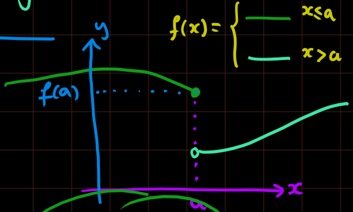
¿ $f(x,y)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ límite en $(0,0)$.



Para cualquier $\varepsilon>0$, puedo encontrar un disco D_δ lo suficientemente pequeño para que para todos los puntos $d(x,0)<\delta$ se cumpla $d(f(x),f(0))<\varepsilon$

$|x-0|<\delta$ $\qquad$ $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0.\ \forall x\in\mathbb{R}.\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

f es continua en a.

Para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $n<m$.

Demo Dado $n\in\mathbb{N}$, tenemos

$$n < \underbrace{n+1}_{= m}. \qquad \square$$

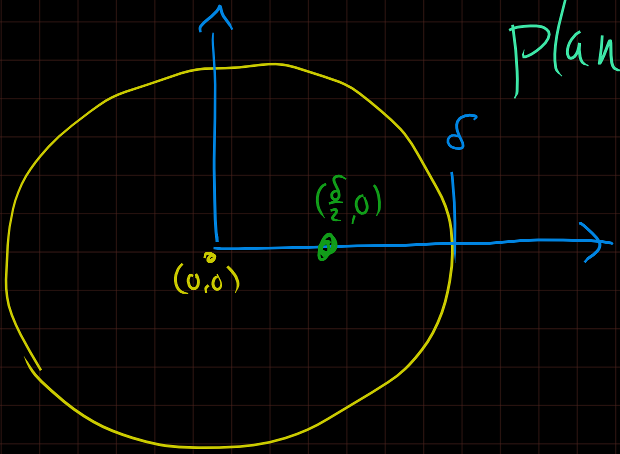
Para cualquier $\varepsilon > 0$,
puedo encontrar un disco D_δ
lo suficientemente pequeño
para que para todos los puntos
$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ se cumpla $\left| \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$

Demo Sea $\varepsilon > 0$.

Para $\delta > 0$, si $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$.

$$\left\| \left(\frac{\delta}{2}, 0\right) \right\| = \sqrt{\frac{\delta^2}{2^2} + 0^2} = \sqrt{\frac{\delta^2}{4}} = \frac{\delta}{2}$$

Plano



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) = \frac{\delta^2/2}{\sqrt{\dfrac{\delta^2}{2^2}}} = \frac{\delta^2/2}{\delta/2} = \delta$$

$$\left| f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) - 0 \right| = \left| f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) \right|$$

$$= |\delta| = \delta < \varepsilon$$

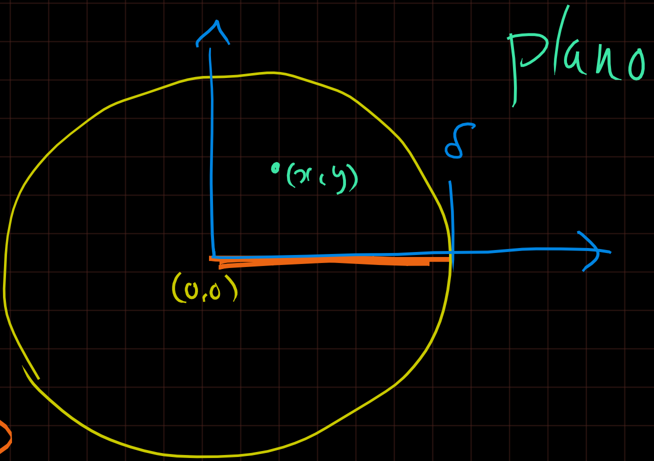
$$|f(x,y) - 0| \leq 3\delta$$

Si yo escogo

$$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{4}}$$

$$|f(x,y) - 0| \leq 3\delta < 4\delta = \varepsilon$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Para $\delta > 0$, tomemos (x,y) con $|(x,y)-(0,0)| < \delta$.

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Hay que acotar

$$\left| \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \quad < 7\delta^2$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ entonces $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Demo}}$ Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que, si

$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$, entonces $|f(x,y) - 0| < 7\delta^2$

$$7\delta^2 = 7\tfrac{1}{7}\varepsilon = \varepsilon$$

$$\delta = \sqrt{\tfrac{1}{7}\varepsilon}$$