

# Notas

Jorge Alfredo Álvarez Contreras

16th December 2021

# Contenido

<b>1</b>	<b>Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden</b>	<b>2</b>
1.1	Obtención de una ecuación diferencial parcial . . . . .	3
1.1.1	Por eliminación de funciones arbitrarias . . . . .	3
1.1.2	Caso geométrico . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Series de Fourier</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Métodos de solución. (Mie 10 nov 2021)</b>	<b>9</b>
3.1	Método por separación de variables . . . . .	9
3.1.1	Problemas de calor . . . . .	9
3.1.1.1	Problemas con temperatura cero . . . . .	9
3.1.1.2	Extremos aislados . . . . .	12
3.1.1.3	Extremos con temperatura constante (mie 17 nov 2021)	13
3.1.1.4	Modelo con extremos que irradian temperatura . . . . .	14
3.1.1.5	Problema de calor no homogéneo . . . . .	16
3.1.2	Problemas de vibraciones . . . . .	18
3.1.2.1	Vibraciones con perturbación . . . . .	21
3.1.3	Vibraciones en dos dimensiones . . . . .	22
3.1.3.1	Vibraciones en una membrana rectangular (26 nov 2021)	22
3.1.3.2	Vibraciones en una membrana circular (1 dic 2021) . .	22

# Chapter 1

## Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

**Definición 1.** Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que involucra derivadas de una o más variables dependientes respecto a más de una variable independiente.

**Ejemplo 1.0.1.** Si  $u = u(x, y, z)$  entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

es una EDP conocida con la ecuación de Laplace.

Los conceptos como orden, linealidad, homogeneidad son similares a los vistos en ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 2** (Orden). Es el orden de la máxima o máximas derivadas que aparezcan en la EDP.

**Definición 3** (Linealidad). Se dice que una EDP es lineal si la variable o variables son lineales, así como todas sus derivadas.

**Ejemplo 1.0.2.** La siguiente ecuación es una EDP de primer orden en dos variables  $x, y$ :

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y).$$

**Ejemplo 1.0.3.** La siguiente EDP es de segundo orden en  $x, y$ :

$$A(x, y)z_{xx} + 2B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = S(x, y),$$

en donde  $P, Q, R, A, B, C, D, E$  y  $F$  son funciones continuas en alguna región del plano.

**Definición 4** (Ecuación cuasilineal). Una EDP se dice cuasilineal si ésta es lineal en las máximas derivadas que aparecen en la ecuación sin importar como son los coeficientes.

**Ejemplo 1.0.4.** De primer orden:

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z).$$

De segundo orden:

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} = R(x, y, z, z_x, z_y).$$

**Definición 5** (Ecuación casilineal). *La ecuación se dice casilineal si ésta es cuasilineal y los coeficientes dependen solo de las variables independientes.*

**Ejemplo 1.0.5.** *De primer orden:*

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y = R(x, y, z).$$

*De segundo orden:*

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{yy} + C(x, y)z_{xy} = R(x, y, z, z_x, z_y).$$

**Definición 6** (Solución de una EDP). *Por una solución de una EDP se entiende a una función  $\varphi(x, y)$  tal que al sustituirla en la ED, ésta se satisface.*

**Ejercicio 1.** *Determine si la función  $\varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + c$ , donde  $c$  es una constante, es solución de la ecuación diferencial*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z = x, \quad z = z(x, y).$$

**Solución.** *Sea  $z = \varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + c$ , entonces  $z_x = x^2 + y^2$ , sustituyendo en la ecuación obtenemos*

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{3}x^3 + xy^2 \neq x,$$

*por lo tanto  $\varphi$  no es solución de la ecuación diferencial.*

**Ejercicio 2.** *Sea  $\varphi(x, y) = e^{x^2} f(x^2 + y^2)$  donde  $f$  es arbitraria. La ecuación es  $yz_x - xz_y = 2xyz$ .*

**Solución.** *Primero calculamos las derivadas parciales*

$$\begin{aligned} z_x &= 2xe^{x^2} f(x^2 + y^2) + e^{x^2} f'(x^2 + y^2)2x \\ z_y &= e^{x^2} f'(x^2 + y^2)2y \end{aligned}$$

*Sustituyendo tenemos*

$$\begin{aligned} &y \left[ 2xe^{x^2} f(x^2 + y^2) + e^{x^2} f'(x^2 + y^2)2x \right] - 2xye^{x^2} f'(x^2 + y^2) = 2xye^{x^2} f(x^2 + y^2) \\ \iff &2xye^{x^2} f(x^2 + y^2) + 2xye^{x^2} f'(x^2 + y^2) - 2xye^{x^2} f'(x^2 + y^2) = 2xye^{x^2} f(x^2 + y^2) \\ \iff &2xye^{x^2} f(x^2 + y^2) = 2xye^{x^2} f(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

*Por lo tanto  $\varphi$  sí es solución de la ecuación.*

## 1.1 Obtención de una ecuación diferencial parcial

### 1.1.1 Por eliminación de funciones arbitrarias

Dada una familia  $z = \varphi(x, y)$  de funciones definidas en cierto dominio del plano, es posible obtener una ecuación diferencial eliminando las funciones arbitrarias que aparezcan en ella.

**Ejemplo 1.1.1.** Sean  $f(x)$  y  $g(y)$  dos funciones diferenciables y sea  $z = f(x) + g(y)$ . Determine la ecuación diferencial correspondiente a la familia dada.

**Solución.** Dado que  $f$  y  $g$  son arbitrarias, la ecuación diferencial debe ser de segundo orden. Si  $z = f(x) + g(y)$ , entonces

$$\begin{aligned}z_x &= f'(x) \\z_y &= g'(y) \\z_{xx} &= f''(x) \\z_{yy} &= g''(y) \\z_{xy} &= 0.\end{aligned}$$

Observamos que  $z$  satisface la ecuación buscada  $z_{xy} = 0$ .

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $z = f(x)g(y)$ . De nuevo

$$\begin{aligned}z_x &= f'(x)g(y) \\z_y &= f(x)g'(y) \\z_{xx} &= f''(x)g(y) \\z_{yy} &= f(x)g''(y) \\z_{xy} &= f'(x)g'(y).\end{aligned}$$

Ahora,  $z_x z_y = f'(x)g(y)f(x)g'(y) = z_{xy}z$ , por lo tanto la ecuación buscada es

$$z_{xy}z - z_x z_y = 0.$$

**Ejemplo 1.1.3.** Sea  $z = e^{-x}f(x-y)$ . La solución será de primer orden. Las parciales son

$$\begin{aligned}z_x &= -e^{-x}f(x-y) + e^{-x}f'(x-y) \\z_y &= -e^{-x}f'(x-y).\end{aligned}$$

Sumando tenemos

$$z_x + z_y = -e^{-x}f(x-y) = -z \implies z + z_x + z_y = 0.$$

## 1.1.2 Caso geométrico

Podemos obtener una ecuación diferencial correspondiente a los planos tangentes a una superficie.

- (a) Sea  $f$  una función diferenciable en una región del plano  $xy$ , entonces la superficie  $\mathbb{S}$  en el espacio tiene un plano tangente en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  dada como

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

- (b) Si  $\mathbb{S}$  está dada por la función en forma implícita  $F(x, y, z) = 0$ , entonces la ecuación del plano tangente a  $\mathbb{S}$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

- (c) Supongamos que  $\mathbb{S}$  está dada por la ecuación en forma paramétrica  $x = f(u, v)$ ,  $y = g(u, v)$  y  $z = h(u, v)$ , donde  $u$  y  $v$  son parámetros en donde los Jacobianos

$$J_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)}, \quad J_2 = \frac{\partial(f, h)}{\partial(u, v)}, \quad \text{y} \quad J_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$$

no son ceros simultáneamente. Entonces la ecuación del plano tangente a  $\mathbb{S}$  es

$$J_1 \cdot (x - x_0) + J_2 \cdot (y - y_0) + J_3 \cdot (z - z_0) = 0.$$

**Recordatorio 1.** *Los Jacobianos se calculan como*

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix},$$

donde  $J_1, J_2$ , y  $J_3$  están evaluados en el punto  $(u_0, v_0)$  correspondiente a  $(x_0, y_0, z_0)$ .

El procedimiento se describe en el siguiente example.

**Ejemplo 1.1.4.** *Determine la ED de la familia de todos los planos tangentes a la elipsoide  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$  no perpendiculares al plano  $xy$ .*

**Solución.** *Sea  $f(x_0, y_0, z_0)$  un punto en la superficie  $\mathbb{S}$  con  $z_0 \neq 0$ . Entonces la ecuación del plano tangente es*

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

*Calculando las derivadas parciales*

$$F_x = 2x \quad F_y = 8y \quad F_z = 8z,$$

*evaluando en  $(x_0, y_0, z_0)$  y sustituyendo obtenemos la ecuación del plano tangente*

$$\begin{aligned} 2x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0) + 8z_0(z - z_0) &= 0 \\ \iff xx_0 - x_0^2 + 4yy_0 - 4y_0^2 + 4zz_0 - 4z_0^2 &= 0 \\ \iff xx_0 - 4yy_0 + 4zz_0 &= x_0^2 + 4y_0^2 + 4z_0^2. \end{aligned}$$

*Derivando la ecuación del plano respecto a  $x$  y a  $y$  obtenemos*

$$\begin{aligned} x_0 + 4z_x z_0 &= 0 \implies x_0 = -4z_x z_0 \\ 4y_0 + 4z_y z_0 &= 0 \implies y_0 = -z_y z_0. \end{aligned}$$

*Sustituyendo los valores de  $x_0$  y  $y_0$  en la ecuación del plano obtenemos*

$$\begin{aligned} -4xz_0z_x - 4yz_0z_y + 4zz_0 &= 16z_x^2z_0^2 + 4z_y^2z_0^2 + 4z_0^2 \\ \implies -xz_x - yz_y + z &= (4z_x^2 + z_y^2 + 1)z_0. \end{aligned}$$

*Dado que el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  pertenece a la superficie  $\mathbb{S}$ , se sigue que  $x_0^2 + 4y_0^2 + 4z_0^2 = 4$ . Sustituyendo el valor de  $x_0$  y  $y_0$  en la restricción anterior podemos despejar a  $z_0$ :*

$$16z_x^2z_0^2 + 4z_y^2z_0^2 + 4z_0^2 = 4$$

$$\begin{aligned} &\implies (4z_x^2 + z_y^2 + 1)z_0^2 = 1 \\ &\implies z_0^2 = \frac{1}{4z_x^2 + z_y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Finalmente sustituimos el valor de  $z_0$  en la ecuación del plano

$$\begin{aligned} z - xz_x - yz_y &= (4z_x^2 + z_y^2 + 1) \frac{1}{(4z_x^2 + z_y^2 + 1)^{1/2}} \\ \implies z - xz_x - yz_y &= (4z_x^2 + z_y^2 + 1)^{1/2}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$(z - xz_x - yz_y)^2 = 4z_x^2 + z_y^2 + 1,$$

la cual es la ecuación diferencial de la familia de planos tangentes.

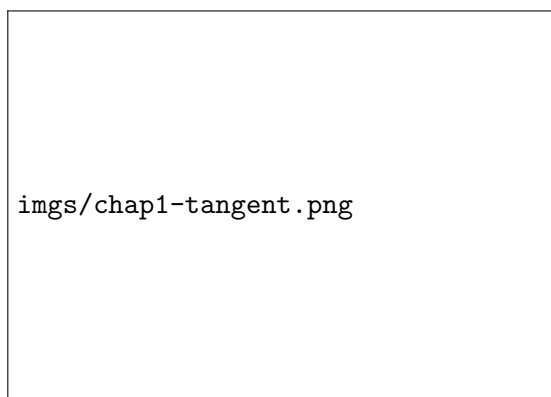


Figure 1.1: El plano tangente es solución particular de la ecuación diferencial anterior.

CONTINUA EN 4.PDF.

## Chapter 2

# Series de Fourier

**Definición 7.** Dos funciones son ortogonales en  $[a, b]$  si  $\int_a^b fg = 0$ .

**Ejemplo 2.0.1.** (a) si  $f(x) = 2x^2$  y  $g(x) = 4x^3$ , ambas definidas en  $[-1, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 2x^2 \cdot 4x^3 dx &= 8 \int_{-1}^1 x^5 dx \\ &= \frac{8}{6} x^6 \Big|_{-1}^1 \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Sea  $f(x) = 4x - 1$  y  $g(x) = x^2 - 2x$  definidas en  $[0, 2]$ . Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4x - 1)(x^2 - 2x) dx &= \int_0^2 (4x^3 - 9x^2 + 2x) dx \\ &= x^4 - 3x^3 + x^2 \Big|_0^2 \\ &= -4 \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

**Definición 8.** Un conjunto infinito de funciones  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$  se dice que es ortogonal en  $[a, b]$  si

$$\int_a^b \varphi_n \varphi_m = 0 \quad \text{para } n \neq m.$$

Si  $n = m$ , entonces

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_n^2$$

es la norma cuadrada de  $\varphi_n$  que se denotará como  $\|\varphi_n\|$ .

**Ejemplo 2.0.2.** (a) El conjunto  $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$  es ortogonal en  $[-\pi, \pi]$ , ya que, si  $\varphi_n(x) = \cos nx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $\varphi_0(x) = 1$ , entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n \varphi_m &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] dx\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(m+n)} \sin((m+n)x) + \frac{1}{2(m-n)} \sin((m-n)x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

para  $n, m \geq 0$ ,  $n \neq m$ .

(b) Determine si el conjunto  $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$  es ortogonal en  $[0, 2\pi]$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)] \, dx \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \sin((m-n)x) - \frac{1}{2(m+n)} \sin((m+n)x) \Big|_0^\pi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

## Chapter 3

# Métodos de solución. (Mie 10 nov 2021)

Los métodos más usuales para resolver los P.F. son

- (a) Separación de variables
- (b) Por transformadas integrales
  - Laplace
  - Fourier
- (c) Funciones de Green
- (d) Funciones variacionales
- (e) Métodos numéricos

### 3.1 Método por separación de variables

#### 3.1.1 Problemas de calor

##### 3.1.1.1 Problemas con temperatura cero

Considérese el problema de determinar la distribución de temperatura en una varilla delgada lateralmente aislada de longitud  $L$  en donde la temperatura en los extremos es cero y con temperatura inicial dada por  $f(x)$  a lo largo de la varilla.

**Modelo** Sea  $u = u(x, t)$  la función que describe la temperatura sobre la varilla. Entonces la ecuación diferencial es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0.$$

<i>C.F.</i>	$u(0, t) = 0$	$u(L, t) = 0$	$t > 0$
<i>C.I.</i>	$u(x, 0) = f(x)$		$0 < x < L$

**Solución** El método de separación de variables supone como solución a

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos  $XT' = kX''T$ . Dividiendo entre  $ku = kXT$ , tenemos

$$\frac{XT'}{kXT} = k \frac{X''T}{kXT}.$$

Es decir,

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}.$$

Como el lado izquierdo depende solo de  $t$  y el lado derecho depende solo de  $X$ , la igualdad anterior solo es posible cuando ambos lados son iguales a una constante. La denotaremos como  $-\lambda$  por conveniencia. Así,

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

A  $\lambda$  la llamaremos la constante de separación. Por lo tanto, obtenemos dos EDO

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad T' + kT = 0$$

Ahora, aplicando las condiciones de frontera a  $u(x, t)$ :

$$\begin{array}{llll} \text{Si } u(0, t) = 0 & \implies & X(0)T(t) = 0 & \text{ssi } X(0) = 0 \\ \text{Si } u(L, t) = 0 & \implies & X(L)T(t) = 0 & \text{ssi } X(L) = 0 \end{array}$$

Así, obtenemos un problema de Strum-Liouville cuya solución depende de  $\lambda$ .

- *Caso*  $\lambda = 0$ . Entonces la ecuación diferencial  $X'' = 0$  tiene solución

$$X(x) = c_1 + c_2x.$$

- Como  $X(0) = 0$ , entonces  $c_1 + 0 = 0$ , por lo cual  $c_1 = 0$ .
- Como  $X(L) = 0$ , entonces  $c_2L = 0$ , por lo cual  $c_2 = 0$ .

Concluimos que  $X(x) = 0$  para todo  $x$ : la solución es trivial.

- *Caso*  $\lambda < 0$ . Entonces la ecuación diferencial tiene solución

$$X(x) = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x},$$

donde  $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ .

- Como  $X(0) = 0$ , entonces  $c_1 + c_2 = 0$ , por lo cual  $c_1 = -c_2$ .
- Como  $X(L) = 0$ , entonces  $c_1e^{\alpha L} + c_2e^{-\alpha L} = 0$ , por lo cual  $c_1(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}) = 0$ . Esto implica que  $c_1 = 0$ .

Concluimos que  $X(x) = 0$  para todo  $x$ : la solución es trivial.

- *Caso*  $\lambda > 0$ . Entonces la ecuación diferencial tiene solución

$$X(x) = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x),$$

donde  $\beta = \sqrt{\lambda}$ .

- Como  $X(0) = 0$ , entonces  $c_1 = 0$ .
- Como  $X(L) = 0$ , entonces  $c_2 \sin(\beta L) = 0$ .

Considerando  $c_1 = 0$ , concluimos que  $\beta L = \pi n$  con  $n$  entero positivo. Así,

$$\beta = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Concluimos que  $X(x) = c_2 \sin(\frac{n\pi}{L}x)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Ahora, sustituyendo  $\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$  en la ecuación para  $T(t)$ , tenemos

$$T' + k(\frac{n\pi}{L})^2 T = 0.$$

La cual tiene solución  $T(t) = c_3 \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t)$ . Por lo tanto, tenemos una familia de soluciones

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X(x)T(t) \\ &= c_2 \sin(\frac{n\pi}{L}x) c_3 \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t) \\ &= b \sin(\frac{n\pi}{L}x) \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t), \end{aligned}$$

donde  $b = c_2 c_3$ .

Si tomamos una de estas soluciones y le aplicamos la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , obtenemos la ecuación

$$f(x) = b \sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

la cual no se puede satisfacer para cualquier función  $f(x)$ .

Sin embargo, si tomamos una constante  $b_n$  para cada  $n$  y sumamos las soluciones  $u_n(x, t)$  resultantes, obtenemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t), \quad (3.1)$$

la cual sigue siendo una solución de la ecuación diferencial, ya que la linealidad de la E.D. nos permite aplicar el principio de superposición.

Ahora sí, aplicando la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , tenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

lo cual tiene solución exactamente cuando  $f$  se puede expresar como una serie de Fourier en senos en  $[0, L]$ . En este caso, los coeficientes son

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx.$$

En particular, una condición necesaria para que  $f$  se pueda expresar de esta manera es la llamada condición de compatibilidad:

$$f(0) = f(L) = 0.$$

**Ejemplo 3.1.1.** *Considérese una varilla de longitud  $L = \pi$  y*

$$f(x) = x(\pi - x) \quad k = 1.$$

*Notemos que  $f$  cumple las condiciones de compatibilidad.*

*Además,  $f$  tiene transformada de Fourier en senos en  $[0, \pi]$ , así que la solución está dada por*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \exp(-kn^2 t), .$$

*donde*

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$$

*Empleando el método tabular*

	$u$		$dv$
(+)	$x(\pi - x)$		$\sin(nx)$
	$\pi - 2x$	$\searrow$	$-\frac{\cos(nx)}{n}$
	$-2$	$\searrow$	$-\frac{\sin(nx)}{n^2}$
	$0$	$\searrow$	$\frac{\cos(nx)}{n^3}$
(-)			

*Obtenemos*

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \left[ -x(\pi - x) \frac{\cos(nx)}{n} + (\pi - 2x) \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{2 \cos(nx)}{n^3} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{2 \cos(n\pi)}{n^3} + \frac{2 \cos(n0)}{n^3} \right] \\
 &= \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3 \pi} \\
 &= \begin{cases} \frac{8}{n^3 \pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

*o bien*

$$b_{2n-1} = \frac{8}{(2n-1)^3 \pi} \quad b_{2n} = 0$$

*para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Así,*

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin((2n-1)x) \exp(-k(2n-1)^2 t).$$

### 3.1.1.2 Extremos aislados

Consideremos ahora el problema de la distribución de temperatura sobre una varilla de longitud  $L$  donde los extremos son aislados con temperatura inicial dada por  $f(x)$  a lo largo de la varilla

**Modelo** Sea  $u = u(x, t)$  la función deseada. La ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, t > 0.$$

$$\begin{array}{llll} C.F. & u_x(0, t) = 0 & u_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = f(x) & & 0 < x < L \end{array}$$

Queda de tarea.

### 3.1.1.3 Extremos con temperatura constante (mie 17 nov 2021)

Determinar la función que determina la distribución de temperatura sobre una varilla de longitud  $L$  lateralmente aislada en donde los extremos tienen temperatura constante en el extremo izquierdo  $T_1$  y en el extremo derecho  $T_2$ , con temperatura inicial dada por  $f(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ .

**Modelo** Sea  $u = u(x, t)$ . Entonces la EDP es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

con

$$\begin{array}{llll} C.F. & u(0, t) = T_1 & u(L, t) = T_2 & t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = f(x) & & 0 \leq x \leq L \end{array}$$

**Solución** Observe que, si  $v$  es una solución del problema con temperatura cero en los extremos

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

con

$$\begin{array}{llll} C.F. & v(0, t) = 0 & v(L, t) = 0 & t > 0 \\ C.I. & v(x, 0) = g(x) & & 0 \leq x \leq L \end{array}$$

entonces  $u(x, t) = v(x, t) + a_1 + a_2x$  es solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

con

$$\begin{array}{llll} C.F. & u(0, t) = a_1 & u(L, t) = a_1 + a_2L & t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = g(x) + a_1 + a_2x & & 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Por lo tanto, podemos tomar  $a_1 = T_1$ ,  $a_2 = (T_2 - T_1)/L$  y  $g(x) = f(x) - a_1 - a_2x$  para reducir este problema al problema anterior, obteniendo

$$u(x, t) = v(x, t) + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$$

donde

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad (3.2)$$

$$g(x) = f(x) - T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

lo cual tiene solución exactamente cuando los coeficientes de Fourier

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L}x \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

existen. En particular, es necesario que se cumpla la condición de compatibilidad

$$f(0) = T_1 \qquad f(L) = T_2.$$

**Ejemplo 3.1.2.** *Caso particular:  $L = \pi$ ,  $f(x) = x$ ,  $T_1 = 50$ ,  $T_2 = 100$ .*

*Entonces*

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( x - 50 - \frac{50}{\pi}x \right) \sin(nx) dx.$$

*Usando el método tabular*

(+)	$x - 50 - \frac{50}{\pi}x$	$dv$	
	$\searrow$	$\sin(nx)$	
(-)	$1 - \frac{50}{\pi}$	$\searrow$	
	$\searrow$	$-\frac{\cos(nx)}{n}$	·
(+)	$0$	$\searrow$	
	$\searrow$	$-\frac{\sin(nx)}{n^2}$	

*tenemos*

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( x - 50 - \frac{50}{\pi}x \right) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ - \left( x - 50 - \frac{50}{\pi}x \right) \frac{\cos(nx)}{n} + \left( 1 - \frac{50}{\pi} \right) \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_{x=0}^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ (100 - \pi) \frac{\cos(n\pi)}{n} \right] - \frac{2}{\pi} \frac{50}{n} \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{(100 - \pi)(-1)^n - 50}{n}.
 \end{aligned}$$

*Luego,*

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= v(x, t) + 50 + \frac{50}{\pi}x \\
 &= 50 + \frac{50}{\pi}x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(100 - \pi)(-1)^n - 50}{n} \sin(nx) \exp(-kn^2 t),
 \end{aligned}$$

#### 3.1.1.4 Modelo con extremos que irradian temperatura

Si en el problema anterior las condiciones de frontera fueran de la forma

$$\begin{aligned}
 u_x(0, t) &= A[u(0, t) + T] \\
 u_x(L, t) &= -A[u(L, t) + T]
 \end{aligned}$$

se dice que hay irradiación de temperatura en los extremos.

**Modelo** Resolveremos el problema en el cual la temperatura en el extremo izquierdo es cero y en el derecho hay irradiación tomando  $T = 0$ . Esto es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

con

$$\begin{array}{lll} C.F. & u(0, t) = 0 & u_x(L, t) + Au(L, t) = 0 \quad t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \end{array}$$

**Solución** Separando variables con el supuesto  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , obtenemos las ecuaciones

$$X'' + \lambda X = 0 \quad T' + k\lambda T = 0.$$

Aplicando las condiciones de frontera, tenemos

$$\begin{array}{lll} \text{Si } u(0, t) = 0 & \implies & X(0)T(t) = 0 \\ & \text{ssi} & X(0) = 0 \\ \text{Si } u_x(L, t) + A(L, t) = 0 & \implies & X'(L)T(t) + AX(L)T(t) = 0 \\ & \text{ssi} & X'(L) + AX(L) = 0. \end{array}$$

Así, obtenemos un problema de Strum-Liouville completo:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X'(L) + AX(L) &= 0. \end{aligned}$$

- Caso  $\lambda = 0$ . Entonces  $X$  tiene solución

$$X(x) = c_1 + c_2x.$$

Aplicando las condiciones de frontera, tenemos

$$\begin{aligned} X(0) = 0 & \implies c_1 = 0 \\ X'(L) + AX(L) = 0 & \implies c_2 + Ac_2L = 0 \implies c_2 = 0, \end{aligned}$$

por lo cual la solución es trivial.

- Caso  $\lambda < 0$ . Entonces

$$X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

con  $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ .

- Caso  $\lambda > 0$ . Entonces

$$X(x) = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)$$

donde  $\beta = \sqrt{\lambda}$ . Aplicando  $X(0) = 0$ , obtenemos  $c_1 = 0$ , por lo cual

$$X(x) = c_2 \sin(\beta x)$$



$$X'(x) = \beta c_2 \cos(\beta x)$$

Aplicando la otra condición de frontera, tenemos

$$\beta c_2 \cos(\beta L) + A c_2 \sin(\beta L) = 0.$$

Suponiendo  $c_2 \neq 0$  (de otro modo la solución es trivial), tenemos

$$\beta \cos(\beta L) + A \sin(\beta L) = 0.$$

Esta ecuación no se puede resolver algebraicamente para  $\beta$ , pero sí tiene infinitas soluciones  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$ . Luego, tenemos valores para  $\lambda$  dados como  $\lambda_n = \beta_n^2$ , lo cual nos da soluciones

$$X(x) = b \sin(\beta_n x)$$

con  $n \in \mathbb{N}$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

Así,

$$T(t) = b \exp(-k\beta_n^2 t)$$

por lo cual obtenemos soluciones

$$u(x, t) = b \sin(\beta_n x) \exp(-k\beta_n^2 t).$$

**Ejemplo 3.1.3.** *Considérese el caso con  $L = 6$ ,  $k = 4$ ,  $A = \frac{1}{2}$  y  $f(x) = x(6 - x)$ .*

### 3.1.1.5 Problema de calor no homogéneo

Consideremos el problema de distribución de temperatura sobre una varilla delgada de longitud  $L$  lateralmente aislada con temperatura cero en los extremos y temperatura inicial dada por  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq L$  y en el cual existe una fuerza externa dada por  $F(x, t)$ .

**Modelo** Sea  $u = u(x, t)$  la temperatura. La ecuación diferencial que gobierna a este fenómeno es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (3.3)$$

$$\begin{array}{lll} C.F. & u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0 \quad t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{array}$$

**Solución** Dado que la ecuación es lineal y no homogénea, la solución general está dada como

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t)$$

donde  $u_p(x, t)$  es una solución particular y  $u_h(x, t)$  es la solución de la ecuación homogénea correspondiente

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ C.F. & u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0 \quad t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{array}$$

Recordemos que este modelo homogéneo tiene solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Esto sugiere que, para determinar la solución de (3.3), es razonable suponer que  $u$  tiene la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (3.4)$$

donde  $T_n(t)$  es una función desconocida que, en el caso homogéneo, se reduce a  $T_n(t) = b_n \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t)$ . La ecuación (3.4) representa la serie en senos de  $u(x, t)$ , por lo cual tenemos

$$T_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (3.5)$$

Ahora supongamos que  $F(x, t)$  tiene serie de Fourier en senos

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad B_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

En este caso, al derivar (3.5) con respecto a  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} T'_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[ k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2k}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2k}{L} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{x=0}^L - \frac{n\pi}{L} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] + B_n(t) \\ &= -\frac{2kn^2\pi^2}{L^3} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + B_n(t) \\ &= -k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) + B_n(t). \end{aligned}$$

Es decir,

$$T'_n(t) + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T_n(t) = B_n(t),$$

lo cual es una EDO lineal de primer orden, cuya solución es

$$T_n(t) = \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t) \left[ \int_0^t \exp(k(\frac{n\pi}{L})^2 \xi) B_n(\xi) d\xi + C \right].$$

En  $t = 0$  tenemos que  $T_n(0) = C$  es una constante, pero  $T_n(0) = b_n$ , así que  $C = b_n$ .

Así, sustituyendo en (3.4), tenemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t) \left[ \int_0^t \exp(k(\frac{n\pi}{L})^2 \xi) B_n(\xi) d\xi + b_n \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Es decir,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t) \int_0^t \exp(k(\frac{n\pi}{L})^2 \xi) B_n(\xi) d\xi \sin(\frac{n\pi}{L} x) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x) \exp(-k(\frac{n\pi}{L})^2 t)$$

**Ejercicio 3.** Consideremos el caso particular de  $L = 5$ ,  $k = 1$ ,  $f(x) = x$ ,  $F(x, t) = x \sin t$ .

### 3.1.2 Problemas de vibraciones

Considérese el problema de determinar las vibraciones en una varilla de longitud  $L$  fija en los extremos con un desplazamiento inicial dado por  $f(x)$  y una velocidad inicial dada por  $g(x)$  para  $0 \leq x \leq L$ .

Primero trataremos el modelo ideal en que la cuerda o varilla no tiene nada que lo impida.

**Modelo** Sea  $u = u(x, t)$  la función que describa las vibraciones. Entonces la ecuación diferencial que domina la evolución del sistema es la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L \quad t > 0$$

con

$$\begin{array}{llll} C.F. & u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = f(x) & u_t(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq L. \end{array}$$

**Solución** El método de separación de variables supone que la solución  $u$  es de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$XT'' = c^2 X''T,$$

de donde

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

por lo cual obtenemos las EDO

$$X'' + \lambda X = 0 \quad T'' + c^2 \lambda T = 0.$$

Ahora apliquemos las condiciones

- Dado que  $u(0, t) = 0$ , entonces  $X(0)T(t) = 0$ , por lo cual  $X(0) = 0$ .
- Dado que  $u(L, t) = 0$ , entonces  $X(L)T(t) = 0$ , por lo cual  $X(L) = 0$ .

Así, obtenemos el problema de Strum-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

que tiene un espacio de soluciones generado por

$$X(x) = c \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{con } \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

y  $c \in \mathbb{R}$ . Luego, la solución de  $T'' + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 T = 0$  es

$$T(t) = k_1 \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)$$

donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . Luego, tenemos soluciones

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ a \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right].$$

Tomando coeficientes distintos  $a_n, b_n$  para cada  $n$  y sumando, obtenemos una solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right]$$

con derivada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ -a_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \frac{cn\pi}{L} \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right].$$

Al aplicar las condiciones iniciales, tenemos

- Como  $u(x, 0) = f(x)$ , entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

- Como  $u_t(x, 0) = g(x)$ , entonces

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Estas dos ecuaciones tienen solución cuando  $f$  y  $g$  tienen serie de Fourier en senos, en cuyo caso los coeficientes se pueden obtener como

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad b_n \frac{cn\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Es decir,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

**Ejemplo 3.1.4.** Consideremos el caso particular con  $L = \pi$ ,  $c = 1$  y condiciones iniciales

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$g(x) = x(1 + \cos x).$$

.

**Solución** La solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) [a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)]$$

con

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx - \frac{2x \cos(nx)}{\pi n} \Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad - \frac{2}{\pi n} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx - \frac{2(\pi - x) \cos(nx)}{\pi n} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\cos(n\pi/2)}{n} \\ &\quad - \frac{2}{\pi n^2} \sin(nx) \Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{\cos(n\pi/2)}{n} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi n^2} \sin(nx) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \sin(n\pi/2). \end{aligned}$$

Y haciendo la otra integral (yo la hice con Wolfram) obtenemos

$$b_1 = \frac{3}{2}$$

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{n^2(n^2 - 1)}, \quad n \geq 2.$$

Así,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sin(x) [a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t)] \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \sin(nx) [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] \\ &= \sin(x) \left[ \frac{4}{\pi} \cos(t) + \frac{3}{2} \sin(t) \right] \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \sin(nx) \left[ \frac{4}{n^2\pi} \cos(nt) + \frac{2(-1)^n}{n^2(n^2 - 1)} \sin(nt) \right] \end{aligned}$$

### 3.1.2.1 Vibraciones con perturbación

Consideremos el problema anterior en donde ahora existe una fuerza externa  $h(x)$  que impide que la cuerda vibre libremente.

**Modelo** La ecuación diferencial que gobierna a este fenómeno está dada como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x)$$

con

$$\begin{array}{llll} C.F. & u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \\ C.I. & u(x, 0) = f(x) & u_t(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq L. \end{array}$$

**Solución** El método de separación de variables supone que la solución es de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Sustituyendo esto en la ecuación, tenemos

$$XT'' = c^2 X''T + h(x)$$

dividiendo entre  $XT$ , tenemos

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} + \frac{h(x)}{XT}.$$

Así, las variables no se pueden separar.

Para resolver esto, introducimos una perturbación  $\varphi$  para considerar soluciones de la forma  $u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$ . Sustituyendo en la EDP, tenemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c^2 \varphi''(x) + h(x).$$

Supongamos que podemos resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} c^2 \varphi'' + h &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Donde las condiciones para  $v$  y de  $\varphi$  se obtienen de las de  $u$ :

- Como  $u(0, t) = 0$ , entonces  $v(0, t) + \varphi(0) = 0$ , por lo cual  $v(0, t) = 0$  y  $\varphi(0) = 0$ .
- Como  $u(L, t) = 0$ , entonces  $v(L, t) + \varphi(L) = 0$ , por lo cual  $v(L, t) = 0$  y  $\varphi(L) = 0$ .
- Como  $u(x, 0) = f(x)$ , entonces  $v(x, 0) = u(x, 0) - \varphi(x) = f(x) - \varphi(x)$ .
- Como  $u_t(x, 0) = g(x)$ , entonces  $v_t(x, 0) = g(x)$ .

Por lo cual  $v$  es la solución del problema

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

con

$$\begin{array}{llll} C.F. & v(0, t) = 0 & v(L, t) = 0 & t > 0 \end{array}$$

$$C.I. \quad v(x, 0) = f(x) - \varphi(x) \quad v_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L.$$

Además, la ecuación  $c^2 \varphi'' + h = 0$  tiene solución general

$$\varphi(x) = -\frac{1}{c^2} \int_0^x H(\xi) d\xi + c_1 x + c_2, \quad H(\xi) = \int_0^x h(\xi) d\xi.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{c} \int_0^x H(\xi) d\xi + \frac{x}{c^2 L} \int_0^L H(\xi) d\xi.$$

**Ejercicio 4.** Consideremos el caso particular  $L = \pi$ ,  $c = 1$ ,  $h(x) = ax$ ,  $f(x) = 0$  y  $g(x) = x$ .

### 3.1.3 Vibraciones en dos dimensiones

#### 3.1.3.1 Vibraciones en una membrana rectangular (26 nov 2021)

#### 3.1.3.2 Vibraciones en una membrana circular (1 dic 2021)

Supongamos que se desea determinar la función que describe las vibraciones sobre una membrana circular de radio  $r = a$  fija a lo largo de toda la frontera. Dado que la ecuación de onda está dada en la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

debemos expresarla en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena y del producto, tenemos, en forma matricial,

$$\begin{aligned} \nabla u &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} \\ Hu &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} & \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} + \frac{\partial u}{\partial r} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \end{bmatrix} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando todas estas derivadas parciales y tomando la traza de esta última matriz, tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Así, la ecuación queda como

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

con  $u = u(r, \theta, t)$ . Como la membrana está fija en la frontera, tenemos

$$\begin{aligned} u(0, \theta, t) &= 0 & u(a, \theta, t) &= 0 \\ u(r, \pi, t) &= u(r, -\pi, t) & u_\theta(r, \pi, t) &= u_\theta(r, -\pi, t). \end{aligned}$$

Consideremos también que el desplazamiento inicial está dado por  $f(r, \theta)$  y la velocidad inicial por  $g(r, \theta)$  para todo  $0 \leq r \leq a$  y para  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .

**Solución** Por separación de variables. Sea  $u(r, \theta, t) = R(r)\Phi(\theta)T(t)$ . Sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$R\Phi T'' = c^2 \left( R''\Phi T + \frac{1}{r} R'\Phi T + \frac{1}{r^2} R\Phi''T \right).$$

Dividiendo entre  $u$ , esto es

$$\frac{T''}{c^2 T} = \left( \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} \right) = -\lambda^2.$$

De aquí, obtenemos las EDO

$$\begin{aligned} T'' + \lambda^2 c^2 T &= 0 \\ r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \lambda^2 &= -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu \end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede escindir en otras dos ecuaciones, para obtener el sistema de tres EDO:

$$\begin{aligned} T'' + \lambda^2 c^2 T &= 0 \\ r^2 R'' + r R' + (r^2 \lambda^2 - \mu) R &= 0 \\ \Phi'' + \mu \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de frontera

- $u(0, \theta, t) = 0$  implica que  $R(0) = 0$ .
- $u(a, \theta, t) = 0$  implica que  $R(a) = 0$ .
- $u(r, \pi, t) = u(r, -\pi, t)$  implica que  $\Phi(\pi) = \Phi(-\pi)$ .
- $u_\theta(r, \pi, t) = u_\theta(r, -\pi, t)$  implica que  $\Phi'(\pi) = \Phi'(-\pi)$ .

Resolviendo para  $\Phi$ , tenemos

- Si  $\mu = 0$ , entonces  $\Phi(\theta) = c_1 + c_2 \theta$ , así que  $\Phi'(\theta) = c_2$ .  
Como  $\Phi(\pi) = \Phi(-\pi)$ , entonces  $c_1 + c_2 \pi = c_1 - c_2 \pi$ , por lo cual  $c_2 = 0$ .  
Como  $\Phi'(\pi) = \Phi'(-\pi)$ , entonces  $c_2 = c_2$ . Por lo tanto,  $\Phi(\theta) = c_1$ .



- Si  $\mu < 0$ , entonces

$$\Phi(\theta) = c_1 e^{\alpha\theta} + c_2 e^{-\alpha\theta}$$

donde  $\alpha = \sqrt{-\mu}$ .

Como  $\Phi(\pi) = \Phi(-\pi)$ , entonces  $c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = c_1 e^{-\alpha\pi} + c_2 e^{\alpha\pi}$ . Se sigue que  $c_1 = c_2$ .

Como  $\Phi'(\pi) = \Phi'(-\pi)$ , entonces  $\alpha c_1 e^{\alpha\pi} - \alpha c_2 e^{-\alpha\pi} = \alpha c_1 e^{-\alpha\pi} - \alpha c_2 e^{\alpha\pi}$ . Se sigue que  $c_1 = -c_2$ . Luego,  $c_1 = c_2 = 0$ .

Concluimos que la única solución es la trivial.

- Si  $\mu > 0$ . Entonces

$$\Phi(\theta) = c_1 \cos(\beta\theta) + c_2 \sin(\beta\theta)$$

$$\Phi'(\theta) = -\beta c_1 \sin(\beta\theta) + \beta c_2 \cos(\beta\theta)$$

donde  $\beta = \sqrt{\mu}$ .

Como  $\Phi(\pi) = \Phi(-\pi)$ , entonces

$$c_1 \cos(\beta\pi) + c_2 \sin(\beta\pi) = c_1 \cos(-\beta\pi) + c_2 \sin(-\beta\pi).$$

Luego,  $\sin(\beta\pi) = 0$ .

Como  $\Phi(\pi) = \Phi(-\pi)$ , entonces

$$-\beta c_1 \sin(\beta\pi) + \beta c_2 \cos(\beta\pi) = -\beta c_1 \sin(-\beta\pi) + \beta c_2 \cos(-\beta\pi).$$

Luego,  $\sin(\beta\pi) = 0$ .

En ambos casos, tenemos que  $\beta = 1, 2, 3, \dots$ , por lo cual  $\mu = \beta^2 = n^2$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$ , y así la solución es

$$\Phi(\theta) = c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta).$$

Ahora resolvemos para  $R(r)$  de la ecuación

$$r^2 R'' + r R' + (r^2 \lambda^2 - \mu) R = 0$$

donde  $\mu = 0$  o  $\mu = n^2$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

- Si  $\lambda = 0$ , la ecuación es de Cauchy-Euler,

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0.$$

Sustituyendo  $R = r^m$  obtenemos soluciones  $m = \pm n$ , por lo cual obtenemos la solución

$$R(r) = K_1 r^n + K_2 r^{-n}.$$

La condición inicial  $R(0) = 0$  se convierte en  $\lim_{r \rightarrow 0} R(r) = 0$ , lo cual solo se satisface si  $K_2 = 0$ . Por otro lado, la condición  $R(a) = 0$  nos da que  $0 = K_1 a^n$ , lo cual solo se satisface con  $K_1 = 0$ . Luego, la solución es trivial.

- Si  $\lambda \neq 0$  y  $\mu = n^2$  con  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , entonces la ecuación es de Bessel de orden  $n$ :

$$r^2 R'' + rR' + ((\lambda r)^2 - n^2)R = 0.$$

Entonces la solución es

$$R(r) = K_1 J_n(\lambda r) + K_2 Y_n(\lambda r),$$

donde  $J_n$  y  $Y_n$  son las  $n$ -ésimas funciones de Bessel de 1er y segundo tipo (o especie).

$$J_n(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left( \frac{\lambda x}{2} \right)^{2m+n}$$

Las  $Y_n(\lambda r)$  no son acotadas cuando  $r \rightarrow 0$ , así que la condición  $\lim_{r \rightarrow 0} R(r) = 0$  nos hace elegir  $K_2 = 0$ , por lo cual

$$R(r) = K_1 J_n(\lambda r).$$

Dado que  $J_0(0) = 1$ , para el caso  $\mu = n^2 = 0$ , la condición  $\lim_{r \rightarrow 0} R(r) = 0$  se convierte en  $K_1 = 0$  por lo cual la solución es trivial.

Por otro lado, la condición  $R(a) = 0$  nos da  $K_1 J_n(\lambda a) = 0$ . Así,  $\lambda$  son las soluciones de  $J_n(\lambda a) = 0$ . La ecuación  $J_n(\lambda a) = 0$  es una ecuación algebraica en  $\lambda a$  de grado  $\infty$  por lo tanto se tienen  $\infty^2$  raíces (¿qué?). Ordenamos el conjunto de raíces  $\{\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \xi_{n_3}, \dots\}$  de manera que

$$0 < \xi_{n_1} < \xi_{n_2} < \xi_{n_3} < \dots$$

Entonces

$$\lambda a = \xi \implies \lambda = \frac{\xi}{a},$$

es decir

$$\lambda_{nm} = \frac{\xi_{nm}}{a}, \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces la solución es

$$R(r) = K_{nm} J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora resolvemos para  $T(t)$  de la ecuación

$$T'' + c^2 \lambda^2 T = 0, \quad \text{donde } \lambda = \frac{\xi}{a}.$$

La solución es de la forma

$$T(t) = d_1 \cos \left( \frac{c\xi}{a} t \right) + d_2 \sin \left( \frac{c\xi}{a} t \right).$$

De lo anterior tenemos que  $u(r, \theta, t)$  está dada por

$$u(r, \theta, t) = K_{nm} J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) [c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta)]$$

$$\cdot \left[ d_1 \cos \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right) + d_2 \sin \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right) \right],$$

ó equivalentemente

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) [A_{nm} \cos(n\theta) + B_{nm} \sin(n\theta)] \cos \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right) \\ & + J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) [A_{nm}^* \cos(n\theta) + B_{nm}^* \sin(n\theta)] \sin \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right). \end{aligned}$$

Por el principio de superposición se sigue que la solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) [A_{nm} \cos(n\theta) + B_{nm} \sin(n\theta)] \cos \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right) \right. \\ & \left. + J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) [A_{nm}^* \cos(n\theta) + B_{nm}^* \sin(n\theta)] \sin \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right) \right\}. \end{aligned}$$

Enseguida aplicamos la condición inicial  $u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$ , pero para facilitar la notación introducimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \varphi_{nm}^{(c)}(r, \theta) &= J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) \cos(n\theta) \\ \varphi_{nm}^{(s)}(r, \theta) &= J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) \sin(n\theta). \end{aligned}$$

Así podemos escribir a  $u$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \varphi_{nm}^{(c)}(r, \theta) + B_{nm} \varphi_{nm}^{(s)}(r, \theta)] \cos \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [A_{nm}^* \varphi_{nm}^{(c)}(r, \theta) + B_{nm}^* \varphi_{nm}^{(s)}(r, \theta)] \sin \left( \frac{c\xi_{nm}}{a} t \right). \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial tenemos

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \implies f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \varphi_{nm}^{(c)} + B_{nm} \varphi_{nm}^{(s)}).$$

La igualdad anterior se le conoce como la *Serie de Fourier-Bessel* de la función  $f$ . Es necesario determinar los coeficientes  $A_{nm}$  y  $B_{nm}$ . Sea  $(p, q)$  una pareja de enteros positivos fija, entonces multiplicamos la serie de Fourier-Bessel de la función  $f(r, \theta)$  por el término  $r\varphi_{pq}^{(c)}$ :

$$rf(r, \theta) \varphi_{pq}^{(c)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r [A_{nm} \varphi_{pq}^{(c)} \varphi_{nm}^{(c)} + B_{nm} \varphi_{pq}^{(c)} \varphi_{nm}^{(s)}].$$

Integrando el producto anterior sobre  $0 < r < a$  y  $0 < \theta < 2\pi$  obtenemos

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} rf(r, \theta) \varphi_{pq}^{(c)} d\theta dr = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r [A_{nm} \int_0^a \int_0^{2\pi} \varphi_{pq}^{(c)} \varphi_{nm}^{(c)} d\theta dr$$

$$+ B_{nm} \int_0^a \int_0^{2\pi} \varphi_{pq}^{(c)} \varphi_{nm}^{(s)} d\theta dr \Big]$$

Observemos que

$$\int \int r \varphi_{pq}^{(c)} \varphi_{nm}^{(c)} d\theta dr = \int r J_p J_n dr \int \cos(q\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

pero dado que el conjunto  $\{\cos(n\theta), \sin(m\theta)\}$  es un conjunto ortogonal en  $0 < \theta < 2\pi$ , la integral anterior es igual 0 para todo  $m \neq q$ , así

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \varphi_{pq}^{(c)} d\theta dr &= A_{pq} \int_0^a \int_0^{2\pi} r \left( \varphi_{pq}^{(s)} \right)^2 d\theta dr \\ &= A_{pq} \int_0^a \int_0^{2\pi} r J_p^2 \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) \cos^2(q\theta) d\theta dr \\ &= A_{pq} \int_0^a r J_p^2 \left( \frac{x_{pq}}{a} r \right) dr \int_0^{2\pi} \cos^2(q\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ahora observemos que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(q\theta) d\theta = \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

y por propiedades de la función de Bessel

$$\int_0^a r J_p^2 \left( \frac{\xi_{pq}}{a} r \right) dr = \frac{a^2}{2} J_{p\pm 1}^2(\xi_{pq}).$$

Por lo tanto

$$A_{pq} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \varphi_{pq}^{(c)} d\theta dr}{\pi \frac{a^2}{2} J_{p\pm 1}^2(\xi_{pq})}.$$

Y en general tenemos

$$A_{nm} = \frac{2 \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) \cos(n\theta) d\theta dr}{\pi a^2 J_{p\pm 1}^2(\xi_{pq})}.$$

Haciendo un procedimiento similar, pero multiplicando a  $u(r, \theta, t)$  por  $r \varphi_{pq}^{(s)}$  se obtiene

$$B_{nm} = \frac{2 \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n \left( \frac{\xi_{nm}}{a} r \right) \sin(n\theta) d\theta dr}{\pi a^2 J_{p\pm 1}^2(\xi_{pq})}.$$

Aplicando la segunda condición inicial  $u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta)$  y el haciendo el procedimineto anterior obtenemos los coeficientes  $A_{nm}^*$ , sin olvidarnos del factor  $\frac{a}{c \xi_{nm}}$  que aparece en la derivada parcial respecto  $t$ .

**Ejercicio 5.** Resolver la ecuación de calor en coordenadas polares.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

para las mismas condiciones de frontera y condiciones iniciales.

Supongamos que  $u$  no depende del tiempo, entonces tenemos la ecuación

$$\nabla^2 u = 0,$$

la cual se le conoce como la ecuación de Laplace o la ecuación de calor independiente del tiempo. ¿Podemos deducir la solución para la ecuación de Lapalce a partir de la solución de la ecuación dependiente del tiempo ( $u_t = c \nabla^2 u$ )?