Análisis numérico para ecuaciones diferenciales
Tarea 1 - Introducción a los métodos de un paso

Jorge Alfredo Álvarez Contreras

September 11, 2023

Definición 1 (Método de Euler)**.** *Dado un problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Demuestre que el método de Euler es cero-estable cuando es aplicado al problema de valores iniciales $y' = -1/y^2$, $y(0) = y_0$, donde $y_0 \in [a, b]$ para $0 < a < b$.*

Solución. *La situación del problema está dada por el PVI* (1)*, donde $f(t, y) = f(y) = -\frac{1}{y^2}$. Fíjese $N \geq 1$ tan grande como se quiera, de modo que, al menos, $a \geq 1/N$. Entonces $f = f(y)$ es de Lipschitz en $[1/N, \infty)$, ya que para $y_1, y_2 \geq 1/N$ se tiene $N \geq \frac{1}{y_1}$ y $N \geq \frac{1}{y_2}$, de modo que*

$$\begin{aligned} |f(y_2) - f(y_1)| &= \left| -\frac{1}{y_2^2} + \frac{1}{y_1^2} \right| && (2) \\ &= \left| \frac{y_2^2 - y_1^2}{y_1^2 y_2^2} \right| && (3) \\ &= \frac{y_2 + y_1}{y_1^2 y_2^2} |y_2 - y_1| && (4) \\ &= \left(\frac{1}{y_1^2 y_2} + \frac{1}{y_1 y_2^2} \right) |y_2 - y_1| && (5) \\ &\leq 2N^3 |y_2 - y_1|. && (6) \end{aligned}$$

Por el teorema de estabilidad cero, esto implica que, para intervalos de tiempo $[0, T]$ pequeños (lo suficientemente pequeños como para que $y(t)$ no disminuya por debajo de $1/N$) entonces el método de Euler es cero-estable.

Ejercicio 2. *Implemente en Python los métodos de Euler y Heun. Posteriormente utilice estos métodos para resolver el PVI*

$$\begin{cases} y' = yt^3 - 3y/2, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{7}$$

con $h = 0.2$ en $t \in [0, 2]$. Elabore dos gráficas, una con la aproximación obtenida contra la solución analítica y otra del error puntual.

Solución.

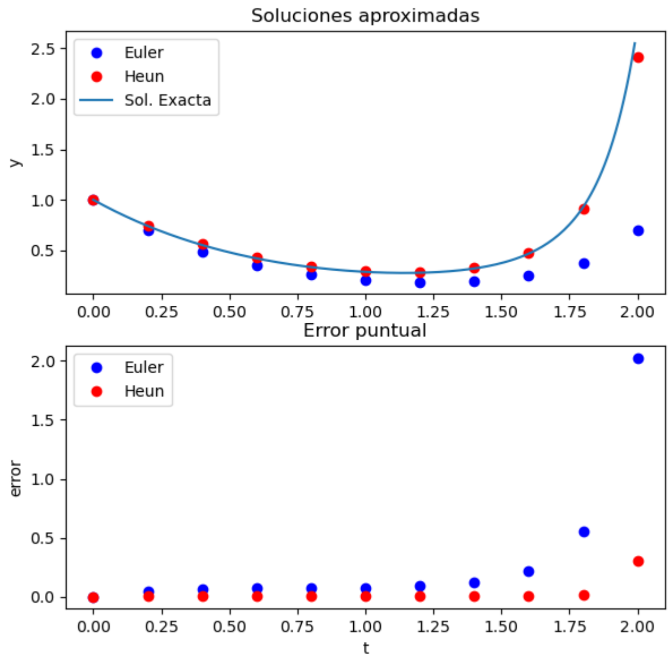

Figure 1: Resultados del ejercicio 2: soluciones aproximadas para $y'(t) = yt^3 - \frac{3y}{2}$. La solución exacta es $y(t) = \exp(t^4/4 - 3t/2)$.

Ejercicio 3. *Adapte los programas de Python que elaboró en el ejercicio anterior para resolver sistemas de ecuaciones. Utilice dichos programas para resolver numéricamente el oscilador de Van der Pol:*

$$y'' + (y^2 - 1)y' + y = 0. \tag{8}$$

Grafique las órbitas con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y con $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$. Utilice el mismo valor de h para ambos métodos y presente dichas órbitas en una figura distinta para cada método.

Solución.

Ejercicio 4. *Calcule el error de truncamiento local y el orden del método trapezoidal.*

Ejercicio 5. *Considere el método*

$$u_{n+1} = u_n + h[af_n + bf(t_n + \alpha h, u_n + \beta h f_n)] \tag{9}$$

donde a, b, α, β son parámetros reales.

(a) Establezca condiciones sobre los parámetros a, b, α, β para garantizar que el método es de primer orden.

(b) Pruebe que existe una combinación de estos parámetros tal que el método es de segundo orden. ¿Existe alguna combinación de las constantes de tal manera que el orden es mayor a 2?

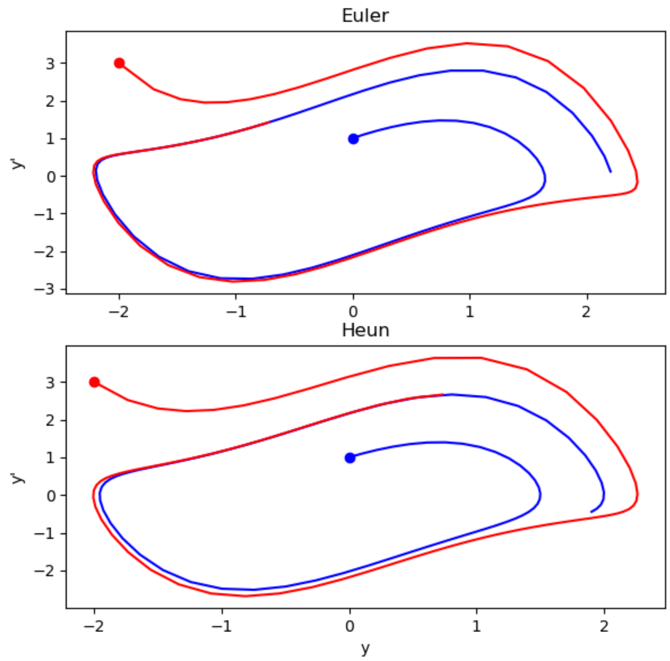

Figure 2: Resultados del ejercicio 3: soluciones aproximadas para el oscilador de Van der Pol: $y'' + (y^2 - 1)y' + y = 0$

Ejercicio 6. *Considere el método de un paso dado por*

$$u_{n+1} = u_n + h\left[f_n + \frac{h}{2}g\left(t_n + \frac{1}{3}h, u_n + \frac{1}{3}hf_n\right)\right], \tag{10}$$

donde $g = f_t + ff_y$*. Muestre que el método es de orden* 3*.*

Ejercicio 7. *Demuestre el teorema de convergencia 11.2 del libro de Quarteroni:*