3) Szereg Fouriera

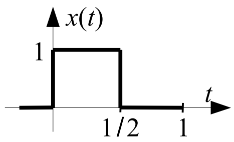
1. Narysować kilka funkcji z podanych dwóch zbiorów i sprawdzić numerycznie ortonormalność (na przedziale o długości T).

$$\text{Zbiór 1.}\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi}{T}nt,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}nt\ \ : n=1,2,\ldots \right\}$$

$$\text{Zbiór 2.}\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\ \ : n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \right\}$$

2. Dany jest szereg Fouriera reprezentujący sygnał ciągu impulsów prostokątnych (patrz rys):

$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \qquad X_n = \begin{cases} 1/2, & n=0 \\ \dfrac{(-1)^n - 1}{-j2\pi n}, & n \neq 0 \end{cases},$$



Napisać program, który wyznaczy sygnał $x(t)$ dla kilku wybranych wartości N (patrz przykładowe rysunki). Sygnał wyznaczyć dla t z następujących przedziałów: t=[0; T], t=[-T; T], t=[-T/2; T]. Zaobserwować własność okresowości rekonstruowanego sygnału, a także efekt Gibbsa. Sprawdzić jak zachowuje się błąd aproksymacji w funkcji N określony poniższym wzorem:

$$e_N^2 = \int_0^T \left| x(t) - \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{j\omega_0 nt} \right|^2 dt = \int_0^T |x(t)|^2 dt - T\sum_{n=-N}^{N} |X_n|^2$$

Uwaga. Ponieważ $X_n = -X_{-n}$ powyższy szereg można również zapisać w postaci

$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = X_0 + \sum_{n=1}^{N} X_n\left(e^{j\frac{2\pi}{T}nt} - e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\right) = X_0 + \sum_{n=1}^{N} 2jX_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$, gdzie

X_0 jest składową stałą sygnału, zaś $2jX_n$ jest amplitudą n-tej harmonicznej rzeczywistej.

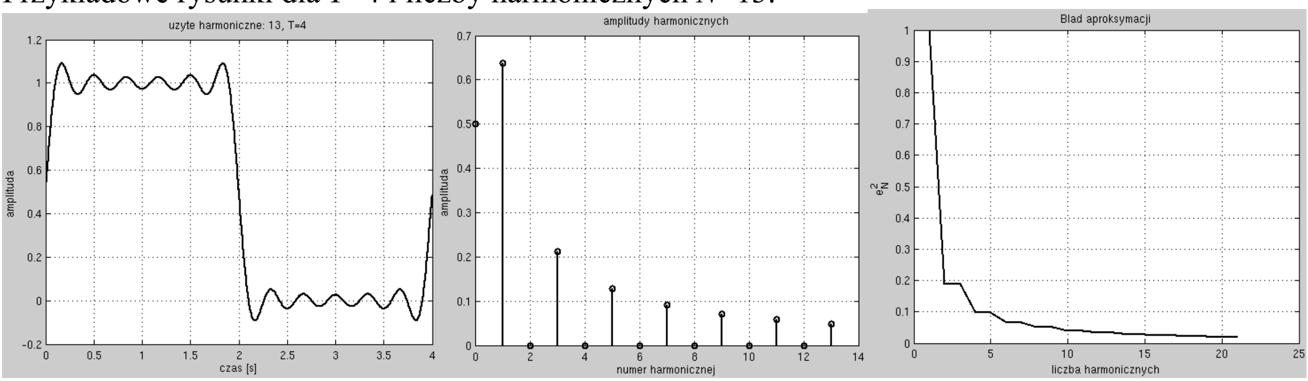
Zauważ, że dla sygnałów rzeczywistych $X_n = X^*_{-n}$, bo tylko wtedy oznaczając $X_n = a_n + jb_n$ mamy

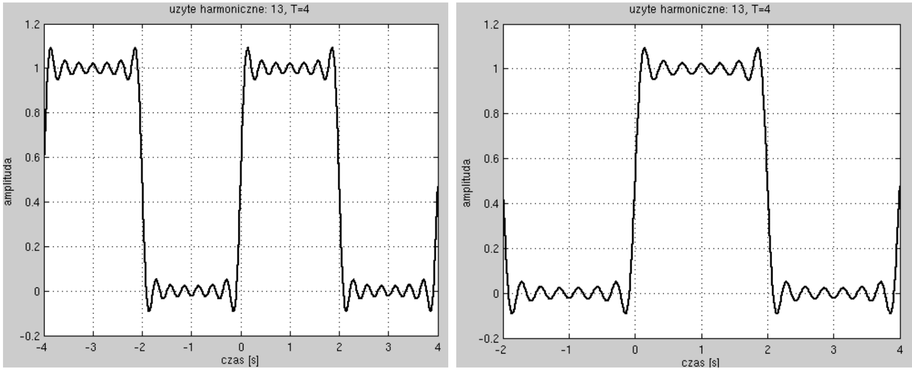
$$x(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = X_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n + jb_n) e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + (a_n - jb_n) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}$$

$$x(t) \approx X_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n + jb_n)(\cos(\omega_0 nt) + j\sin(\omega_0 nt)) + (a_n - jb_n)(\cos(\omega_0 nt) - j\sin(\omega_0 nt))$$

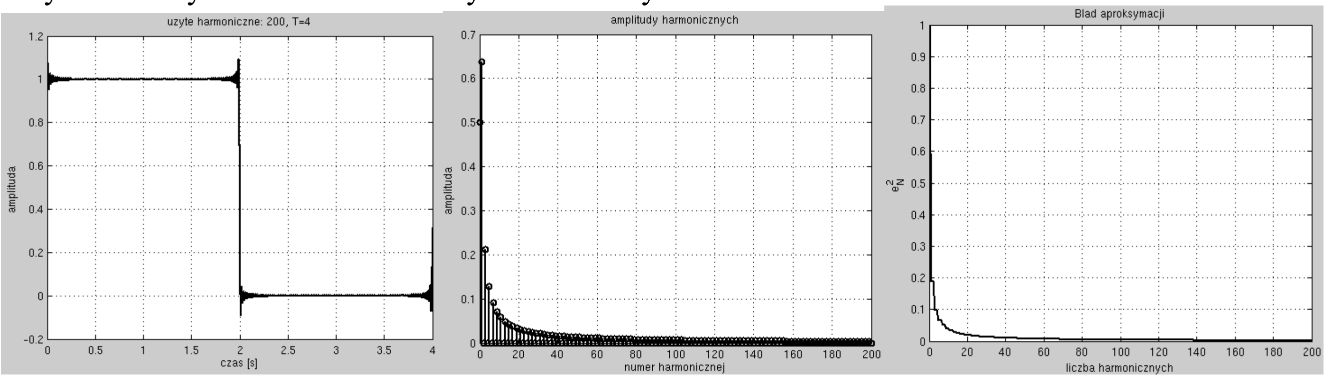
$$x(t) \approx X_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(\omega_0 nt) - b_n\sin(\omega_0 nt)$$

Przykładowe rysunki dla T=4 i liczby harmonicznych N=13.



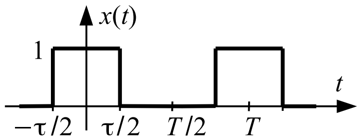


Przykładowe rysunki dla T=4 i liczby harmonicznych N=200.

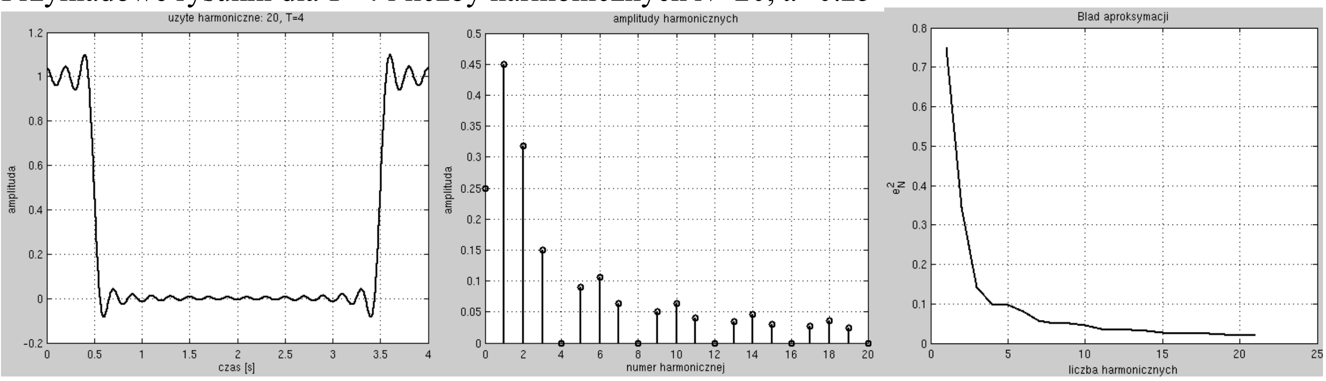


3. Korzystając ze wzoru (a) wyznacz (analitycznie, a później ewentualnie numerycznie) współczynniki zespolonego szeregu Fouriera (b) reprezentujący niżej przedstawiony sygnał prostokątny o współczynniku wypełnienia $d=\tau/T$. Napisz program wyznaczający (rekonstruujący) przebieg czasowy sygnału $x(t)$ dla t=[0; T], t=[-T; T], t=[-T/2; T]. Przyjmij współczynnik wypełnienia (d) równy 25%. Zaobserwuj zachowanie się modułów współczynników Fouriera (a), zwłaszcza tych związanych z wyższymi harmonicznymi, w funkcji zmiany współczynnika wypełnienia (d).

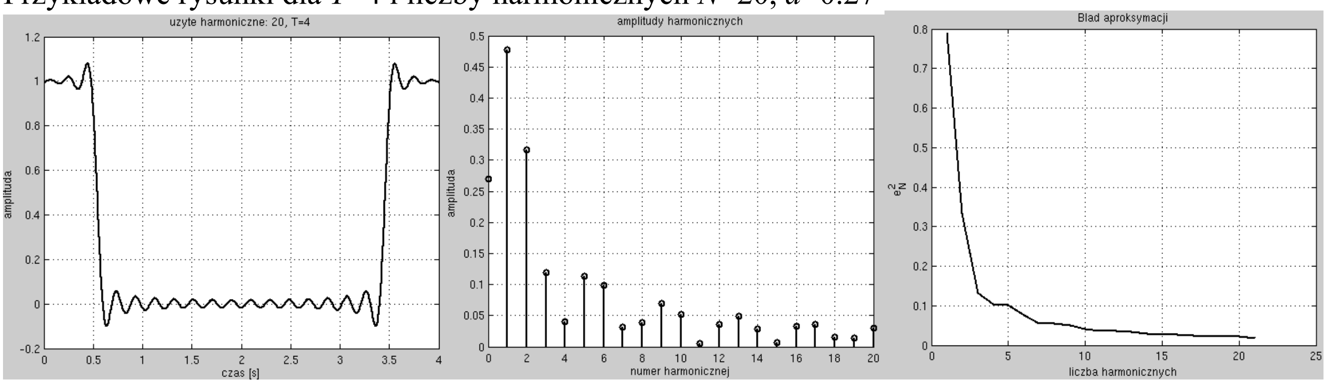
$$X_n=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1\, e^{-j\omega_0 nt}\,dt \quad \text{(a)} \qquad x(t)\approx\sum_{n=-N}^{N} X_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \quad \text{(b)}$$



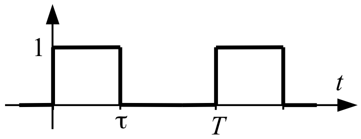
Przykładowe rysunki dla T=4 i liczby harmonicznych N=20, d=0.25



Przykładowe rysunki dla T=4 i liczby harmonicznych N=20, d=0.27



4. Napisz program, który w oparciu o niżej podane szeregi Fouriera (a) i (b) wyznaczy sygnał $x(t)$ dla współczynnika d = 0.25 oraz kilku wybranych wartości N. Sprawdź nierówność Bessela dla obu szeregów (a) i (b).



$$\tau / T = d \, ,$$

$$x(t) = d + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} \sin(\omega_0 n \tau/2) \cos(\omega_0 n t - \omega_0 n \tau/2) \qquad \text{(a)}$$

$$x(t) = d + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} [\sin \omega_0 n \tau \ \cos \omega_0 n t + [1 - \cos \omega_0 n \tau - 1] \sin \omega_0 n t] \ . \qquad \text{(b)}$$

wzór (b) można przepisać w postaci:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \ \cos \omega_0 n t + b_n \sin \omega_0 n t \quad . \qquad \text{(b2)}$$

gdzie

$$a_0 = d \, , \quad a_n = \frac{1}{\pi n} \sin \omega_0 n \tau \, , \quad b_n = \frac{1}{\pi n} [1 - \cos \omega_0 n \tau] , \quad n = 1,2,\ldots$$

W przypadku szeregu (a) błąd aproksymacji ma postać

$$e_N^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dx - a_0^2 T + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \|\phi_n(t)\|^2 \quad ,$$

gdzie

$$a_0 = d \, , \quad a_n = \frac{2}{\pi n} \sin(\omega_0 n \tau/2) , \quad \phi_n = \cos(\omega_0 n t - \omega_0 n \tau/2) , \quad n = 1,2,\ldots \quad ,$$

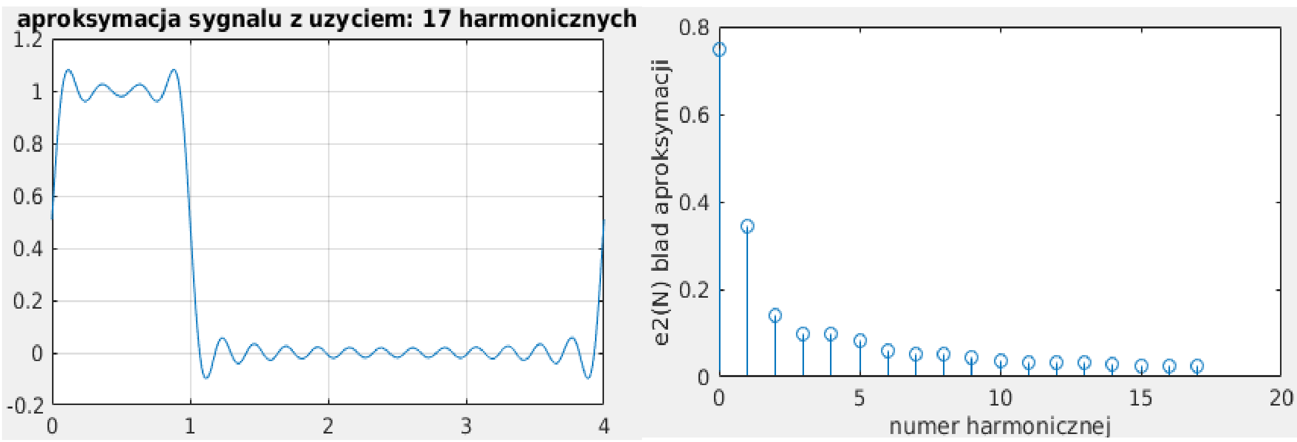
zaś dla (b) mamy

$$e_N^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dx - a_0^2 T - \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \|c_n(t)\|^2 - \sum_{n=1}^{N} b_n^2 \|s_n(t)\|^2 \quad ,$$

gdzie

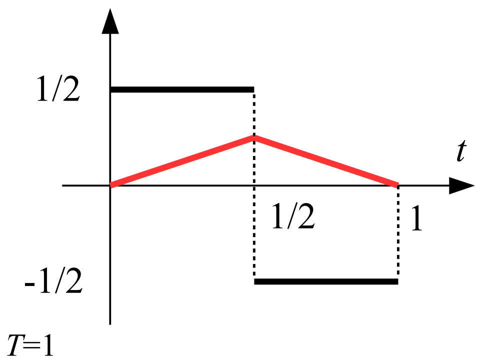
$$c_n(t) = \cos(\omega_0 n t) , \quad s_n(t) = \sin(\omega_0 n t) , \quad n = 1,2,\ldots \quad .$$

Dla chętnych: sprawdź (analitycznie), że podane szeregi Fouriera (a) i (b) odpowiadają przebiegowi prostokątnemu z powyższego rysunku.



5. Wyznaczyć współczynniki zespolonego szeregu Fouriera reprezentującego sygnał trójkątny o zerowej składowej stałej. W zadaniu należy skorzystać z wyników zadania 2 (dla przebiegu prostokątnego z zerową składową DC, tj. $X_0=0$) oraz faktu, że sygnał trójkątny jest całką sygnału prostokątnego.

Rozwinięcie w szereg Fouriera sygnału prostokątnego bez składowej stałej, o wypełnieniu 50 %, dane jest wzorem:



$$\Pi(t)=\begin{Bmatrix} 1/2, & 0<t<T/2 \\ -1/2, & T/2<t<T \end{Bmatrix}$$

$$\Pi(t)=\sum_n X_n^\Pi e^{j\omega_0 nt} \quad , \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$X_n^\Pi=\begin{cases} 0, & n=0 \\ \dfrac{(-1)^n-1}{-j2\pi n}, & n\neq 0 \end{cases}$$

Całkując $\Pi(t)$ w przedziale od 0 do $t<T$ otrzymujemy:

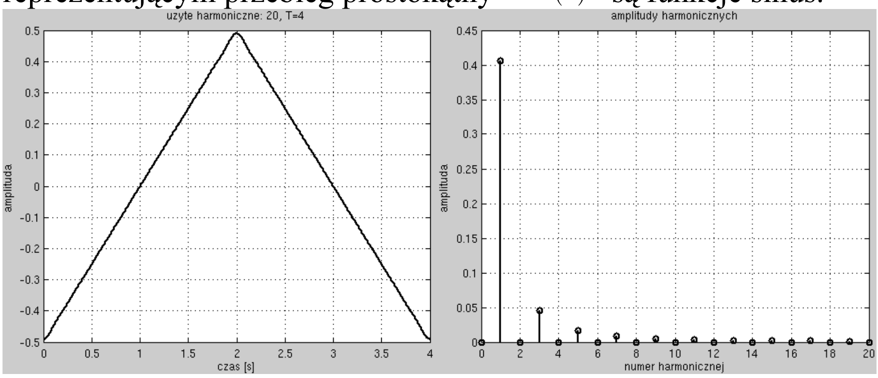
$$\Delta(t)=\int_0^t \Pi(\tau)d\tau = \int_0^t \sum_{n\neq 0} X_n^\Pi e^{j\omega_0 n\tau} d\tau = \sum_{n\neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n}\left(e^{j\omega_0 nt}-1\right)$$

$$\Delta(t)=-\sum_{n\neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n}+\sum_{n\neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 nt}$$

Pierwszy czynnik w powyższym równaniu stanowi składową stałą. Pomijając ją otrzymujemy szereg przedstawiający sygnał trójkątny o zerowej składowej stałej:

$$\Delta_0(t)=\sum_{n\neq 0} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 nt} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^\Pi \frac{1}{j\omega_0 n} 2\cos(\omega_0 nt) \quad .$$

Zastanów się, dlaczego w powyższym szeregu pojawiły się funkcje kosinus, a dlaczego w szeregu reprezentującym przebieg prostokątny $\Pi(t)$ są funkcje sinus.



Zauważ, że:

$$\Delta(0)=0, \quad \Delta(T/2)=T/4 \quad \Delta(T)=0$$

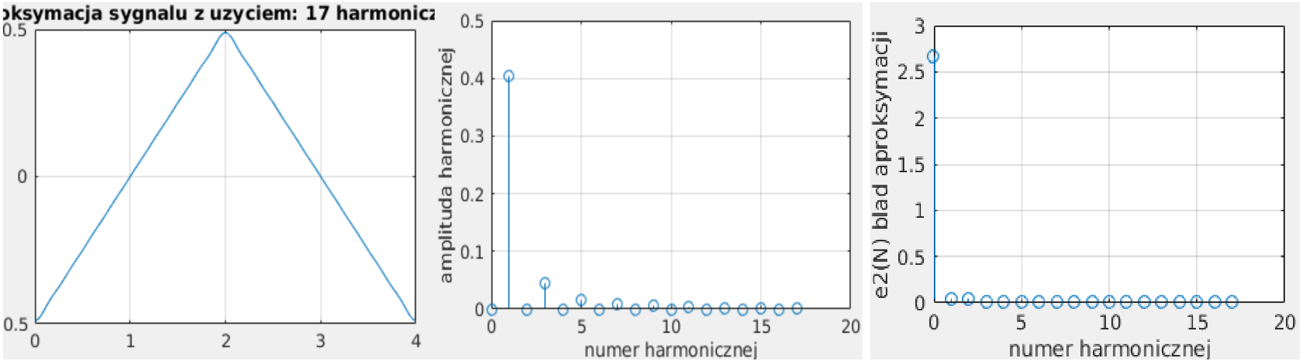
oraz

$$\Delta_0(0)=-T/8, \quad \Delta_0(T/2)=T/8 \quad \Delta(T)=-T/8 \quad .$$

Wiedząc, że energia sygnału $\Delta_0(t)$ za jeden okres wynosi:

$$E_0^\Delta = \int_0^T [\Delta_0(t)]^2 dt = 4\int_0^{T/4} \left((T/8)/(T/4)t\right)^2 dt = 4\int_0^{T/4} (1/2t)^2 dt = \int_0^{T/4} t^2 dt=1/3(T/4)^3 \quad ,$$

sprawdź nierówność Bessela.


oksymacja sygnalu z uzyciem: 17 harmonicz
amplituda harmonicznej
numer harmonicznej
e2(N) blad aproksymacji
numer harmonicznej
(okres T=4)