Ecuaciones Diferenciales Ordinarias II **Examen Final** 29 de junio de 2021

Nombre: Jorge Alfredo Álvarez Contreras Código #: 218740222.

Instrucciones: Resuelva correctamente sólo cuatro de los siguientes problemas.
Puntaje máximo: 100 puntos.

1. (25 puntos) Utilice transformada de Laplace para resolver el problema

$$x'' + \omega^2 x = \cos \omega t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace, obtenemos

$$s^2 \underline{X} - s\cancel{x(0)}^{\,0} - \cancel{s x'(0)}^{\,0} + \omega^2 \underline{X} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Despejando, obtenemos

$$\underline{X} = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

En la tarea 2 calculamos que

$$\mathcal{L}\{t \sin \omega t\} = \frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

Por lo tanto

$$\underline{X} = \mathcal{L}\left\{\frac{t \sin \omega t}{2\omega}\right\}.$$

Luego,

$$x(t) = \frac{t \sin \omega t}{2\omega}.$$

2. (25 puntos) Determine la solución general de la ecuación diferencial $x'' + e^t x = 0$ alrededor de $t = 0$. *Sugerencia: construya la serie de Taylor de x mediante derivación sucesiva.*

$$x'' + e^t x = 0 \quad \Rightarrow \quad x''(0) = -x(0).$$

$$x''' + e^t x + e^t x' = 0 \quad \Rightarrow \quad x'''(0) = -x(0) - x'(0)$$

$$x^{(4)} + e^t x + 2e^t x' + e^t x'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(4)}(0) = -x(0) - 2x'(0) - x''(0)$$

$$= -2x'(0)$$

$$x^{(5)} + e^t x + 3e^t x' + 3e^t x'' + e^t x''' \quad \Rightarrow \quad x^{(5)}(0) = -x(0) - 3x'(0) - 3x''(0) - x'''(0)$$

$$= 2x(0) - 3x'(0) + x(0) + x'(0)$$

$$= 3x(0) - 2x'(0).$$

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \frac{x^{(4)}(0)}{4!}t^4 + \frac{x^{(5)}(0)}{5!}t^5 + \cdots$$

$$= x(0) + x'(0)t - \frac{x(0)}{2!}t^2 - \frac{x(0)+x'(0)}{3!}t^3$$

$$-2\frac{x'(0)}{4!}t^4$$

$$+\frac{3x(0)-2x'(0)}{5!}t^5 + \cdots$$

$$\boxed{x(t) = x(0)\left(1 - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5\cdot4\cdot2!} + \cdots\right) + x'(0)\left(t - \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4\cdot3} - \frac{t^5}{5\cdot4\cdot3} + \cdots\right)}$$

4. (25 puntos) Resuelva el problema de eigenvalores

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\lambda}{1+x^2}y = 0,$$
$$y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Sugerencia: utilice el cambio de variable $x = \tan\theta$.

Notemos que el problema es de Strum-Liouville, pues el operador es de la forma

$$Ly = -(py')' + qy.$$

y las condiciones de frontera son separadas.

Así, todos los autovalores son reales.

Haciendo el cambio de variable $x = \tan\theta$, obtenemos $1+x^2 = \sec^2\theta$,

$$\frac{d}{dx} y(\theta) = \frac{d}{dx} y(\operatorname{atan} x) = \frac{d}{dx} y(\operatorname{atan} x)$$

$$= y'(\operatorname{atan} x) \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(\theta) = \frac{d}{dx}\left(y'(\operatorname{atan} x)\, \frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$= y''(\operatorname{atan} x)\, \frac{1}{(x^2+1)^2} - y'(\operatorname{atan} x)\, \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

así que

$$(1+x^2)\, y''(x) + 2x\, y'(x) + \frac{\lambda}{1+x^2} y(x) = 0$$

Se convierte en

$$(x^2+1)\left[y''(\operatorname{atan} x)\, \frac{1}{(x^2+1)^2} - y'(\operatorname{atan} x)\, \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]$$

$$+ 2x\left[y'(\operatorname{atan} x) \cdot \frac{1}{x^2+1}\right]$$

$$+ \frac{\lambda}{1+x^2} y(\operatorname{atan} x) = 0$$

Esto es

$$\frac{1}{1+x^2} y''(\operatorname{atan} x) + \frac{\lambda}{1+x^2} y(\operatorname{atan} x) = 0$$

Cancelando $\frac{1}{1+x^2}$, y sustituyendo $x = \tan\theta$, tenemos.

$$y''(\theta) + \lambda\, y(\theta) = 0,$$

Cuando $x=0$, $\theta=\arctan 0=0$.

$x=1$, $\theta=\arctan 1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Las condiciones de frontera

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

se convierten en

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0. \end{cases}$$

Si $\lambda=0$, la solución general de

$$y''(\theta)+\lambda y(\theta)=0$$

es

$$y(\theta)=c_1\theta+c_2.$$

Las condiciones de frontera fuerzan $y(\theta)=0$.

Si $\lambda\neq 0$, la solución general es

$$y(\theta)=c_1e^{\theta\sqrt{-\lambda}}+c_2e^{-\theta\sqrt{-\lambda}}.$$

Las condiciones de frontera dan

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}}+c_2e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}}=0 \end{cases}$$

esto es

$$c_1\left(e^{\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}}-e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}}\right)=0$$

$$c_1e^{-\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}}\left(e^{2\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}}-1\right)=0$$

Tiene sol. no trivial cuando $e^{2\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}} = 1$.

i.e.

$$2\sqrt{-\tfrac{\lambda}{2}} = 2\pi i n \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\sqrt{-\tfrac{\lambda}{2}} = \pi i n$$

$$-\tfrac{\lambda}{2} = -\pi^2 n^2$$

$$\lambda = 2\pi^2 n^2$$

Así, los autovectores son

$$y(\theta) = c_1 e^{\theta\sqrt{-\lambda_n}} + c_2 e^{-\theta\sqrt{-\lambda_n}}$$

con $\boxed{\lambda_n = 2\pi^2 n^2 \quad , \quad n \geq 1 .}$

$$c_1 + c_2 = 0$$

Esto es,

$$y(\theta) = c_1\left(e^{\theta\sqrt{-\lambda_n}} - e^{-\theta\sqrt{-\lambda_n}} \right)$$

$$= c_1\left(e^{\theta\pi i n} - e^{-\theta\pi i n} \right)$$

$$= 2ic_1 \sin(\theta\pi n).$$

Tomando $c_1 = \frac{1}{2i}$,

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \sin(\theta\pi n) \\ &= \sin(\pi n \arctan x) \end{aligned}}$$

5. (25 puntos) Considere el operador $Ly = y'' + y$. Determine la función de Green correspondiente a $\lambda = 0$ del problema

$$\begin{aligned} Ly &= \lambda y + f, \\ y(0) &= 0, y'(1) = 0. \end{aligned}$$

El operador L es de la forma

$$Ly = -px'' - p'x' + qx,$$

con $p = -1$, $q = 1$. Además, el intervalo es $I = [0, 1]$.

Recordatorio 2. *También sabemos que $g(t, s, \lambda)$ está caracterizada por las siguientes propiedades:*

(a) *g es continua en $I \times I$*

(b) *g_t es continua en $I \times I$ sin la diagonal.*

(c) *$g_t(s + 0, s, \lambda) - g_t(s - 0, s, \lambda) = -1/p(s)$.*

(d) *si $v_s(t) = g(t, s, \lambda)$, entonces $Lv_s = 0$ para $t \neq s$.*

(e) *$B\hat{v}_s = 0$.*

Notemos que la solución general del problema homogeneo

$$y''+y=0$$

es $y(t)=a\sin t+b\cos t$. Luego, la condición de frontera $y(0)=0$ implica $b=0$, así que $y(t)=a\sin t$. La otra condición $y'(1)=0$ nos da $a=0$, así que $\lambda=0$ no es autovalor de L_β.

Por la condición (d), tenemos

$$g(t,s,0)=\begin{cases} a_1(s)\sin t+b_1(s)\cos t & 0\leq s\leq t \\ a_2(s)\sin t+b_2(s)\cos t & t\leq s\leq 1 \end{cases}$$

Además, por el punto (e), g satisface las condiciones de frontera. Es decir:

$$g(0,s,0)=0$$

$$g_t(1,s,0)=0 .$$

Esto es

$$0 = g(0,s,0) = \begin{cases} \cancel{a_1(s)\sin 0 + b_1(s)\cos 0 \qquad 0<s<0} \\ \cancelto{0}{a_2(s)\sin 0} + \underline{b_2(s)\cos 0} \qquad 0<s<1 . \end{cases}$$

$$0 = g_t(t,s,0) = \begin{cases} \underline{a_1(s)\cos 0} - \cancelto{0}{b_1(s)\sin 0} \qquad 0<s<1 \\ \cancel{a_2(s)\cos 0 - b_2(s)\sin 0 \qquad 1<s<1} . \end{cases}$$

Así, $a_1 = b_2 = 0$.

Luego, g es de la forma

$$g(t,s,0)=\begin{cases} b_1(s)\cos t & 0\leq s\leq t \\ a_2(s)\sin t & t\leq s\leq 1 \end{cases}.$$

Ahora usemos la condición (c) $g_t(s+0,s,\lambda)-g_t(s-0,s,\lambda)=-1/p(s)$.

Para $t>s$, tenemos

$$g_t(t,s,0)=-b_1(s)\sin t$$

Para $t<s$, tenemos

$$g_t(t,s,0)=a_2(s)\cos t.$$

Luego,

$$g_t(s+0,s,0)-g_t(s-0,s,\lambda)=-b_1(s)\sin(s)-a_2(s)\cos s=-\frac{1}{p}=1$$

Finalmente, cuando $s=t$, ambas piezas de g deben coincidir. Dado que

$$g(t,s,0)=\begin{cases} b_1(s)\cos t & 0\leq s\leq t \\ a_2(s)\sin t & t\leq s\leq 1 \end{cases},$$

tenemos

$$b_1(s)\cos s = a_2(s)\sin s.$$

Así, tenemos un sistema

$$b_1(s)\sin(s)+a_2(s)\cos s = -1$$
$$b_1(s)\cos(s)-a_2(s)\sin(s)=0$$

Usando Cramer

$$\Delta b_1 = \sin(s),$$

$$\Delta b_2 = \cos(s),$$

$$\Delta = -\sin^2 s - \cos^2 s = -1,$$

tenemos

$$b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta} = -\sin(s)$$

$$b_2 = \frac{\Delta b_2}{\Delta} = -\cos(s).$$

Luego,

$$\boxed{g(t,s,0) = \begin{cases} -\sin s \ \cos t & 0 \leq s \leq t \\ -\cos s \ \sin t & t \leq s \leq 1 \end{cases},}$$