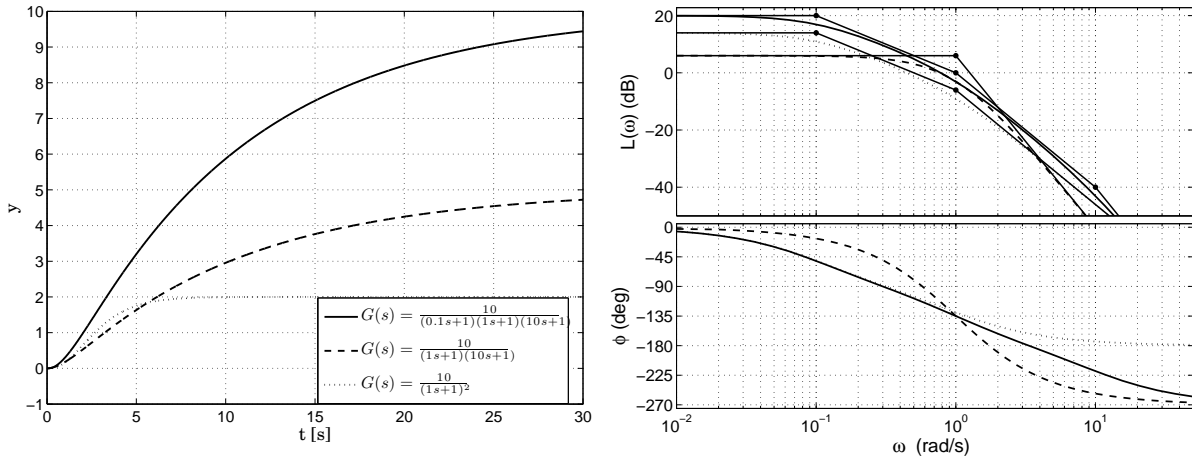
$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = \left[Ku_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i! T^i} \right) \right] \mathbb{1}(t)$$

Transmitancja (4.15b) posiada n identycznych pierwiastków:

$$M(s) = (Ts + 1)^n = 0 \Rightarrow s_{1,2,\dots,n} = -\frac{1}{T}$$

4.9.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T + 1)^n}$$



Rysunek 4.5. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementu inercyjnego wyższego rzędu

4.10. Element oscylacyjny

T_0 -okres drgań naturalnych nietłumionych (własnych), drgań które pojawiłyby się przy braku tłumienia ($\xi=0$)

ξ - względny współczynnik tłumienia

$$T_0^2 \ddot{y}(t) + 2T_0\xi\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (4.16a)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \ddot{y}(t) + 2\omega_0\xi\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 u(t) \quad (4.16b)$$

Transmitancja jest równa:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K}{T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1} \quad (4.16c)$$

lub

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.16d)$$

$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

4.10.1. Charakterystyki skokowe $0 < \xi < 1$

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$\begin{aligned} y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} &= \frac{Ku_0\omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} = \frac{Ku_0\omega_0^2}{s \left[(s + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\xi^2})^2 \right]} \\ &= Ku_0 \left[\frac{A}{s} + \frac{B\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}{(s + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\xi^2})^2} + \frac{C(s + \xi\omega_0)}{(s + \xi\omega_0)^2 + (\omega_0\sqrt{1-\xi^2})^2} \right] \end{aligned}$$

gdzie $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ jest pulsacją drgań własnych.

w dalszych obliczeniach przyjmuje się $a = \xi\omega_0$.

$$\begin{aligned} y(t) \Big|_{u=u_0\mathbb{1}(t)} &= Ku_0 \left[1 - e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_p t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_p t) \right] \mathbb{1}(t) \\ &= Ku_0 \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \varphi) \right) \right] \mathbb{1}(t) \end{aligned}$$

gdzie $\varphi = \operatorname{atg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

Obwiednie liczy się dla minimów h_1 i maksimów h_2 funkcji sinus

$$\begin{aligned} h_1(t) &= Ku_0 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \right] \\ h_2(t) &= Ku_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

Bieguny elementu oscylacyjnego tłumionego są liczbami zespolonymi (para sprzężona):

$$M(s) = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\underbrace{\xi\omega_0}_a \pm j\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_p}$$

Analiza równania charakterystycznego:

$$M(s) = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = (s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2$$

$$-(s_1 + s_2) = 2a = 2\xi\omega_0 \Rightarrow \xi = \frac{a}{\omega_0}$$

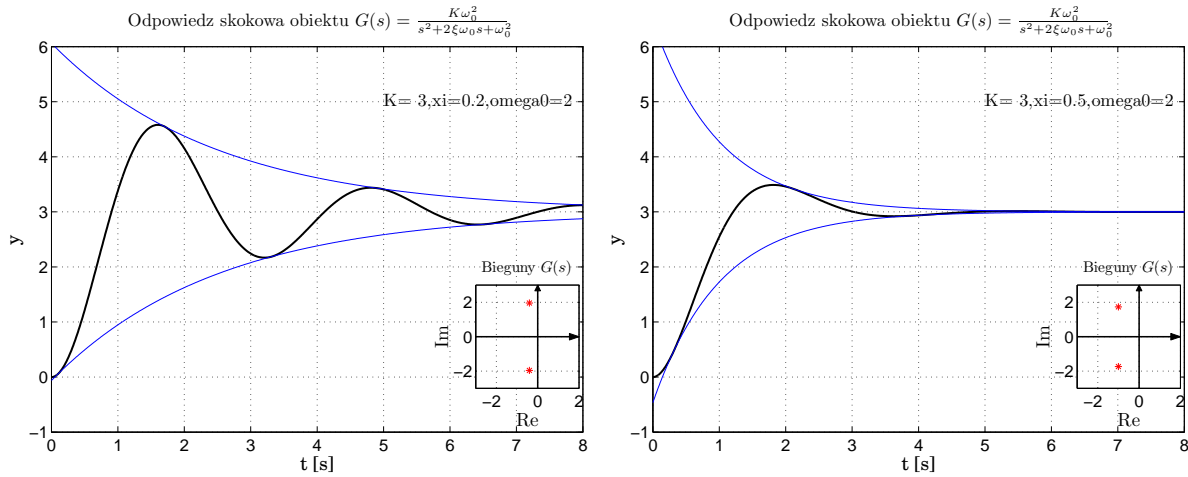
$$s_1 s_2 = (-a + j\omega_p)(-a - j\omega_p) = a^2 + \omega_p^2 = \omega_0^2$$

Z powyższych wzorów wynikają następujące wnioski:

1) $\omega_0 = \sqrt{a^2 + \omega_p^2}$ jest odległością pierwiastków od środka układu współrzędnych.

2) $\xi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_p^2}} \xi = a \cos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_p^2}} \right) = \operatorname{atg} \left(\frac{\omega_p}{a} \right)$ jest kątem pomiędzy częścią rzeczywistą a urojoną (pulsacją drgań tłumionych ω_p).

Na rysunku 4.6 przedstawione zostały odpowiedzi skokowe elementów oscylacyjnych wraz z obwiedniami i lokalizacja biegunów transmitancji.



Rysunek 4.6. Odpowiedzi skokowe, obwiednie h_1, h_2 i bieguny elementu oscylacyjnego tłumionego

4.10.2. Charakterystyki częstotliwościowe $0 < \xi < 1$

$$G(s) = \frac{K}{T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{T_0^2 (j\omega)^2 + 2\xi T_0 j\omega + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{T_0^2 (j\omega)^2 + 2\xi T_0 j\omega + 1} = \underbrace{\frac{K(1 - \omega^2 T_0^2)}{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-2KT_0 \xi \omega}{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}_{Q(\omega)}$$

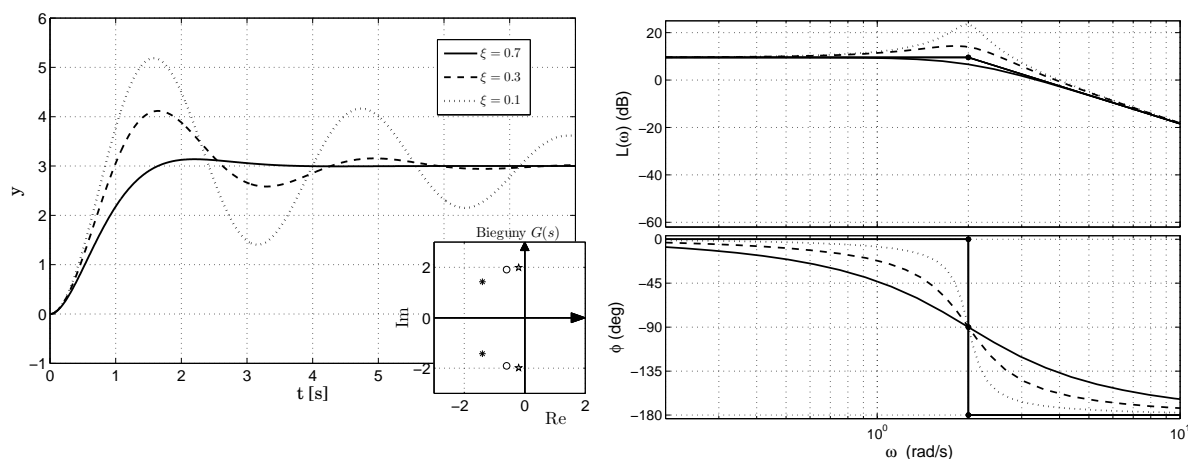
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}$$

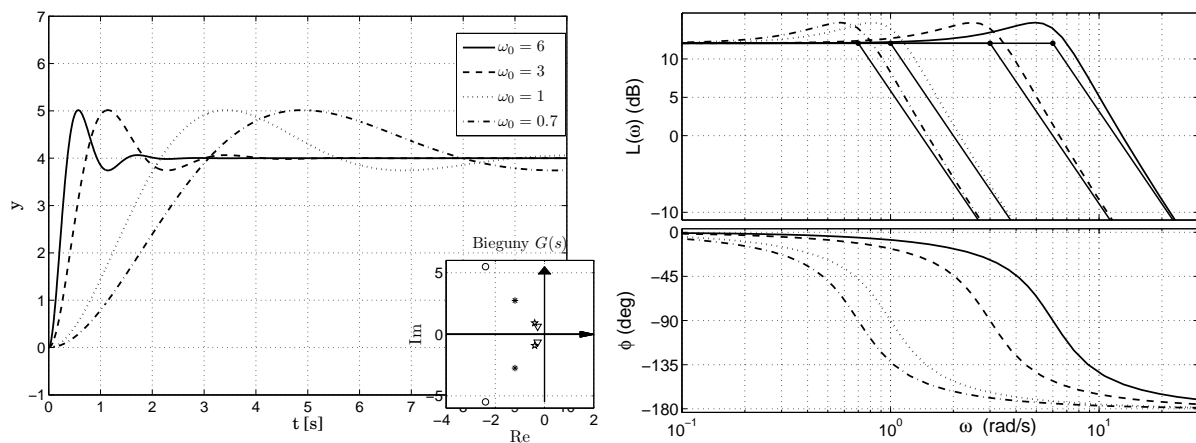
$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \operatorname{atg} \left(-\frac{2T_0 \xi \omega}{1 - \omega^2 T_0^2} \right) = -\operatorname{atg} \left(\frac{2T_0 \xi \omega}{1 - \omega^2 T_0^2} \right)$$

$$\max[A(\omega)] = \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \text{dla } \omega = \omega_r = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{T_0}$$

ω_r jest pulsacją rezonansową, która pojawia się na charakterystykach gdy współczynnik tłumienia jest w zakresie $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Natomiast dla współczynnika tłumienia spełniającego nierówność $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$ charakterystyka częstotliwościowa posiada supremum $\sup [A(\omega)] = \max [A(\omega)]$ dla pulsacji $\omega = 0$.



Rysunek 4.7. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementu oscylacyjnego tłumionego, dla $\omega_0 = 2, K = 3, \xi = \text{var}$



Rysunek 4.8. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementu oscylacyjnego tłumionego, dla $\xi = 0.4, K = 4, \omega_0 = \text{var}$

4.10.3. Charakterystyki skokowe $\xi = 0$

Dla układu oscylacyjnego nietłumionego transmitancja przyjmuje postać:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4.17)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0\mathbb{1}(t)} = Ku_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]$$

Bieguny elementu oscylacyjnego nietłumionego są liczbami urojonymi:

$$M(s) = s^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\omega_0$$

4.10.4. Charakterystyki częstotliwościowe $\xi = 0$

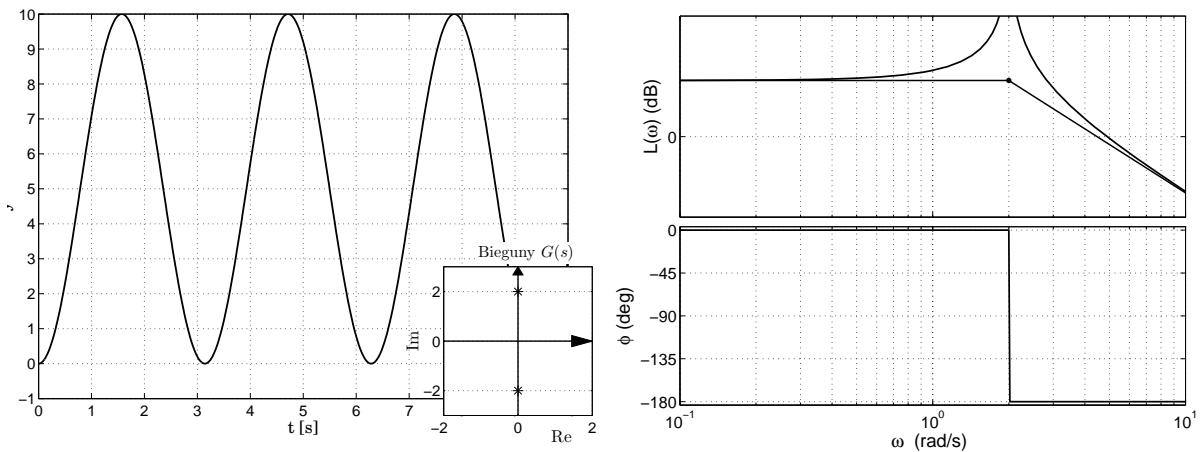
$$G(s) = \frac{K}{T_0^2 s^2 + 1} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{T_0^2 (j\omega)^2 + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{T_0^2 (j\omega)^2 + 1} = \underbrace{\frac{K}{1 - \omega^2 T_0^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{0}_{Q(\omega)}$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{1 - \omega^2 T_0^2}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K - 20 \log (1 - \omega^2 T_0^2)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = 0$$



Rysunek 4.9. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementu oscylacyjnego nietłumionego, dla $\xi = 0$, $K = 5$, $\omega_0 = 2$

4.10.5. Charakterystyki skokowe $-1 < \xi < 0$

Jeżeli współczynnik tłumienia $\xi < 0$ to układ jest niestabilny, a dla przypadku $-1 < \xi < 0$ przebieg odpowiedzi skokowej jest funkcją rozbiegającą, która posiada narastające oscylacje:

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 - 2|\xi|\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.18)$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{Ku_0\omega_0}{s(s^2 - 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 1(t)} = Ku_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{|\xi|\omega_0 t} \sin((\omega_p t + \varphi)) \right], \quad \varphi = \operatorname{atg} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$$

Biegunki transmitancji (4.18) posiadają część rzeczywistą większą od 0, oznacza to, że odpowiedź skokowa będzie się rozbiegała:

$$M(s) = s^2 - 2|\xi|\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = |\xi|\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

Obiekt dynamiczny, którego dowolny biegun ma część rzeczywistą większą od 0 jest elementem niestabilnym.

4.10.6. Charakterystyki częstotliwościowe $-1 < \xi < 0$

$$G(s) = \frac{K}{T_0^2 s^2 - 2|\xi|T_0 s + 1} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = \frac{K}{T_0^2 (j\omega)^2 - 2|\xi|T_0 j\omega + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{T_0^2 (j\omega)^2 - 2|\xi|T_0 j\omega + 1} = \underbrace{\frac{K(1 - \omega^2 T_0^2)}{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{2KT_0 \xi \omega}{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}_{Q(\omega)}$$

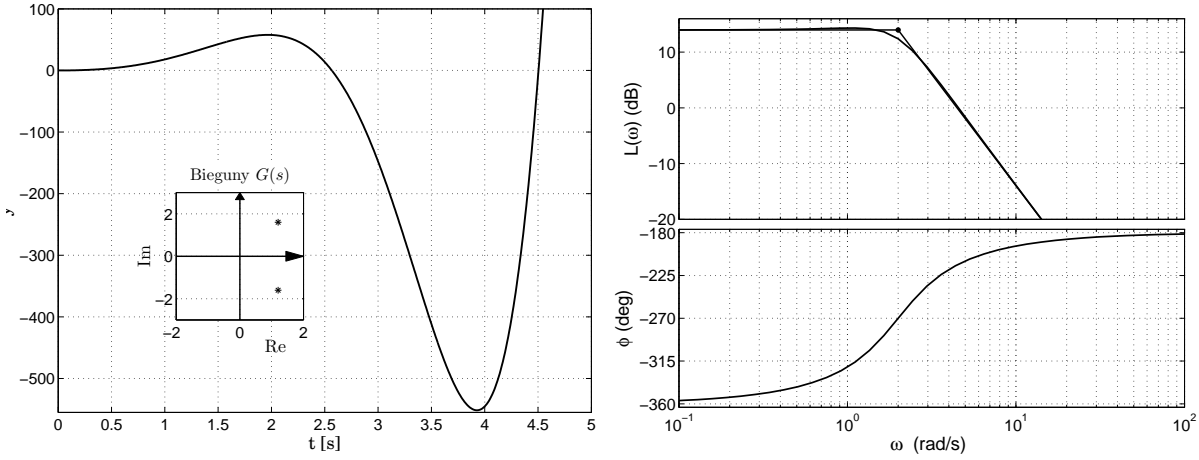
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}}$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{(1 - \omega^2 T_0^2)^2 + 4\xi^2 T_0^2 \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \operatorname{atg} \left(\frac{2T_0 \xi \omega}{1 - \omega^2 T_0^2} \right)$$

4.11. Element opóźniający

Element opóźniający jest elementem o parametrach rozłożonych i z tego powodu jego analiza jest utrudniona. Z tego powodu często dokonuje się jego aproksymacji transmitancjami w postaci funkcji wymiernych.



Rysunek 4.10. Odpowiedzi skokowe i charakterystyki częstotliwościowe elementu oscylacyjnego niestabilnego, dla $\xi = -0.6$, $K = 5$, $\omega_0 = 2$

4.11.1. Charakterystyki skokowe

$$y(t) = Ku(t - \tau_0) \quad (4.19a)$$

Transmitancję elementu opóźniającego zapisuje się jako:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = Ke^{-\tau_0 s} \quad (4.19b)$$

gdzie τ jest nazywane *opóźnieniem czasowym* lub *czasem martwym*.

Transmitancja (4.19b) jest opisem elementu o parametrach rozłożonych, którego analiza i synteza dla niego układu regulacji jest mocno utrudniona. Z tego powodu stosuje się często aproksymację do klasycznej postaci transmitancji (iloraz dwóch wielomianów).

Aproksymacja Pade'go wykorzystuje następujące rozwinięcie w szereg potęgowy:

$$e^{-\tau_0 s} = \frac{e^{-\frac{\tau_0}{2}}}{e^{\frac{\tau_0}{2}}} \approx \frac{1 - \frac{\tau_0}{2}s + \frac{\tau_0^2}{4}s^2 + \dots + \frac{\tau_0^n}{2^n}s^n}{1 + \frac{\tau_0}{2}s + \frac{\tau_0^2}{4}s^2 + \dots + \frac{\tau_0^n}{2^n}s^n}$$

Innym sposobem uproszczenia zapisu transmitancji (4.19b) jest aproksymacja elementami inercyjnymi:

$$e^{-\tau_0 s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{\tau_0}{n}s + 1} \right)^n$$

W wyznaczeniu odpowiedzi skokowej elementu opóźniającego wykorzystuje się następujące obliczenia:

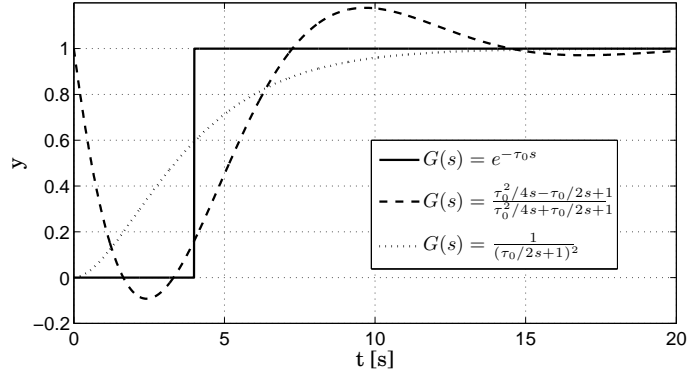
$$u(t) = u_0 \mathbb{1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\cdot\}} u(s) = \frac{u_0}{s}$$

Wyznaczenie odpowiedzi skokowej:

$$y(s) \Big|_{u=\frac{u_0}{s}} = \frac{K}{s} e^{-\tau_0 s}$$

$$y(t) \Big|_{u=u_0 \mathbb{1}(t)} = Ku_0 \mathbb{1}(t - \tau_0)$$

Na rysunku 4.11 przedstawiono porównanie charakterystyk czasowych elementu z opóźnieniem oraz jego aproksymacja elementami 2. rzędu.



Rysunek 4.11. Odpowiedzi skokowe elementu opóźniającego i jego aproksymacji, dla $\tau_0 = 4s$

4.11.2. Charakterystyki częstotliwościowe

$$G(s) = Ke^{-\tau_0 s} \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = Ke^{-\tau_0 j\omega}$$

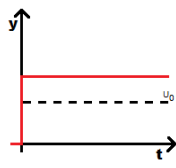
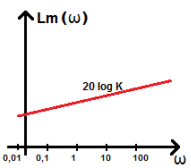
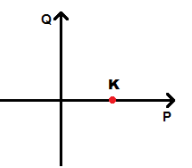
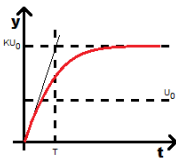
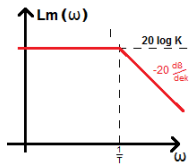
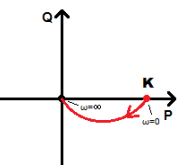
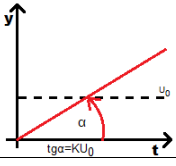
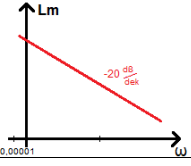
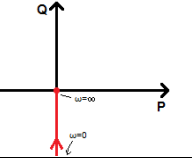
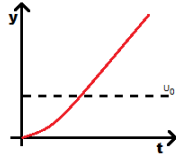
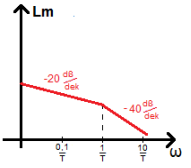
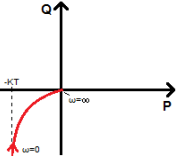
$$G(j\omega) = Ke^{-\tau_0 j\omega} = \underbrace{K \cos(\omega\tau_0)}_{P(\omega)} + j \underbrace{K(-\sin(\omega\tau_0))}_{Q(\omega)}$$

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = K$$

$$L_m(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log K, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{atg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = -\omega\tau_0$$

4.12. Podsumowanie

I). Element	II). Transmittancja	III). Odpowiedź Skokowa $U(t)=U_0 * 1(t)$	IV). $(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$	V). Odpowiedź Skokowa Ch-ka skokowa	VI). $G(j\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$ Log ch-ka amplitudowa	VII). $G(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$ Ch-ka amplit - fazowa (rysujemy na podst. Kol. IV)
1. Proporcjonalny	$G(s)=K$	$y(t)=KU_0 1(t)$	$P(\omega)=K$ $Q(\omega)=0$			
2. Inercyjny I-go rzędu	$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$	$y(t)=KU_0(1-e^{-1/Tt})$	$P(\omega)=\frac{K}{T^2\omega^2+1}$ $Q(\omega)=\frac{-KT\omega}{T^2\omega^2+1}$			
3. Całkujący	$G(s)=\frac{K}{s}=\frac{1}{Ts}$	$y(t)=KU_0 t * 1(t)$	$P(\omega)=0$ $Q(\omega)=\frac{K}{\omega}=-\frac{1}{T\omega}$			
4. Całkujący z inercją	$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$	$y(t)=KU_0 [t - T * (1 - e^{-1/Tt})]$	$P(\omega)=\frac{-KT}{T^2\omega^2+1}$ $Q(\omega)=\frac{-K}{\omega(T^2\omega^2+1)}$			

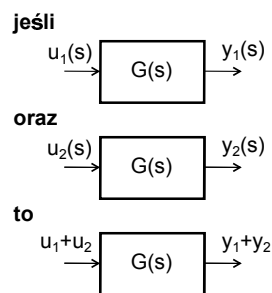
Rozdział 5

Algebra schematów blokowych

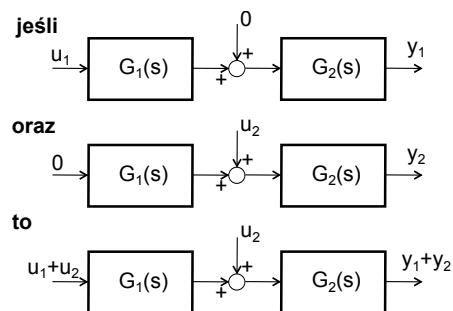
Algebra schematów blokowych jest zagadnieniem, które dotyczy liniowych układów dynamicznych (opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi – transmitancją). W tym zagadnieniu istnieje możliwość korzystania ze standardowych wzorów upraszczających rozbudowane systemy do pojedynczej transmitancji.

5.1. Podstawowe zasady

Podstawą jest tu **zasada superpozycji**, która podobnie jak w elektrotechnice dotyczy jedynie układów (modeli) liniowych. Zasadę superpozycji przedstawiono na dwóch kolejnych rysunkach 5.1 i 5.2.



Rysunek 5.1. Zasada superpozycji – przypadek 1



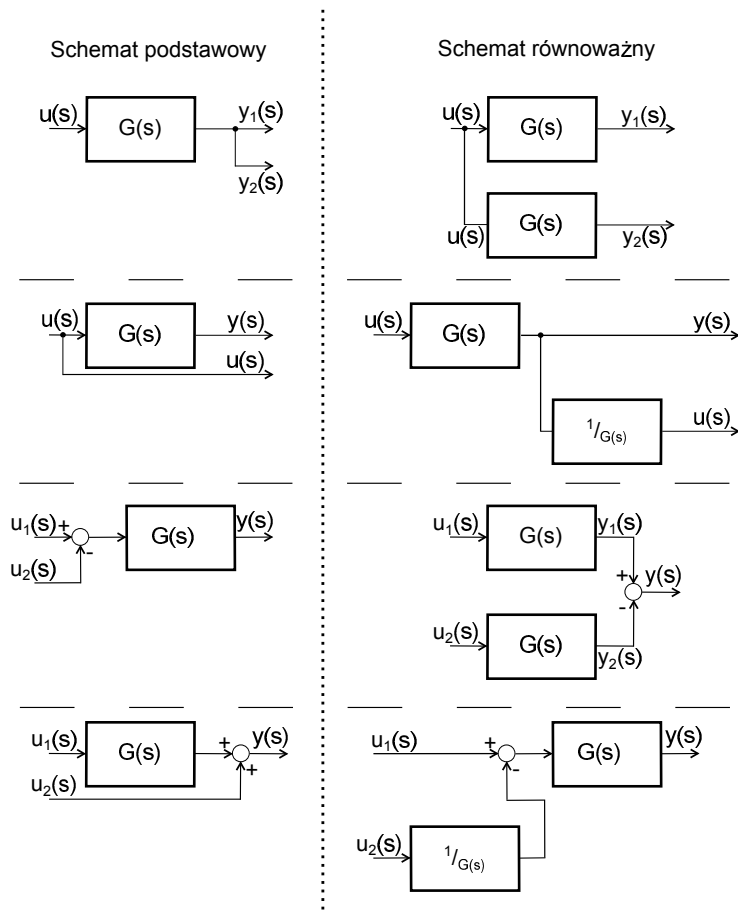
Rysunek 5.2. Zasada superpozycji – przypadek 2

Przedstawione przypadki prowadzą do możliwości sumowania sygnałów (funkcji) w dowolnym miejscu złożonego systemu. Takie podejście jest zbliżone do *prądowego prawa Kirchhoffa* i może

być przedstawione w postaci ogólnych zasad redukcji schematów blokowych. Można tu wyróżnić następujące przypadki (Ciepiela 2000, Kaczorek 1974):

1. Przesunięcie wyjściowego węzła zaczepowego – rozgałęzienie sygnałów na wyjściu bloku dynamicznego (transmitancji).
2. Przesunięcie wejściowego węzła zaczepowego – rozgałęzienie sygnałów na wejściu bloku dynamicznego (transmitancji).
3. Przesunięcie wejściowego węzła sumacyjnego – sumowanie sygnałów na wejściu bloku dynamicznego (transmitancji).
4. Przesunięcie wyjściowego węzła zaczepowego – sumowanie sygnałów na wyjściu bloku dynamicznego (transmitancji).

Powyższe przypadki zostały przedstawione na rysunku 5.3 i pozwalają one na upraszczanie skomplikowanych schematów blokowych.

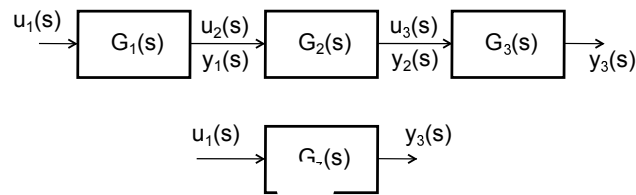


Rysunek 5.3. Przesunięcie węzłów zaczepowych i sumacyjnych

Powyższe proste zasady należy uzupełnić o upraszczanie schematów przy ustalonych połączeniach:

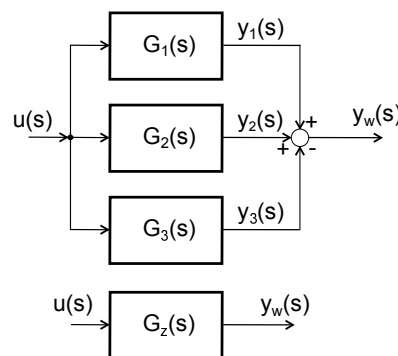
1. Połączenie szeregowe liniowych elementów dynamicznych (rys. 5.4) W przedstawionym przypadku sygnał wejściowy u_1 , po przetworzeniu przez transmitancję $G_1(s)$, jest podawany na kolejne transmitancje. Oznacza to, że transmitancję zastępczą $G_Z(s)$ wyznacza się jako **iloczyn** tych transmitancji:

$$G_Z(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \quad (5.1)$$



Rysunek 5.4. Upraszczanie połączeń szeregowych w schematach blokowych

2. Połączenie równoległe liniowych elementów dynamicznych (rys. 5.5) Dla przedstawionego przy-

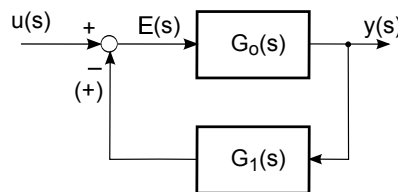


Rysunek 5.5. Upraszczanie połączeń równoległych w schematach blokowych

padku, gdzie sygnał wejściowy jest podawany równocześnie na trzy bloki liniowe można wyznaczyć transmitancję zastępczą $G_Z(s)$ jako **sumę** tych transmitancji (oczywiście należy uwzględnić tu znak z jakim sygnał wyjściowy poszczególnych transmitancji podawany jest do węzła sumacyjnego):

$$G_Z(s) = G_1(s) + G_2(s) - G_3(s) \quad (5.2)$$

3. Sprzężenie zwrotne (rys. 5.6) jest bardzo istotnym połączeniem bloków transmitancyjnych, ponie-



Rysunek 5.6. Upraszczanie sprzężenia zwrotnego w schematach blokowych

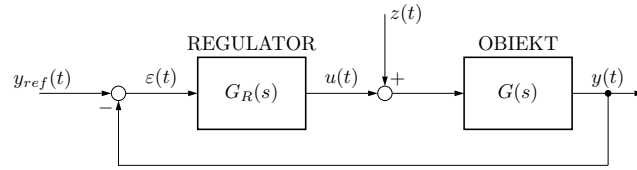
waż w układach automatyki najczęściej wykorzystuje się informację zwrotną w celu wysterowania obiektu regulacji. W przedstawionym schemacie transmitancja $G_0(s)$ jest **torem głównym**, a $G_1(s)$ jest transmitancją **sprzężenia zwrotnego**. Uproszczenie takiego połączenia, po dokonaniu elementarnych obliczeń prowadzi do:

$$G_Z(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_0(s)}{1 \pm G_0(s)G_1(s)} \quad (5.3)$$

gdzie znak \pm oznacza, że dla ujemnego ($-$) sprzężenia zwrotnego w mianowniku transmitancji występuje $+$, a dla dodatniego ($+$) w mianowniku jest $-$. Należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że w większości układów automatycznej regulacji występuje *ujemne sprzężenie zwrotne* w celu korekcji błędu ε .

5.2. Przykłady

Przykład 32. Należy wyznaczyć wszystkie transmitancje zastępcze w układzie regulacji przedstawionym na 5.7.



Rysunek 5.7. Schemat blokowy jednopętlowego układu regulacji

Transmitancję wejście-wyjście wyznacza się na podstawie zależności (5.3):

$$G_z(s) = \left. \frac{y(s)}{y_{ref}(s)} \right|_{z(s)=0} = \frac{G(s)G_R(s)}{1 + G_R(s)G(s)} \quad (5.4)$$

Transmitancję uchybową wyznacza się również na podstawie zależności (5.3), ale należy wcześniej przekształcić schemat do takiej postaci, aby sygnał ε był wyjściem z układu regulacji. Wówczas w torze głównym będzie znajdowało się wzmocnienie 1, a w sprzężeniu zwrotnym iloczyn GG_R i w wyniku otrzymuje się:

$$G_z(s) = \left. \frac{\varepsilon(s)}{y_{ref}(s)} \right|_{z(s)=0} = \frac{1}{1 + G_R(s)G(s)} \quad (5.5)$$

Transmitancja zakłóceniamiowa określa wpływ sygnału z na wyjście układu regulacji y (ale $y_{ref}(s) = 0$) i w tym przypadku torem głównym jest transmitancja $G(s)$, a sprzężeniem zwrotnym $G_R(s)$ i kolejny raz wyznacza się na podstawie zależności (5.3) uzyskuje się:

$$G_z(s) = \left. \frac{y(s)}{z(s)} \right|_{y_{ref}(s)=0} = \frac{G(s)}{1 + G_R(s)G(s)} \quad (5.6)$$

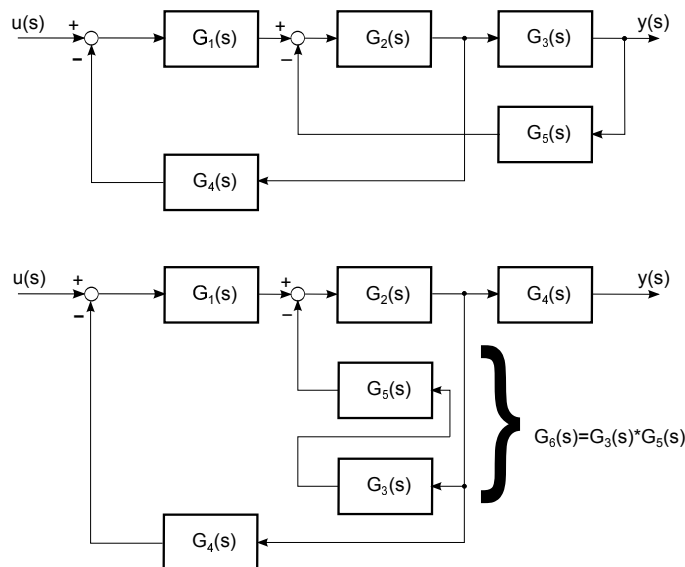
Ostatnim przypadkiem jaki rozważa się w takich układach jest **transmitancję zakłócenie-uchyby** i wyznacza się ją na podstawie zależności (5.3):

$$G_z(s) = \left. \frac{\varepsilon(s)}{z(s)} \right|_{y_{ref}(s)=0} = \frac{-1 \cdot G(s)}{1 - (-1 \cdot G_R(s)G(s))} = \frac{-G(s)}{1 + G_R(s)G(s)} \quad (5.7)$$

Przykład 33. Należy dokonać redukcji (uproszczenia) schematu blokowego zgodnie z powyższymi zasadami.

Schemat podstawowy i pierwszy etap redukcji został przedstawiony na rysunku 5.8, gdzie przesunięty został ostatni węzeł zaczepowy przed transmitancją $G_3(s)$ co pozwoliło na wyznaczenie transmitancji $G_6(s)$, która jest połączeniem szeregowym transmitancji $G_3(s)$ i $G_5(s)$

Kolejny etap obliczeń został przedstawiony na rysunku 5.9, gdzie wykorzystano wzór na redukcję



Rysunek 5.8. Redukcja schematu blokowego

sprężenia zwrotnego i pozwoliło to na wyznaczenie transmitancji $G_7(s)$. Następnie została wyliczona transmitancja $G_8(s)$ jako połączenie szeregowe $G_1(s)$ i $G_7(s)$.

W kolejnym etapie obliczeń (rys. 5.10) po raz kolejny widać wykorzystanie wzoru na redukcję sprzężenia zwrotne ($G_9(s)$) i wzoru na połączenie szeregowe, który pozwala na uzyskanie końcowego wyniku, czyli transmitancji zastępczej $G_Z(s)$.

Przykład 34. Regulacja prędkości obrotowej maszyny cieplnej

Na rysunku 5.11 przedstawiono schemat układu stabilizacji prędkości obrotowej maszyny cieplnej [biesiekiński, 1973]. Elementem pomiarowym EP w układzie jest mechanizm odśrodkowy. Elementem wykonawczym EW jest wzmacniacz hydrauliczny składający się z suwaka rozrządczego 2, połączonego z tuleją mechanizmu odśrodkowego 3 oraz tłoka roboczego 1 połączonego z zaworem ZR regulującym dopływ paliwa do maszyny cieplnej.

Równanie elementów układu po linearyzacji:

1) Maszyny cieplnej

$$(T_0 s + 1) \omega(s) = k_0 Y(s) - k_1 M(s)$$

przy czym: $\omega(s)$ – transformata prędkości kątowej ω wału maszyny; $Y(s)$ – transformata przesunięcia y zasuwu zaworu regulującego dopływ paliwa; $M(s)$ – transformata momentu obciążenia M .

2) Elementu pomiarowego

$$(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1) X(s) = k_2 \omega(s)$$

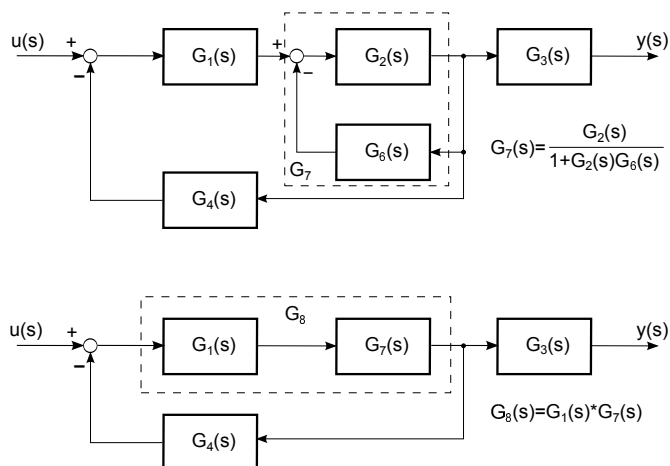
przy czym: $X(s)$ – transformata przesunięcia x tulei mechanizmu odśrodkowego; T_1 , T_2 – stałe czasowe mechanizmu odśrodkowego.

3) Elementu wykonawczego

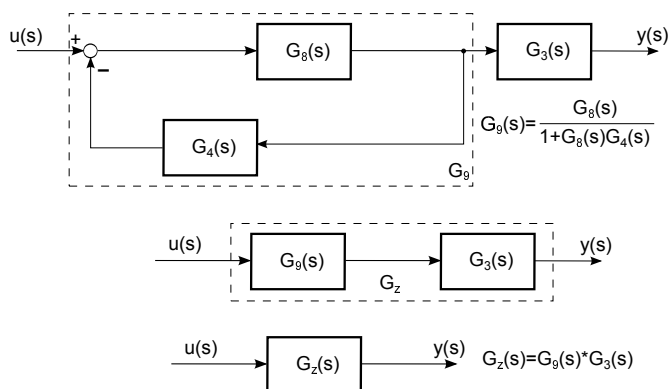
$$sY(s) = k_0 X(s)$$

k_0 , k_1 , k_2 i k_3 – współczynniki proporcjonalności.

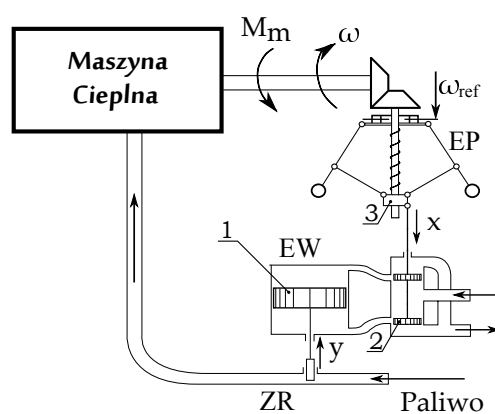
Schemat blokowy układu przedstawiono na rysunku 5.12, gdzie ω_{ref} oznacza wartość zadaną prędkości obrotowej ω , nastawianą za pomocą sprężyny mechanizmu odśrodkowego; ω' – składowa



Rysunek 5.9. Redukcja schematu blokowego



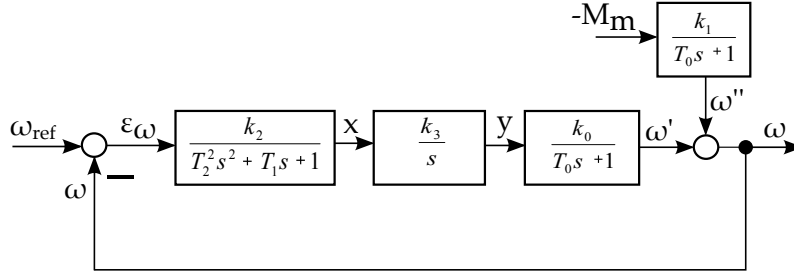
Rysunek 5.10. Redukcja schematu blokowego



Rysunek 5.11. Budowa maszyny cieplnej

prędkości kątowej spowodowana przesunięciem zasowy zaworu regulacyjnego; ω'' - składowa pręd-

kości kątowej spowodowana obciążeniem M , przy czym $\omega = \omega' + \omega''$; $\varepsilon_\omega = \omega_{ref} - \omega$ – uchyb regulacji.



Rysunek 5.12. Schemat blokowy regulacji prędkości kątowej maszyny cieplnej

Transmitancja operatorowa układu otwartego:

$$G_0(s) = \frac{\omega(s)}{\varepsilon_\omega(s)} = \frac{K}{s(T_0 s + 1)(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)}$$

przy czym $K = k_0, k_2, k_3$.

Transmitancja zakłócenia układu otwartego

$$G_{0Z}(s) = \frac{\omega(s)}{M(s)} = -\frac{k_1}{T_0 s + 1}$$

Transmitancja operatorowa układu zamkniętego ma postać

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{\omega_{ref}(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K}{s(T_0 s + 1)(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1) + K}$$

Transmitancja uchybowa układu zamkniętego ma postać

$$G_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon_\omega(s)}{\omega_{ref}(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{s(T_0 s + 1)(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)}{s(T_0 s + 1)(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1) + K}$$

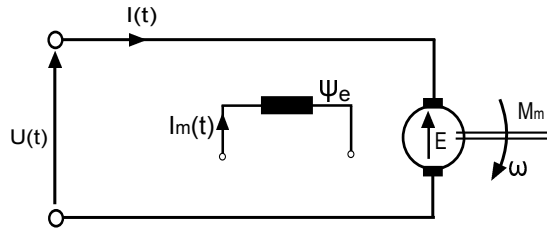
Transmitancja zakłócenia układu zamkniętego ma postać

$$G_Z(s) = \frac{\omega(s)}{M(s)} = \frac{G_{0Z}(s)}{1 + G_0(s)} = -\frac{k_1 s (T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)}{s(T_0 s + 1)(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1) + K}$$

5.3. Schemat zastępczy silnika obcowzbudnego prądu stałego

Układ połączeń uzwojeń silnika obcowzbudnego prądu stałego i najważniejsze zmienne stanu (ω , I) oraz sterujące (U , M_m) przedstawione są na rysunku 5.13. W analizie modelu przyjmuje się stałą wartość prądu wzbudzenia $I_m = const.$, oznacza to wcześniejsze załączenie zasilania obwodu wzbudzenia w celu pominięcia przebiegów przejściowych w tym obwodzie i prowadzi do spełnienia $\psi_e = const.$

Celem obliczeń jest określenie struktury schematu blokowego, w którym uwzględnia się warunki początkowe prądu twornika $I(0) = I_0$ i prędkości kątowej $\omega(0) = \omega_0$. Schemat taki jest użyteczny w badaniach symulacyjnych.



Rysunek 5.13. Schemat silnika obcowzbudnego

Pierwszym etapem wyznaczenia schematu blokowego jest przekształcenie *równania momentów* w standardowej postaci:

$$J\dot{\omega}(t) = M_e(t) - M_m(t) \quad (5.8)$$

i po uwzględnieniu wyrażenia określającego moment elektromagnetyczny silnika, tj. $M_e(t) = \psi_e I(t)$, uzyskuje się równanie różniczkowe:

$$\dot{\omega}(t) = \frac{\psi_e}{J} I(t) - \frac{1}{J} M_m(t) \quad (5.9)$$

Przekształcenie *równania elektromagnetycznego* w postaci:

$$U(t) = RI(t) + \psi_e \omega(t) + L\dot{I}(t) \quad (5.10)$$

gdzie siła elektromotoryczna (SEM) jest określona jako $E(t) = \psi_e \omega$, prowadzi do drugiego równania różniczkowego dynamiki silnika obcowzbudnego:

$$\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} I(t) - \frac{\psi_e}{L} \omega(t) + \frac{1}{L} U(t) \quad (5.11)$$

Równania (5.9) i (5.11) wykorzystuje się do zapisu w postaci równania stanu i równania wyjścia (macierzowy zapis liniowych równań różniczkowych):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^r \end{array} \right\} \quad (5.12)$$

gdzie A, B, C, D są macierzami stanu, sterowania, wyjścia i bezpośredniego sterowania.

Po przyjęciu wektora stanu, wartości początkowych oraz macierzy wyjść (C jest macierzą jednostkową, oznacza to, że obie zmienne stanu są mierzalne $y(t) = x(t) \in \mathbb{R}^2$):

$$x(t) = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ I(t) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} \omega(0) \\ I(0) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0 \quad (5.13)$$

i wykorzystaniu (5.9) i (5.11) równania, otrzymuje się równanie stanu (5.12) w następującej postaci:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \dot{I}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \psi_e N/J \\ -\psi_e N/L & -1/T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(t) \\ I(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/J & 0 \\ 0 & K_p/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_m(t) \\ U_s(t) \end{pmatrix} \quad (5.14a)$$

i równania wyjścia jako:

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.14b)$$

Model matematyczny (5.14) opisuje dwuwymiarowy system liniowy i musi być uzupełniony o wektor warunków początkowych $x(0)$. Innym podejściem jest zastosowanie transformaty Laplace'a do wyznaczenia transmitancji. Z uwagi na fakt, że model posiada 2 wejścia i 2 wyjścia to opisany jest czterema transmitancjami operatorowymi oraz dwoma sygnałami uzależnionymi od warunków początkowych.

Transmitancję układu w postaci macierzowej (macierz transmitancji) można wyznaczyć z zastosowaniem transformacji Laplace'a do równań (5.12). Takie podejście jest wykorzystywane w teorii sterowania i prowadzi do kolejnych przekształceń (przyjmuje się $D = 0$):

$$\begin{aligned} s x(s) - x(0) &= A x(s) + B u(s) \\ (sI - A) x(s) &= B u(s) + x(0) \\ x(s) &= (sI - A)^{-1} B u(s) + (sI - A)^{-1} x(0) \end{aligned}$$

i ostatecznie otrzymuje się:

$$y(s) = C(sI - A)^{-1} B u(s) + C(sI - A)^{-1} x(0) \quad (5.15)$$

Wyrażenie (5.15) jest ogólną postacią transmitancji, którą wyznacza się na podstawie równania stanu (5.12) i w przypadku modelu silnika konieczne jest podstawienie do (5.15) odpowiednich macierzy modelu (5.14). W wyrażeniu (5.15) wpływ warunków początkowych na transformaty Laplace'a zmiennych stanu silnika jest określony przez:

$$\begin{pmatrix} g_\omega(s) \\ g_I(s) \end{pmatrix} = C(sI - A)^{-1} x(0), \quad x_0 = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

Innym podejściem, które pozwala na śledzenie przemian energetycznych w silniku, jest wyznaczenie transformat Laplace'a równania elektromagnetycznego i równania momentów. W tym celu wygodnie jest wprowadzić stałą elektromagnetyczną T i stałą elektromechaniczną B :

$$T = \frac{L}{R}, \quad B = J \frac{R}{\psi_e^2}$$

Dla równania różniczkowego (5.10) w postaci (gdzie $E(t) = \psi_e \omega(t)$):

$$U(t) = E(t) + R I(t) + L \frac{dI}{dt}$$

po wyznaczeniu transformacji Laplace'a otrzymuje się:

$$U(s) = E(s) + L s I(s) - L I(0) + R I(s)$$

i przeprowadza się dalsze przekształcenia:

$$\begin{aligned} I(s)(Ls + R) &= U(s) - E(s) + L I_0 \\ I(s) &= \frac{U(s) - E(s)}{Ls + R} + \frac{L I(0)}{Ls + R} \end{aligned}$$

otrzymując ostatecznie transformatę Laplace'a prądu twornika

$$I(s) = \frac{U(s) - E(s)}{R(Ts + 1)} + \frac{T}{Ts + 1} I_0 \quad (5.16)$$

Drugim równaniem, które poddaje się transformacji Laplace'a jest (5.8):

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e(t) - M_m(t)$$

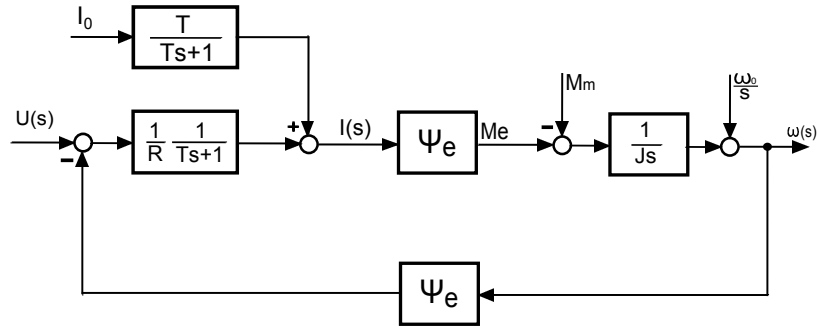
i otrzymuje się

$$Js\omega(s) - J\omega(0) = M_e(s) - M_m(s)$$

a po przekształceniu ostateczną postacią jest wyrażenie:

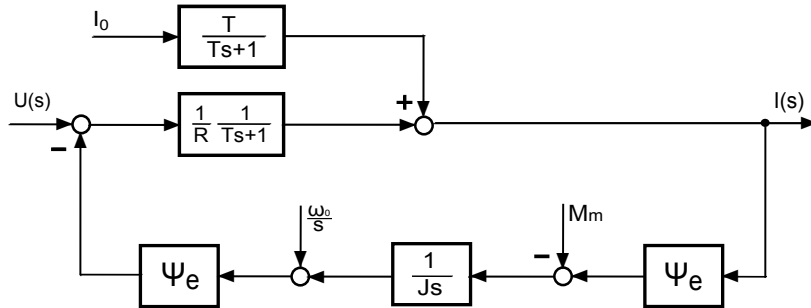
$$\omega(s) = \frac{M_e(s) - M_m(s)}{Js} + \frac{\omega(0)}{s} \quad (5.17)$$

Uwzględniając równania (5.16) i (5.17) wyznacza się schemat blokowy silnika obcowzbudnego prądu stałego w którym sygnałem wyjściowym jest prędkość kątowna ω , który jest przedstawiony na rysunku 5.14.



Rysunek 5.14. Schemat blokowy silnika, gdzie sygnałem wyjściowym jest ω

Schemat z rysunku 5.14 można przekształcić do postaci przedstawionej na rysunku 5.15.



Rysunek 5.15. Schemat blokowy silnika, gdzie sygnałem wyjściowym jest I

Na podstawie powyższych schematów blokowych lub macierzowych transmitancji (5.15) można zapisać zależności określające poszczególne zmienne stanu silnika:

$$\omega(s) = G_{\omega u}(s) U(s) - G_{\omega M}(s) M_m(s) + g_{\omega}(s) \quad (5.18)$$

oraz

$$I(s) = G_{Iu}(s) U(s) + G_{IM}(s) M_m(s) + g_I(s) \quad (5.19)$$

gdzie: $g_\omega(s)$ i $g_I(s)$ reprezentują wpływ warunków początkowych prądu I_0 i prędkości kątowej ω_0 na transformaty zmiennych stanu. Wówczas poszczególne transmitancje i transformaty Laplace'a przyjmują postać:

$$G_{\omega U}(s) \Big|_{M_m=0} = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{\psi_e}}{BTs^2 + Bs + 1} \quad (5.20a)$$

$$G_{\omega M}(s) \Big|_{U=0} = \frac{\omega(s)}{M_m(s)} = \frac{\frac{R}{\psi_e^2}(Ts + 1)}{BTs^2 + Bs + 1} \quad (5.20b)$$

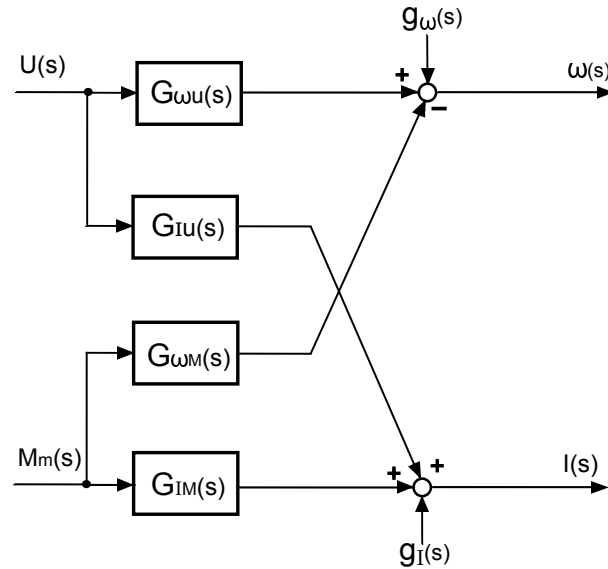
$$G_{IU}(s) \Big|_{M_m=0} = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{\frac{B}{R}s}{BTs^2 + Bs + 1} \quad (5.20c)$$

$$G_{IM}(s) \Big|_{U=0} = \frac{I(s)}{M_m(s)} = \frac{\frac{1}{\psi_e}}{BTs^2 + Bs + 1} \quad (5.20d)$$

$$g_\omega(s) = \frac{I_0 \frac{RT}{\psi_e} + \omega_0 B (Ts + 1)}{BTs^2 + Bs + 1} \quad (5.20e)$$

$$g_I(s) = \frac{I_0 BTs - \omega_0 \frac{\psi_e B}{R}}{BTs^2 + Bs + 1} \quad (5.20f)$$

Na rysunku 5.16 przedstawiona jest najbardziej ogólna postać modelu matematycznego silnika obcowzbudnego, w której wykorzystuje się zależności (5.20). Sygnałami wejściowymi jest tu napięcie twornika U oraz moment obciążenia M_m , a wielkościami wyjściowymi (które jednocześnie są transformatami Laplace'a zmiennych stanu) są prąd twornika I oraz prędkość kątowa wirnika ω .



Rysunek 5.16. Schemat blokowy silnika obcowzbudnego

Schemat przedstawiony na rysunku 5.16 może być wykorzystany w badaniach symulacyjnych jak i w analizie oraz syntezie układu regulacji. Znajomość poszczególnych transmitancji pozwala na szybkie określenie wpływu poszczególnych sygnałów wejściowych i wartości początkowych na prąd twornika i prędkość kątową wirnika.

$G_R(s)$ jest transmitancją regulatora prądu i najbardziej rozpowszechniony jest regulator PI, którego transmitancję przyjmuje się jako:

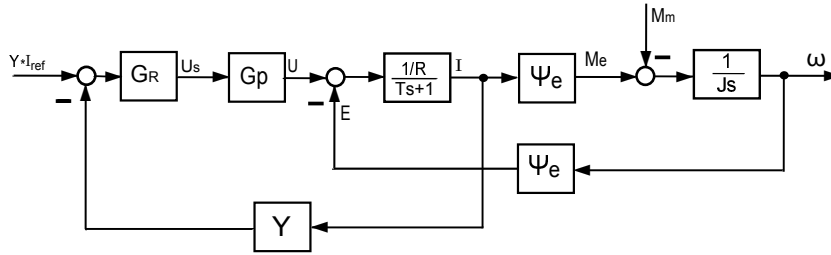
$$G_R = K_R \frac{T_R s + 1}{T_R s} = \frac{K_R T_R s + K_R}{T_R s} = \frac{ms + 1}{Vs}$$

$G_p(s)$ jest transmitancją układu zasilającego (najczęściej przekształtnik tyrystorowy), jego transmitancja wykorzystywana jest w optymalizacji parametrycznej regulatora i typowo przyjmuje się tu jeden z trzech modeli (element z opóźnieniem, inercyjny lub proporcjonalny)

$$G_p(s) = K_p e^{-\tau_o s} \approx \frac{K_p}{\tau_o s + 1} \approx K_p$$

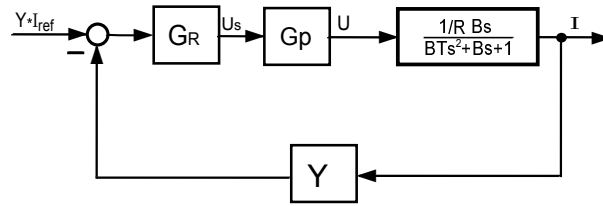
gdzie K_p jest wzmocnieniem przekształtnika, natomiast τ_o jest czasem opóźnienia (martwym) lub stałą czasową.

Y jest wzmocnieniem układu pomiaru prądu, pomija się tu dynamikę toru pomiarowego, zakładając, że przetwornik został dobrze dobrany tzn. częstotliwość zmian prądu jest znacznie mniejsza od pasma przepustowego przetwornika.



Rysunek 5.19. Regulacja prądu twornika silnika obcowzbudnego

Schemat blokowy z rysunku 5.19, przy założeniu $M_m = 0$ i wykorzystaniu transmitancji (5.20c) przekształca się do postaci przedstawionej na rysunku 5.20.



Rysunek 5.20. Regulacja prądu twornika silnika obcowzbudnego – uproszczony schemat

Transmitancja toru głównego dla inercyjnego modelu układu zasilającego i regulatora PI jest w postaci:

$$G_o(s) = \frac{\frac{mK_p B}{R}s + \frac{K_p B}{R}}{BTV\tau_o s^3 + (BV\tau_o + BVT)s^2 + (V\tau_o + BV)s + V} \quad (5.22)$$

Wówczas, na podstawie schematu układu regulacji (rys. 5.20) można wyznaczyć transmitancję układu zamkniętego i uzyskuje się:

$$G_z(s) = \frac{\frac{mK_p B}{R}s + \frac{K_p B}{R}}{BTV\tau_o s^3 + (BV\tau_o + BVT)s^2 + \left(V\tau_o + BV + \frac{YmK_p B}{R}\right)s + \left(V + \frac{YK_p B}{R}\right)} \quad (5.23)$$

Natomiast dla elementu opóźniającego, który jest modelem układu zasilającego, transmitancja toru głównego wynosi:

$$G_o(s) = \frac{(ms + 1)K_p e^{-\tau_o s} \frac{B}{R} s}{Vs(BTs^2 + Bs + 1)} = \frac{\frac{mK_p B}{R} e^{-\tau_o s} s + \frac{K_p B}{R} e^{-\tau_o s}}{BTVs^2 + BVs + V} \quad (5.24)$$

a transmitancja układu zamkniętego ma wówczas postać:

$$G_z(s) = \frac{\frac{mK_p B}{R} e^{-\tau_o s} s + \frac{K_p B}{R} e^{-\tau_o s}}{BTVs^2 + BVs + \frac{YmK_p B}{R} e^{-\tau_o s} s + \frac{YK_p B}{R} e^{-\tau_o s} + V} \quad (5.25)$$

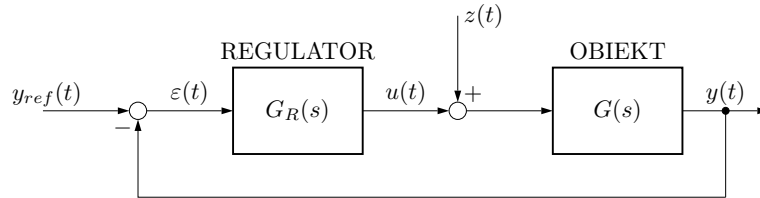
Mianownik transmitancji (5.25) zawiera wyraz opóźniający i nazywany jest *quasi-wielomianem charakterystycznym*. Badanie jego stabilności można przeprowadzić z zastosowaniem twierdzenia Michajłowa lub modyfikacji twierdzenia Hurwitza dla wielomianów o współczynnikach zespolonych.

Rozdział 6

Podstawy układów regulacji automatycznej

6.1. Zadania układu automatycznej regulacji

Na rysunku 6.1 przedstawiono schemat blokowy ciągłego układu automatycznej regulacji (UAR). Przedstawiony schemat jest przekształceniem rzeczywistego układu regulacji do najprostszej postaci m.in. wyeliminowano wzmacniacz mocy sterujący obiektem i wzmocnienie w torze sprzężenia zwrotnego (symbolizujące przetwornik pomiarowy).



Rysunek 6.1. Układ automatycznej regulacji (UAR)

Na rysunku 6.1 wprowadzono oznaczenia $y_{ref}(t)$ – wartość zadana (sygnał referencyjny), $\varepsilon(t)$ – uchyb regulacji, $u(t)$ – sterowanie wypracowane przez regulator, $y(t)$ – wyjście obiektu regulacji (procesu), $z(t)$ – zakłócenie.

Przedstawiony układ regulacji rozpatruje OBIEKT jako układ SISO (*Single Input Single Output*), czyli układ o jednym wejściu i jednym wyjściu:

$$G_0(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{L_0(s)}{M_0(s)} \quad (6.1)$$

Natomiast REGULATOR w takich układach jest zwykle opisywany przez transmitancję:

$$G_R(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{L_R(s)}{M_R(s)} \quad (6.2)$$

Najczęściej w układach przemysłowych wykorzystywane są standardowe postacie regulatorów: P, PI, PID.

Zadaniem regulatora jest wytworzenie sygnału sterującego u obiektem regulacji w sposób zapewniający jego pożądane zachowanie. W układach regulacji automatycznej wyróżnia się dwa zadania regulacji:

Nadążanie – uzyskanie jak najlepszego odwzorowania sygnału wejściowego y_{ref} na wyjściu UAR y , a zwłaszcza w stanie ustalonym:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ref}, \quad y_{ref} = const \quad (6.3)$$

czyli w dziedzinie operatorowej (dla wymuszenia skokowego) powinien zachodzić warunek:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s y_{ref}(s) G_t(s) = y_u, \quad G_t(s) = \frac{y(s)}{y_{ref}(s)} = \frac{G_r(s) G_0(s)}{1 + G_r(s) G_0(s)}, \quad y_{ref}(t) = y_u \mathbb{1}(t) \quad (6.4)$$

Stabilizacja – minimalizacja wpływu zakłócenia z na sygnał wyjściowy y , a szczególnie istotny jest stan ustalony układu, kiedy powinna zachodzić zależność

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \Big|_{z \neq 0} = 0, \quad y_{ref} = 0 \quad (6.5)$$

czyli w dziedzinie operatorowej (dla wymuszenia skokowego) powinien zachodzić warunek:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s z(s) G_d(s) = 0, \quad G_d(s) = \frac{y(s)}{z(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_r(s) G_0(s)}, \quad z(t) = z_u \mathbb{1}(t) \quad (6.6)$$

Obydwa powyższe zadania prowadzą do minimalizacji uchybu regulacji ε i generalizując, dla stanu ustalonego, powinien zachodzić warunek:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad y_{ref} \neq 0, z \neq 0 \quad (6.7)$$

Korzystając z powyższego warunku, zadania układu regulacji, można przedstawić jako ($s = j\omega$):

$$G_s(s) = \frac{1}{1 + G_r(s) G_0(s)} \rightarrow 0 \quad \forall \omega \quad \text{dla nadążania} \quad (6.8)$$

$$G_{d1}(s) = \frac{-G_0(s)}{1 + G_r(s) G_0(s)} \rightarrow 0 \quad \forall \omega \quad \text{dla stabilizacji} \quad (6.9)$$

Oznacza to, że transmitancje $G_s(s)$ i $G_{d1}(s)$ powinny być w postaci *elementów o działaniu różniczkującym*, to wtedy zostaną wykonane zadania (6.3) i (6.5).

Układy regulacji spełniające warunki (6.3) i (6.4) nazywane są *astatycznymi* ze względu na zadawanie, natomiast jeśli spełniają warunki (6.5) i (6.6) to mówi się o nich, że są *astatyczne* ze względu na zakłócenie.

W układach regulacji wyróżnia się również pojęcie **odporności**, które oznacza minimalizację wpływu zmian parametrów obiektu regulacji na jakość regulacji.

W analizie i syntezie odporności układów regulacji wprowadza się *funkcję wrażliwości*, która jest równa transmitancji $G_s(s)$ i zwykle jest oznaczana jako:

$$\lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta T / T}{\Delta P / P} = \frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = S, \quad T(s) = G_t(s), \quad P = G_0(s) \quad (6.10)$$

gdzie transmitancję T nazywa się *uzupełniającą funkcją wrażliwości*. Zależność (10.15) określa jak wrażliwa jest transmitancja układu zamkniętego T na zmiany transmitancji obiektu P .

6.2. Podział regulatorów

Regulatory spotykane w układach przemysłowych mogą być szeregowane wg rozmaitych kryteriów:

1. wg sposobu zasilania:

- nie pobierają energii z dodatkowego źródła zasilania, tzn. zasilane są energią sygnału, np. regulator odśrodkowy Watta,

- regulatory zasilane z pomocniczego źródła, np. regulatory elektryczne oparte o wzmacniacze operacyjne,
- 2. wg wykorzystywanej energii, np. regulatory elektryczne, mechaniczne, hydrauliczne, pneumatyczne,
- 3. wg funkcji: regulatory temperatury, przemieszczenia, prędkości, prądu, napięcia, poziomu, ciśnienia,
- 4. wg właściwości dynamicznych: P, PI, PD, PID,
- 5. wg przetwarzanych sygnałów: regulatory analogowe lub cyfrowe.

6.3. Konwencjonalne regulatory działania ciągłego

Najczęściej wykorzystywanymi przemysłowymi regulatorami są:

P – regulator proporcjonalny

$$G_R(s) = K_R \quad (6.11)$$

PI – regulator proporcjonalno-całkujący

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (6.12)$$

PD – regulator proporcjonalno-różniczkujący

$$G_R(s) = K_R (1 + T_d s) \quad (6.13)$$

PID – regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący

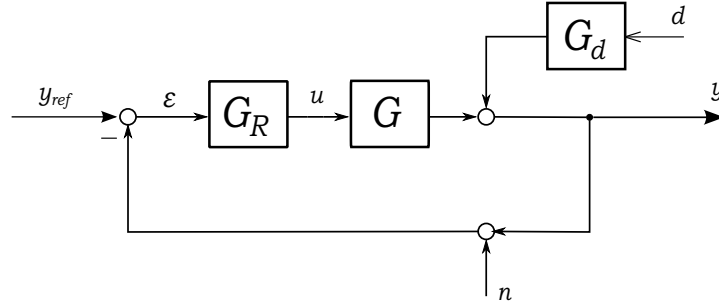
$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (6.14)$$

gdzie K_R jest współczynnikiem wzmocnienia, T_i jest czasem zdwojenia ($K_i = \frac{1}{T_i}$ jest współczynnikiem całkowania), T_d jest czasem wyprzedzenia.

Jak wiadomo w praktycznych rozwiązaniach nie ma elementów idealnych. Szczególnie jest to widoczne przy operacji różniczkowania. W regulatorach zawierających składową różniczkującą D o idealnej transmitancji $T_d s$ należy posłużyć się transmitancją elementu rzeczywistego $\frac{T_d s}{T_{df} s + 1}$. Należy przy tym pamiętać o spełnieniu warunku $T_d > T_{df}$.

6.4. Właściwości układów regulacji

Na rysunku 6.2 przedstawiona została uproszczona struktura układu regulacji (pominięty układ pomiarowy i wzmacniacz mocy), gdzie oprócz sygnału wyjściowego y , wartości zadanej y_{ref} , sterowania u i uchybu (błędu) regulacji ε , uwzględnione zostały również sygnały zakłócające, gdzie: d związany jest z pracą obiektu regulacji i w układach napędowych najczęściej jest to moment obciążenia oraz błędy identyfikacji i modelowania obiektu regulacji, n jest zakłóceniem pochodzącym od czujników pomiarowych i ma charakter szybkodzienny.



Rysunek 6.2. Schemat układu regulacji

Dla schematu zaprezentowanego na rysunku 6.2 można zapisać następujące wyrażenia, które określają sterowanie i sygnał wyjściowy:

$$\begin{aligned} u &= G_R(s) (y_{ref} - y - n) \\ y &= G(s) u + G_d(s) d \\ y &= G(s) G_R(s) (y_{ref} - y - n) + G_d(s) d \end{aligned}$$

czyli:

$$(I + G(s) G_R(s)) y = G(s) G_R(s) y_{ref} + G_d(s) d - G(s) G_R(s) n$$

gdzie I jest macierzą jednostkową i dla skalnych układów regulacji $I = 1$. Można zapisać wyrażenie na transformatę Laplace'a sygnału wyjściowego w postaci (pominięto operator s w transmitancjach):

$$y = \underbrace{(I + GG_R)^{-1} G G_R}_{T} \cdot y_{ref} + \underbrace{(I + GG_R)^{-1} G_d}_{S} \cdot d - \underbrace{(I + GG_R)^{-1} G G_R}_{T} \cdot y_{ref} \quad (6.15)$$

Oznaczenia: $L = G_o$ – transmitancja układu otwartego ($L = \frac{y(s)}{\varepsilon(s)}$), $S = G_\varepsilon$ – funkcja wrażliwości, $T = G_z$ – uzupełniająca funkcja wrażliwości lub transmitancja układu zamkniętego.

Dla układu zamkniętego można zapisać zależność na błąd regulacji:

$$\varepsilon = -(I + L)^{-1} \cdot y_{ref} + (I + L)^{-1} G_d \cdot d - (I + L)^{-1} L \cdot n$$

W uzyskaniu „doskonałego sterowania” konieczne jest spełnienie $\varepsilon = y - y_{ref} = 0$ co prowadzi do:

$$\varepsilon \approx 0 \cdot y_{ref} + 0 \cdot d + 0 \cdot n$$

Gdzie pierwsze 0 oznacza doskonałe śledzenie sygnału zadanego, drugie 0 eliminację zakłócenia, a ostatnie eliminację szumu pomiarowego. Podejście takie prowadzi do następujących wniosków:

$S \approx 0 \Rightarrow T \approx I \Rightarrow \frac{1}{1+L} \approx 0 \Rightarrow L$ powinno mieć jak największe wartości (**duże wzmocnienie**).

$T \approx 0 \Rightarrow S \approx I \Rightarrow \frac{L}{1+L} \approx 0 \Rightarrow L$ powinno mieć jak najmniejsze wartości (**małe wzmocnienie**).

Powyższe założenia wyglądają na wzajemnie wykluczające się, ale należy je rozpatrywać dla różnych zakresów częstotliwości:

1. $|L| > 1$ dla niskich częstotliwości,
2. $|L| < 1$ dla wysokich częstotliwości.

Rozdział 7

Algebraiczne kryteria stabilności

Badanie stabilności układów dynamicznych oznacza **jakościowe** (bez rozwiązywania) oszacowanie rozwiązania równań różniczkowych opisujących dane zjawisko. Rozwiązanie równań różniczkowych (podejście **ilościowe**) jest zwykle czasochłonne, a w przypadku równań nieliniowych często jest zadaniem niemożliwym do wykonania. Z powyższego powodu pominięcie tak trudnego zadania jest wskazane i stosuje się tu odpowiednie twierdzenia, które nazywane są **kryteriami stabilności**.

Uniwersalnym podejściem są metody Aleksandra Lapunowa omówione w jego rozprawie doktorskiej z 1892r. Wadą tych metod jest nadal dość duża komplikacja i dlatego w praktyce stosuje się twierdzenia dla szczególnych przypadków. Kryteria stabilności dzieli ze względu na opis matematyczny układu dynamicznego:

- kryteria dla układów liniowych, opracowane przez:
 - Charles Hermite 1852r., M. Biehler 1879r.
 - **James Clarke Maxwell 1868r.**
 - Iwan Wyszniegradski 1876r.
 - Edward John Routh 1877r.
 - Adolf Hurwitz 1895r.
 - A. Lienard, A. Chipart 1914r.
 - Harry Nyquist 1932r.
 - A. Michajłow 1938r.
 - Hendrik Bode 1944r.
 - Władimir Charitonow 1978r.
- kryteria dla układów nieliniowych:
 - Aleksander Lapunow 1892r.
 - Lurie, Ajzerman 1944r.
 - Vasile Mihai Popov 1958r.
 - LaSalle 1961r.
 - Jacek Kudrewicz 1964r.
 - George Zames 1966r.

Z problemem badania stabilności wiąże się również powstanie nowej nauki, dlatego nazwisko Maxwell i rok 1868 zostało wytłuszczone.

7.1. Narodziny Automatyki

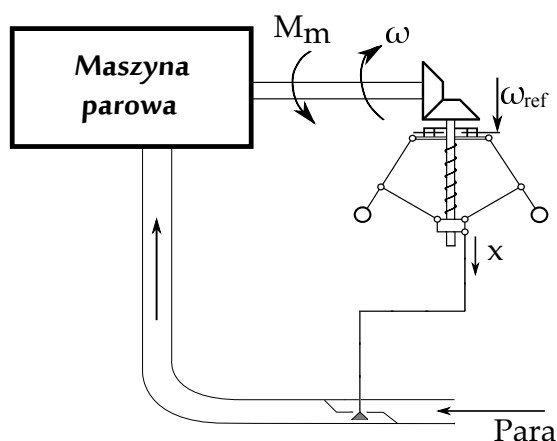
Prace dotyczące badania stabilności zostały poprzedzone przez dwa wydarzenia:

- James Watt opracowuje w 1788r. i wdraża w 1789r. regulator (miernik) odśrodkowy – **governor** (gubernator).
- Joseph Louis de Lagrange w *Mécanique Analytique* w 1788r napisał: „Metody, które tu przedstawiłem, nie wymagają ani konstrukcji, ani rozumowania natury geometrycznej lub mechanicznej, lecz tylko operacji algebraicznych postępujących zgodnie z ustalonym i jednolitym planem. Ci,

którzy kochają analizę matematyczną, z przyjemnością przyjmą fakt, że mechanika stała się jej gałęzią i będą mi wdzięczni za takie rozszerzenie zasięgu analizy”.

Rozwój maszyn parowych i możliwość określania skomplikowanych modeli matematycznych układów rzeczywistych prowadzą w dalszej kolejności do zapewnienia stabilności pracy pierwszych układów przemysłowych.

Na rysunku 7.1 w sposób poglądowy przedstawiona została maszyna parowa wraz z regulatorem odśrodkowym Watta, nazywana *Watt Governor System*.



Rysunek 7.1. Maszyna parowa

W modelu matematycznym maszyny parowej przyjmuje się następujące oznaczenia:

c – przełożenie,

B – wsp. tarcia,

J – moment bezwładności,

M_m – moment obciążenia,

μ – współczynnik.

$$\varepsilon = \frac{B}{m} \sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$\gamma = \frac{cl\mu}{gj},$$

$$\beta = \frac{M_m}{\mu}.$$

Model matematyczny maszyny parowej z regulatorem Watta jest **nieliniowy** i zapisuje się go w postaci:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \nu \\ \frac{d\nu}{dt} = c\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{B}{m} \nu \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} (\mu \cos \alpha - M_m) \end{cases} \quad (7.1)$$

Następnie dokonuje się linearyzacji w punkcie pracy i przy założonym M_m prowadzi do wielomianu charakterystycznego:

$$M(s) = s^3 + \varepsilon s^2 + \frac{1 - \beta^2}{\beta} s + 2\gamma\beta^{\frac{3}{2}} \frac{1 - \beta^2}{\beta} \quad (7.2)$$

Maxwell formułuje swoje twierdzenie: jeśli $\varepsilon > 2\gamma\beta^{\frac{3}{2}}$ to punkt równowagi jest globalnie asymptotycznie stabilny.

W pracy *On Governors*, James Clarke Maxwell podał warunki asymptotycznej stabilności wielomianu charakterystycznego 3. stopnia, czyli mianownika transmitancji zlinearyzowanego modelu matematycznego maszyny parowej:

$$M(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (7.3)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności jest:

$$a_i > 0, i = 0 \dots 3 \quad \text{oraz} \quad a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0 \quad (7.4)$$

Stąd rok **1868** uznaje się za początek dziedziny zwanej **AUTOMATYKĄ** i odkrywca praw elektromagnetyzmu został jej ojcem.

Badaniami nad stabilnością układów 3. rzędu zajmował się również Iwan Wyszniegradski i jego metoda opublikowana w 1876r. została przedstawiona w dodatku B.

Należy pamiętać, że istniały metody „pre-maxwellowskie” i należy do nich twierdzenie Hermite’a z 1852r., które zostało uzupełnione przez Biehlera w 1879r. Pozwala ono badać wielomiany o współczynnikach zespolonych, a więc jest rozszerzeniem typowych akademickich metod i może być zastosowane w badaniu względnej stabilności, tzn. przynależności zer wielomianu do ograniczonego obszaru.

W twierdzeniu tym wykorzystuję się właściwość przeplatania wielomianów (Bhattacharyya, Chappellat & Keel 1995, Białas 2002).

Definicja 7.1. Dwa wielomiany:

$$\begin{aligned} P_e(\omega) &= (\omega - \omega_{e1})(\omega - \omega_{e2}) \dots (\omega - \omega_{em}) \\ P_o(\omega) &= (\omega - \omega_{o1})(\omega - \omega_{o2}) \dots (\omega - \omega_{om}) \end{aligned} \quad (7.5)$$

tworzą dodatnią parę (przeplatają się ich pierwiastki) jeśli wszystkie miejsca zerowe tych wielomianów są rzeczywiste oraz

$$\begin{aligned} \text{dla } p = m - 1 \quad & 0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} < \dots < \omega_{em} \\ \text{dla } p = m \quad & 0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} < \dots < \omega_{om} \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.1. (Twierdzenie Hermite’a-Biehlera dla wielomianów zespolonych) Niech

$$P(s) = (a_0 + jb_0) + (a_1 + jb_1)s + \dots + (a_n + jb_n)s^n = P^r(\omega) + jP^i(\omega) \quad (7.6)$$

będzie wielomianem zespolonym, gdzie

$$\begin{aligned} P^r(\omega) &= a_0 - b_1\omega - a_2\omega^2 + b_3\omega^2 + \dots \\ P^i(\omega) &= b_0 + a_1\omega - b_2\omega^2 - a_3\omega^3 + \dots \end{aligned} \quad (7.7)$$

to wielomian $P(s)$ będzie hurwitzowski wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. $a_n a_{n-1} + b_n b_{n-1} > 0$ – jest to suma pierwiastków pomnożona przez -1 (część rzeczywista).
2. Zera wielomianów $P^r(\omega)$ i $P^i(\omega)$ są pojedyncze i przeplatają się dla zmian ω od $-\infty$ do $+\infty$.

7.2. Podstawy teoretyczne

W badaniu stabilności liniowych układów dynamicznych wykorzystuje się równanie stanu w postaci (gdzie x jest wektorem stanu, a u sterowaniem):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{7.8a}$$

sterowanie u nie ma wpływu na stabilność układu (7.8a) i z tego powodu często wprowadza się pojęcie *układu autonomicznego* (na działanie którego ma jedynie wpływ warunek początkowy x_0):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{7.8b}$$

W kompletnym opisie matematycznym obiektu dynamicznego równanie (7.8b) uzupełnia się przez równanie wyjścia w postaci:

$$y = Cx + Du\tag{7.8c}$$

Równania (7.8) można zapisać w postaci transmitancji:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad M(s) = \det(sI - A)\tag{7.9}$$

W przypadku układów liniowych definiuje się *widmo macierzy* $\sigma(A)$ czyli wartości własne macierzy A lub pierwiastki wielomianu $M(s)$:

$$\sigma(A) = \det(sI - A) = M(s) = 0\tag{7.10}$$

Równanie (7.10) nazywane jest *równaniem charakterystycznym*.

Dla transmitancji (7.9) pierwiastki mianownika nazywane są *biegunami transmitancji*.

W przypadku układów liniowych badanie stabilności sprowadza się do określenia położenia pierwiastków równania (7.10). Dla modelu transmitancyjnego mogą wystąpić uproszczenia pierwiastków licznika i mianownika, należy pamiętać, że **nie wolno upraszczać licznika i mianownika transmitancji**.

Definicja 7.2. Stabilność. Jeśli układ dynamiczny zostanie poddany ograniczonemu wymuszeniu $u(t)$ i jego odpowiedź $y(t)$ (sygnał wyjściowy) będzie również ograniczona, to układ nazywamy stabilnym.

Rozważając stabilność układu autonomicznego (7.8b) wg powyższej definicji przyjmuje się $u = 0$, czyli sterowanie jest ograniczone i można definicję 7.2 zapisać jako:

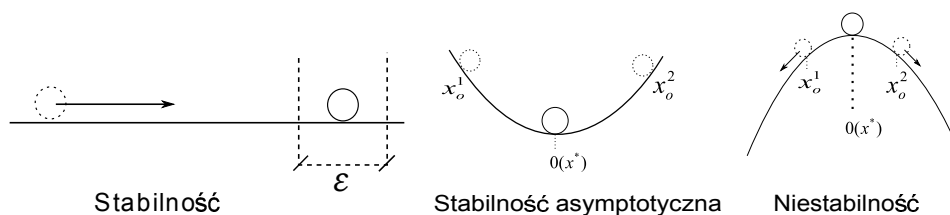
Definicja 7.3. Stabilność. Liniowy układ autonomiczny $\dot{x} = Ax$ nazywa się stabilnym jeżeli dla wszystkich stanów początkowych x_0 wektor stanu pozostaje ograniczony.

Definicja 7.4. Asymptotyczna stabilność. Jeżeli po ustaniu wymuszenia, jakiemu był poddawany układ dynamiczny, stan systemu (również sygnał wyjściowy) dąży do punktu równowagi (zera) to układ nazywamy asymptotycznie stabilnym.

Definicja 7.5. Niestabilność. Jeżeli nie jest spełniona żadna z powyższych definicji to układ nazywamy niestabilnym.

Na rysunku 7.2 przedstawiona została najprostsza interpretacja powyższych definicji, gdzie x_0^1 i x_0^2 są warunkami początkowymi, natomiast $0(x^*)$ jest stanem (punktem) równowagi. W przypadku rysunku określającego niestabilność można powiedzieć o *niestabilnym punkcie równowagi*.

Badanie stabilności bądź asymptotycznej stabilności układu liniowego przeprowadza się poprzez określenie położenia wartości własnych macierzy A lub biegunów transmitancji $G(s)$:



Rysunek 7.2. Interpretacja podstawowych definicji

- jeśli wartości własne liniowego układu dynamicznego leżą w lewej domkniętej półpłaszczyźnie i wartości własne na osi urojonych mają liniowe dzielniki elementarne to układ jest **stabilny**

$$\operatorname{Re}[\sigma(A)] \leq 0 \quad (7.11)$$

- jeśli wartości własne liniowego układu dynamicznego leżą w lewej otwartej półpłaszczyźnie to układ jest **asymptotycznie stabilny**

$$\operatorname{Re}[\sigma(A)] < 0 \quad (7.12)$$

- jeśli chociaż jedna wartość własna liniowego układu dynamicznego leży w prawej otwartej półpłaszczyźnie to układ jest **niestabilny**

$$\operatorname{Re}[\sigma(A)] > 0 \quad (7.13)$$

Przykład 36. Z badać stabilność układu dynamicznego $G(s) = \frac{s-1}{s^2(3s+1)}$.

Pierwiastkami mianownika (wartościami własnymi) są: podwójny pierwiastek $s_{1,2} = 0$ oraz $s_3 = -\frac{1}{3}$. Oznacza to, że pierwiastek s_3 leży w lewej półpłaszczyźnie, a pierwiastki $s_{1,2}$ leżą na osi urojonych, czyli spełniony jest warunek (7.11) – układ stabilny.

Przykład 37. Z badać stabilność układu dynamicznego $G(s) = \frac{21}{(s+1)(3s+1)}$.

Oba pierwiastki mianownika leżą w lewej otwartej półpłaszczyźnie czyli spełniony jest warunek (7.12) – układ asymptotycznie stabilny.

Przykład 38. Z badać stabilność układu dynamicznego $G(s) = \frac{21}{(s-1)(3s+1)}$.

Jeden pierwiastek jest dodatni, a drugi ujemny, czyli spełniony jest warunek (7.13) – układ niestabilny.

7.3. Kryteria stabilności

Kryteria algebraiczne pozwalają określić asymptotyczną stabilność (przynależność wartości własnych do lewej otwartej półpłaszczyzny) systemu dynamicznego na podstawie równania charakterystycznego.

Najczęściej przyjmuje się, że $P(s)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych (przyjmuje się $a_i > 0$) w postaci:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (7.14)$$

Warunkiem koniecznym (ale niewystarczającym) stabilności wielomianu $P(s)$ jest identyczny znak wszystkich współczynników a_i .

Twierdzenie Routha z 1877 roku (Dorf & Bishop 2008, Kaczorek 1974, Pełczewski 1980, Grabowski 2011) pozwala stwierdzić asymptotyczną stabilność, a w przypadku niestabilności wielomianu określa liczbę pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie.

Twierdzenie 7.2. (Kryterium Routha) *Wielomian $P(s)$ jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy tablica Routha posiada dokładnie $n + 1$ wierszy i wszystkie są tego samego znaku.*

Tablica Routha jest w postaci:

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

gdzie poszczególne elementy wyznacza się jako:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-1}{a_{n-1}} \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix}, & b_2 &= \frac{-1}{a_{n-1}} \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{pmatrix}, & \cdots \\ c_1 &= \frac{-1}{b_1} \det \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, & c_2 &= \frac{-1}{b_1} \det \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}, & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \cdots \end{aligned}$$

Jeśli wielomian nie spełnia twierdzenia 7.2, ale istnieje $n + 1$ wierszy to ilość zmian znaku elementów w pierwszej kolumnie jest równa ilości pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie.

Jeśli nie można utworzyć tabeli Routha, to wielomian jest niestabilny, ale nic nie można powiedzieć o pierwiastkach leżących w prawej półpłaszczyźnie. Wówczas można wykorzystać inwersję w postaci $z = \frac{1}{s}$, która nie zmienia przynależności do prawej półpłaszczyzny (Grabowski 2011).

Twierdzenie Hurwitza [z 1895 roku] (Białas 2002, Grabowski 2011, Kaczorek 1974, Mitkowski 1991, Ogata 1997, Pełczewski 1980) również bada stabilność wielomianu (7.14) i wykorzystuje się w nim wyznaczniki Hurwitza $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, które są minorami głównymi macierzy Hurwitza o wymiarach $n \times n$:

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

Twierdzenie 7.3. (Kryterium Hurwitza) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności wielomianu $P(s)$ jest dodatnia określoność współczynników a_i oraz wyznaczników Hurwitza.*

Wielomian, który spełnia kryterium Hurwitza jest nazywany wielomianem hurwitzowskim.

Zaletą twierdzenia Hurwitza jest możliwość wyznaczenia macierzy Hurwitza dla dowolnych współczynników wielomianu. Wadą tego kryterium jest brak informacji ile pierwiastków znajduje się w prawej otwartej półpłaszczyźnie.

Równoważność twierdzeń 7.2 i 7.3 została przedstawiona m.in. w (Ogata 1997).

Kryterium Liénard-Chipart bazuje na twierdzeniu Hurwitza i ogranicza ilość obliczeń konieczną do stwierdzenia stabilności wielomianu $P(s)$ (Anderson 1972, Anderson 1976, Ackermann & Blue 2002, Grabowski 2011).

Twierdzenie 7.4. (Kryterium Liénarda-Chiparta) Wielomian $P(s)$ jest hurwitzowski wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_i > 0$ i

$$\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0, \dots, \Delta_1 > 0 \text{ lub } \Delta_0 > 0 \quad (7.16)$$

7.4. Przykłady obliczeniowe

Przykład 39. Zbadać stabilność wielomianu:

$$M(s) = 2s^3 + 5s^2 + 2s + 9$$

Wówczas macierz Hurwitza ma postać

$$H = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia Liénarda-Chiparta bada się stabilność wielomianu. W tym celu wyznacza się co drugi minor

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8 \Rightarrow \Delta_2 < 0$$

Wielomian jest niestabilny, oznacza to, że w prawej półpłaszczyźnie będzie znajdował się przynajmniej jeden pierwiastek.

W celu wyznaczenia liczby pierwiastków znajdujących się w prawej półpłaszczyźnie można wykorzystać twierdzenie Routha, wówczas wyznacza się tablicę w następującej postaci

$$\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 5 & 9 \\ -1,6 & 0 \\ 9 & 0 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{-1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -1.6$$

$$b_2 = 0$$

$$c_1 = \frac{-1}{-1.6} \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 1.6 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

Ten wielomian jest niestabilny, w prawej półpłaszczyźnie ma 2 pierwiastki.

Przykład 40. Zbadać stabilność wielomianu [Grabowski [www](#)] $M(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 1$
Macierz Hurwitza ma postać:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia Liénarda-Chiparta wyznacza się co drugi minor:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 4 = -1$$

Układ jest **niestabilny**, ponieważ jeden z minorów wiodących nie spełnia założeń dla układu stabilnego tzn. $\Delta_i > 0$.

Aby zbadać ile pierwiastków leży w prawej półpłaszczyźnie należy wykorzystać twierdzenie Routha i w przypadku wielomianu 4. stopnia tablica powinna posiadać 5 wierszy:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & \\ d_1 & & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$b_2 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Z obliczeń wynika, że element C_1 nie istnieje, ponieważ $b_1 = 0$. Z tego powodu nie można wyznaczyć tabeli Routha o 5 wierszach. Oznacza to, że przy pomocy bezpośredniego podejścia nie można określić liczby pierwiastków wielomianu, które leżą w prawej półpłaszczyźnie. W takim przypadku warto wykorzystać inwersję $z = \frac{1}{s}$, która nie zmienia przynależności pierwiastków do prawej półpłaszczyzny otwartej. Oznacza to, że wielomian $M_1(z) = z^n M(\frac{1}{z})$ ma tą samą liczbę pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie.

$$M_1(z) = z^4 \left[\left(\frac{1}{z}\right)^4 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{z}\right)^1 + 1 \right] = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1$$

Tablica Routha:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & \\ d_1 & & \end{array}$$

i kolejne elementy

$$b_1 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$b_2 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$c_2 = \frac{-1}{\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

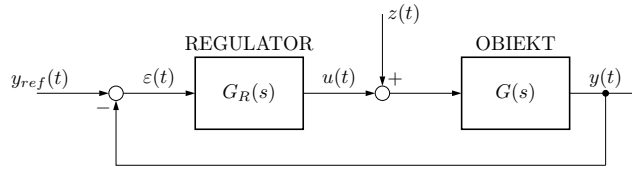
$$d_1 = \frac{-1}{-\frac{1}{3}} \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right| = 1$$

W obliczonej tablicy występują dwie zmiany znaku

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \\ \frac{1}{3} & & 1 \end{array}$$

więc $M(s)$ posiada 2 pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie.

Przykład 41. Na rysunku 7.3 przedstawiono jednopętlowy układ regulacji i należy wyznaczyć **obszar stabilności** parametru K_R (zakres parametrów K_R regulatora, dla którego zamknięty układ regulacji jest stabilny). Obiektem regulacji jest tu element inercyjny 1. rzędu $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$, a regulator jest proporcjonalny $G_R(s) = K_R$.



Rysunek 7.3. Schemat blokowy jednopętlowego układu regulacji

Należy wyznaczyć zakres parametrów K_R regulatora, dla którego zamknięty układ regulacji jest stabilny

$$G_z(s) = \frac{K_R K}{Ts + (K_R K + 1)}, \quad K > 0, T > 0$$

-warunek konieczny: $T > 0, K_R K + 1 > 0 \Rightarrow K_R > -\frac{1}{K}$.

-warunek wystarczający: nie ma potrzeby sprawdzać, ponieważ transmitancja jest 1. rzędu.

Przykład 42. Dla obiektu inercyjnego 1. rzędu z regulatorem całkującym $G_R(s) = \frac{K_i}{s}$. Należy wyznaczyć zakres parametru K_i regulatora, dla którego zamknięty układ regulacji (rys. 7.3) jest stabilny

$$G_z(s) = \frac{K_i}{Ts^2 + s + K_i}, \quad T > 0$$

-warunek konieczny stabilności wielomianu $M(s) = Ts^2 + s + K_i$

$$T > 0, 1 > 0, K_i > 0$$

-warunek wystarczający: nie ma potrzeby sprawdzać, ponieważ mianownik jest 2. stopnia.

Przykład 43. Dla obiektu inercyjnego 2. rzędu o transmitancji $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ z regulatorem I:

$G_R(s) = \frac{K_i}{s}$. Należy wyznaczyć obszar stabilności parametru K_i dla zamkniętego układu regulacji (rys. 7.3)

$$G_0(s) = \frac{K_i}{s(s+1)(s+1)} = \frac{K_i}{s^3 + 2s^2 + s}$$

$$G_Z(s) = \frac{K_i}{s^3 + 2s^2 + s + K_i}$$

-Warunek konieczny stabilności wielomianu $M(s) = s^3 + 2s^2 + s + K_i$:

$$K_i > 0$$

-Warunek wystarczający (macierz Hurwitza):

$$H = \begin{bmatrix} 2 & K_i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & K_i \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia Liénarda-Chiparta wyznacza się:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & K_i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - K_i > 0 \Rightarrow K_i < 2$$

Przykład 44. Dla obiektu inercyjnego 2. rzędu o transmitancji $G(s) = \frac{1}{(4s+1)^2}$ z regulatorem I:

$G_R(s) = \frac{K_i}{s}$. Należy wyznaczyć obszar stabilności parametru K_i dla zamkniętego układu regulacji (rys. 7.3):

$$G_0(s) = \frac{K_i}{s(4s+1)^2} = \frac{K_i}{s(16s^2 + 8s + 1)} = \frac{K_i}{16s^3 + 8s^2 + s}$$

$$G_Z(s) = \frac{K_i}{16s^3 + 8s^2 + s + K_i}$$

-Warunek konieczny stabilności wielomianu $M(s) = 16s^3 + 8s^2 + s + K_i$:

$$K_i > 0$$

-Warunek wystarczający (macierz Hurwitza):

$$H = \begin{bmatrix} 8 & K_i & 0 \\ 16 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & K_i \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia Liénarda-Chiparta wyznacza się:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & K_i \\ 16 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 16K_i > 0 \Rightarrow K_i < 0.5$$

Przykład 45. Dla obiektu całkująco-inercyjnego o transmitancji $G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$ z regulatorem I:

$G_R(s) = \frac{K_i}{s}$. Należy wyznaczyć obszar stabilności parametru K_i dla zamkniętego układu regulacji (rys. 7.3):

$$G_0(s) = \frac{K_i}{s^2(Ts+1)}$$

$$G_Z(s) = \frac{K_i}{Ts^3 + s^2 + K_i}$$

-Nie jest spełniony warunek konieczny, brak współczynnika przy s^1 w mianowniku transmitancji $G_Z(s)$ - **Układ zamknięty jest niestabilny.**

Przykład 46. Dla obiektu 2. rzędu o transmitancji $G(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + 1}$ z regulatorem PI: $G_R(s) = \frac{K_R s + K_i}{s}$. Należy wyznaczyć obszar stabilności parametrów K_R, K_i dla zamkniętego układu regulacji (rys. 7.3)

$$G_0(s) = \frac{KK_R s + KK_i}{Ts^3 + s^2 + s}$$

$$G_z(s) = \frac{KK_R s + KK_i}{Ts^3 + s^2 + (KK_R + 1)s + KK_i}$$

-Warunek konieczny: $T > 0, KK_R + 1 > 0 \Rightarrow K_R > -\frac{1}{K}, KK_i > 0 \Rightarrow K_i > 0$

-Warunek wystarczający :

Wyznacza się macierz Hurwitza:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & KK_i & 0 \\ T & KK_R + 1 & 0 \\ 0 & 1 & KK_i \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia Liénarda-Chiparta :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & KK_i \\ T & KK_R + 1 \end{vmatrix} = KK_R + 1 - T KK_i > 0$$

czyli

$$\Delta_2 > 0 \Rightarrow K_i < \frac{K}{TK} K_R + \frac{1}{TK} \Rightarrow K_i < \frac{K_R}{T} + \frac{1}{TK}$$

Przykład 47. Obszar stabilności w przestrzeni parametrów regulatora PI $G_R(s) = \frac{K_R s + K_i}{s}$ oraz obiektu regulacji o transmitancji $G(s) = \frac{As + B}{Ds^2 + Es + F}$, przy założeniu $D > 0$. Uzyskuje się tu transmitancję układu zamkniętego:

$$G_c(s) = \frac{K_R As^2 + (K_R B + K_i A)s + K_i B}{\underbrace{D}_{a_3} s^3 + \underbrace{(E + K_R A)}_{a_2} s^2 + \underbrace{(F + K_R B + K_i A)}_{a_1} s + \underbrace{K_i B}_{a_0}} \quad (7.17)$$

i z warunku koniecznego stabilności dla mianownika (7.17) wynikają następujące ograniczenia

1. $D > 0$ jest założeniem dotyczącym parametru transmitancji obiektu regulacji,
2. $K_R > -\frac{E}{A}$,
3. $K_i > -\frac{B}{A} K_R - \frac{F}{A}$,
4. $K_i > 0$,

natomiast z warunku koniecznego (kryterium Liénarda-Chiparta) należy wyznaczyć macierz Hurwitza

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

i obliczyć minor

$$\Delta_2 = a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0 \implies (E + K_R A)(F + K_R B + K_i A) - K_i B D > 0$$

co prowadzi ostatecznie do ograniczenia

$$K_i > -\frac{K_R^2 AB + K_R(BE + AF) + EF}{EA + K_R A^2 - BD}$$

Rozdział 8

Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista należy do grupy częstotliwościowych kryteriów stabilności i pozwala określić stabilność układu zamkniętego na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego.

Z wykorzystaniem twierdzenia Nyquista bada się transmitancję układu otwartego:

$$G(s) = \frac{L(s)}{s^k M(s)} \quad (8.1)$$

i na podstawie **plotu** (charakterystyki amplitudowo-fazowej uzupełnionej o tor na ∞) wnioskuje się o stabilności układu zamkniętego:

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{L(s)}{L(s) + s^k M(s)} \quad (8.2)$$

gdzie k jest rzędem astatyzmu.

W twierdzeniu Nyquista wykorzystuje się częstotliwościowe charakterystyki amplitudowo-fazowe

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi\omega}$$

lub w postaci logarytmicznej we współrzędnych biegunowych $20 \log[A(\omega)]e^{j\varphi\omega}$ (Andresen 2001). Takie podejście jest szczególnie cenne w przypadku układów astatycznych, których charakterystyki w otoczeniu $\omega = 0$ dążą do nieskończoności i trudno jest zaobserwować zmiany funkcji w otoczeniu punktu krytycznego $(-1, j0)$.

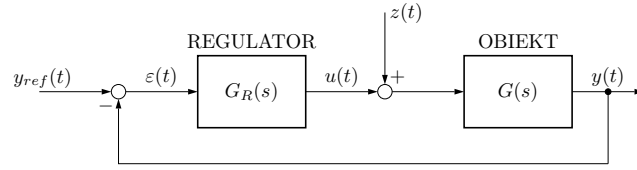
Przed zastosowaniem kryterium należy sprawdzić liczbę m pierwiastków wielomianu $M(s)$ w prawej półpłaszczyźnie i do tego celu można z powodzeniem wykorzystać *tablicę Routha*.

Definicja 8.1. (Plotem Nyquista) (Grabowski 2011) jest krzywa złożona z częstotliwościowej charakterystyki amplitudowo-fazowej uzupełnionej torem na $\{\infty\}$. Tor ten wyznacza się łącząc w nieskończoności punkty charakterystyki $G(j\omega)$ dla $\omega = 0^-$ i $\omega = 0^+$ i zmieniając kąt o $k\pi$.

Twierdzenie 8.1. (Nyquista) Warunkiem koniecznym i wystarczającym asymptotycznej stabilności układu zamkniętego jest, aby:

1. plot Nyquista układu otwartego nie przechodził przez punkt $(-1, j0)$.
2. plot Nyquista przy zmianie pulsacji $\omega \in (-\infty, +\infty)$ okrążył punkt $(-1, j0)$ m razy w kierunku matematycznie dodatnim.

Kryterium Nyquista pozwala na badanie stabilności zamkniętych układów regulacji, których struktura jest przedstawiona na rysunku 8.1.



Rysunek 8.1. Schemat blokowy jednopętlowego układu regulacji

8.1. Stabilność zamkniętych układów regulacji

Przykład 48. Dla transmitancji stabilnego układu otwartego ($K > 0$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$)

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

należy zbadać stabilność zamkniętego układu regulacji w zależności od parametrów K, T_1, T_2 .

W schemacie blokowym (rys. 8.1) transmitancja $G(s) = 1$. Wówczas transmitancja widmowa układu otwartego jest równa:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{-T_1 T_2 \omega^2 + (T_1 + T_2)j\omega + 1} = \frac{K}{-T_1 T_2 \omega^2 + (T_1 + T_2)j\omega + 1} \cdot \frac{-T_1 T_2 \omega^2 - (T_1 + T_2)j\omega + 1}{-T_1 T_2 \omega^2 - (T_1 + T_2)j\omega + 1} = \\ &= \underbrace{\frac{K(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \omega^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-K(T_1 + T_2)\omega}{(1 - T_1 T_2 \omega^2)^2 + (T_1 + T_2)^2 \omega^2}}_{Q(\omega)} \end{aligned}$$

Następnie wyznacza się wartości funkcji $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dla pulsacji $\omega = 0$ oraz $\omega = +\infty$:

$$P(0) = K, Q(0) = 0, P(\infty) = 0, Q(\infty) = 0$$

i wpisuje uzyskane wyniki do odpowiednich kolumn tabeli 8.1. W dalszej kolejności, w celu określenia przebiegu charakterystyki, należy wyznaczyć pulsacje ω_i , $i = 1, 2, \dots$, dla których funkcje $P(\omega) = 0$ lub $Q(\omega) = 0$. W rozważanym przypadku widać, że tylko funkcja $P(\omega)$ będzie równa 0 dla $0 < \omega < \infty$ (w obliczeniach pulsacji ω_i wybiera się jedynie rozwiązania dodatnie rzeczywiste):

$$P = 0 \Rightarrow K(1 - T_1 T_2 \omega^2) = 0$$

$$T_1 T_2 \omega^2 = 1$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

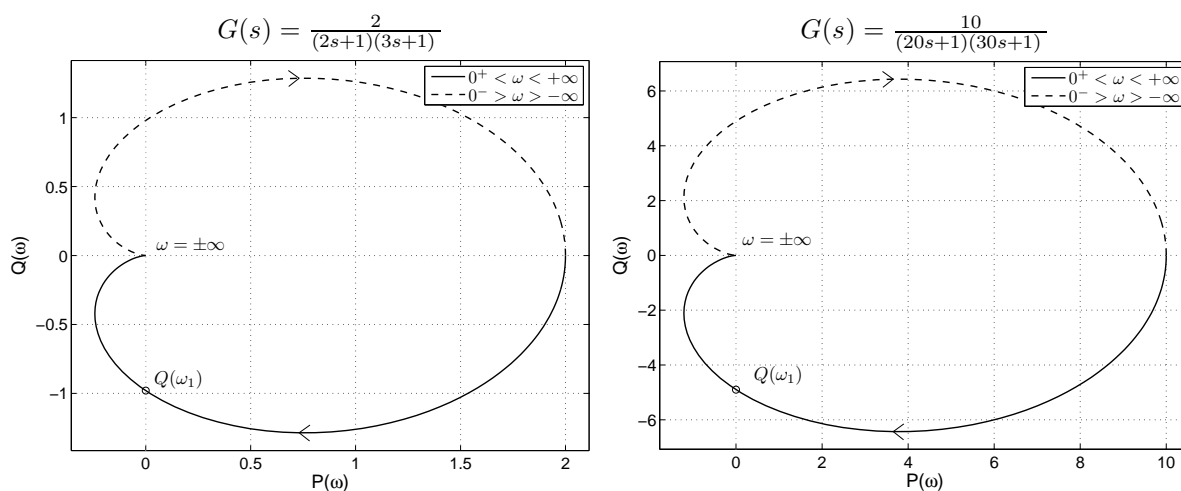
$$\begin{aligned} Q(\omega_1) &= \frac{-K((T_1 + T_2) \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}})}{\left(1 - T_1 T_2 \left(\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)^2\right)^2 + (T_1 + T_2)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)^2} = \frac{-K\left(\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)}{\left(1 - \frac{T_1 T_2}{T_1 T_2}\right)^2 + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2}} = \\ &= \frac{-K\left(\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)}{T_1 T_2} = -K\left(\frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}\right) \end{aligned}$$

Uzyskany wynik : ω_1 , $P(\omega_1) = 0$ i $Q(\omega_1)$ należy wpisać do tabeli 8.1. Następnie na podstawie tabeli wykreśla się charakterystykę amplitudowo-fazową (dla $0 \leq \omega \leq +\infty$), którą uzupełnia się o charakterystykę dla pulsacji $-\infty \leq \omega \leq 0$. Charakterystykę dla ujemnych pulsacji wykreśla się jako odbicie symetryczne charakterystyki częstotliwościowej, gdzie oś rzeczywista (P) jest osią symetrii.

Tabela 8.1. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

ω	0	ω_1	$+\infty$
P	K	0	0^-
Q	0^-	$Q(\omega_1)$	0^-

Na rysunku 8.2 przedstawione są charakterystyki dla dwóch różnych transmitancji elementu inercyjnego 2. rzędu. W obu przypadkach transmitancja $G(s)$ jest asymptotycznie stabilna. Z plotów tych widać, że nie istnieje możliwość otaczania punktu $(-1, j0)$ przez charakterystykę, czyli **po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego układ będzie stabilny**.



Rysunek 8.2. Przykładowe ploty Nyquista dla transmitancji $G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ układu otwartego

Przykład 49. Zbadać stabilność zamkniętego układu regulacji (rys. 8.1) składającego się regulatora całkującego $G_R(s) = \frac{K}{s}$ i inercyjnego 2.rzędu obiektu regulacji. Wówczas: transmitancja układu otwartego jest równa

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad K, T_1, T_2 > 0$$

Powyższa transmitancja jest stabilna i stopień astatyzmu wynosi $k = 1$.

$$\begin{aligned}
G_0(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)} = \frac{K}{j\omega(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)} \cdot \frac{-j\omega(1 - T_1j\omega)(1 - T_2j\omega)}{-j\omega(1 - T_1j\omega)(1 - T_2j\omega)} = \\
&= \frac{K(j\omega^3 T_1 T_2 - \omega^2(T_1 + T_2) - j\omega)}{\omega^6 T_1^2 T_2^2 + \omega^4(T_1^2 + T_2^2) + \omega^2} = \frac{-\omega^2 K(T_1 + T_2)}{\omega^2(\omega^4 T_1^2 T_2^2 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + 1)} + j \frac{\omega K(\omega^2 T_1 T_2 - 1)}{\omega^2(\omega^4 T_1^2 T_2^2 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + 1)} = \\
&= \underbrace{\frac{-K(T_1 + T_2)}{\omega^4 T_1^2 T_2^2 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + 1}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{K(\omega^2 T_1 T_2 - 1)}{\omega(\omega^4 T_1^2 T_2^2 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + 1)}}_{Q(\omega)}
\end{aligned}$$

Następnie wyznacza się wartości funkcji $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dla pulsacji $\omega = 0$ oraz $\omega = +\infty$ i wpisuje do tabeli 8.2.

Następnie wyznacza się punkty przecięcia z osiami, w następujący sposób:

$$Q(\omega) = 0 \Rightarrow K(\omega^2 T_1 T_2 - 1) = 0 \Rightarrow \omega^2 T_1 T_2 = 1$$

czyli pulsacja, przy której charakterystyka przecina oś rzeczywistych jest równa $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ i po podstawieniu do funkcji $P(\omega)$ uzyskuje się:

$$\begin{aligned}
P(\omega_1) &= \frac{-K(T_1 + T_2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)^4 T_1^2 T_2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)^2 (T_1^2 + T_2^2) + 1} = \frac{-K(T_1 + T_2)}{\frac{1}{T_1^2 T_2^2} T_1^2 T_2^2 + \frac{1}{T_1 T_2} (T_1^2 + T_2^2) + 1} = \\
&= \frac{-K(T_1 + T_2)}{2 + \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1 T_2}} = \frac{-K(T_1 + T_2)}{\frac{(T_1^2 + T_2^2) + 2(T_1 T_2)}{T_1 T_2}} = \frac{-K(T_1 + T_2)(T_1 T_2)}{(T_1^2 + T_2^2) + 2(T_1 T_2)} = -K \left[\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \right]
\end{aligned}$$

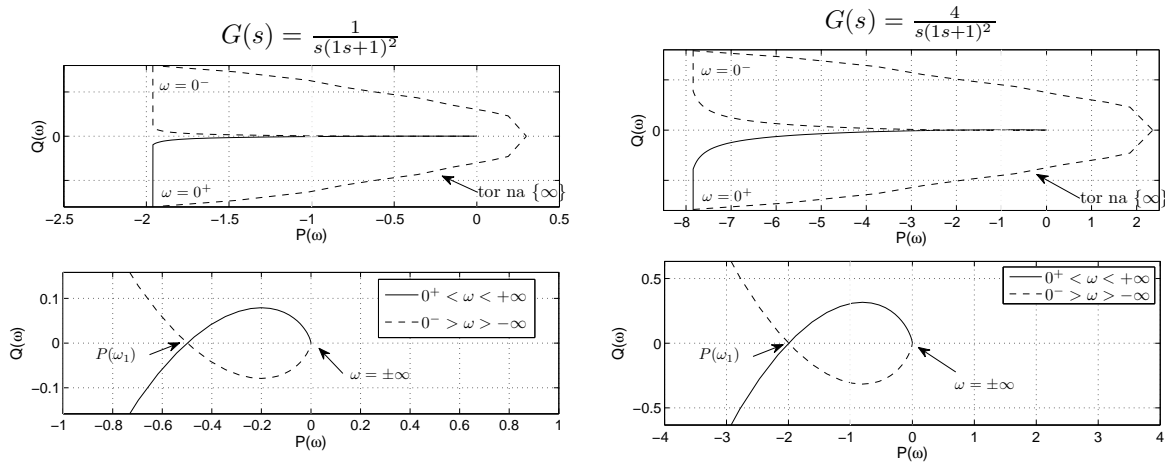
Pulsację ω_1 i wartość $P(\omega_1)$ wpisuje się do tabeli 8.2. Natomiast punkt przecięcia osi urojonych nie istnieje.

Tabela 8.2. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

ω	0	ω_1	$+\infty$
P	$-K(T_1 + T_2)$	$P(\omega_1)$	0^-
Q	$-\infty$	0	0^+

Na rysunku 8.3 przedstawiono dwa przypadki plotu Nyquista dla różnych wartości wzmocnienia. Charakterystyki też zostały uzupełnione o tor na $\{\infty\}$. Dla transmitancji układu otwartego $G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$ układ zamknięty pozostanie stabilny. Natomiast dla transmitancji $G(s) = \frac{4}{s(s+1)^2}$ zamknięty układ regulacji będzie niestabilny.

Jeśli nie są znane wartości T_1 i T_2 oraz K to nie można wyznaczyć punktu przecięcia osi rzeczywistej przez plot Nyquista. Oznacza to, że nie jest wtedy znana relacja pomiędzy plotem a punktem $(-1, j0)$. Na podstawie plotu Nyquista można, podobnie jak z twierdzenia Hurwitza, wyznaczyć zakres zmian parametru regulatora, dla którego układ regulacji po zamknięciu będzie asymptotycznie stabilny. W tym celu przyjmuje się $K = 1$ oraz wyznacza plot Nyquista i punkt $P(\omega_1)$.



Rysunek 8.3. Przykładowe ploty Nyquista dla transmitancji $G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ układu otwartego

Wówczas maksymalne wzmocnienie jest równe $K_{\max} = -\frac{1}{P(\omega_1)}$. Natomiast dla niestabilnego układu otwartego wyznacza się minimalne wzmocnienie $K_{\min} = -\frac{1}{P(\omega_1)}$

Przykład 50. Regulator I oraz obiekt całkująco-inercyjny połączone szeregowo (układ otwarty) opisane są następującą transmitancją

$$G(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$

Wówczas transmitancja widmowa przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{-\omega^2(jT\omega+1)} = \frac{K}{-\omega^2(jT\omega+1)} \cdot \frac{1-jT\omega}{1-jT\omega} = \frac{K-jKT\omega}{\omega^2(T^2\omega^2+1)} = \\ &= \underbrace{\frac{-K}{\omega^2(T^2\omega^2+1)}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{KT}{\omega(T^2\omega^2+1)}}_{Q(\omega)} \end{aligned}$$

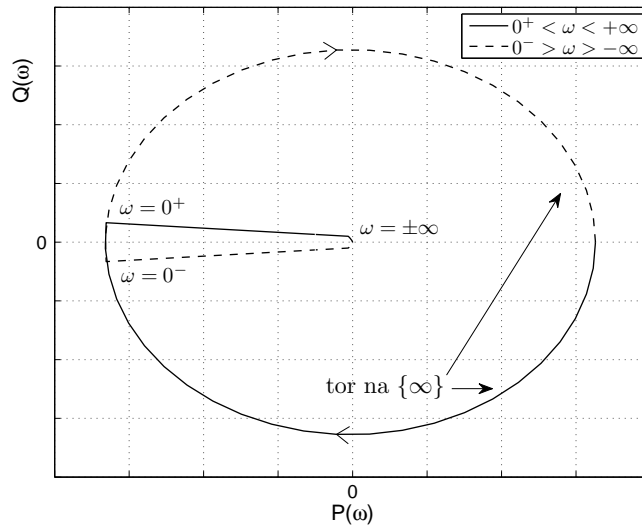
Z postaci mianownika transmitancji wynika, że układ otwarty jest stabilny, a stopień astatyzmu wynosi $k=2$.

Standardowo wyznacza się wartości funkcji $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dla pulsacji $\omega=0$ oraz $\omega=+\infty$ i wpisuje do tabeli 8.3. W przypadku powyższej transmitancji widmowej nie istnieją punkty przecięcia żadnej osi układu współrzędnych.

Tabela 8.3. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

ω	0	$+\infty$
P	$-\infty$	0^-
Q	$+\infty$	0^+

Z porównania postaci funkcji P i Q wynika, że plot Nyquista w granicy $\omega \rightarrow 0^+$ leży bliżej osi rzeczywistej. Aby wykreślić plot Nyquista należy uwzględnić powyższy fakt przy nanoszeniu do układu współrzędnych wartości z tabeli 8.3 oraz uzupełnić go o stosowny tor na $\{\infty\}$.



Rysunek 8.4. Plot Nyquista dla transmitancji z przykładu 50

Z uzyskanego plotu wynika, że charakterystyka zawiera punkt $(-1, j0)$ i oznacza to, że po zamknięciu układ regulacji jest niestabilny.

Przykład 51. Regulator I w przykładzie 50 nie jest w stanie zapewnić stabilności układu zamkniętego. Z tego powodu należy sprawdzić działanie innego regulatora np. PI i jego transmitancję przyjęto jako $G_R(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s}$.

Wówczas transmitancja operatorowa układu otwartego jest równa

$$G(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^2(s + 1)}$$

natomiast transmitancja widmowa

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K(j\omega + 0.5)}{-\omega^2(j\omega + 1)} = \frac{K(j\omega + 0.5)}{-\omega^2(j\omega + 1)} \cdot \frac{1 - j\omega}{1 - j\omega} = \frac{jK\omega + 0.5K + K\omega^2 - j0.5K\omega}{\omega^2(\omega^2 + 1)} = \\ &= -\frac{K(\omega^2 + 0.5)}{\omega^2(\omega^2 + 1)} - j\frac{K(1 - 0.5)}{\omega(\omega^2 + 1)} = \underbrace{-\frac{K(\omega^2 + 0.5)}{\omega^2(\omega^2 + 1)}}_{P(\omega)} + j\underbrace{\frac{-0.5K}{\omega(\omega^2 + 1)}}_{Q(\omega)} \end{aligned}$$

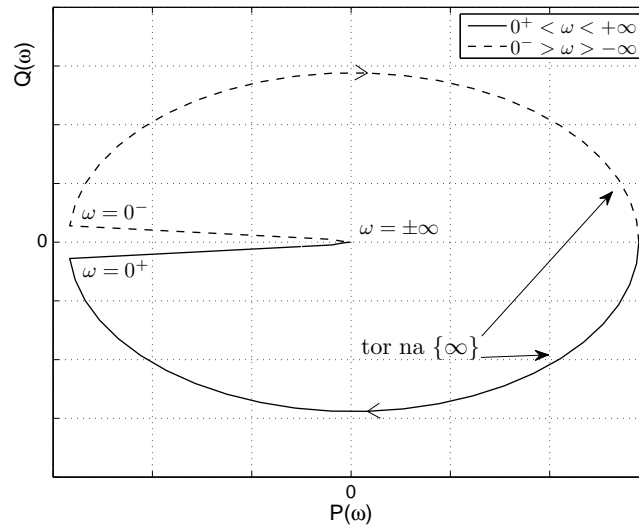
Podobnie jak w poprzednim przykładzie wyznacza się punkty charakterystyczne plotu (tu również nie ma przecięcia charakterystyki z osiami), które zapisuje się w tabeli 8.4. Po narysowaniu

Tabela 8.4. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

ω	0	$+\infty$
P	$-\infty$	0^-
Q	$-\infty$	0^-

charakterystyki należy ją uzupełnić o stosowny tor na $\{\infty\}$.

Z plotu wynika, że układ zamknięty $G(s)$ będzie stabilny dla każdego wzmocnienia $K > 0$.



Rysunek 8.5. Plot Nyquista dla transmitancji z przykładu 51

Przykład 52. Wyznaczyć zakres parametru K , aby zamknięty układ regulacji był asymptotycznie stabilny.

Transmitancja układu otwartego jest w postaci

$$G(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3 + s^2 + 1} \quad (8.3)$$

Z postaci mianownika $M(s) = s^3 + s^2 + 1 \Rightarrow$ brak współczynnika przed s^1 , czyli G jest transmitancją niestabilną. Należy wyznaczyć liczbę biegunów prawej półpłaszczyźnie i do tego celu można wykorzystać tw. Routha lub dokonać obliczeń numerycznych

$$\begin{aligned} &>> \text{roots}([1 \ 1 \ 0 \ 1]) \\ &\quad -1.4656 \\ &\quad 0.2328 \pm j0.79 \end{aligned}$$

Z obliczeń wynika, że $m = 2$, czyli dwa pierwiastki leżą w prawej półpłaszczyźnie. Oznacza to, że plot Nyquista dla $\omega \in (-\infty, +\infty)$ powinien 2 razy okrążyć punkt $(-1, j0)$. Wówczas zamknięty układ regulacji będzie asymptotycznie stabilny. Przyjmuje się wzmocnienie $K = 1$ i wyznacza transmitancję widmową

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{j\omega + 0.5}{-j\omega^3 - \omega^2 + 1} = \frac{j\omega + 0.5}{-j\omega^3 - \omega^2 + 1} \cdot \frac{j\omega^3 + (1 - \omega^2)}{j\omega^3 + (1 - \omega^2)} \\ &= \frac{-\omega^4 - 0.5\omega^2 + 0.5 - j\omega^3 + 0.5j\omega^3 + j\omega}{\omega^6 + \omega^4 - 2\omega^2 + 1} = \underbrace{\frac{-\omega^4 - 0.5\omega^2 + 0.5}{\omega^6 + \omega^4 - 2\omega^2 + 1}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-0.5\omega^3 + \omega}{\omega^6 + \omega^4 - 2\omega^2 + 1}}_{P(\omega)} \end{aligned}$$

Po wyliczeniu wartości funkcji $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ dla pulsacji $\omega = 0$ oraz $\omega = +\infty$ i wpisaniu do tabeli 8.5 należy przystąpić do obliczenia miejsc zerowych.

$$Q = 0 \Rightarrow -0.5\omega^3 + \omega = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_1 = \pm\sqrt{2}$$

Z powyższego wyniku wybiera się rozwiązanie dodatnie $\omega_1 = \sqrt{2}$ i wyznacza $P(\omega_1) = -0.5$. Następnie wyznacza się punkt przecięcia z osią urojonych

$$P = 0 \Rightarrow -\omega^4 - 0.5\omega^2 + 0.5 = 0 \quad (8.4)$$

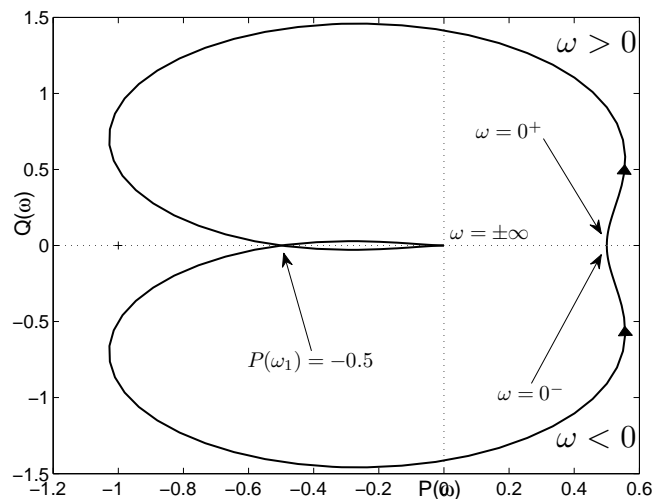
i przyjmuje się $q = \omega^2$

$$-q^2 - 0.5q + 0.5 = 0 \Rightarrow \Delta = 2.25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1.5 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = -1$$

dalej wybiera się rozwiązanie dodatnie $q_1 = \frac{1}{2}$ wówczas $\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i punkt przecięcia z osią urojonych wynosi $Q(\omega_2) = \sqrt{2}$. Uzyskane pulsacje i wartości funkcji P oraz Q umieszcza się w tabeli 8.5.

Tabela 8.5. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

ω	0	$\omega_2 = \sqrt{2}/2$	$\omega_1 = \sqrt{2}$	$+\infty$
P	0.5	0	-0.5	0^-
Q	0	$\sqrt{2}$	0	0^-



Rysunek 8.6. Plot Nyquista dla transmitancji (8.3), gdzie $K = 1$

Z plotu wynika, że aby układ zamknięty był asymptotycznie stabilny, to $K > -\frac{1}{P(\omega_1)} = \frac{1}{0.5}$. Dodatkowo należy wyznaczyć obszar stabilności z tw. Hurwitza i porównać wyniki.

Przykład 53. Zastosowanie twierdzenia Nyquista dla niestabilnego układu otwartego o transmitancji

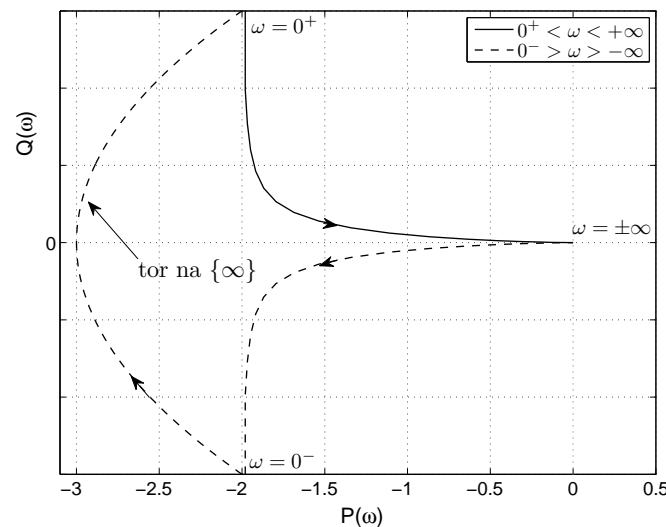
$$G(s) = \frac{2}{s(s-1)} = \frac{L(s)}{s^1 M(s)}$$

$M(s)$ posiada pierwiastek w prawej półpłaszczyźnie, więc plot Nyquista powinien obejmować punkt $(-1, j0)$ w kierunku matematycznie dodatnim. Dodatkowo element $G(s)$ posiada astatyzm pierwszego stopnia, więc należy charakterystykę amplitudowo-fazową uzupełnić o tor na $\{\infty\}$.

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{2}{-\omega^2 - j\omega} = \frac{2}{-\omega^2 - j\omega} \cdot \frac{-\omega^2 + j\omega}{-\omega^2 + j\omega} = \frac{-2\omega^2 + j2\omega}{\omega^4 + \omega^2} \\
 &= \frac{-2\omega^2}{\omega^4 + \omega^2} + j \frac{2\omega}{\omega^4 + \omega^2} = \underbrace{\frac{-2}{\omega^2 + 1}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{2}{\omega^3 + \omega}}_{Q(\omega)}
 \end{aligned}$$

Tabela 8.6. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

ω	0	$+\infty$
P	-2	0^-
Q	$+\infty$	0^+



Rysunek 8.7. Plot Nyquista dla transmitancji z przykładu 53

Plot Nyquista zawiera punkt $(-1, j0)$, ale okrąży go w kierunku matematycznie ujemnym, czyli układ po zamknięciu będzie niestabilny.

Należy sprawdzić stabilność układu zamkniętego na podstawie tw. Lienarda-Chiparta.

8.2. Zapas stabilności

Definicja 8.2. (Zapas stabilności) jest miarą odległości charakterystyki $G(j\omega)$ od punktu krytycznego $(-1, j0)$ na płaszczyźnie zespolonej. Odległość tę ocenia się za pomocą **zapasu modułu** i **zapasu fazy**.

Zapas stabilności jest definiowany dla charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego i pozwala określić **odporność (robust)** zamkniętego układu regulacji ze względu na zmiany parametrów modelu (obiektu regulacji). Zmiany parametrów nazywane są **niepewnością modelu**.

Definicja 8.3. (Zapas modułu GM) obliczany jest dla punktu charakterystyki, w którym faza wynosi -180° . Określa krotność wzrostu modułu transmitancji, która prowadzi do granicy stabilności.

Zapas modułu powinien wynosić nie mniej niż 2 ($GM > 2$) lub co najmniej $6 \div 8dB$. GM zabezpiecza przed błędami (niepewnością) wzmocnienia w stanie ustalonym.

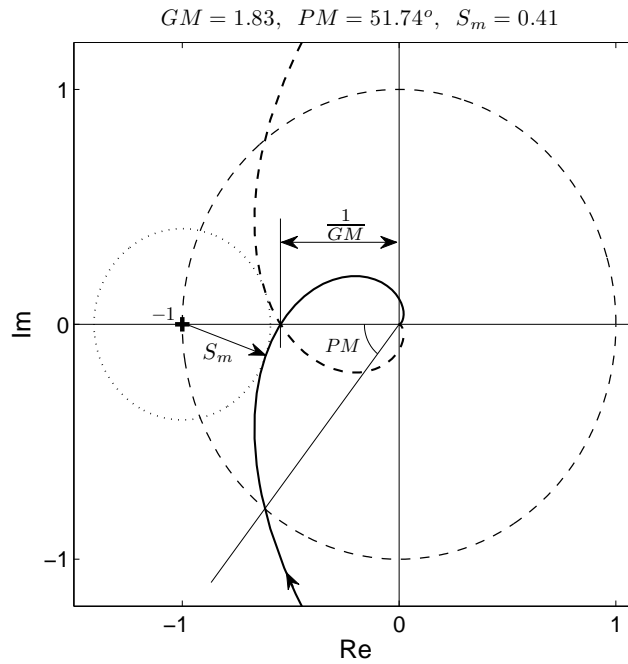
Definicja 8.4. (Zapas fazy PM) obliczany jest dla punktu, w którym charakterystyka przecina okrąg jednostkowy (czyli wzmocnienie równe 1)

$$PM = \varphi(\omega_c) - 180^\circ \quad \text{dla} \quad \omega_c : |G(j\omega_c)| = 1 \quad (8.5)$$

Na rysunku 8.8 przedstawiona jest interpretacja geometryczna zapasu modułu i fazy na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej. Na rysunku zaznaczono również odległość S_m charakterystyki od punktu $(-1, j0)$, którą wyznacza się jako:

$$S_m = \frac{1}{\max |S(j\omega)|}, \quad S(s) = \frac{1}{1+G} \quad (8.6)$$

gdzie $\max |S(j\omega)|$ jest największą wartością charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej.



Rysunek 8.8. Zapas stabilności

Zapas fazy określa jak dużo przesunięcia fazowego można dodać do transmitancji dla pulsacji ω_c zanim plot Nyquista nie przetnie punktu $(-1, j0)$. PM zabezpiecza przed niepewnością (błędami) opóźnień. Wynika stąd (Skogestad & Postlethwaite 2005), że system zamknięty straci stabilność jeśli pojawi się dodatkowe opóźnienie $e^{-\theta_{\max} s}$, gdzie $\theta_{\max} = \frac{PM}{\omega_c}$. PM oraz ω_c są wyrażone w jednostkach SI. Zwykle PM powinno być większe od 30° .

8.3. Zestawienie charakterystyk częstotliwościowych

Tabela 8.7: Charakterystyki częstotliwościowe

L(s)	Plot Nyquista	Charakterystyka Bodego
$\frac{K}{T_1 s + 1}$		
$\frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$		
$\frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$		
$\frac{K}{s}$		

kontynuacja na następnej stronie

Tabela 8.7: Charakterystyki częstotliwościowe

L(s)	Plot Nyquista	Charakterystyka Bodego
$\frac{K}{s(T_1s+1)}$		
$\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$		
$\frac{K(T_as+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$		
$\frac{K}{s^2}$		

kontynuacja na następnej stronie

Tabela 8.7: Charakterystyki częstotliwościowe

L(s)	Plot Nyquista	Charakterystyka Bodego
$\frac{K}{s^2(T_1s+1)}$		
$\frac{K(T_a s+1)}{s^2(T_1 s+1)}, T_a > T_1$		
$\frac{K}{s^3}$		

Rozdział 9

Transmitancja a równanie stanu

Dla układów liniowych (równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach) stosuje się opis w postaci transmitancji lub równania stanu:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

Transmitancja

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n a_n x(s)$$

\vdots

$$a_0 x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} a_0 x(s)$$

$$b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^m b_m u(s)$$

\vdots

$$b_0 u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} b_0 u(s)$$

$$G(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Równanie stanu

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{x} = \dot{x}_2$$

\vdots

$$x_n = \dot{x}_{n-1}$$

$$\dot{x}_n = -a_{n-1}x_{n-1} - a_{n-2}x_{n-2} - a_0x_1 + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Przykład 54.

$$\ddot{y} + 4 \underbrace{\dot{y}}_{x_2} + 4 \underbrace{y}_{x_1} = 2\dot{u} + u \xrightarrow{L} s^2 y(s) + 4s y(s) + 4y(s) = 2s u(s) + u(s)$$

$$y(s) [s^2 + 4s + 4] = (2s + 1) u(s)$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 4}$$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 + \dot{y}$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -4x_2 - 4x_1 + 2\dot{u} + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^B u \xrightarrow{G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+4 \end{bmatrix}}_{\det(sI-A) \cdot [\text{adj}(sI-A)]^T} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s+1}{s^2+4s+4}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_D \cdot u \det(sI-A) \rightarrow s^2 + 4s + 4$$

$$\text{adj}(sI-A)^T \rightarrow \begin{bmatrix} s+4 & -4 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}$$

9.1. Rozwiązanie równania stanu

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ – równanie stacjonarne

$x(0) = x_0$ – warunek (stan) początkowy

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Rozwiązanie:

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t) \cdot e^{-At}$$

$$\underbrace{e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t)}_{\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t))} = e^{-At}Bu(t)$$

zamiana t na τ prowadzi do

$$\frac{d}{d\tau}(e^{-A\tau}x(\tau)) = e^{-A\tau}Bu(\tau) \int_0^t$$

$$e^{-A\tau}x(\tau) \Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau$$

$$e^{-A\tau}x(t) - e^{-A \cdot 0}x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) \cdot e^{At}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau}_{e^{At} * (Bu(t))}$$

gdzie: $*$ oznacza splot, a e^{At} jest macierzą fundamentalną

Twierdzenie Jordana:

$\forall A_{n \times n}, \exists P : \det P \neq 0$ i $P^{-1}AP = J$ - postać kanoniczna Jordana

Obliczenie e^{At} :

$$J = P^{-1}AP$$

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

Właściwości macierzy fundamentalnej

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$e^{At} \cdot e^{-At} = I$$

Rozwinięcie w szereg:

$$e^{At} \cong I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{i!}A^i t^i$$

Metoda Laplace'a

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \xrightarrow{L\{\cdot\}} sX(s) - \underbrace{x(0)}_{x_0} = AX(s) + Bu(s)$$

x_0 - warunek początkowy

$$(sI - A)x(s) = x_0 + Bu(s)$$

$$x(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{przeszoc} + \underbrace{(sI - A)^{-1}Bu(s)}_{przyszoc} \text{ w przypadku skalarnym } \frac{1}{s-a} \xrightarrow{L^{-1}} e^{at}$$

Powyższe równanie pozwala na obliczenie maksymalnej fundamentalnej $e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} [adj(sI - A)]^T$$

$\det(sI - A)$ - wielomian charakterystyczny macierzy jest równoważny mianownikowi transmitancji

$\det(sI - A) = 0$ - równanie charakterystyczne

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots\}$ - widmo macierzy (bieguny układu - transmitancji) - wartości własne λ_i pierwiastki równania charakterystycznego.

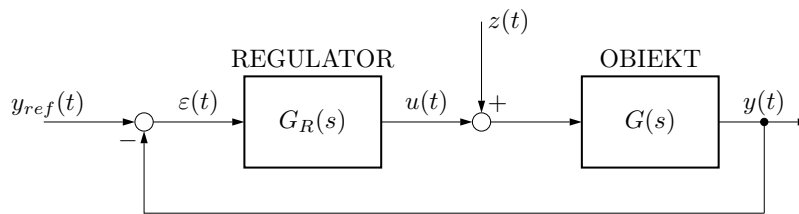
Zgodnie z podobieństwem e^{At} do przypadku skalarnego $\frac{1}{s-a} \xrightarrow{L^{-1}} e^{at}$ wiemy, że podstawą rozwiązań będą funkcje: $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}, \dots \leftarrow$ dla pojedynczych wartości własnych!

lub $t^{r-1}e^{\lambda_i t}, t^{r-2}e^{\lambda_i t}, t^{r-3}e^{\lambda_i t}$ dla wielokrotnych wartości własnych.

Rozdział 10

Optymalizacja parametryczna regulatorów

Problem optymalizacji parametrycznej, inaczej nazywany doбором nastaw regulatorów, dotyczy wyznaczenia współczynników regulatora (w przypadku PID jest to K_R, T_i, T_d) w układzie regulacji (rys. 10.1) wg zadanego kryterium. Oczywiście kryterium może być określone dla zadania stabilizacji bądź nadążania.



Rysunek 10.1. Uproszczony schemat układu regulacji

Jako kryterium regulacji należy rozumieć minimalizację określonego wskaźnika jakości, który służy do oceny procesu regulacji. Typowo, wyróżnia się następujące wskaźniki jakości:

wskaźniki bezpośrednie – typowo określane na podstawie odpowiedzi skokowej zamkniętego układu regulacji,

wskaźniki całkowite – wykorzystanie wyrażeń całkowych w celu określenia błędu regulacji w określonym przedziale czasu (najczęściej od 0 do $+\infty$); najczęściej całkowaniu poddaje się kwadrat lub moduł sygnału wyjściowego $y(t)$ lub uchybu regulacji $\varepsilon(t)$,

wskaźniki odpornościowe – uwzględniają zmiany (niedoskonałości) oraz błędów modeli matematycznych obiektów regulacji, tak aby układ regulacji zachował stabilność. Podstawą są tu wskaźniki omówione w podrozdziale 8.2, czyli zapas modułu GM i zapas fazy PM .

10.1. Regulator PID

Najczęściej w praktyce przemysłowej wykorzystywane są regulatory PID, które w dziedzinie czasu opisywane są przez wyrażenie (**regulator o jednym stopniu swobody**):

$$u(t) = K_R \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) \quad (10.1)$$

a w dziedzinie operatorowej jako:

$$u(s) = K_R \left(\varepsilon(s) + \frac{1}{T_i s} \varepsilon(s) + T_d s \varepsilon(s) \right) \quad (10.2)$$

gdzie K_R jest wzmocnieniem regulatora, T_i jest czasem zdwojenia, a T_d czasem wyprzedzenia.

Wyrażenia (10.1) i (10.2) zawierają idealną pochodną, która jest nierealizowalna w układach rzeczywistych. Z tego powodu zastępuje się ją przez element inercyjno-różniczkujący:

$$T_d s \approx \frac{T_d s}{T_{df} s + 1} \quad (10.3)$$

gdzie $T_{df} < T_d$, a czasami określa się $T_{df} = \frac{T_d}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Oznacza to, że w procesie optymalizacji parametrycznej regulatora rzeczywistego poszukiwane są cztery parametry: K_R , T_i , T_d , T_{df} lub N .

Czasami wprowadza się ideę różnego przetwarzania sygnału wartości zadanej y_{ref} oraz sygnału wyjściowego y . Podejście takie prowadzi do częściowego odseparowania zadania nadążania (od sygnału y_{ref}) i stabilizacji (od sygnałów n i d , przedstawionych na rys. 6.2). Dodatkowo przyjmuje się wolnozmiennosc wartości zadanej y_{ref} i modyfikuje formułę regulacji (10.2) z uwzględnieniem (10.3) do postaci **regulatora o dwóch stopniach swobody** (PID 2DOF):

$$u(s) = K_R \left(b y_{ref}(s) - y(s) + \frac{1}{T_i s} \varepsilon(s) + \frac{T_d s}{T_{df} s + 1} (c y_{ref}(s) - y(s)) \right) \quad (10.4)$$

gdzie b i c są współczynnikami wagowymi dla działania proporcjonalnego i różniczkującego. Najczęściej $0 < b < 1$ oraz $c = 0$. Nazwa *regulator o dwóch stopniach swobody* pochodzi z faktu częściowego rozdzielenia zadania nadążania od stabilizacji

10.2. Wskaźniki jakości regulacji

10.2.1. Bezpośrednie wskaźniki jakości

Dla układu regulacji automatycznej przedstawionego na rysunku 10.1 w ocenie jakości regulacji najczęściej wykorzystuje się odpowiedź skokową dla wymuszenia (wartości zadanej) w postaci $y_{ref}(t) = y_u \cdot \mathbb{1}(t) \rightarrow y_{ref}(s) = \frac{y_u}{s}$.

Wskaźnikami bezpośrednimi są:

κ – **przeregulowanie**, najczęściej wyrażane procentowo:

$$\kappa = \frac{\max(y(t)) - y_u}{y_u} \cdot 100\% \quad (10.5)$$

t_0 – **czas odpowiedzi** – pierwsze przecięcie przebiegu odpowiedzi $y(t)$ z wartością zadaną y_u .

t_R – **czas regulacji** – ustalenie się przebiegu odpowiedzi $y(t)$ na poziomie $\pm 1\% y_u$ lub $\pm 2\% y_u$.

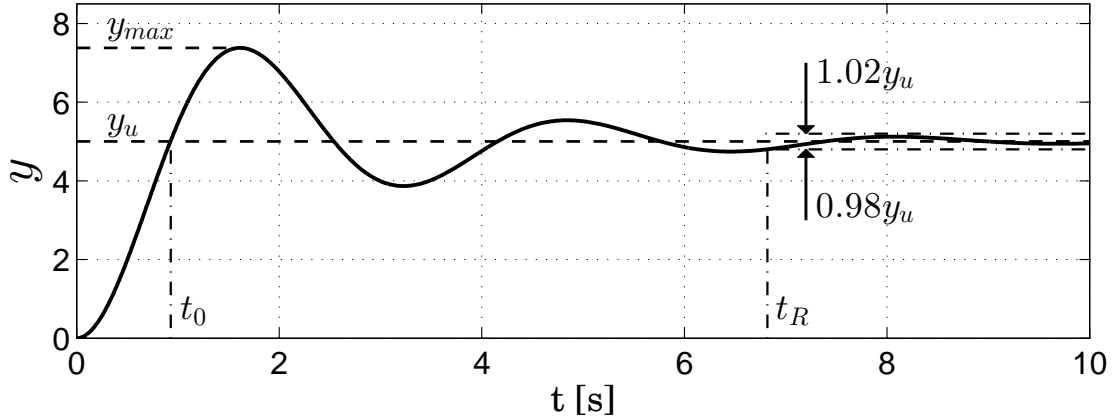
W układach rzeczywistych powyższe wskaźniki jakości można określić na podstawie zarejestrowanego przebiegu.

Wykorzystanie przeregulowania κ i czasu odpowiedzi t_0 w ocenie jakości regulacji oznacza, że w optymalizacji układów sterowania dąży się do przyspieszenia przebiegu przejściowego przez dążenie do oscylacyjnych układów zamkniętych ze względnym współczynnikiem tłumienia $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$. Dodatkowo w układach statycznych, tzn. posiadających błąd w stanie ustalonym ciężko jest ustalić t_R i wówczas jako wzorzec dla czasu regulacji stosuje się wartość sygnału wyjściowego w stanie ustalonym.

Przykład 55. Układ zamknięty (rys. 10.1) o transmitancji

$$G(s) = \frac{y(s)}{y_{ref}(s)} = \frac{4}{s^2 + 0.92s + 4}$$

poddano wymuszeniu skokowemu $y_{ref} = 5 \cdot \mathbb{1}(t)$, czyli $y_u = 5$. Odpowiedź skokowa została zamieszczona na rysunku 10.2, gdzie zaznaczono wskaźniki bezpośrednie.



Rysunek 10.2. Przebieg odpowiedzi skokowej układu regulacji

Wynika stąd, że $t_0 = 0.93s$, $t_R = 6.85s$, a przeregulowanie $\kappa = \frac{y_{max} - y_u}{y_u} \cdot 100\% = 47\%$. Oznacza to, że tak duże przeregulowanie świadczy o źle dobranych nastawach regulatora.

10.2.2. Całkowe wskaźniki jakości

Wskaźniki całkowe określone są na podstawie przebiegu y lub ε , czyli błąd regulacji jest tu kumulowany. W praktyce wykorzystuje się następujące wskaźniki: Wśród kryteriów całkowych najczęściej stosowane są dwa wskaźniki jakości (Grabowski 1996), (Pułaczewski et al. 1974), (Sieklicki 2009):

$$J_1 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt \quad \text{Integrated Square Error (ISE)} \quad (10.6)$$

$$J_2 = \int_0^\infty [\varepsilon^2(t) + \beta^2 \dot{\varepsilon}^2(t)] dt \quad \text{shape criterion} \quad (10.7)$$

$$J_3 = \int_0^\infty |\varepsilon(t)| dt \quad \text{Integrated Absolute Error (IAE)} \quad (10.8)$$

$$J_{te} = \int_0^\infty t |\varepsilon(t)| dt \quad \text{Integrated Time multiplied by Absolut Error (ITAE)} \quad (10.9)$$

$$J_{te2} = \int_0^\infty t \varepsilon(t)^2 dt \quad \text{Integrated Time multiplied by Square Error (ITSE)} \quad (10.10)$$

gdzie ε jest uchybem regulacji, a β współczynnikiem wagi, natomiast kryterium jakości przyjmuje postać:

$$\min_{r_1, \dots, r_n \in S} J \quad (10.11)$$

gdzie r_i oznaczają poszukiwane parametry w obszarze stabilności układu zamkniętego określonym przez zbiór S .

10.2.3. Odpornościowe wskaźniki jakości

Klasyczne wskaźniki odpornościowe zostały zdefiniowane w podrozdziale 8.2, w tym podrozdziale zagadnienia te zostaną przypomniane i rozszerzone.

Zapas stabilności jest miarą odległości charakterystyki $G(j\omega)$ od punktu krytycznego $(-1, j0)$ na płaszczyźnie zespolonej. Odległość tę ocenia się za pomocą **zapasu modułu** i **zapasu fazy**.

Zapas stabilności jest definiowany dla charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego i pozwala określić **odporność (robust)** zamkniętego układu regulacji ze względu na zmiany parametrów modelu (obiektu regulacji). Zmiany parametrów nazywane są **niepewnością modelu**.

Zapas modułu GM obliczany jest dla punktu charakterystyki, w którym faza wynosi -180° . Określa krotność wzrostu modułu transmitancji, która prowadzi do granicy stabilności.

Zapas modułu powinien wynosić nie mniej niż 2 ($GM > 2$) lub co najmniej $6 \div 8dB$. GM zabezpiecza przed błędami (niepewnością) wzmocnienia w stanie ustalonym.

Zapas fazy PM obliczany jest dla punktu, w którym charakterystyka przecina okrąg jednostkowy (czyli wzmocnienie równe 1)

$$PM = \varphi(\omega_c) - 180^\circ \quad \text{dla} \quad \omega_c : |G(j\omega_c)| = 1 \quad (10.12)$$

Zapas fazy określa jak dużo przesunięcia fazowego można dodać do transmitancji dla pulsacji ω_c zanim plot Nyquista nie przetnie punktu $(-1, j0)$. PM zabezpiecza przed niepewnością (błędami) opóźnień.

Wynika stąd, że system zamknięty straci stabilność jeśli pojawi się dodatkowe opóźnienie $e^{-\theta_{\max}s}$, gdzie $\theta_{\max} = \frac{PM}{\omega_c}$. PM oraz ω_c są wyrażone w jednostkach SI. Zwykle PM powinno być większe od 30° .

Przykład 56. Określić zapas stabilności dla zamkniętego układu regulacji, gdzie transmitancja układu otwartego wynosi:

$$L(s) = G_R(s)G(s) = \frac{-1.22s + 4}{s^3 + 3s^2 + 5s + 1}$$

Na rysunku 10.3 przedstawiony został plot Nyquista.

W nowoczesnym podejściu do zagadnienia odporności układów regulacji wykorzystuje się optymalizację w przestrzeni Hardy'ego (\mathcal{H}_∞), a z praktycznego punktu widzenia jest to poszukiwanie największych wartości charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych.

W takim podejściu wykorzystywane są następujące definicje norm sygnałów i systemów.

— Normy sygnałów (funkcje czasu):

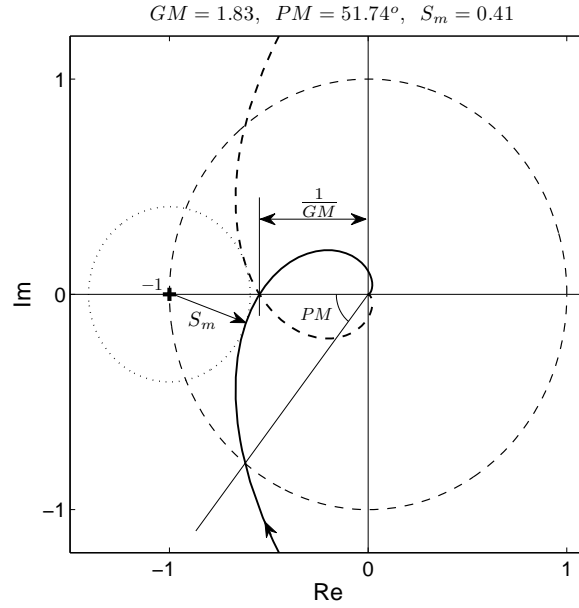
$$\text{norma } \mathcal{L}_1 : \|u(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt$$

$$\text{norma } \mathcal{L}_2 : \|u(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt}$$

$$\text{norma } \mathcal{L}_\infty : \|u(t)\|_\infty = \sup_t |u(t)|$$

— Normy w przestrzeni Hardy'ego:

$$\text{norma } \mathcal{H}_2 : \|u(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(j\omega)|^2 d\omega}$$



Rysunek 10.3. Zapas stabilności dla przykładowego systemu

norma \mathcal{H}_∞ : $\|u(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |u(j\omega)|$

Przestrzeń Hardy'ego \mathcal{H}_∞ : przestrzeń funkcji analitycznych na $s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > 0$.

Definicja 10.1. Norma \mathcal{H}_∞ dla stabilnej transmitancji $G(s)$, $\forall u \neq 0$:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| = \sup_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}, \quad (10.13)$$

Fizyczna interpretacja: norma opisuje maksymalną wartość energetyczną wzmocnienia sygnału wejściowego $u(t)$. Wartość $\|G(s)\|_\infty$ oznacza supremum charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej.

Wprowadza się nazewnictwo:

$$L = GG_R \quad \text{transmitancja układu otwartego} \quad (10.14a)$$

$$S = \frac{1}{1+L} \quad \text{funkcja wrażliwości} \quad (10.14b)$$

$$T = \frac{L}{1+L} \quad \text{uzupełniająca funkcja wrażliwości} \quad (10.14c)$$

Funkcja wrażliwości (czułości) S określa jak wrażliwa jest transmitancja układu zamkniętego T przy błędach modelu obiektu regulacji G (błąd względny $\Delta G/G$):

$$\lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G} = \frac{dT}{dG} \frac{G}{T} = S \quad (10.15)$$

Właściwości transmitancji (10.14):

1. $S + T = 1$,
2. $S_m = \frac{1}{\sup_{\omega} |S(j\omega)|} = \frac{1}{\|S(s)\|_\infty}$ - odległość charakterystyki $L(j\omega)$ od punktu $(-1, j0)$, która została zaznaczona na rysunku 10.3.

3. $M_S = \sup_{\omega} |S(j\omega)| = \|S(s)\|_{\infty}$ – największa wartość charakterystyki wrażliwości.
4. $M_T = \sup_{\omega} |T(j\omega)| = \|T(s)\|_{\infty}$ – największa wartość charakterystyki uzupełniającej wrażliwości.

Przez wartości M_S i M_T można wyrazić zapas modułu GM oraz zapas fazy PM :

$$GM \geq \frac{M_S}{M_S - 1} \quad (10.16)$$

$$PM \geq 2 \arcsin \left(\frac{1}{2M_S} \right) \geq \frac{1}{M_S} \quad (10.17)$$

wynika stąd, że dla $M_S = 2 \implies GM \geq 2, PM \geq 29^\circ$.

$$GM \geq 1 + \frac{1}{M_T} \quad (10.18)$$

$$PM \geq 2 \arcsin \left(\frac{1}{2M_T} \right) \geq \frac{1}{M_T} \quad (10.19)$$

wynika stąd, dla $M_T = 1,25 \implies GM \geq 1,8, PM \geq 46^\circ$.

Wnioski: w układach regulacji wymaga się aby:

1. $M_S < 2 \implies S_m = \frac{1}{M_S} > 0,5$,
2. $M_T < 1,25$,

Przykład 57. Transmitancja układu zamkniętego (rys. 10.1) jest w postaci

$$T(s) = \frac{y(s)}{y_{ref}(s)} = \frac{4}{s^2 + 0,92s + 4}$$

oznacza to, że funkcja wrażliwości jest równa:

$$S(s) = \frac{5s^2 + 4,6s}{5s^2 + 4,6s + 20}$$

Na rysunku 10.4 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe.

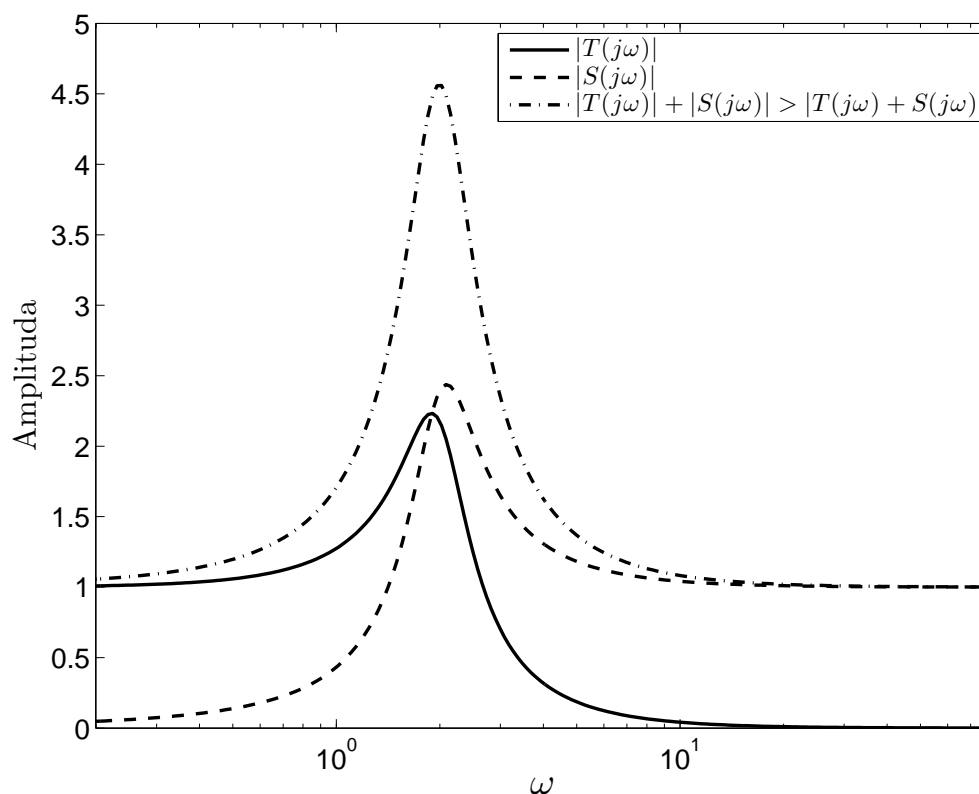
Z charakterystyk wynika $M_T = 2,23, M_S = 2,24$. Oznacza to, że układ zamknięty nie spełnia założeń odpornościowych.

10.3. Metoda Zieglera-Nicholsa

Literatura: (Åström & Wittenmark 1997), (Åström & Hägglund 1995).

Metoda wykorzystuje aproksymację obiektu modelem matematycznym w postaci:

$$G_M(s) = \frac{e^{-Ls}}{Rs + 1}, \quad a = RL \quad (10.20)$$



Rysunek 10.4. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe funkcji wrażliwości i uzupełniającej wrażliwości

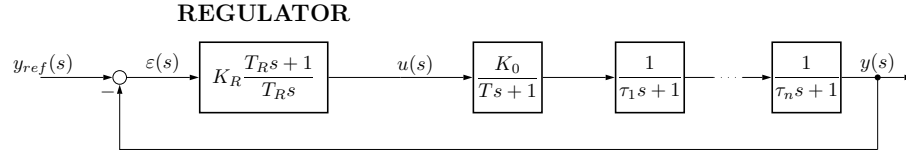
Tabela 10.1. Parametry regulatorów w metodzie Zieglera-Nicholsa

Typ regulatora	K_R	T_R	T_d
P	$1/a$		
PI	$0.9/a$	$3L$	
PID	$1.2/a$	$2L$	$0.5L$

10.4. Kryterium modułowe

Kryterium modułowe związane jest z kształtem amplitudowej charakterystyki logarytmicznej zamkniętego układu regulacji. Przebieg czasowy odpowiedzi układu zamkniętego na standardowy sygnał zadający typu skok jednostkowy zależy od kształtu amplitudowej charakterystyki logarytmicznej układu. Kryterium to zostało opracowane dla obiektów regulacji charakteryzujących się jedną dużą i kilkoma mniejszymi stałymi czasowymi (Ciepiela 1992). Przykładowy schemat układu regulacji przedstawiono na rysunku 10.5.

Przyjęto, że najlepszym regulatorem dla tego typu obiektów jest regulator PI o transmitancji:



Rysunek 10.5. Schemat układu regulacji z regulatorem PI – kryterium modułowe

$$G_R(s) = K_R \frac{T_R s + 1}{T_R s} \quad (10.21)$$

a celem metody jest określenie parametrów tego regulatora.

Przyjmując, że stała czasowa T obiektu regulacji jest dużo większa od stałej czasowej σ , która jest sumą małych stałych czasowych τ_i , można zapisać:

$$G_S(s) = \frac{1}{\sigma s + 1} \approx \frac{1}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{1}{\tau_2 s + 1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\tau_n s + 1} \quad (10.22)$$

gdzie:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Kryterium modułowe umożliwia obliczenie optymalnych nastaw regulatora proporcjonalno-całkującego na podstawie znajomości transmitancji operatorowej obiektów regulacji. Transmitancja układu otwartego z rysunku 10.5 wynosi:

$$G_O(s) = K_R K_O \frac{T_R s + 1}{T_R s} \cdot \frac{1}{T s + 1} \cdot \frac{1}{\sigma s + 1} \quad (10.23)$$

Biegun $s_b = -\frac{1}{T}$ kompensuje się poprzez zero $s_0 = -\frac{1}{T_R}$ transmitancji $G_O(s)$. Pozwala to na wyznaczenie stałej czasowej T_R regulatora z zależności:

$$T_R = T \quad (10.24)$$

Dla tak wyznaczonej stałej T_R regulatora, zastępcza transmitancja układu regulacji ma postać:

$$G_Z(s) = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} = \frac{K_R K_O}{T \sigma s^2 + T s + K_R K_O} \quad (10.25)$$

Dobór współczynnika wzmocnienia K_R przeprowadza się poprzez spełnienie warunku optymalnego śledzenia sygnału wyjściowego układu regulacji $G_Z(s) = 1$ lub $|G_Z(j\omega)|^2 = 1$.

Przekształcając transmitancję zastępczą układu regulacji $G_Z(s)$ poprzez podstawienie $s = j\omega$, powyższy warunek można zapisać w postaci:

$$|G_Z(j\omega)|^2 = \frac{(K_R K_O)^2}{\omega^4 T^2 \sigma^2 + \omega^2 (T^2 - 2 K_R K_O T \sigma) + (K_R K_O)^2} = 1 \quad (10.26)$$

lub w postaci zwartej:

$$|G_Z(j\omega)|^2 = A(z) = \frac{a}{bz^2 + cz + a} = 1 \quad (10.27)$$

gdzie: $z = \omega^2$, $a = (K_R K_O)^2$, $b = T^2 \sigma^2$ i $c = (T^2 - 2K_R K_O T \sigma)$.

Obliczenie optymalnej wartości współczynnika wzmocnienia regulatora K_R zawęży zagadnienie optymalizacji do zakresu częstotliwości bliskich zeru. Postulat optymalnego śledzenia będzie więc spełniony tylko dla stanów przejściowych bliskich stanowi ustalonemu w myśl założenia, że przebieg czasowy $y(t)$ odpowiedzi układu na skok jednostkowy i charakterystyka częstotliwościowa, odpowiadają sobie w następujący sposób:

$$y(t \rightarrow \infty) \Rightarrow G_z(t \rightarrow 0).$$

Moduł transmitancji widmowej (10.26) rozwija się w szereg Maclaurina w otoczeniu punktu $\omega = 0$ według schematu:

$$A(z) = A(0) + \frac{A'(0)}{1!}z + \frac{A''(0)}{2!}z^2 + \dots$$

Z warunku (10.27) wynika, że suma szeregu Maclaurina $A(z)$ powinna być równa jedności. Pierwszy wyraz rozwinięcia szeregu wynosi $A(0) = \frac{a}{a} = 1$, więc wszystkie pozostałe wyrazy rozwinięcia w szereg Maclaurina, czyli: $A'(0) = \left. \frac{\partial A(z)}{\partial z} \right|_{z=0}$, $A''(0) = \left. \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} \right|_{z=0}$ itd., powinny być równe zero. Przyrównując drugi wyraz rozwinięcia do zera, otrzymuje się:

$$A'(0) = \left. \frac{\partial A(z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{-a(2bz + c)}{(bz^2 + cz + a)^2} \right|_{z=0} = \frac{-c}{a} = 0.$$

Po podstawieniu odpowiednich wielkości otrzymuje się:

$$-(T^2 - 2K_R K_O T \sigma) = 0,$$

a po przekształceniu, jako zależność końcową, otrzymuje się wzmocnienie K_R regulatora:

$$K_R = \frac{T}{2K_O \sigma} \quad (10.28)$$

Podstawiając wyrażenie (10.28) do zastępczej transmitancji układu regulacji (10.25), uzyskuje się transmitancję zastępczą układu, optymalizowanego według kryterium modułowego:

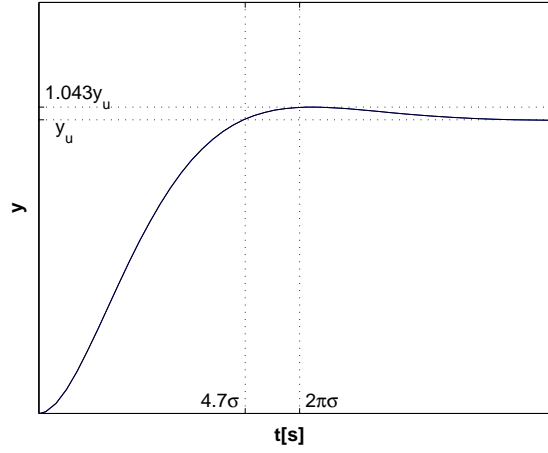
$$G^M(s) = \frac{1}{2\sigma^2 s^2 + 2\sigma s + 1} \quad (10.29)$$

Przejściowy przebieg sygnału wyjściowego $y(t)$ dla tak zoptymalizowanego układu, przy sygnale zadającym w postaci skoku jednostkowego $y_z(t) = y_{zo} \mathbb{1}(t)$ można opisać zależnością:

$$\frac{y(t)}{y_{zo}(t)} = 1 - e^{-\frac{t}{2\sigma}} \left(\cos \frac{t}{2\sigma} + \sin \frac{t}{2\sigma} \right) \quad (10.30)$$

którą w formie graficznej przedstawiono na rysunku 10.6.

Czas odpowiedzi t_o układu, czyli czas, po którym sygnał $y(t)$ osiąga wartość zadaną y_{zo} po raz pierwszy, tzn., gdy $y(t_o) = y_{zo}$, można obliczyć z zależności (10.30). Jest to równoznaczne ze spełnieniem warunku:



Rysunek 10.6. Przebieg sygnału wyjściowego $y(t)$ przy wymuszeniu jednostkowym w układzie optymalizowanym według kryterium modułowego

$$\cos \frac{t}{2\sigma} = -\sin \frac{t}{2\sigma},$$

którego rozwiązaniem jest zależność na czas odpowiedzi t_o :

$$t_o = \frac{3}{2}\pi\sigma \approx 4,7\sigma \quad (10.31)$$

Czas regulacji t_R , czyli czas, po którym sygnał wyjściowy $y(t)$ zawiera się w przedziale $y_{zo} \pm 0,02y_{zo}$ można określić z zależności:

$$t_R = 8,4\sigma \quad (10.32)$$

Zależność na wartość maksymalną sygnału wyjściowego $y(t)$ otrzymuje się, obliczając pochodną tego sygnału i przyrównując ją do zera:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y_{zo} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{t}{2\sigma}} \sin \frac{t}{2\sigma} = 0 \quad (10.33)$$

Zależność ta jest spełniona dla czasu $t_m = 2\pi\sigma$ i wówczas wartość maksymalna sygnału wyjściowego $y(t)$, określona jest zależnością:

$$y(t_m) = y_m = y_{zo}[1 - e^{-\pi}(\cos \pi + \sin \pi)] = y_{zo}(1 + e^{-\pi}) = 1,043y_{zo} \quad (10.34)$$

Przeregulowanie sygnału wyjściowego $y(t)$ w układzie optymalizowanym według kryterium modułowego przy wymuszeniu jednostkowym wynosi:

$$\chi = \frac{y_m - y_{zo}}{y_{zo}} = 4,3\% \quad (10.35)$$

Ważne jest również określenie maksymalnej wartości pochodnej sygnału wyjściowego $y(t)$ względem czasu oraz momentu jej wystąpienia. Wyznacza się to, korzystając z zależności (10.33), obliczając ekstremum tej funkcji przez przyrównanie drugiej pochodnej $y(t)$ względem czasu do zera:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = y_{zo} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{t}{2\sigma}} \left(\cos \frac{t}{2\sigma} - \sin \frac{t}{2\sigma} \right) = 0.$$

Warunek ten jest spełniony dla $t_d = \frac{\pi}{2}\sigma \approx 1,57\sigma$ i w związku z tym, maksymalna wartość pochodnej sygnału wyjściowego względem czasu wynosi:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{\max} = \frac{y_{zo} \sqrt{2}}{2\sigma e^{\frac{\pi}{4}}} \approx 0,322 \frac{y_{zo}}{\sigma} \quad (10.36)$$

Z zależności tej wynika, że maksymalna wartość pochodnej sygnału wyjściowego względem czasu jest zależna tylko od wielkości sygnału zadającego i jednego z parametrów obiektu, a nie jest zależna od parametrów regulatora. W konsekwencji nie można wpływać na jej wartość poprzez dobór nastaw tego regulatora.

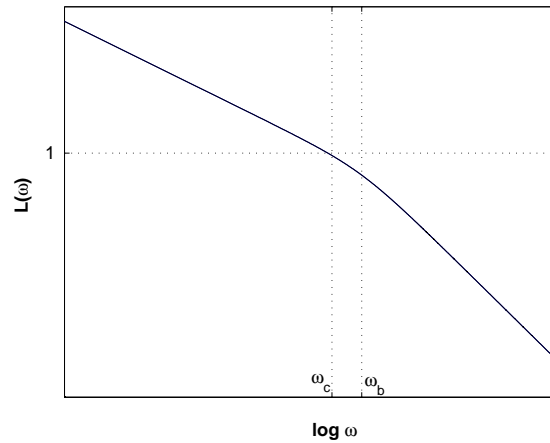
Transmitancję (10.29), można przedstawić w następującej postaci:

$$G^M(s) = \frac{1}{2\sigma^2 s^2 + 2\sigma s + 1} = \frac{1}{T_O^2 s^2 + 2\xi T_O s + 1},$$

gdzie: $T_O = \sigma\sqrt{2}$ i $\xi = \frac{\sigma}{T_O} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$.

Wartość współczynnika tłumienia ξ wskazuje, że transmitancja standardowa jest transmitancją obiektu oscylacyjnego o tłumieniu krytycznym.

Często zachodzi potrzeba skorzystania z amplitudowej charakterystyki logarytmicznej $L(\omega)$ układu otwartego (rys. 10.7), optymalizowanego według kryterium modułowego.



Rysunek 10.7. Charakterystyka amplitudowa układu otwartego (kryterium modułowe)

Transmitancja układu otwartego, przy uwzględnieniu zależności (10.24) i (10.28), może zostać zapisana w postaci:

$$G_O(s) = \frac{1}{2\sigma s(\sigma s + 1)},$$

a po podstawieniu $s = j\omega$, uzyskuje się transmitancję widmową układu otwartego:

$$G_O(j\omega) = \frac{1}{2\sigma j\omega(\sigma j\omega + 1)} = -\frac{1}{2(\sigma^2\omega^2 + 1)} - j\frac{1}{2\sigma\omega(\sigma^2\omega^2 + 1)}$$

oraz w efekcie amplitudową charakterystykę logarytmiczną:

$$L(\omega) = 20 \log |G_O(j\omega)| = 20 \log \frac{\sqrt{\sigma^2\omega^2 + 1}}{2\sigma\omega(\sigma^2\omega^2 + 1)} \quad (10.37)$$

Wykres tej charakterystyki został przedstawiony na rysunku 10.7. Charakterystyczne punkty tego wykresu, tzn. częstotliwości ω_c i ω_b są związane z parametrem σ transmitancji standardowej według zależności: $\omega_c = \frac{1}{2\sigma}$ i $\omega_b = \frac{1}{\sigma}$ oraz poprzez zależność (10.31) z czasem odpowiedzi w układzie zamkniętym $t_o = \frac{2,35}{\omega_c}$.

Przykład 58. Regulator prądu napędu prądu stałego

W przypadku napędów prądu stałego przyjmuje się następujące założenia, które pozwalają na zastosowanie kryterium modułowego (Ciepiela 1992, Sieklucki 2009):

- w stanach przejściowych siła elektromotoryczna silnika zmienia się znacznie wolniej w porównaniu z szybkością narastania prądu twornika, dlatego przyjmuje się $E = 0$, czyli transmitancję prądową silnika upraszcza się z (5.20c) do postaci:

$$G_{IU}(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{R}}{Ts + 1} \quad (10.38)$$

- przekształtnik tyrystorowy aproksymuje się układem inercyjnym o stałej czasowej τ_0 i wzmocnieniu K_p :

$$G_p(s) = \frac{U(s)}{U_s(s)} = \frac{K_p}{\tau_0 s + 1} \quad (10.39)$$

przy czym τ_0 jest średnim opóźnieniem przekształtnika tyrystorowego w stosunku do sygnału sterującego. Typowo przyjmuje się dla przekształtników sześciopulsowych $\tau_0 = 3,3$ [ms]. Z założenia tego wynika, że $T > \tau_0$.

W wyniku takich założeń otrzymuje się model matematyczny napędu w postaci transmitancji elementu inercyjnego drugiego rzędu. Schemat blokowy takiego układu regulacji przedstawiono na rysunku 10.8. Porównując elementy tego schematu z przedstawionymi na rysunku 10.5, otrzymuje się:

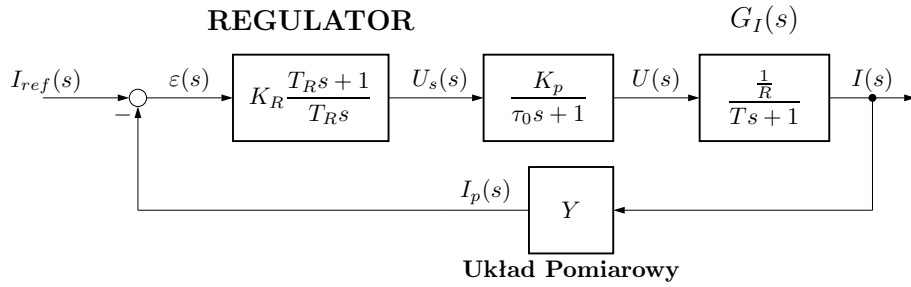
$$K_0 = \frac{K_p Y}{R}, \quad \sigma = \tau_0$$

co po podstawieniu do (10.24) i (10.28) pozwala wyliczyć nastawy regulatora:

$$K_{Ri} = \frac{TR}{2K_p Y \tau_0}, \quad T_{Ri} = T \quad (10.40)$$

Transmitancja układu zamkniętego, dla założenia $E = 0$, wynosi:

$$G_c(s) = \frac{I(s)}{I_{ref}(s)} = \frac{\frac{1}{Y}}{2\tau_0^2 s^2 + 2\tau_0 s + 1} \quad (10.41)$$

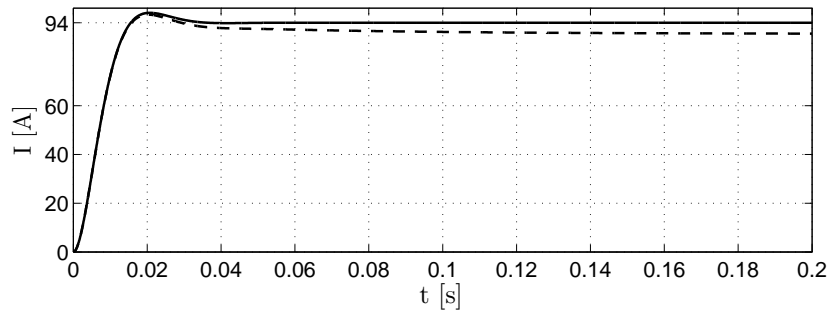


Rysunek 10.8. Schemat blokowy układu regulacji prądu silnika – kryterium modułowe

Natomiast transmitancja układu regulacji prądu z uwzględnieniem transmitancji (??) ($E(t) \neq 0$) jest postaci:

$$G_c(s) = \frac{I(s)}{I_{ref}(s)} = \frac{\frac{1}{Y} \frac{B}{2\tau_0} (Ts + 1)}{BT\tau_0 s^3 + B(T + \tau_0)s^2 + \left(B + \tau_0 + \frac{BT}{2\tau_0}\right)s + 1 + \frac{B}{2\tau_0}} \quad (10.42)$$

Na rysunku 10.9 przedstawione są odpowiedzi skokowe dla układów o transmitancjach (10.41) i (10.42), gdzie wartością zadaną był prąd 94 [A].



Rysunek 10.9. Odpowiedzi skokowe silnika 18 [kW]: — teoretyczna dla transmitancji (10.41), - - - uwzględniająca kompletny model silnika (10.42)

Z przedstawionych przebiegów widać, że przyjęte uproszczenie modelu obwodu twornika (z postaci (??) do (10.38)) jest słuszne w początkowym etapie stanu przejściowego. Ponadto przeregulowanie w odpowiedzi układu (10.42) jest większe niż w układzie teoretycznym, a wartość prądu w stanie ustalonym jest zawsze mniejsza od zadanej.

10.5. Kryteria całkowe

Opis metod analityczno-numerycznych optymalizacji parametrycznej dla różnych rodzajów całkowych wskaźników jakości można znaleźć w pracy (Grabowski 1996).

Najprostsza analityczna metoda optymalizacji parametrycznej przy wskaźniku jakości (10.6) posługuje się transformatą Laplace'a uchybu regulacji $\varepsilon(s)$ i w ogólnym przypadku może wynosić

$$\varepsilon(s) = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_2s^2 + c_1s + c_0}{d_ns^n + \dots + d_2s^2 + d_1s + d_0} \quad (10.43)$$

Dla wskaźnika jakości J_1 (Pułaczewski et al. 1974) podaje się gotowe wyrażenia algebraiczne, określające jego wartość przy wykorzystaniu parametrów licznika i mianownika (10.43). W związku z tym można zapisać

$$J_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = W(c_i, d_i) \quad (10.44)$$

Postać wyrażenia $W(c_i, d_i)$ zależy od stopnia równania charakterystycznego transformaty (10.43) i przedstawia się następująco:

$$\text{dla } n = 1 \quad W = \frac{c_0^2}{2d_0d_1} \quad (10.45)$$

$$\text{dla } n = 2 \quad W = \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2} \quad (10.46)$$

$$\text{dla } n = 3 \quad W = \frac{c_2^2d_0d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2 - d_0d_3)} \quad (10.47)$$

Jeżeli przykładowo poszukuje się optymalnych nastaw regulatora PI (K_c, T_i), to zadanie optymalizacji sprowadza się do spełnienia warunku

$$\min_{K_c, T_i} J_1 = \min_{K_c, T_i} W(c_i, d_i),$$

czyli do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \frac{\partial W(c_i, d_i)}{\partial K_c} = 0 \\ \frac{\partial W(c_i, d_i)}{\partial T_i} = 0 \end{cases} \quad (10.48)$$

przy założeniu, że $\frac{\partial^2 W(c_i, d_i)}{\partial K_c^2} > 0$ i $\frac{\partial^2 W(c_i, d_i)}{\partial T_i^2} > 0$.

W przypadku wskaźnika jakości (10.7) nie ma gotowych wyrażeń algebraicznych dla określenia jego wartości. Zagadnienie to rozwiązuje się przez przekształcenie wskaźnika jakości J_2 do postaci J_1 . W tym celu wykorzystuje się właściwość astatycznego układu regulacji $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, który jest poszukiwany i wówczas

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \beta^2 \dot{\varepsilon}^2(t)] dt = \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t)]^2 dt - \int_0^{\infty} 2\beta \varepsilon(t) \dot{\varepsilon}(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t)]^2 dt - 2\beta \left[\frac{\varepsilon^2(t)}{2} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

i dalej

$$J_2 = \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t)]^2 dt + \beta \varepsilon^2(0) \quad (10.49)$$

a wyrażenie $\beta \varepsilon^2(0) = \text{const}$, więc wystarczy rozpatrywać je jako nowy wskaźnik jakości, który posiada te same właściwości co (10.7) i ma postać

$$J'_2 = \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t)]^2 dt \quad (10.50)$$

Wyrażenie (10.50) osiąga minimum w przypadku, gdy

$$\varepsilon(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t) = 0,$$

tzn. dla przebiegu błędu w układzie o postaci

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)e^{-\frac{t}{\beta}},$$

czyli dla (określonego współczynnikiem wagi β) kształtu przebiegu przejściowego błędu (stąd nazwa – **kryterium kształtu**).

Tak jak w przypadku wskaźnika jakości J_1 podstawą do określenia wartości wskaźnika J_2' stanowi transformata uchybu regulacji $\varepsilon(s)$. Na jej podstawie można obliczyć:

$$\varepsilon(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\varepsilon(s) \quad (10.51)$$

$$\mathcal{L}[\dot{\varepsilon}(t)] = s\varepsilon(s) - \varepsilon(0) \quad (10.52)$$

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t) + \beta \dot{\varepsilon}(t)] = \varepsilon(s) + \beta[s\varepsilon(s) - \varepsilon(0)] = E(s) \quad (10.53)$$

oraz wartość wskaźnika jakości (10.50)

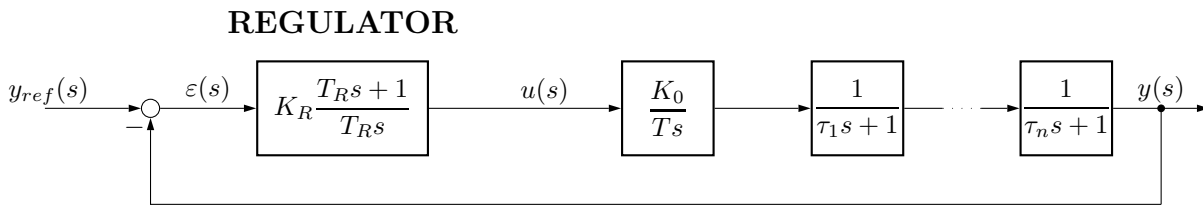
$$J_2' = W(c_i, d_i) \quad (10.54)$$

Dalsza procedura poszukiwania optymalnych nastaw regulatora jest identyczna jak dla wskaźnika jakości (10.6).

10.6. Kryterium symetryczne

Kryterium symetryczne znajduje zastosowanie dla obiektów, w których dominuje element całkujący o czasie całkowania T oraz znajduje się szereg elementów inercyjnych o małych stałych czasowych $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Szereg ten aproksymuje się jednym elementem o stałej czasowej σ . Regulator przyjmuje się jako PI o transmitancji (rys. 10.10):

$$G_{R\omega}(s) = K_R \frac{T_R s + 1}{T_R s} \quad (10.55)$$



Rysunek 10.10. Schemat układu regulacji – kryterium symetryczne

Wówczas transmitancja układu zamkniętego wynosi

$$G_c(s) = \frac{K_R K_0 (T_R s + 1)}{T_R T \sigma s^3 + T_R T s^2 + K_R K_0 T_R s + K_R K_0} \quad (10.56)$$

Po podstawieniu $s = j\omega$ oblicza się moduł transmitancji widmowej $|G_c(j\omega)|^2$ i rozwija się w szereg Maclaurina w otoczeniu punktu $\omega = 0$. Następnie w celu spełnienia postulatu optymalnego śledzenia

($G_c(s) = 1$) przyrównuje się wszystkie wyrazy rozwinięcia do zera oprócz wyrazu pierwszego, który przyrównuje się do 1. Wówczas uzyskuje się

$$T_R = 4\sigma, \quad K_R = \frac{T}{2K_0\sigma} \quad (10.57)$$

Po podstawieniu (10.57) do (10.56) uzyskuje się standardową postać transmitancji zastępczej układu optymalizowanego według kryterium symetrycznego

$$G_c^s(s) = \frac{4\sigma s + 1}{8\sigma^3 s^3 + 8\sigma^2 s^2 + 4\sigma s + 1}. \quad (10.58)$$

Przebieg przejściowy przy wymuszeniu skokowym $y_z(t) = y_{zo} \mathbb{1}(t)$ ma następujące parametry:

- czas odpowiedzi $t_0 = 3,1\sigma$,
- przeregulowanie $\kappa = 43,4\%$,
- czas regulacji (dla $y(t_R) = y_{zo} \pm 0.02y_{zo}$) $t_R = 16,5\sigma$.

Jak widać, przebieg ten charakteryzuje się dużym przeregulowaniem i długim czasem regulacji. Przeregulowanie to można zmniejszyć do 8% (przy równoczesnym wydłużeniu czasu odpowiedzi do $t_0 = 7,6\sigma$) przez zastosowanie filtra sygnału wejściowego y_z o transmitancji

$$G_F(s) = \frac{1}{4\sigma s + 1} \quad (10.59)$$

Podstawą do obliczenia amplitudowej charakterystyki logarytmicznej $L(\omega)$ układu otwartego jest transmitancja

$$G_o(s) = K_R \frac{T_R s + 1}{T_R s} K_0 \frac{1}{T s} \frac{1}{\sigma s + 1} \quad (10.60)$$

Po podstawieniu zależności (10.58) do transmitancji (10.60), otrzymuje się

$$G_o(s) = \frac{4\sigma s + 1}{8\sigma^2 s^2 (\sigma s + 1)},$$

a po podstawieniu $s = j\omega$, uzyskuje się transmitancję widmową

$$G_o(j\omega) = -\frac{4\sigma^2 \omega^2 + 1}{8\sigma^2 \omega^2 (\sigma^2 \omega^2 + 1)} - j \frac{3\sigma \omega}{8\sigma^2 \omega^2 (\sigma^2 \omega^2 + 1)}.$$

Następnie otrzymuje się charakterystykę logarytmiczną

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{\sqrt{16\sigma^4 \omega^4 + 17\sigma^2 \omega^2 + 1}}{8\sigma^2 \omega^2 (\sigma^2 \omega^2 + 1)}.$$

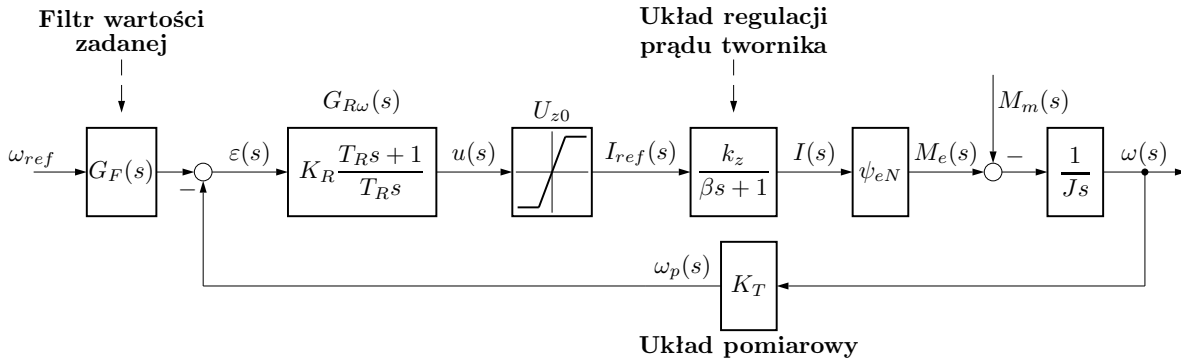
Charakterystyczne punkty tej charakterystyki są związane z parametrem σ

$$\omega_a = \frac{1}{4\sigma}, \quad \omega_b = \frac{1}{2\sigma}, \quad \omega_c = \frac{1}{\sigma}.$$

Charakterystyka jest symetryczna względem punktu ω_c – stąd nazwa **kryterium symetryczne**.

Przykład 59. Regulator prędkości typu PI

W celu uzyskania zerowego uchybu statycznego regulacji prędkości obrotowej stosuje się regulator typu PI. Dobór parametrów tego regulatora można przeprowadzić, stosując kryterium symetryczne. Skutkiem astatycznej regulacji prędkości kątowej jest zwiększenie stopnia oscylacyjności przebiegów przejściowych względem regulacji statycznej (regulator typu P).



Rysunek 10.11. Uproszczony schemat blokowy napędu z regulatorem prędkości PI – kryterium symetryczne

Kryterium symetryczne jest wykorzystywane do optymalizacji parametrycznej regulatora PI prędkości kątowej napędu prądu stałego (Ciepiela 1992, Kaźmierkowski & Tunia 1994, Kaźmierkowski, Krishnan & Blaabjerg 2002). Przyjmując pewne założenia upraszczające, schemat blokowy napędu można przedstawić jak na rysunku 10.11.

Zgodnie z (10.57) parametry regulatora prędkości wynoszą (w obliczeniach pomija się element nieliniowy u_{z0}):

$$T_R = 4\beta, \quad K_R = \frac{J}{2K_T k_z \beta \psi_{eN}} \quad (10.61)$$

Filtr dolnoprzepustowy (10.59), zmniejszający przeregulowanie określa transmitancja:

$$G_F(s) = \frac{1}{4\beta s + 1} \quad (10.62)$$

Jeśli obwód regulacji prądu twornika został zoptymalizowany na podstawie kryterium modułowego to transmitancję zastępczą (10.41) należy aproksymować transmitancją pierwszego rzędu:

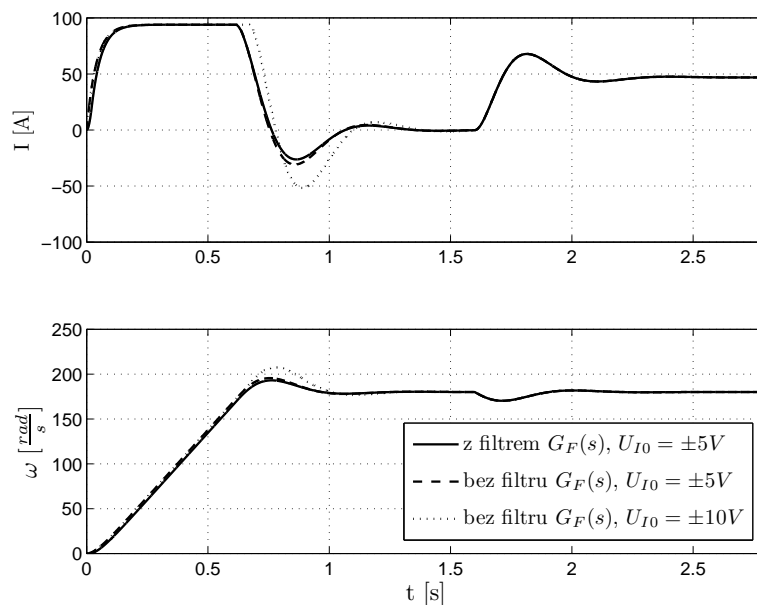
$$G_c(s) = \frac{I(s)}{I_{ref}(s)} = \frac{\frac{1}{Y}}{2\tau_0^2 s^2 + 2\tau_0 s + 1} \bigg|_{2\tau_0^2 < 2\tau_0} \approx \frac{\frac{1}{Y}}{2\tau_0 s + 1} \quad (10.63)$$

Po podstawieniu $\beta = 2\tau_0$ i $k_z = \frac{1}{Y}$ do (10.57) otrzymuje się nastawy regulatora:

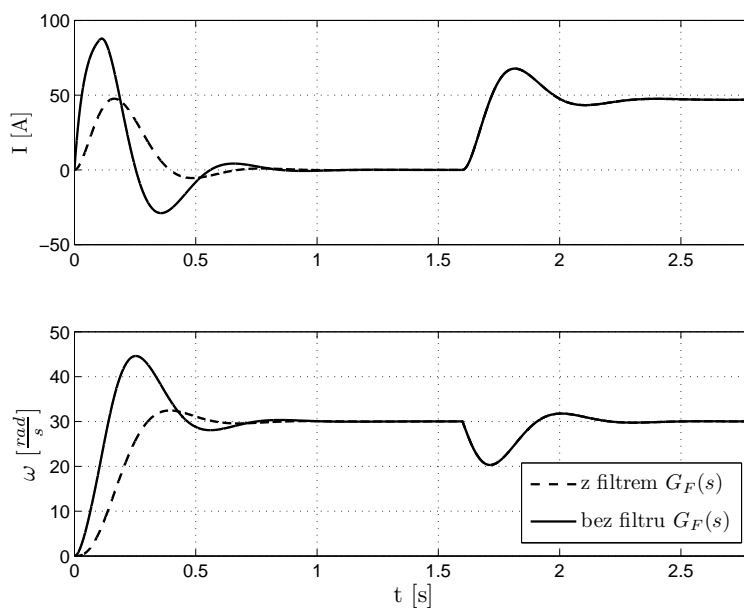
$$T_R = 8\tau_0, \quad K_R = \frac{JY}{4K_T \tau_0 \psi_{eN}} \quad (10.64)$$

Na rysunku 10.12 przedstawiono wyniki badań symulacyjnych rozruchu silnika z regulatorem PI prędkości kątowej. W symulowanym układzie ograniczenie u_{z0} zostało uwzględnione w elemencie całkującym regulatora prędkości i takie rozwiązanie ma większy wpływ na skuteczność regulacji (rys. 10.12). W niektórych układach napędowych, gdzie ograniczenie ma typowe wartości (np. ± 10 V dla wzmacniaczy operacyjnych), oscylacje prądu twornika mogą być nawet o 50% większe niż w przedstawionym układzie.

Na rysunku 10.13 przedstawione są przebiegi prądu twornika i prędkości kątowej wirnika dla niewielkiej zmiany prędkości zadanej. W takim przypadku przebiegi sygnałów bez filtracji wartości zadanej (10.62) charakteryzują się dużymi oscylacjami. Wynika to z pracy układu regulacji w liniowym zakresie charakterystyki regulatora (sygnał wyjściowy regulatora prędkości nie ulega nasyceniu).



Rysunek 10.12. Rozruch i stabilizacja prędkości kątowej silnika 18 [kW]

Rysunek 10.13. Rozruch i stabilizacja prędkości kątowej silnika 18 [kW]
dla $\omega_{ref} = 15\% \omega_N$

W przypadku pracy napędu z regulatorem prędkości typu PI układ regulacji jest **astatyczny** ze względu na zakłócenie, jakim jest moment obciążenia M_m . Podczas rozruchu napędu lub przy udarowym obciążeniu, w ostatnim etapie stanu przejściowego występują oscylacje przebiegów zarówno

prądu twornika, jak i prędkości obrotowej. Oscylacje te zmniejszą, jeżeli zamiast regulatora prędkości typu PI zastosuje się regulator P. Niestety kosztem takiej zamiany jest utrata astatyzmu regulacji.

Rozdział 11

Stabilność – jakościowa teoria równań różniczkowych

Pierwsza metoda Lapunowa – określenie stabilności lokalnej w punkcie równowagi na podstawie linearyzacji równania różniczkowego.

Druga metoda Lapunowa – ocena stabilności układu bez rozwiązywania równań różniczkowych. Analogia do badania bilansu energetycznego. Jeżeli szybkość zmiany energii układu fizycznego izolowanego ($u=0$) jest wartością ujemną dla wszystkich możliwych stanów z wyjątkiem pojedynczego punktu równowagi (energia jest stała) to układ jest stabilny (Pułaczewski et al. 1974).

Definicja: Punkt równowagi dla równania wektorowego (autonomicznego $u = 0$)

$$\dot{x} = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n \quad (11.1)$$

punkt równowagi x^* spełnia $f(x^*) = 0$, oznacza to: jeśli system uzyskał x^* to w nim powstanie w przyszłości.

- Stabilność jest związana z ciągłością i ograniczonością rozwiązań.

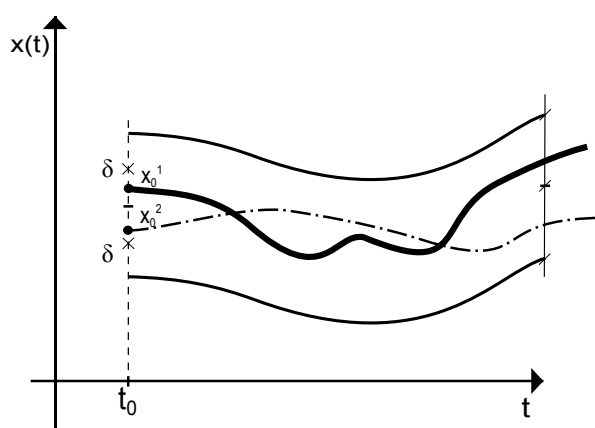
- W definicji stabilności wykorzystuje się rozwiązanie $x(t)$ równania

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, \infty] = T, x(t) = x_0 - \text{warunek (stan)}$$

początkowy – jest dany

najczęściej $t_0 = 0$

Definicja (Lapunow 1892): Rozwiązanie $\tilde{x}(t, x_0)$ równania różniczkowego (11.1) jest stabilne w sensie Lapunowa $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \in T \quad \exists \delta > 0 : \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\tilde{x}(t, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$



Rysunek 11.1. Stabilność w sensie Lapunowa

KOMENTARZ: Jeśli stan początkowy x_0 będzie znajdował się w przedziale $\pm \delta$ i można znaleźć skończoną wartość ε dla dowolnego czasu t , to układ jest stabilny.

11.1. I METODA LAPUNOWA- metoda linearyzacji

$\dot{x}(t) = f(x, t)$, $x \in R^n$, $f(0) = 0$ < zawsze można transformować układ do takiej postaci

Linearyzacja:

$f(x) = Ax + \varphi(x)$ < reszta która jest pomijana, $f(x) \approx Ax + \frac{1}{2}f''(x)x^2 + \dots$ < szereg Taylora

$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|\varphi(x)|}{|x|} \rightarrow 0$ $A = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$ - macierz Jacobiego

Liniiowe przybliżenie

$\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$ - macierz stanu

Tw. Jeżeli $\text{Re}\{ \underbrace{\lambda(A)} \} < 0$ to $x^* = 0$ jest lokalnie asymptotycznie stabilnym punktem rów-

widmo

macierzy

$\det(\lambda I - A) = 0$

nowagi, ale nie wiemy w jakim otoczeniu- nie ma możliwości określenia obszaru atrakcji

Przykład 60.

$$ml^2 \ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl \sin \alpha = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \sin \alpha \quad \uparrow \quad -\frac{b}{ml} \dot{\alpha} \quad \uparrow$$

$x_1 \qquad \qquad x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \leftarrow f_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{b}{ml} x_2 \leftarrow f_2 \end{cases} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

Macierz A jest zawsze stabilna, ale nie wiadomo w jakim obszarze.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

Macierz A jest niestabilna- ale nie wiadomo w jakim obszarze.

11.2. Linearyzacja

Linearyzacja równań do postaci macierzowej

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x^* \\ u^* \end{matrix} \quad \text{< macierz Jacobiego (jacobian)}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1(x, u) \\ g_1(x, u) \\ \vdots \\ g_n(x, u) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \begin{matrix} x^* \\ u^* \end{matrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{matrix} x^* \\ u^* \end{matrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$

Przykład 61. Wahadło z oporami tarcia.

$$ml^2 + b\dot{\alpha} + mgl \sin \alpha = 0$$

punkt równowagi: $mgl \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 + k\pi$ np. $\alpha = 0 \cup \alpha = \pi$

linearyzacja: $\frac{\partial}{\partial \alpha}(mgl \sin \alpha) = mgl \cos \alpha \xrightarrow{\alpha=0} mgl \cup mgl \cos \alpha \xrightarrow{\alpha=\pi} -mgl$

linearyzacja w otoczeniu $\alpha=0$

$$ml^2 \ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl \alpha = 0 \xrightarrow{L} \underbrace{(ml^2 s^2 + bs + mgl)}_{\Delta} \alpha(s) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4m^2 l^3 g$$

stabilny lokalnie w $\alpha=0$

linearyzacja w otoczeniu $\alpha = \pi$

$$ml^2 \ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} - mgl \alpha = 0 \xrightarrow{L} \underbrace{(ml^2 s^2 + bs - mgl)}_{\Delta} \alpha(s) = 0$$

$$\Delta = b^2 + 4m^2 l^3 g$$

jest zawsze dodatnie

niestabilny lokalnie w $\alpha = \pi$

podjęcie wektorowe:

$$ml^2 \ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl \sin \alpha = 0$$

przyjmuje się współrzędne fazowe w postaci

$$\begin{cases} \alpha = x_1 \\ \dot{\alpha} = x_2 \end{cases}$$

co prowadzi do zapisu:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{b}{ml^2} \dot{\alpha} - \frac{g}{l} \sin \alpha$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \dot{x}_2 & x_2 & x_1 \end{matrix}$$

lub w postaci wektorowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ -\frac{b}{ml^2} x_2 & -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{bmatrix}}_{f_2} \begin{matrix} f_1 \end{matrix}$$

Macierz Jakobiego: (postać macierzy Frobeniusa)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

za x_1 należy podstawić punkt równowagi.

$B=0$, ponieważ układ nie posiada sterowania !

$$\alpha = 0 \Rightarrow x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad \cos x_1^* = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{w sz. Taylora}]{\text{ale zgodnie z rozwinięciem}} \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 = x_1 - \pi \\ \Delta x_2 = x_2 - 0 \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\downarrow} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \right\}$$

przesunięcie układu współrzędnych: $\frac{d\Delta x_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + 0$.

Przykład 62. Układ nieautonomiczny (z wymuszeniem)

$$\dot{x} = f(x, u) = -\sqrt{x} + \frac{u^3}{8}$$

punkt równowagi zależy od sterowania: $f(x, u) = 0 \Rightarrow x^* = \left(\frac{(u^*)^3}{8}\right)^2$

1. przyjmujemy sterowanie $u^* = 2$, czyli linearyzacja w otoczeniu $x^* = 1$

ogólna postać równania linowego:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad N(\omega_x), \quad \underbrace{\Delta \dot{x}}_{\downarrow} = -\frac{1}{2\sqrt{x^*}} \underbrace{\Delta x}_{\downarrow} + \frac{3}{8}(u^*)^2 \underbrace{\Delta u}_{\downarrow} \quad \text{zapis bardziej precyzyjny}$$

$x^* = 1 \qquad x - x^* \qquad x - x^* \qquad u - u^*$

po podstawieniu:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2\sqrt{x^*}}x + \frac{3}{8}(u^*)^2 u \text{ reszta} = 0$$

$u^* = 2, x^* = 1$ czyli

$$\Delta \dot{x} = -\frac{1}{2}\Delta x + \frac{3}{2}\Delta u$$

2. Linearyzacja w otoczeniu $u^* = 4, x^* = \frac{u^*}{64} = \frac{4^6}{64} = \frac{2^{12}}{64} = \frac{4096}{64} = \frac{4^6}{4^3} = 4^3 = 64$

$$\Delta \dot{x} = -\frac{1}{2\sqrt{64}}\Delta x + \frac{3}{8}16\Delta u$$

$$\Delta \dot{x} = -\frac{1}{16}\Delta x + 6\Delta u$$

Wyniki z pkt. 1 i 2 znacząco się różnią, czyli model zlinearyzowany zależy od punktu x^*, u^* !

Def. Punkt równowagi dla równania różniczkowego wektorowego (autonomicznego $u=0$)

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x \in R^n \quad (11.2)$$

[Khali, Slotine, Grabowski, Mitkowski]

punkt równowagi x^* spełnia $f(x^*) = 0$, oznacza to: jeśli system uzyskał x^* (lub $x(0)=x^*$) to w nim pozostanie w przyszłości

- stabilność jest związana z ciągłością i ograniczonością rozwiązań

- w definicji stabilności wykorzystuje się rozwiązanie $x(t)$ równania

(11.2) $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, $x(t) \in R^n$, $t \in [t_0, \infty] = T$, $x(t_0) = x_0$ warunek (stan) początkowy-jest dany najczęściej $t_0=0$

Def. (Lapunow 1892) rozwiązanie $\tilde{x}(t, x_0)$ równania różniczkowego (11.2) jest stabilne w sensie Lapunowa $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \in T \quad \exists \delta > 0 : \underbrace{\|x(t_0)\|}_{x_0} < \delta \Rightarrow \|\tilde{x}(t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$

Komentarz: jeśli stan początkowy x_0 będzie znajdował się w przedziale $\pm \delta$ i można znaleźć skończoną wartość ε dla dowolnego czasu t to układ jest stabilny.

Zakres warunku początkowego [trochę inaczej niż u Mitkowskiego]

Def. Rozwiązanie \tilde{x} jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa \Leftrightarrow

1) \tilde{x} jest stabilne w sensie Lapunowa

$$2) \forall t_0 \in T \quad \exists \Delta > 0 : \|x(t_0)\| < \Delta \Rightarrow \|\tilde{x}(t)\| \xrightarrow{\text{dla } t \rightarrow \infty} 0$$

Przykład:

Stabilność stabilność asymptotyczna niestabilność

Def. Zbiór przyciągania (atrakcji) D_{t_0}

Jeśli $\underbrace{x(t_0)}_{x_0} \in D_{t_0}$ i $\tilde{x}(t_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ to D_{t_0} nazywa się obszarem (zbiorem) atrakcji

Def. Jeśli $D_{t_0} \in R^n$ to układ jest globalnie asymptotycznie stabilny

Przykład : Obszar atrakcji w przestrzeni R^2 $\left(x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)$

WNIOSEK: System dynamiczny jest stabilny jeśli jego wszystkie rozwiązania są stabilne.

11.3. II metoda LAPUNOWA

Wykorzystanie energii układu dynamicznego do badania jego stabilności jest trudne, zwłaszcza jeśli opis układu jest podany w postaci równań. W miejsce energii Lapunow wprowadził funkcjonal $V(x)$ - funkcjonal Lapunowa.

W zależności od właściwości tej funkcji i jej pochodnej (funkcja maleje, to pochodna jest ujemna) względem czasu można oceniać czy układ jest stabilny w punkcie równowagi.

Głównym problemem stosowania tej metody jest znalezienie właściwego funkcjonu $V(x)$.

Zakładamy, że punktem równowagi jest $x = 0$.

Wiemy, że funkcjonal powinien maleć (być minimalizowany) w całym obszarze z wyjątkiem $x = 0$ (tu już osiągnął minimum), czyli $\dot{V}(s) < 0$ dla $x \neq 0$.

Suma energii kinetycznych i potencjalnych w układzie jest dodatnia, więc $V(x) > 0$ dla $x \neq 0$ i $V(0) = 0$.

Tw.1

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

$f(0) = 0$ - punkt równowagi $x = 0$

oraz

$\exists V(x) > 0 \quad V(x) \in R^1$ jest klasy C^{-1} $x \in D \setminus \{0\}$ $D \subset R^n$, D - otoczenie zera (obszar otwarty), $\{0\} \Rightarrow x = 0$

$\dot{V}(x) < 0 \ x \in D \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$, $\dot{V}(0) = 0$ to $x = 0$ jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

Tw.2

$\exists V(x) > 0 \ V(x) \in R$ i jest klasy C^{-1} , $x \in D \setminus \{0\}$, $D \subset R^n$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \ x \in D \setminus \{0\}, \ V(0) = 0, \ \dot{V}(0) = 0$$

to $x = 0$ jest stabilnym punktem równowagi

Tw.1 i Tw.2 różnią się znakiem określenia pochodnej.

Tw.3

Jeśli $D = R^n$ (cała przestrzeń) oraz $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ to $x = 0$ jest globalnie asymptotycznym punktem równowagi.

Jeśli $c > 0$ takie, że zbiór D_c jest ograniczony i zawiera się w D , gdzie D_c oznacza składową zbioru poziomowego $\{x \in D : V(x) < c\}$ otaczającą $x = 0$, to D_c jest estymatą (przybliżeniem) obszaru atrakcji dla $x = 0$.

Zasady obliczania $\dot{V}(x)$

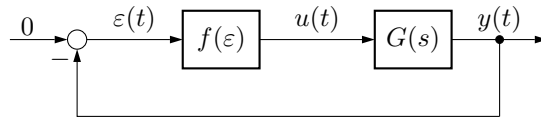
$$\dot{V}(x) = \underbrace{\frac{dV}{dx}}_{\nabla V^T} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{\dot{x}=(x,t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x, t) \\ f_2(x, t) \\ \vdots \\ f_n(x, t) \end{bmatrix}$$

Rozdział 12

Stabilność układu Lurie

12.1. Układy regulacji z jedną nieliniowością

Przedmiotem analizy jest układ przedstawiony na rysunku 12.1.



Rysunek 12.1. Schemat nieliniowego układu regulacji

Zakłada się, że funkcja f (regulator) jest ciągła, $f(0) = 0$ oraz *lokalnie lipschitzowska*.

Lokalny warunek Lipschitza (Grabowski 1999): dla dowolnego zwartego zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ istnieje liczba $L = L(\Omega) > 0$ taka, że

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega$$

wtedy problem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t)] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (12.1)$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x(\cdot, x_0)$ określone na prawym maksymalnym przedziale istnienia $[0, t(x_0))$.

Transmitancję $G(s)$ obiektu regulacji można przedstawić w postaci równania stanu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}, y(t) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (12.2)$$

czyli

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (12.3)$$

W badaniu stabilności pomija się wartość zadaną $y_{ref} = 0$ i analizuje się układ zamknięty dla zerowego punktu równowagi (wpływ warunków początkowych x_0). Wówczas zamknięty układ regulacji można opisać równaniem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bf[\underbrace{Cx(t)}_{y(t)}], \quad \text{gdzie } u = -f(y) \quad (12.4)$$

Równanie (12.4) nazywane jest **układem Lurie**.

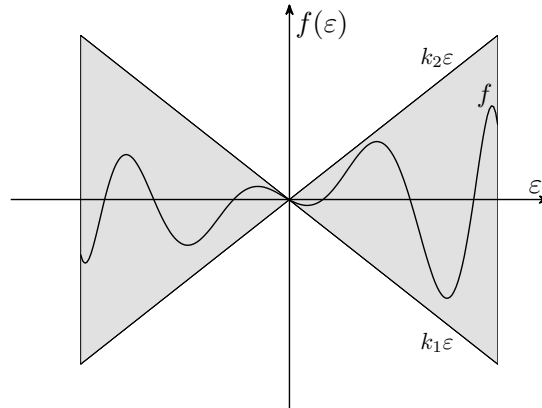
Dla układu Lurie rozważa się *absolutną stabilność* (Haddad & Chellaboina 2008), która gwarantuje asymptotyczną stabilność zamkniętego układu regulacji z jednym elementem nieliniowym (często umieszczanym w sprzężeniu zwrotnym) oraz z liniową dynamiką. Twierdzenia wyznaczające absolutną stabilność układu Lurie stanowią warunek wystarczający i mogą służyć do określenia odpornej stabilności (robust stability) pewnej klasy układów dynamicznych o niepewnych (zmieniających się) parametrach.

W niniejszym rozdziale zaprezentowane zostały metody, które pozwalają rozwiązać następujące zadanie:

Problem 12.1. W jakim sektorze (zakresie) musi znajdować się funkcja nieliniowa $f(\varepsilon) = f(y)$ aby układ zamknięty był globalnie asymptotycznie stabilny?

Sektor $[k_1, k_2]$ (rys. 12.2) definiuje się jako:

$$k_1 < \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} < k_2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(0) = 0 \quad (12.5)$$



Rysunek 12.2. Sektor

Sektor, w którym zawiera się funkcja f , gwarantuje globalną asymptotyczną stabilność układu zamkniętego. Do jego wyznaczenia można korzystać z jednego z 4 twierdzeń.

12.1.1. Hipoteza Ajzermana (1949r.)

Można uznać funkcję $f(\varepsilon)$ za wzmocnienie K i zgodnie z twierdzeniem Hurwitza wyznaczyć obszar stabilności (sektor Hurwitza) dla wielomianu charakterystycznego $M(s) = 1 + KG(s)$ układu zamkniętego, czyli $K \in (k_1, k_2)$.

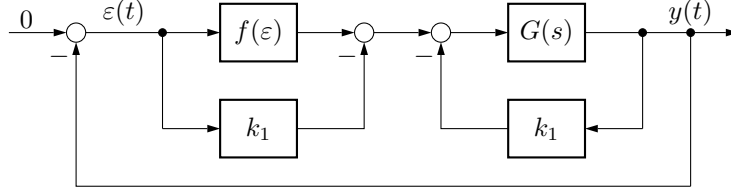
Twierdzenie 12.2. (Hipoteza Ajzermanna) (Grabowski 1996, Grabowski 1999, Sastry 1999) Jeśli nieliniowa funkcja leży w sektorze $k_1 < \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} < k_2$ to układ zamknięty jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Zastosowanie tego twierdzenia byłoby najprostsze, ale niestety nie zawsze jest ono prawdziwe.

12.1.2. Przesunięcie widma

W twierdzeniach dotyczących absolutnej stabilności użyteczne jest *przesunięcie widma* (biegunów) części liniowej układu Lurie i wykorzystuje się je w przypadku, gdy bieguny układu leżą na

osi urojonej (Ackermann & Blue 2002, Grabowski 1999, Haddad & Chellaboina 2008, Khalil 1996, Sastry 1999). Zasadę przekształcenia przedstawiono na rysunku 12.3.



Rysunek 12.3. Przesunięcie widma

Zastosowanie takiego przekształcenia wiąże się z wyznaczeniem transmitancji części liniowej w postaci

$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)}$$

i wówczas badanie stabilności układu zamkniętego przeprowadza się dla transmitancji $G_T(s)$ i w wyniku uzyskuje się sektor $[0, k]$ dla nieliniowej funkcji w postaci $\hat{f}(\varepsilon) = f(\varepsilon) - ky$. Z tego powodu konieczny jest powrót do pierwotnej postaci układu (rys. 12.1) i przeliczenie sektora do postaci $[k_1, \underbrace{k + k_1}_{k_2}]$.

12.1.3. Kryterium koła

Kryterium koła jest rozszerzeniem kryterium Nyquista. W kryterium koła zakłada się, że $G(s)$ nie ma wartości własnych (biegunów) na osi urojonej, a jeśli są to należy wykorzystać procedurę przesunięcia widma. Definiuje się tu okrąg $D(k_1, k_2)$, gdzie $-\frac{1}{k_1}$ i $-\frac{1}{k_2}$, są punktami przecięcia osi rzeczywistej. Kryterium koła dopuszcza nieliniowości, których argumentem oprócz sygnału ε jest czas t : $f(\varepsilon, t)$.

Twierdzenie 12.3. (Khalil 1996, Sastry 1999) *Jeśli część liniowa $G(s)$ układu Lurie posiada m biegunów w prawej półpłaszczyźnie i żadnego bieguna na osi urojonej oraz funkcja nieliniowa $f(\varepsilon, t)$ znajduje się w sektorze $[k_1, k_2]$ to system zamknięty jest globalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy gdy:*

1. *Plot Nyquista nie przechodzi przez punkt $-\frac{1}{k_1}$ i okrąży go m razy w kierunku matematycznie dodatnim.*
2. *Spełniona jest nierówność częstotliwościowa*

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1 + k_2 G(j\omega)}{1 + k_1 G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \quad (12.6)$$

W zrozumieniu kryterium koła ważna jest interpretacja geometryczna i można wyróżnić tu 4 przypadki (Haddad & Chellaboina 2008, Khalil 1996, Sastry 1999, Slotine & Weiping 1991):

1. Jeśli $k_2 > k_1 = 0$, to nierówność częstotliwościowa (12.6) przyjmuje postać

$$\operatorname{Re} [1 + k_2 G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \quad (12.7)$$

lub

$$\frac{1}{k_2} + \underbrace{\operatorname{Re}[G(j\omega)]}_{P(\omega)} > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \quad (12.8)$$

czasami warunek ten nazywany jest kryterium Lurie (Bhattacharyya et al. 1995). W tym przypadku plot Nyquista transmitancji $G(s)$ powinien leżeć prawej strony prostej $P = -\frac{1}{k_2}$.

2. Jeśli $k_2 > k_1 > 0$, to nierówność częstotliwościowa (12.6) przyjmuje postać

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\frac{1}{k_2} + G(j\omega)}{\frac{1}{k_1} + G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \quad (12.9)$$

i plot Nyquista transmitancji $G(s)$ nie może przechodzić przez okrąg $D(k_1, k_2)$ oraz powinien go okrążyć m razy w kierunku matematycznie dodatnim.

3. Jeśli $k_2 > 0 > k_1$, to nierówność częstotliwościowa (12.6) przyjmuje postać

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\frac{1}{k_2} + G(j\omega)}{\frac{1}{k_1} + G(j\omega)} \right] < 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \quad (12.10)$$

Warunek ten oznacza, że transmitancja $G(s)$ jest asymptotycznie stabilna i jej plot Nyquista leży wewnątrz okręgu $D(k_1, k_2)$.

4. Jeśli $0 \geq k_2 > k_1$, to należy zastąpić $G(s)$ przez $-G(s)$, k_1 przez $-k_1$ oraz k_2 przez $-k_2$.

12.1.4. Kryterium Popova

Kryterium Popova pozwala wyznaczyć największy sektor (12.5), w którym może znajdować się nieliniowa funkcja f , ale jest obarczone dodatkowym ograniczeniem w stosunku do kryterium koła: nieliniowa funkcja f musi być niezależna od czasu.

Twierdzenie 12.4. Jeśli $G(s)$ jest elementem asymptotycznie stabilnym i funkcja $f(\varepsilon)$ leży w sektorze $[0, k_P]$ oraz istnieje $q \geq \mathbb{R}$ i $-\frac{1}{q} \notin \lambda$ (gdzie λ jest zbiorem wszystkich biegunów $G(s)$), takie że spełniona jest nierówność częstotliwościowa

$$\frac{1}{k_P} + \underbrace{\operatorname{Re}[G(j\omega)]}_{P(\omega)} - q\omega \underbrace{\operatorname{Im}[G(j\omega)]}_{Q(\omega)} > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \quad (12.11)$$

Funkcję $\tilde{G}(j\omega) = P(\omega) + j\omega Q(\omega)$ nazywa się zmodyfikowaną charakterystyką widmową Popova.

Przykład 63. Transmitancja $G(s)$ jest asymptotycznie stabilna

Transmitancja elementu nieminimalnofazowego:

$$G(s) = \frac{-s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$k_1 = 0, k_2 = 2$$

przesunięcie widma $k_1 = -0.5$, $k_2 = 2$ $q = -0.33$ dla obu przypadków.

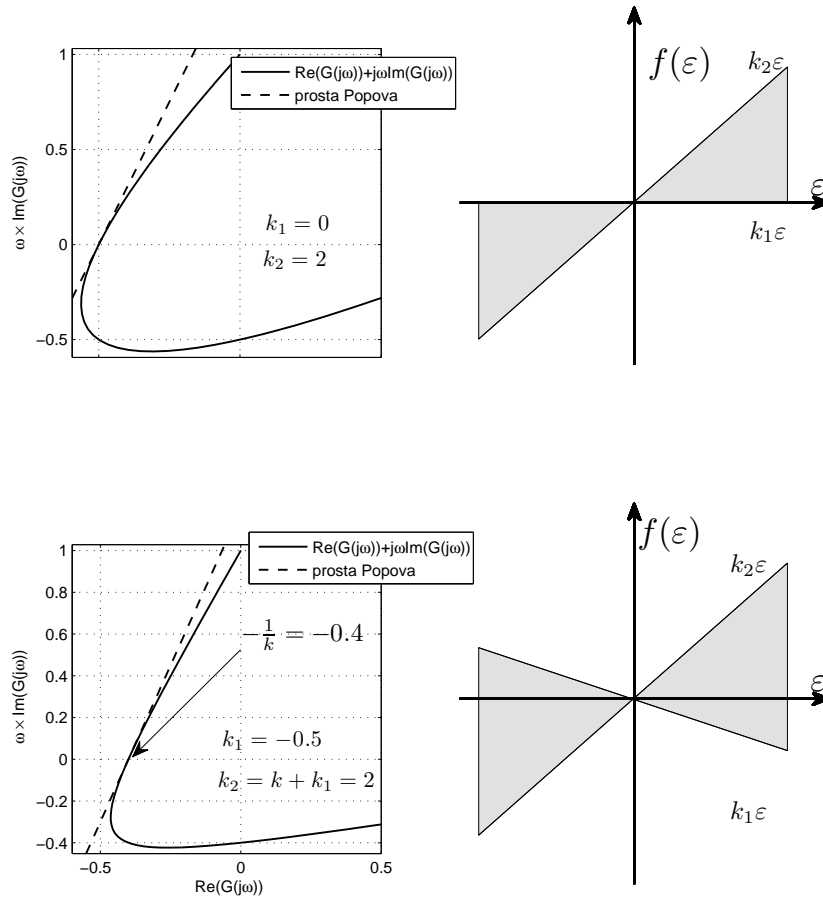
Ostatecznie dla $k_1 > -1$, układ Lurie jest absolutnie stabilny dla nieliniowości $f(\varepsilon)$ zawierającej się w sektorze $-1 < \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} < 2$.

Przykład 64. Część liniowa $G(s)$ układu jest niestabilna

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 - 2s + 1} = \frac{2s + 1}{(s - 1)^2}$$

Należy zastosować przesunięcie widma. Zmodyfikowana część liniowa jest asymptotycznie stabilna dla $k_1 > 1$. W dalszych obliczeniach wybiera się $k_1 = 1.102$.



Rysunek 12.5. Kryterium Popova

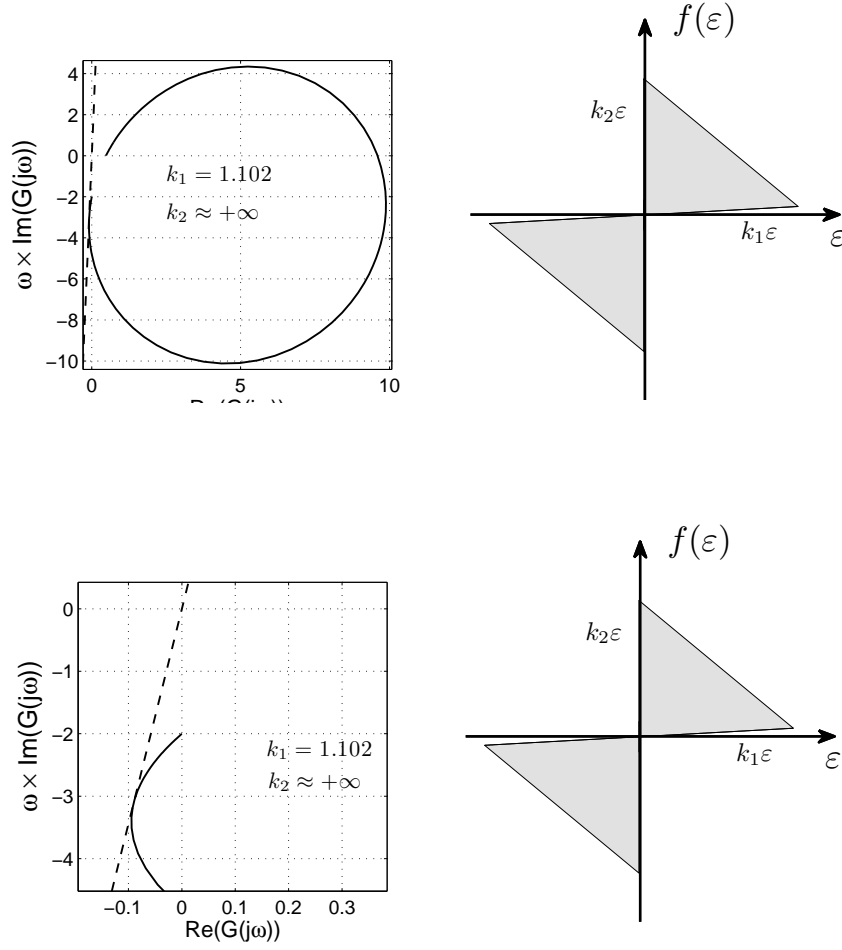
Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 64 i 64.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że układ Lurie jest absolutnie stabilny dla nieliniowości $f(\varepsilon)$ zawierającej się w sektorze $1 < \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} < +\infty$.

12.2. Przykłady obliczeniowe - kryterium koła

Przykład 65. Dla nieminimalnofazowej transmitancji $G(s) = \frac{-s+1}{s^2+2s+1}$ układu otwartego podstawi się za $s = j\omega$ i otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{-j\omega+1}{-\omega^2+2j\omega+1} \cdot \frac{(-\omega^2+1)-2j\omega}{(-\omega^2+1)-2j\omega} = \frac{-\omega^2+1-2\omega^2+j(\omega^3-\omega-2\omega)}{(-\omega^2+1)^2+4\omega^2} = \\
 &= \underbrace{\frac{-3\omega^2+1}{\omega^4+2\omega^2+1}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{\omega(\omega^2-3)}{\omega^4+2\omega^2+1}}_{Q(\omega)}
 \end{aligned} \tag{12.12}$$



Rysunek 12.7. Kryterium Popova

Aby zastosować kryterium koła należy dokonać analizy funkcji (12.12) tj. granice w $\omega = 0^+$ i $\omega = +\infty$, miejsca zerowe, wartości maksymalne lub suprema.

Granice funkcji $P(\omega)$ oraz $Q(\omega)$ wpisuje się do pierwszej i ostatniej kolumny tabeli 12.1. Następnie należy wyznaczyć miejsca zerowe:

$$Q(\omega_q) = 0 \Rightarrow \omega^2 - 3 = 0 \Rightarrow \omega_{q1,2} = \pm\sqrt{3}$$

i wybiera się $\omega_q = \sqrt{3}$. Wówczas wartość funkcji P dla ω_q wynosi:

$$P(\omega_q) = \frac{-9 + 1}{9 + 6 + 1} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

Podobnie postępuje się dla miejsc zerowych funkcji $P(\omega)$:

$$P(\omega_p) = 0 \Rightarrow -3\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_{p1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

i do dalszych obliczeń wybiera się $\omega_p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc

$$Q(\omega_p) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{3}{9}-3)}{\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{8}{3})}{\frac{1}{9}+\frac{6}{9}+1} = \frac{-\frac{8\sqrt{3}}{9}}{\frac{16}{9}} = -\frac{8\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{9}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aby wyznaczyć wartość maksymalną plotu Nyquista należy wyznaczyć charakterystykę amplitudową:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\frac{9\omega^4 - 6\omega^2 + 1 + \omega^6 - 6\omega^4 + 9\omega^4}{(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)^2}} = \sqrt{\frac{\omega^6 + 3\omega^4 + 3\omega^2 + 1}{(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\omega^2 + 1)^3}{(\omega^2 + 1)^4}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \end{aligned} \quad (12.13)$$

Charakterystyka $A(\omega)$ nie posiada ekstremum, ale posiada supremum:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} A(\omega) = A(0) = 1$$

W tabeli 12.1 zamieszczono zestawienie punktów charakterystycznych funkcji $(P(\omega), Q(\omega))$, na podstawie których wykreśla się charakterystykę amplitudowo-fazową oraz jej odbicie względem osi rzeczywistych $P(\omega)$. W wyniku uzyskuje się plot Nyquista.

ω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
P	1	0	$-\frac{1}{2}$	0^-
Q	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0^+

Tabela 12.1. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

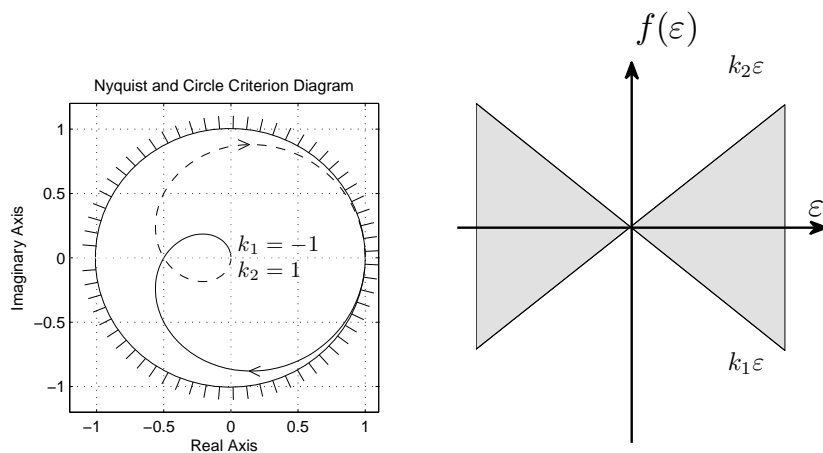
Wynika stąd, że plot Nyquista (układ stabilny) można umieścić w kole o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$, co pozwala na wyliczenie sektora $k_1 = -1$ i $k_2 = 1$ (rys. 12.8), ale z lewej strony plotu pozostaje dużo wolnej przestrzeni. Oznacza to, że uzyskany wynik nie jest dokładny i należy go poprawić. W tym celu należy wyliczyć najmniejszą wartość funkcji $P(\omega)$.

Dodatkowo można zauważyć, że funkcja (12.13) jest identyczna jak dla obiektu inercyjnego 1. rzędu (4.8) omówionego na str. 56. Fakt ten oczywiście nie oznacza, że właściwości funkcji $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ są identyczne jak dla elementu inercyjnego. Z tego powodu należy wyliczyć wartość minimalną funkcji $P(\omega)$ czyli rozwiązuje się zadanie dla $k_1 = 0$, które sprowadza się do wyznaczenia $\min(P(\omega)) \Rightarrow \frac{dP}{d\omega} = 0$ oraz postawia się $\omega^2 = \Omega$:

$$\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} = \left(\frac{-3\Omega + 1}{\Omega^2 + 2\Omega + 1} \right)' = \frac{-3(\Omega^2 + 2\Omega + 1) - (2\Omega + 2)(-3\Omega + 1)}{(\Omega^2 + 2\Omega + 1)^2}$$

wynika stąd, że $\min(P(\Omega))$ jest równe minimum licznika:

$$\begin{aligned} -3\Omega^2 - 6\Omega - 3 + 6\Omega^2 + 4\Omega - 2 &= 3\Omega^2 - 2\Omega - 5 = 0 \\ \Delta &= 4 + 60 = 64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8 \\ \Omega_1 &= \frac{2-8}{6} = -1 \\ \Omega_2 &= \frac{2+8}{6} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$



Rysunek 12.8. Kryterium koła dla przypadku $k_1 = -\sup_{\omega \in \mathbb{R}} A(\omega)$

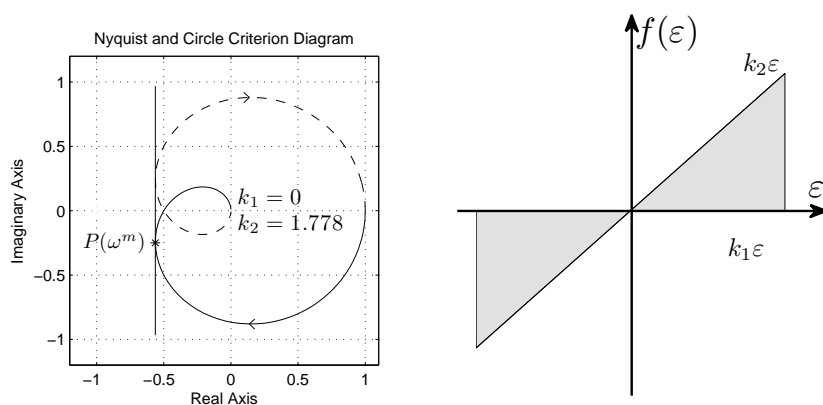
Wracając do zadania podstawowego uzyskuje się:

$$\Omega = \omega^2 \Rightarrow \omega_{1,2}^m = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

z uwagi na fakt, że obliczenia prowadzone są dla pulsacji dodatnich jako wynik wybiera się $\omega^m = \sqrt{\frac{5}{3}}$ i uzyskuje się

$$P(\omega^m) = \frac{-3 \cdot \frac{5}{3} + 1}{\frac{25}{9} + \frac{10}{3} + 1} = \frac{-4}{\frac{25+30+9}{9}} = \frac{-36}{64} = -0.5625$$

Na rysunku 12.9 została przedstawiona interpretacja geometryczna dla tego przypadku.



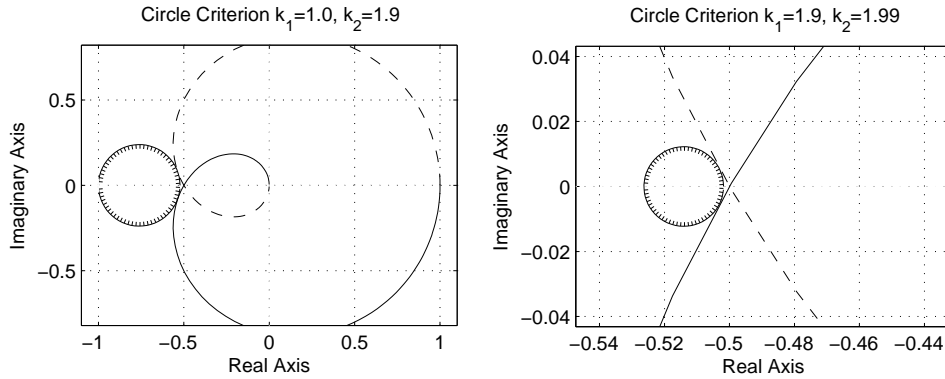
Rysunek 12.9. Kryterium koła dla przypadku $k_1 = 0$

czyli:

$$k_2 = -\frac{1}{-0.5625} = 1.7778$$

Więc dla $k_1 = 0$ układ Lurie jest stabilny dla nieliniowości zawierających się w sektorze $(0, 1.7778)$.

Uwzględniając dwa rozważone przypadki można określić sektor, w którym może znajdować się nieliniowość $f(\epsilon)$, jako unię sektorów z rysunków 12.8 oraz 12.9 i ostatecznie uzyskuje się sektor $(-1, 1.7778)$. Takie podejście jest najpopularniejsze, ale można dodatkowo wyznaczyć ciąg okręgów $D(k_1, k_2)$ z lewej strony plotu Nyquista (wykorzystanie przypadku drugiego tj. $k_2 > k_1 > 0$), które pozwolą na zwiększenie górnej granicy sektora do wartości $k_2 = 2$. Interpretacja geometryczna została przedstawiona na rysunku 12.10.



Rysunek 12.10. Kryterium koła dla przypadku $k_1 = 1.0$ i $k_2 = 1.9$

Przedstawione wyniki najlepiej jest wyznaczać numerycznie (Taylor & Chan 1997), ponieważ obliczenia analityczne są tu dużo bardziej skomplikowane niż w pierwszych dwóch przypadkach.

Wniosek: Z unii czterech powyższych sektorów wynika, że nieliniowość $f(\epsilon)$ może znajdować się w sektorze $(-1, 2)$. Z uzyskanego wyniku widać, że górna granica k_2 sektora jest równa maksymalnemu wzmocnieniu (zapasowi modułu GM) wynikającemu z odległości punktu $P(\omega_q) = 0$ od punktu krytycznego $(-1, j0)$.

Przykład 66. Układ otwarty o transmitancji $G(s) = \frac{2s+1}{s^2-2s+1} = \frac{2s+1}{(s-1)^2}$ jest niestabilny i posiada dwa bieguny w prawej otwartej półpłaszczyźnie ($m = 2$), oznacza to, że charakterystyka musi okrążyć wyznaczony okrąg dwa razy. **Należy pamiętać o dodatnim kierunku okrążania.**

Transmitancja widmowa jest w postaci

$$G(j\omega) = \frac{2j\omega + 1}{(-\omega^2 + 1) - 2j\omega} \cdot \frac{(-\omega^2 + 1) + 2j\omega}{(-\omega^2 + 1) + 2j\omega} = \underbrace{\frac{-5\omega^2 + 1}{(-\omega^2 + 1)^2 + 4\omega^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-2\omega^3 + 4\omega}{(-\omega^2 + 1)^2 + 4\omega^2}}_{Q(\omega)}$$

i w dalszej kolejności postępuje się identycznie jak w poprzednim przykładzie (należy wpisać otrzymane wyniki do tabeli 12.2):

$$P(\omega_p) = 0 \Rightarrow -5\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega_{p1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

wybiera się wartość dodatnią $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i dalej oblicza punkt przecięcia charakterystyki z osią urojonych $Q(\omega)$

$$Q(\omega_p) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{2}{5} + 4)}{(-\frac{1}{5} + 1)^2 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{18}{5}}{\frac{16}{25} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{25}{36} = \frac{2,5}{\sqrt{5}} = 1,118$$

a pulsacja ω_q dla miejsca zerowego funkcji $Q(\omega)$ wynosi

$$Q(\omega_q) = 0 \Rightarrow \omega(-2\omega^2 + 4) = 0 \Rightarrow \omega_{q1,2} = \pm\sqrt{2}$$

i punkt przecięcia osi rzeczywistych dla $\omega_q = \sqrt{2}$ jest równy:

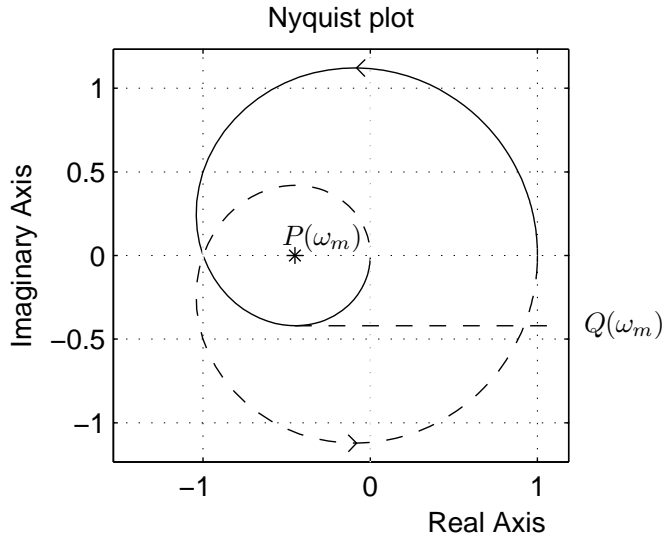
$$P(\omega_q) = \frac{-5 \cdot 2 + 1}{(-2 + 1)^2 + 8} = -\frac{9}{9} = -1$$

W tabeli 12.2 zestawione są punkty charakterystyczne funkcji $P(\omega)$ i $Q(\omega)$.

ω	0	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
P	1	0	-1	0^-
Q	0	1, 12	0	0^-

Tabela 12.2. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

Po wykreśleniu plotu Nyquista widać (rys. 12.11), że okrąży on obszar w kierunku matematycznie dodatnim, w którym należy wstawić okrąg.



Rysunek 12.11. Plot Nyquista

Jednym z najprostszych rozwiązań jest wrysowanie okręgu o środku w punkcie $(P(\omega_m), 0)$ i promieniu $r = |\min Q(\omega)|$. Z rysunku widać, że położenie punktu $\min Q(\omega)$ oraz zachodzi zależność $\omega_m > \omega_q$ (wtedy nie trzeba liczyć drugiej pochodnej). Pochodna funkcji $Q(\omega)$ jest równa:

$$\frac{dQ}{d\omega} = \left(\frac{-2\omega^2 + 4\omega}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} \right)' = \frac{2\omega^6 - 16\omega^4 - 14\omega^2 + 4}{(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)^2} = 0$$

i dalej

$$\Omega = \omega^2 \Rightarrow \Omega^3 - 8\Omega^2 - 7\Omega + 2 = 0$$

Pierwiastki wielomianu trzeciego stopnia należy wyznaczyć numerycznie:

`>>roots([1 8 7 2])`

i otrzymuje się (pamiętając, że musi być spełniony warunek $\omega_m > \omega_q = \sqrt{2}$):

$\Omega_1 = -1$ ten pierwiastek należy odrzucić, ponieważ jest ujemny.

$\Omega_2 = 0,23 \Rightarrow \omega_m = 0,48$, ponieważ $0,48 < \omega_q$ – również wynik ten należy odrzucić

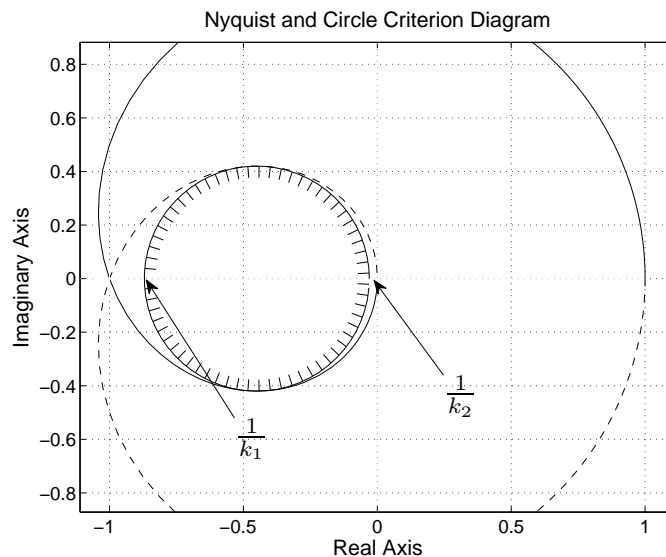
$\Omega_3 = 8,78 \Rightarrow \omega_m = 2,96$ wynik ten spełnia założenie $\omega_m > \omega_q$.

W dalszej kolejności wylicza się środek i promień okręgu wpisanego w plot Nyquista:

$$P(\omega_m) = -0,45$$

$$Q(\omega_m) = -0,42 \Rightarrow r = 0,42$$

i po uzupełnieniu plotu Nyquista (rys. 12.11) o obliczony okrąg uzyskuje się interpretację geometryczną jak na rysunku 12.12.



Rysunek 12.12. Kryterium koła

Czyli ostatecznie uzyskuje sektor (k_1, k_2) jest równy:

$$k_2 = -\frac{1}{-0.45 + 0.42} = 33,33$$

$$k_1 = -\frac{1}{-0.45 - 0.42} = 1,45$$

Przykład 67. Transmitancja obiektu astatycznego pierwszego stopnia $G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s}$

Transmitancja widmowa jest w postaci

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{j\omega + 1}{-\omega^2 + 2j\omega} \cdot \frac{-\omega^2 - 2j\omega}{-\omega^2 - 2j\omega} = \frac{-j\omega^3 - \omega^2 + 2\omega^2 - 2j\omega}{\omega^4 + 4\omega^2} \\ &= \frac{\omega^2(-1+2)}{\omega^2(\omega^2+4)} + j\frac{\omega(-\omega^2-2)}{\omega(\omega^3+4\omega)} = \underbrace{\frac{1}{\omega^2+4}}_{P(\omega)} + j\underbrace{\frac{-\omega^2-2}{\omega^3+4\omega}}_{Q(\omega)} \end{aligned}$$

Wyznacza się granice dla $\omega = 0$

$$P(\omega = 0) = \frac{1}{0^2 + 4} = \frac{1}{4}$$

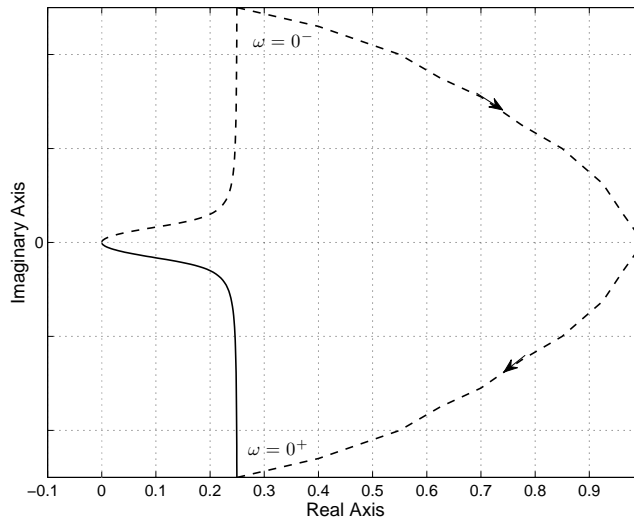
$$Q(\omega = 0) = \frac{-0^2 - 2}{0^3 + 4 \cdot 0} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

i w identyczny sposób dla $\omega = +\infty$, a wyniki wpisuje się do tabeli 12.3.

ω	0	∞
P	$\frac{1}{4}$	0^+
Q	$-\infty$	0^-

Tabela 12.3. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

Plot Nyquista nie posiada miejsc zerowych i został przedstawiony na rysunku 12.13.



Rysunek 12.13. Kryterium koła

W efekcie daje następujący sektor absolutnej stabilności $k_1 = 0, k_2 = \infty$.

Przykład 68. Transmitancja układu otwartego $G(s) = \frac{-s+1}{s^2+2s}$ jest elementem astatycznym stabilnym ale nieminimalnofazowym (1 zero w prawej półpłaszczyźnie) – okrąg na zewnątrz (z lewej strony) plotu.

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega + 1}{-\omega^2 + 2j\omega} \cdot \frac{-\omega^2 - 2j\omega}{-\omega^2 - 2j\omega} = \frac{j\omega^3 - \omega^2 - 2\omega^2 - 2j\omega}{\omega^4 + 4\omega^2} = \frac{-3\omega^2}{\omega^4 + 4\omega^2} + j \frac{\omega^3 - 2\omega}{\omega^4 + 4\omega^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{-3}{\omega^2 + 4}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{\omega^3 - 2}{\omega^3 + 4\omega}}_{Q(\omega)}$$

W pierwszym etapie granice funkcji P i Q wpisuje się do tabeli 12.4, a następnie wyznacza miejsca zerowe:

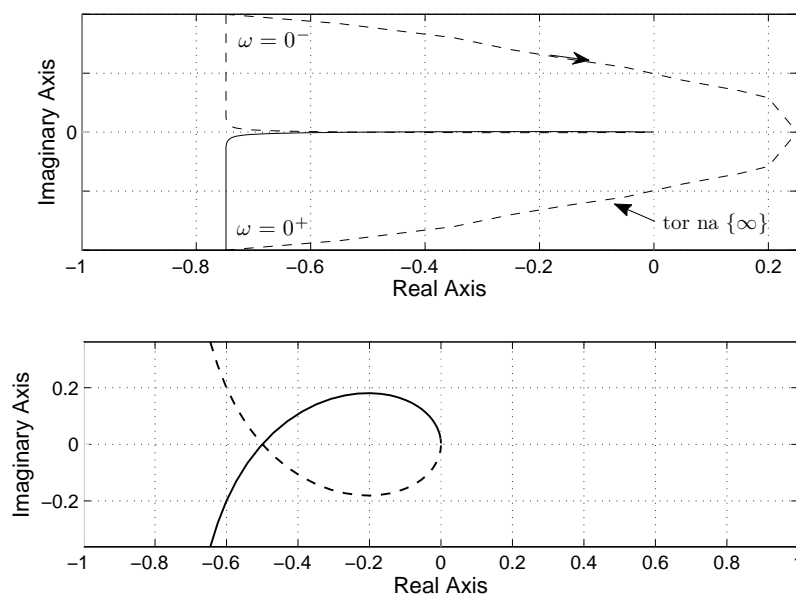
$$Q(\omega_q) = 0 \Rightarrow \omega^2 - 2 = 0 \Rightarrow \omega_{q1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$P(\omega_q = \sqrt{2}) = \frac{-3}{2+4} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

ω	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
P	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0^-
Q	$-\infty$	0	0^+

Tabela 12.4. Tabela punktów charakterystyki częstotliwościowej

Z tabeli wynika, że infimum funkcji P wynosi $-\frac{3}{4}$ i można wyznaczyć sektor jako $k_1 = 0$ i $k_2 = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$.



Rysunek 12.14. Kryterium koła

Rozdział 13

Transformacja \mathcal{Z}

Przekształcenie \mathcal{Z} , niezbędne do określania równań opisujących sygnały dyskretne, jest zdefiniowane przez następującą sumę

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_p) z^{-k} = \mathcal{Z}[f(k)],$$

gdzie $f(k)$ jest dyskretną wersją funkcji $f(t)$.

Podstawowe właściwości przekształcenia \mathcal{Z} to:

1. Mnożenie funkcji przez stałą:
 $\mathcal{Z}[af(k)] = a\mathcal{Z}[f(k)] = aF(z)$
2. Liniowość:
Jeśli $x(k) = \alpha f(k) + \beta g(k)$ to $\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \alpha F(z) + \beta G(z)$
3. Mnożenie funkcji $f(k)$ przez a^k :
 $\mathcal{Z}[a^k f(k)] = F(a^{-1}z)$
4. Przesunięcie:
 - opóźnienie czasowe
 $\mathcal{Z}[f(k - nT_p)] = z^{-n}F(z)$
 - wyprzedzenie czasowe
 $\mathcal{Z}[f(k + nT_p)] = z^n F(z)$
5. Translacja
 $\mathcal{Z}[e^{\mp at} f(t)] = F(e^{\pm aT_p} z)$
6. Twierdzenie graniczne o transformacie \mathcal{Z} :

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

$$H(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

G(s)	H(z)
$\frac{1}{s}$	$\frac{T_s}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_s^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^m}$	$\frac{z-1}{z} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a^m} \left(\frac{z}{z-e^{-aT_s}} \right)$
e^{-sh}	z^{-1}
$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1-\exp(-aT_s)}{z-\exp(-aT_s)}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$b_1 = \frac{1}{a}(aT_s - 1 + e^{-aT_s}) \quad b_2 = \frac{1}{a}(1 - e^{-aT_s} - aT_s e^{-aT_s})$ $a_1 = -(1 + e^{-aT_s}) \quad a_2 = e^{-aT_s}$
$\frac{a^2}{(s+a)^2}$	$b_1 = 1 - e^{-aT_s}(1 + aT_s) \quad b_2 = e^{-aT_s}(e^{-aT_s} + aT_s - 1)$ $a_1 = -2e^{-aT_s} \quad a_2 = e^{-2aT_s}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{(z-1)T_s e^{-aT_s}}{(z-e^{-aT_s})^2}$
$\frac{ab}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{b(1-e^{-aT_s})-a(1-e^{-bT_s})}{b-a}$ $b_2 = \frac{a(1-e^{-bT_s})e^{-aT_s}-b(1-e^{-aT_s})e^{-bT_s}}{b-a}$ $a_1 = -(e^{-aT_s} + e^{-bT_s}) \quad a_2 = e^{-(a+b)T_s}$
$\frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{e^{-bT_s}-e^{-aT_s}+(1-e^{-bT_s})\frac{c}{b}-(1-e^{-aT_s})\frac{c}{a}}{b-a}$ $b_2 = \frac{c}{ab}e^{-(a+b)T_s} + \frac{b-c}{b(a-b)}e^{-aT_s}\frac{c-a}{a(a-b)}e^{-bT_s}$ $a_1 = -e^{-aT_s} - e^{-bT_s} \quad a_2 = e^{-(a+b)T_s}$
$\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2}$	$b_1 = 1 - \alpha \left(\beta + \frac{\zeta\omega_0}{\omega} \gamma \right) \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$ $\zeta < 1$ $b_2 = \alpha^2 + \alpha \left(\frac{\zeta\omega_0}{\omega} \gamma - \beta \right) \quad \alpha = e^{-\zeta\omega_0 T_s}$ $a_1 = -2\alpha\beta \quad \beta = \cos(\omega T_s)$ $a_2 = \alpha^2 \quad \gamma = \sin(\omega T_s)$

Dodatek A

Wielomiany przedziałowe

W twierdzeniu Kharitonova bierze się pod uwagę rzeczywisty wielomian przedziałowy w postaci:

$$P(s) = [\underline{a}_n, \bar{a}_n]s^n + [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}]s^{n-1} + \dots + [\underline{a}_1, \bar{a}_1]s + [\underline{a}_0, \bar{a}_0] \quad (\text{A.1})$$

gdzie $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ są zakresem zmian współczynników i $\underline{a}_n > 0$.

Przy uwzględnieniu zmienności wszystkich współczynników wielomianu (A.1) uzyskuje się 2^{n+1} wielomianów wierzchołkowych. Aby system był stabilny, to wszystkie wielomiany powinny być wielomianami hurwitzowskimi. Poniższe twierdzenie ogranicza badanie stabilności jedynie do 4 wielomianów granicznych (Bhattacharyya et al. 1995, Białas 2002).

Twierdzenie A.1. (Twierdzenie Kharitonova) *Każdy wielomian $P(s)$ w postaci (A.1) jest hurwitzowski wtedy i tylko wtedy, gdy cztery wielomiany Kharitonova (graniczne) są stabilne w sensie Hurwitza:*

$$\begin{aligned} p_1(s) = & \underline{a}_n s^n + \underline{a}_{n-1} s^{n-1} + \bar{a}_{n-2} s^{n-2} + \bar{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & + \underline{a}_{n-4} s^{n-4} + \underline{a}_{n-5} s^{n-5} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} p_2(s) = & \bar{a}_n s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \underline{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & + \bar{a}_{n-4} s^{n-4} + \bar{a}_{n-5} s^{n-5} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} p_3(s) = & \underline{a}_n s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \bar{a}_{n-2} s^{n-2} + \underline{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & + \underline{a}_{n-4} s^{n-4} + \bar{a}_{n-5} s^{n-5} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} p_4(s) = & \bar{a}_n s^n + \underline{a}_{n-1} s^{n-1} + \underline{a}_{n-2} s^{n-2} + \bar{a}_{n-3} s^{n-3} + \\ & + \bar{a}_{n-4} s^{n-4} + \underline{a}_{n-5} s^{n-5} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

W (Białas 2002) podano warunki stabilności wielomianów przedziałowych niskich stopni:

— **$n = 2$** wtedy

$$P_2(s) = [\underline{a}_2, \bar{a}_2]s^2 + [\underline{a}_1, \bar{a}_1]s^1 + [\underline{a}_0, \bar{a}_0] \quad (\text{A.6a})$$

wielomian przedziałowy jest satbilny jeśli zachodzą nierówności:

$$\underline{a}_2 > 0, \underline{a}_1 > 0, \underline{a}_0 > 0 \quad (\text{A.6b})$$

— **$n = 3$** wtedy

$$P_3(s) = [\underline{a}_3, \bar{a}_3]s^3 + [\underline{a}_2, \bar{a}_2]s^2 + [\underline{a}_1, \bar{a}_1]s^1 + [\underline{a}_0, \bar{a}_0] \quad (\text{A.7a})$$

wielomian przedziałowy jest satbilny jeśli zachodzą nierówności:

$$\underline{a}_3 > 0, \underline{a}_2 > 0, \underline{a}_1 > 0, \underline{a}_0 > 0 \quad (\text{A.7b})$$

i wielomian

$$p_4(s) = \bar{a}_3 s^3 + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_1 s^1 + \bar{a}_0 \quad (\text{A.7c})$$

jest hurwitzowski. Czyli z twierdzenia Liénarda-Chiparta wynika

$$\Delta_2 = \underline{a}_2 \underline{a}_1 - \bar{a}_3 \bar{a}_0 > 0 \quad (\text{A.7d})$$

— **$n = 4$** wtedy

$$P_4(s) = [\underline{a}_4, \bar{a}_4]s^4 + [\underline{a}_3, \bar{a}_3]s^3 + [\underline{a}_2, \bar{a}_2]s^2 + [\underline{a}_1, \bar{a}_1]s^1 + [\underline{a}_0, \bar{a}_0] \quad (\text{A.8a})$$

wielomian przedziałowy jest satbilny jeśli zachodzą nierówności:

$$\underline{a}_4 > 0, \underline{a}_3 > 0, \underline{a}_2 > 0, \underline{a}_1 > 0, \underline{a}_0 > 0 \quad (\text{A.8b})$$

i wielomiany

$$p_2(s) = \bar{a}_4s^4 + \bar{a}_3s^3 + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_1s^1 + \bar{a}_0 \quad (\text{A.8c})$$

$$p_4(s) = \bar{a}_4s^4 + \underline{a}_3s^3 + \underline{a}_2s^2 + \bar{a}_1s^1 + \bar{a}_0 \quad (\text{A.8d})$$

są hurwitzowskie. Czyli z twierdzenia Liénarda-Chiparta wynika

$$\Delta_{32} = \bar{a}_3\underline{a}_2\underline{a}_1 - \bar{a}_3^2\bar{a}_0 - \bar{a}_4\underline{a}_1^2 > 0 \quad (\text{A.8e})$$

$$\Delta_{34} = \underline{a}_3\underline{a}_2\bar{a}_1 - \underline{a}_3^2\bar{a}_0 - \bar{a}_4\bar{a}_1^2 > 0 \quad (\text{A.8f})$$

Dzięki zastosowaniu twierdzenia Liénarda-Chiparta warunki stabilności (A.8e) i (A.8f) są prostsze niż w (Białas 2002).

Dodatek B

Wykres Wyszniegradskiego

Nazwa wykresu pochodzi od jego autora, Iwana Wyszniegradskiego (Wyszniegradski I. (1876), „On the General Theory of Governors”, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris). Jest to metoda badania wielomianów III rzędu, która pozwala na analizę rozkładu pierwiastków bez konieczności obliczania ich wartości. Polega ona na naniesieniu, na pewną teoretyczną płaszczyznę, punktu wyznaczanego bezpośrednio na podstawie parametrów wielomianu (Byrski W. (2007), „Observacja i sterowanie w systemach dynamicznych”, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Biesiekierski W.A. (1973), „Zbiór zadań z teorii sterowania automatycznego”, WNT Warszawa, Krasowski A.A., Pospiełowski G.S., (1965) „Podstawy automatyki i cybernetyki technicznej”, WNT). Przynależność tego punktu do jednego z obszarów, na które podzielona jest płaszczyzna Wyszniegradskiego, określa sposób rozłożenia pierwiastków rozważanego wielomianu.

Dynamikę układu rzędu III można opisać równaniem różniczkowym zwyczajnym

$$a_3 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (\text{B.1})$$

lub transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (\text{B.2})$$

którą przekształca się do postaci:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_3}{a_0} s^3 + \frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1} \quad (\text{B.3})$$

Aby przeprowadzić analizę lokalizacji biegunów, należy tak przekształcić transmitancję (B.3), aby przyjęła postać znormalizowaną o dwóch parametrach. W tym celu konieczne jest dokonanie przeskalowania w dziedzinie zmiennej zespolonej operatora s do bezwymiarowego operatora \bar{s} . Dla dziedziny czasu będzie to odpowiadało przeskalowaniu osi czasu t do bezwymiarowej osi \bar{t} .

Podstawiając

$$\frac{a_3}{a_0} s^3 = \bar{s}^3 \implies s^3 = \frac{a_0}{a_3} \bar{s}^3 = \Omega^3 \bar{s}^3 \implies s = \Omega \bar{s} \quad (\text{B.4})$$

gdzie $\Omega = \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}$ jest tzw. częstotliwością własną, a $t = \frac{1}{\Omega} \bar{t}$ mianownik transmitancji przyjmuje postać:

$$M(\bar{s}) = \bar{s}^3 + \frac{a_2}{a_0} \Omega^2 \bar{s}^2 + \frac{a_1}{a_0} \Omega \bar{s} + 1 \quad (\text{B.5})$$

Poprzez przyjęcie oznaczeń

$$A = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}, \quad B = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}} \quad (\text{B.6})$$

otrzymany zostanie zapis mianownika transmitancji w formie dwuparametrowej (znormalizowanej):

$$W(s) = \bar{s}^3 + A\bar{s}^2 + B\bar{s} + 1 \quad (\text{B.7})$$

Przy użyciu wzorów (B.6) można zidentyfikować rozkład biegunów transmitancji poprzez naniesienie wyliczonych współczynników A i B na płaszczyznę Wyszniegradskiego.

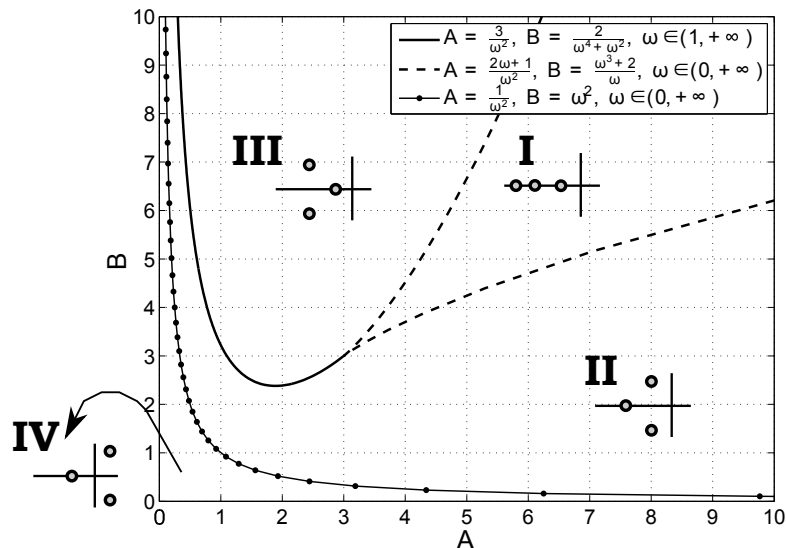
Identyfikacja rozkładu odbywa się poprzez sprawdzenie, w którym miejscu na płaszczyźnie znajduje się punkt wyznaczony współczynnikami A i B . Płaszczyzna składa się z czterech obszarów rozdzielonych liniami granicznymi:

$$A = \frac{3}{\omega^2}, \quad B = \frac{2}{\omega^4 + \omega^2}, \quad \omega \in (1, \infty) \quad (\text{B.8})$$

$$A = \frac{2\omega+1}{\omega^2}, \quad B = \frac{2}{\omega} + \omega^2, \quad \omega \in (0, \infty) \quad (\text{B.9})$$

$$A = \frac{1}{\omega^2}, \quad B = \omega^2, \quad \omega \in (0, \infty) \quad (\text{B.10})$$

Płaszczyznę Wyszniegradskiego wraz z rozkładem biegunów przedstawiony jest na rysunku B.1.



Rysunek B.1. Płaszczyzna Wyszniegradskiego i rozkład biegunów transmitancji

Korzystając z wykresu Wyszniegradskiego możliwe jest też badanie stabilności wielomianów przedziałowych III stopnia wraz ze zmianą parametrów określających wielomianu.

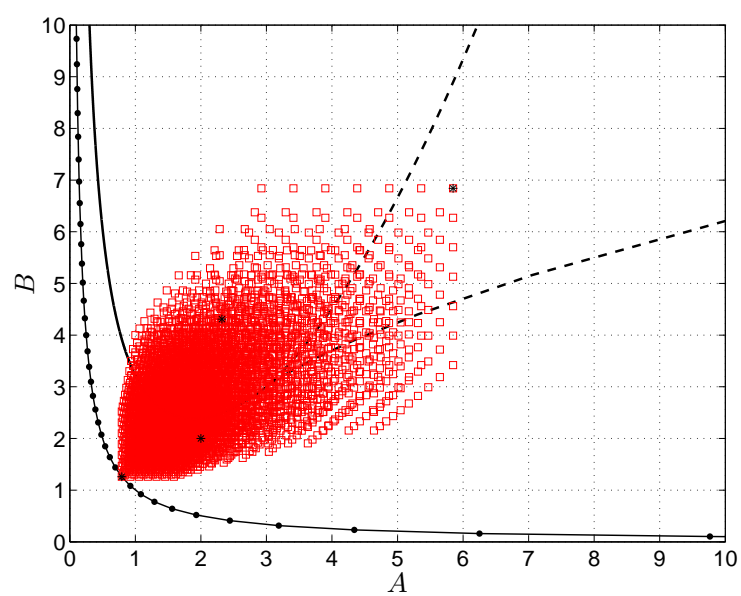
Przykład 2: Dany jest wielomian przedziałowy (mianownik transmitancji z niepewnością strukturalną) w postaci:

$$M(s) = [0.2, 1]s^3 + [1, 2]s^2 + [2, 4]s + [1, 2]$$

Przeanalizować jak zmieniałoby się rozmieszczenie odpowiadającego mu punktu na płaszczyźnie AB wraz ze zmianami wszystkich współczynników wielomianu.

Na rysunku B.2 przedstawiona jest płaszczyzna Wyszniegradskiego dla analizowanego wielomianu (wykorzystano program napisany przez N. Bukowskiego w ramach pracy inżynierskiej „Stabilność układów trzeciego rzędu o niepewnych parametrach”).

Dla przykładowego wielomianu widać, że jego pierwiastki przy zmianach współczynników mogą być rozmieszczone we wszystkich obszarach, czyli mogą być zarówno rzeczywiste jak i zespolone.



Rysunek B.2. Rozkład pierwiastków wielomianu o zmiennych współczynnikach

Bibliografia

- Åström, K. & Häggglund, T. (1995), *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, International Society for Measurement and Control.
- Åström, K. & Wittenmark, B. (1997), *Computer-Controlled Systems*, NJ, Prentice Hall.
- Ackermann, J. & Blue, P. (2002), *Robust control: the parameter space approach*, London, Springer-Verlag.
- Anderson, B. D. O. (1972), 'The Reduced Hermite Criterion with Application to Proof of the Liénard-Chipart Criterion', *IEEE Trans. on Aut. Contr.* **AC-17**(5), 669–672.
- Anderson, B. D. O. (1976), 'Inverse Liénard-Chipart Problem', *IEEE Trans. on Aut. Contr.* **AC-21**(3), 426.
- Andresen, T. (2001), 'A Logarithmic-Amplitude Polar Diagram', *Modeling, Identification and Control* **22**(2), 65–72.
- Bhattacharyya, S., Chapellat, H. & Keel, L. (1995), *Robust Control: The Parametric Approach*, NJ, Prentice Hall.
- Białas, S. (2002), *Odporna stabilność wielomianów i macierzy*, Kraków, Uczelniane Wyd. Naukowo-Techniczne.
- Biszytyga, K. (1989), *Sterowanie i regulacja silników elektrycznych*, Warszawa, WNT.
- Ciepiela, A. (1992), *Automatyka przekształtnikowego napędu prądu stałego*, Kraków, Skrypty Uczelniane, nr. 1317, Wydawnictwa AGH.
- Ciepiela, A. (2000), *Konspekt wykładu z Podstaw automatyki*, Kraków, AGH, dok. elektroniczny.
- Dorf, R. & Bishop, R. (2008), *Modern control systems*, NJ, Prentice Hall.
- Grabowski, P. (1996), *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*, Kraków, Skrypty Uczelniane, nr. 1453, Wydawnictwa AGH.
- Grabowski, P. (1999), *Stabilność układów Lurie*, Kraków, Wydawnictwa AGH.
- Grabowski, P. (2011), 'Zbiór zadań z teorii sterowania', <http://www.ia.agh.edu.pl/pgrab/main.xml>.
- Górecki, H. (1993), *Optymalizacja systemów dynamicznych*, Warszawa, PWN.
- Haddad, W. & Chellaboina, V. (2008), *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*, Princeton University Press.
- Kaczorek, T. (1974), *Teoria układów regulacji automatycznej*, Warszawa, PWN.
- Kaźmierkowski, M., Krishnan, R. & Blaabjerg, F. (2002), *Control in Power Electronics*, Academic Press, San Diego.
- Kaźmierkowski, M. & Tunia, H. (1994), *Automatic Control of Converter-Fed Drives*, Warszawa, Elsevier.
- Khalil, H. (1996), *Nonlinear Systems*, NJ, Prentice Hall.
- Lurie, B. & Enright, P. (2000), *Classical Feedback Control: With MATLAB*, NY, Marcel Dekker.
- Mitkowski, W. (1991), *Stabilizacja systemów dynamicznych*, Warszawa, WNT.
- Ogata, K. (1997), *Modern Control Engineering*. 3ed ed., NJ, Prentice Hall.
- Pełczewski, W. (1980), *Teoria sterowania*, Warszawa, WNT.
- Puławski, J., Szacka, K. & Manitus, A. (1974), *Zasady automatyki*, Warszawa, WNT.
- Rusek, J. (1993), *Elektrotechnika z elementami napędów*, Kraków, Wydawnictwa AGH.
- Sastry, S. (1999), *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*, Springer.
- Sieklucki, G. (2009), *Automatyka napędu*, Kraków, Wydawnictwa AGH.
- Skogestad, S. & Postlethwaite, I. (2005), *Multivariable feedback control: analysis and design*, John Wiley.
- Slotine, J.-J. & Weiping, L. (1991), *Applied Nonlinear Control*, New Jersey, Prentice Hall.
- Taylor, J. & Chan, C. (1997), 'Enhanced matlab tools for linear and nonlinear system stability', *Proc. IFAC 7th Symposium on Computer-Aided Control System Design, Ghent, Belgium* pp. 293–297.
- Zawirski, K. (2005), *Sterowanie silnikiem synchronicznym o magnesach trwałych*, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.

Zhou, K. & Doyle, J. (1998), *Essentials of Robust Control*, NJ, Prentice Hall.