Observación 1

Si $g : T \longrightarrow Y$ es un morfismo de esquemas y $V \subseteq Y$ es un abierto tal que $g(T) \subseteq V$, entonces g se restringe a un morfismo $g' : T \to V$, donde V tiene la estructura de subesquema abierto.

En efecto, tenemos una función continua $g' : T \longrightarrow V$, mientras que, para cada par de abiertos $W, W' \subseteq V$ con $W \subseteq W'$, el morfismo de gavillas $g^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow g_* \mathcal{O}_T$ nos da un cuadrado conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_V(W') = \mathcal{O}_Y(W') \arrow[r, "g^{\#}_{W'}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & (g_*\mathcal{O}_T)(W') = (g'_*\mathcal{O}_T)(W') \arrow[d] \\
\mathcal{O}_V(W) = \mathcal{O}_Y(W) \arrow[r, "g^{\#}_{W}"'] & (g_*\mathcal{O}_T)(W') = (g'_*\mathcal{O}_T)(W'),
\end{tikzcd}
$$

ya que W, W' son abiertos en Y y por la definición de la gavilla inducida. Así, obtenemos un morfismo de gavillas $g'^{\#}: \mathcal{O}_V \longrightarrow g'_*\mathcal{O}_T$.
Además, como V es abierto en Y, tenemos $\mathcal{O}_{V,p} = \mathcal{O}_{Y,p}$ para cada $p \in V$ y cada morfismo $g'^{\#}_p : \mathcal{O}_{V,p} \to (g_*\mathcal{O}_T)_p$ coincide con $g^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,p} \to (g_*\mathcal{O}_T)_p$, así que en particular es local.
Esto le da a $g' : T \to V$ la estructura de morfismo de esquemas.

Observación 2.

El producto de esquemas no son pares de puntos.

Consideremos $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}$, $X = Y = \mathbb{Q}(i)$. Entonces

$$X \times_S Y = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)\right)$$

Tenemos $\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i) \simeq \dfrac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2+1\rangle} \otimes_{\mathbb{Q}} \dfrac{\mathbb{Q}[y]}{\langle y^2+1\rangle}$

$$\simeq \frac{\mathbb{Q}[x,y]}{\langle x^2+1,\, y^2+1\rangle}$$

$$\simeq \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \;\middle|\; \begin{array}{c} a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q} \\ x^2 = -1,\; y^2 = -1 \end{array} \right\}$$

Este anillo tiene, al menos, dos ideales primos distintos: $\langle x+y\rangle$ y $\langle x-y\rangle$.

En efecto, ni $x+y$ ni $x-y$ son unidades:

Si $x+y$ fuera unidad:

$$(x+y)(a_0+a_1x+a_2y+a_3xy)=1$$

$\therefore$

$$1 = a_0x - a_1 + a_2xy - a_3y - a_3x - a_2 + a_1xy + a_0y$$

$\therefore$

$$\begin{cases} a_0 - a_3 = 0 \\ \left.\begin{matrix} a_1 + a_2 = -1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{contradicción} \\ a_0 - a_3 = 0 \end{cases}$$

Si $x+y$ fuera unidad:

$$(x-y)(a_0+a_1x+a_2y+a_3xy)=1$$

$\therefore$

$$1 = a_0x - a_1 + a_2xy - a_3y + a_3x + a_2 - a_1xy - a_0y$$

$\therefore$

$$\begin{cases} a_0 + a_3 = 0 \\ \left.\begin{matrix} -a_1 + a_2 = 1 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{contradicción} \\ a_0 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\langle x+y\rangle$ y $\langle x-y\rangle$ son ideales propios.

Además, son distintos, ya que si fueran el mismo ideal I, tendríamos

$$2x = x+y+x-y \in I$$

lo cual es imposible porque $2x$ es una unidad $\left((2x)^{-1} = -\frac{x}{2}\right)$.

Finalmente, $\langle x+y\rangle$ y $\langle x-y\rangle$ son primos porque

$$\frac{\mathbb{Q}[x,y]/\langle x^2+1, y^2+1\rangle}{\langle x-y\rangle} \simeq \frac{\mathbb{Q}[x,y]/\langle x^2+1, y^2+1\rangle}{\langle x+y\rangle}$$

$$\simeq \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2+1\rangle} \simeq \mathbb{Q}(i)$$ es un campo.

Conclusión:

Aunque los esquemas $X = Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}(i)$ tienen un punto, su producto fibrado sobre $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ es el esquema

$$X \times_S Y = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i) \right)$$

que tiene, al menos, dos puntos: más de los que se esperaban.

(de hecho, se puede probar que $X \times_S Y$ tiene exactamente dos puntos).