

Introducción a la teoría de marcos

Curso impartido por: Luis Ángel Zaldívar Corichi
Notas de sus alumnos

22 de enero de 2023

Introducción

La idea de la teoría de marcos no es nueva. A fines de la década de 1950, en un seminario de Ehresmann, en París [1], Bénabou presentó la idea de estudiar un espacio topológico a partir de las propiedades de su topología, vista como un conjunto ordenado. Más adelante, Dowker y Papert Strauss escribieron un famoso artículo [2] en el que retoman la idea de Bénabou, introducen el término “marco” y desarrollan muchas ideas modernas. Posteriormente, Isbell publica un artículo [3] donde introduce la categoría de locales como la categoría opuesta a la de marcos. Observa que muchas nociones topológicas se pueden entender a través de las propiedades del marco asociado, y estudia la adjunción entre la categoría de locales y la categoría de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} & \text{Top} & \\ \mathcal{O} \downarrow & \dashv \uparrow_{\text{pt}} & \\ & \text{Frm}^{\text{op}} & \end{array}$$

la cual no es una equivalencia, aunque sí induce una equivalencia (dual) entre las subcategorías $\text{Sp} \leftrightarrow \text{Frm}$ y $\text{Sob} \leftrightarrow \text{Top}$, donde los objetos de Sob y Sp son los llamados espacios sobrios y marcos espaciales, respectivamente. Esta equivalencia constituye una generalización de la dualidad de Stone clásica.

También veremos que la categoría de marcos incluye, como subcategoría plena, a la categoría CBA de álgebras booleanas completas y morfismos completos y, sin embargo, CBA no es reflexiva en Frm . Un problema interesante es determinar qué marcos tienen reflexión booleana.

El estudio de los marcos también se relaciona con la teoría de toposes y el estudio de retículas más generales que se encuentran al estudiar anillos y sus categorías de módulos.

Otro atractivo de la teoría de marcos es que se puede hablar de propiedades topológicas en términos puramente reticulares y, en este caso, se comportan de manera un poco distinta: Peter Johnstone demostró, en 1982, que el teorema de Tychonoff para marcos no requiere el uso del axioma de elección, en contraste con el caso de espacios topológicos. Más adelante, Johnstone publicó su monografía *Stone spaces*, donde expuso de manera sistemática todo lo que se sabía en ese momento al respecto del tema.

Finalmente, mencionaremos que una herramienta central en la teoría es el concepto de núcleo en un marco, cuyo estudio sistemático fue introducido por Harold Simmons y su estudiante Macnab.

Existen, principalmente, dos libros que tratan este tema. El libro *Stone spaces*, de Johnstone, y el libro *Frames and locales*, de Picado y Pultr. En teoría iba a haber un tercer libro, escrito por Harold Simmons, aunque este proyecto no se pudo completar, debido a su lamentable fallecimiento en 2018. Parte de estas notas se basan en el libro inconcluso de Simmons.

Índice general

I	Preliminares	9
1.	Aspectos básicos de la teoría de marcos	11
1.1.	Copos	11
1.2.	Semiretículas	11
1.3.	Retículas	13
1.4.	Complementos y álgebras booleanas	14
1.5.	Negaciones	16
1.6.	Completez	19
1.7.	Marcos	20
1.8.	La completación de secciones inferiores	21
1.9.	Álgebras booleanas completas	24
1.10.	Implicaciones	28
1.11.	Álgebras de Heyting	31
1.12.	Morfismos adjuntos de copos	33
1.13.	Monomorfismos y epimorfismos	35
2.	Cocientes	37
2.1.	Cocientes de conjuntos	39
2.2.	Cocientes en SupSLat	39
2.2.1.	Operadores cerradura	43
2.3.	Cocientes en Frm : núcleos	49
2.3.1.	Algunos núcleos particulares	52
2.3.2.	Núcleos espacialmente inducidos en una topología	57
II	El ensamble	61
3.	Derivadas, estables, prenúcleos y núcleos	63
3.1.	Derivadas, derivadas estables, prenúcleos, operadores cerradura y núcleos	63
3.2.	Ínfimos en familias de derivadas	64
3.3.	Supremos en familias de derivadas	66
3.4.	El teorema fundamental de la teoría de marcos	68
3.5.	Las iteraciones de una derivada	70
3.6.	Cálculos en el ensamble	74

3.7. El encaje de un marco en su ensamble	76
3.8. Más cálculos en el ensamble	81

III El espacio de puntos 89

4. La adjunción entre Frm y Top	91
4.1. La reflexión espacial de un marco	92
4.2. El orden de especialización	94
4.3. El espacio de puntos del marco de abiertos	94
4.4. La funtorialidad del espacio de puntos	95
4.5. La adjunción	96
4.6. La propiedad universal de las reflexiones	99
5. Espacios sobrios y marcos espaciales	101
5.1. Espacios sobrios	101
5.2. La topología de Skula	103
5.3. Las distintas encarnaciones del espacio de puntos	104
5.4. La dualidad entre Sob y Sp	109
5.5. Sp y Sob son reflexivas.	111
5.6. Dualidad de Stone	112
6. Ejemplos relevantes	119

IV Temas selectos 121

7. Aspectos Booleanos de la teoría de Marcos	123
7.1. El caso espacial	134
8. Existencia de productos y coproductos	137
8.1. Productos de marcos	137
8.2. Sitios	139
8.3. Coproductos de marcos	143
9. El teorema de Tychonoff en marcos	149
9.1. Idea de la demostración	149
9.2. La cobertura de cubiertas finitas	150
9.3. Si S es sección inferior, FS también.	151
9.4. Si S es sección inferior, FS está contenido en todos los C_f -ideales que contienen a S	152
9.5. Si S es sección inferior, FS es cerrado bajo cubiertas y, por lo tanto, es un C_f -ideal.	152
9.6. El conjunto de supremos dirigidos $\mathcal{D}S$ está contenido en todos los C -ideales que contienen a S	153
9.7. Si S es un C_f -ideal, entonces $\mathcal{D}S$ también.	154

9.8. Lema: saltar de $\mathcal{D}(FS)$ a $j(S)$	156
9.9. Lema: generar a A como C -ideal implica generarlo como C_f -ideal	156
9.10. Una implicación (Tychonoff)	157
9.11. La otra implicación	158
10. Producto en Top vs coproducto en Frm	159
11. Gavillas	163
11.1. Gavillas sobre espacios topológicos	163
11.2. Gavillas sobre marcos	166
12. Marcos en teoría de anillos y módulos	169
V Apéndices	175
13. Teoría de categorías	177
13.1. Categorías	177
13.2. Funtores	179
13.3. Transformaciones naturales	182
13.4. Adjunciones	189
14. Ordinales	195

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Aspectos básicos de la teoría de marcos

1.1. Copos

Sean A, B dos conjuntos parcialmente ordenados (copos, para abreviar). Una función $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de copos si, siempre que $a \leq b \in A$ se tiene $f(a) \leq f(b)$. En otras palabras, $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de copos si, cuando vemos a A y a B como categorías, f es un funtor. A los morfismos de copos también se les llama funciones monótonas.

Si A es un copo y $X \subseteq A$ es cualquier subconjunto, un elemento $a \in A$ se llama cota superior de X (en A) si $x \leq a$ para todo $x \in X$. Similarmente, si $a \leq x$ para todo $x \in X$, entonces decimos que a es una cota inferior de X .

Si $x \in X$ es una cota inferior de X , entonces a es único con esta propiedad y decimos que es el menor elemento de X . Similarmente, $a \in A$ es el menor elemento de X si $x \in X$ es una cota superior de X .

Si el conjunto de cotas superiores de X tiene un menor elemento, este elemento se llama supremo de X y lo denotamos como $\vee X$. Similarmente, si el conjunto de cotas inferiores de X tiene un mayor elemento, este elemento se llama ínfimo de X y lo denotamos $\wedge X$.

Dado que los morfismos de copos (funciones monótonas) son cerrados bajo composición y la función identidad de cualquier copo es un morfismo, éstos forman una categoría, a la cual denotamos Pos .

1.2. Semiretículas

Decimos que un copo es una semiretícula superior (o \vee -semiretícula) si todos sus subconjuntos finitos tienen supremo. Equivalentemente, un copo A es una \vee -semiretícula si todo par de elementos a, b tiene supremo $a \vee b$ y A tiene un menor elemento $0 \in A$ (que es el supremo del conjunto vacío).

Como $0 \leq a$ para todo $a \in A$, entonces $a \vee 0 = a$. Además, $a \vee b = b \vee a$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ y $a \vee a = a$ para cualesquiera $a, b, c \in A$. Por lo tanto, el

conjunto A equipado con el supremo, pensado como operación binaria en A , es un monoide conmutativo donde todo elemento es idempotente (el elemento neutro es el $0 \in A$).

Recíprocamente, si $(A, \vee, 0)$ es un monoide conmutativo en el cual todo elemento es idempotente, entonces la relación definida como

$$a \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad a \vee b = b$$

es un orden parcial en A tal que el supremo es \vee .

Demostración. En efecto, esto es un orden parcial:

- (Refl). Como a es idempotente, tenemos $a \vee a = a$. Luego, $a \leq a$.
- (Antisim). Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$. Es decir, $a \vee b = b$ y $b \vee a = a$. Como \vee es conmutativo, tenemos

$$b = a \vee b = b \vee a = a.$$

- (Trans). Supongamos que $a \leq b$ y que $b \leq c$. Es decir, $a \vee b = b$ y $b \vee c = c$. Como \vee es asociativo, tenemos

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c.$$

Esto es, $a \leq c$.

Ahora mostraremos que \vee es el supremo de este orden. Por inducción, basta mostrarlo en el vacío y en pares de elementos. Como $0 \vee a = a$, entonces $0 \leq a$ para todo $a \in A$. Ahora sean $a, b \in A$, y supongamos que $c \in A$ es tal que $a, b \leq c$. Esto es, $a \vee c = c$ y $b \vee c = c$. Luego,

$$(a \vee b) \vee c = (a \vee c) \vee (b \vee c) = c \vee c = c.$$

Por lo tanto, $a \vee b \leq c$. □

Si A, B son \vee -semirretículas, decimos que una función $f : A \rightarrow B$ es un \vee -morfismo (o un morfismo de \vee -semirretículas) si $f(0) = 0$ y si $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. De nuevo, las \vee -semirretículas con sus morfismos forman una categoría, a la cual denotamos como Pos^\vee .

Dado que $a \leq b$ si, y solo si, $a \vee b = a$, entonces cualquier morfismo de retículas es una función monótona, pues $a \vee b = a$ implica $f(a) \vee f(b) = f(a)$. Así, tenemos un funtor $\text{Pos}^\vee \rightarrow \text{Pos}$. Sin embargo, este funtor no es pleno, pues existen funciones monótonas que no preservan el supremo.

Las definiciones y observaciones de esta sección se pueden hacer de manera análoga usando ínfimos en vez de supremos, obteniendo la noción de semirretículas inferiores, \wedge -morfismos, la categoría Pos^\wedge y un funtor $\text{Pos}^\wedge \rightarrow \text{Pos}$.

1.3. Retículas

Decimos que un copo A es una retícula si cualquier subconjunto finito $X \subseteq A$ tiene supremo e ínfimo. Equivalentemente, un copo A es una retícula si, y solo si:

1. cualquier par de elementos $a, b \in A$ tiene supremo $a \vee b = \bigvee \{a, b\} \in A$ e ínfimo $a \wedge b = \bigwedge \{a, b\} \in A$,
2. A tiene un menor elemento 0 y un mayor elemento 1. Éstos son el supremo y el ínfimo del subconjunto vacío $\emptyset \subseteq A$, respectivamente.

Algunos autores denominan retículas a los copos que cumplen el punto 1 aunque no cumplan el punto 2. Con esa convención, lo que nosotros llamamos retícula se llama retícula acotada. Nótese también que un subconjunto arbitrario de una retícula A puede no tener supremo o ínfimo.

Sean a, b, c elementos de una retícula A . Por definición del supremo, siempre tenemos $a \leq a \vee b$ y $a \leq a \vee c$. Es decir, a es cota inferior de $\{(a \vee b), (a \vee c)\}$. Así, $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Además,

$$\begin{aligned} b \wedge c &\leq b \leq a \vee b \\ b \wedge c &\leq c \leq a \vee c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \wedge c$ también es cota inferior de $\{(a \vee b), (a \vee c)\}$, por lo cual $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Esto muestra que $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ es cota superior de $\{a, (b \wedge c)\}$. Se sigue que

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Un argumento similar muestra que

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Sin embargo, estas desigualdades no siempre son igualdades. Una retícula es distributiva si las ecuaciones

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

son válidas para cualesquiera $a, b, c \in A$. La primera igualdad es la distributividad del supremo sobre el ínfimo y la segunda es la distributividad del ínfimo sobre el supremo. De hecho, basta pedir una de las dos igualdades: si en una retícula A se cumple una de las ecuaciones para cualesquiera $a, b, c \in A$, entonces la otra también se cumple.

Demostración. Sean $a, b, c \in A$.

1. Supongamos que el supremo distribuye sobre el ínfimo, entonces tenemos la primera y tercera igualdad en

$$\begin{aligned}
 (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) \\
 &= a \wedge ((a \wedge b) \vee c) \\
 &= a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\
 &= a \wedge (b \vee c).
 \end{aligned}$$

2. Por otro lado, si el ínfimo distribuye sobre el supremo, entonces

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
 &= a \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
 &= a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\
 &= a \vee (b \wedge c).
 \end{aligned}$$

□

Ahora definimos la categoría de retículas Lat . Sus objetos son las retículas y sus morfismos son funciones que preservan el 1, el 0, el ínfimo y el supremo: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

De este modo, tenemos funtores $\text{Pos}^\wedge \leftarrow \text{Lat} \rightarrow \text{Pos}^\vee$. Notemos que estos funtores son fieles, pero no son plenos, ya que una función puede preservar supremos sin preservar ínfimos o viceversa.

La categoría DLat se define como la subcategoría plena de Lat cuyos objetos son las retículas distributivas. Es decir, los morfismos en DLat son simplemente morfismos de retículas. Así, tenemos una inclusión $\text{DLat} \hookrightarrow \text{Lat}$.

1.4. Complementos y álgebras booleanas

Definición 1.1 (Complementos). *Sea A una retícula. Decimos que un elemento $a \in A$ tiene complementos si existe algún $b \in A$ tal que*

$$a \wedge b = 0 \quad a \vee b = 1.$$

En este caso, decimos que b es un complemento de a .

Si la retícula A no es distributiva, entonces un mismo elemento puede tener más de un complemento. Sin embargo, si A es distributiva, un elemento $a \in A$ tiene, a lo más, un complemento.

Demostración. En efecto, sean $a, b_1, b_2 \in A$ tales que

$$\begin{aligned}
 a \wedge b_1 &= 0 & a \vee b_1 &= 1 \\
 a \wedge b_2 &= 0 & a \vee b_2 &= 1.
 \end{aligned}$$

Si A es distributiva, entonces

$$b_1 = b_1 \vee 0 = b_1 \vee (a \wedge b_2) = (b_1 \vee a) \wedge (b_1 \vee b_2) = 1 \wedge (b_1 \vee b_2) = b_1 \vee b_2$$

por lo cual $b_2 \leq b_1$. Similarmente,

$$b_2 = b_2 \vee 0 = b_2 \vee (a \wedge b_1) = (b_2 \vee a) \wedge (b_2 \vee b_1) = 1 \wedge (b_2 \vee b_1) = b_2 \vee b_1$$

por lo cual $b_1 \leq b_2$. Así, $b_1 = b_2$. \square

Como no hay ambigüedad, en una retícula distributiva denotamos al complemento de a como a' , en caso de que éste exista.

Definición 1.2. *Un álgebra booleana es una retícula distributiva donde todo elemento tiene complemento (único, por distributividad).*

Ejemplo 1.3. *Dado cualquier conjunto S , el conjunto potencia $\mathcal{P}S$ es un álgebra booleana. El complemento de un subconjunto $X \subseteq S$ es el complemento en el sentido usual:*

$$X' = \{s \in S \mid s \notin X\}.$$

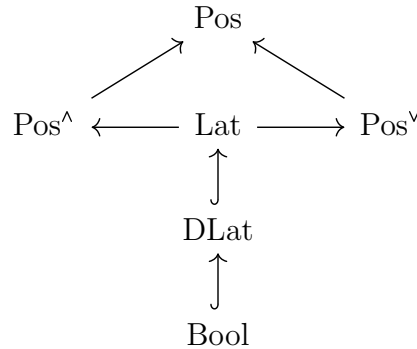
Notemos que cualquier morfismo de retículas si $f : A \rightarrow B$ preserva los complementos automáticamente, ya que, si $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(a) \wedge f(b) &= f(a \wedge b) = f(0) = 0, \\ f(a) \vee f(b) &= f(a \vee b) = f(1) = 1. \end{aligned}$$

En particular, si A y B son álgebras booleanas, tenemos $f(a') = f(a)'$. (En realidad, basta con que B sea distributiva). Entonces tiene sentido definir los morfismos de álgebras booleanas simplemente como morfismos de retículas o, equivalentemente, morfismos de retículas distributivas. En otras palabras, definimos la categoría Bool de las álgebras booleanas como

$$\text{Bool}(A, B) = \text{DLat}(A, B) = \text{Lat}(A, B).$$

Así, la inclusión $\text{Bool} \hookrightarrow \text{DLat}$ exhibe a Bool como una subcategoría plena de DLat. Hasta ahora, tenemos los siguientes funtores plenos entre nuestras categorías



donde los funtores marcados como \hookrightarrow son fielmente plenos.

1.5. Negaciones

En 1.4 dijimos que, dada una retícula A , un complemento de $a \in A$ es otro elemento $b \in A$ que cumple

$$a \wedge b = 0 \qquad a \vee b = 1.$$

Y vimos que, si A es distributiva, entonces cada elemento $a \in A$ tiene, a lo más, un complemento. Ahora definiremos una noción relacionada: las negaciones.

Definición 1.4. Si A es una retícula, entonces una negación de $a \in A$ es un elemento $b \in A$ tal que

$$x \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad x \wedge a = 0$$

para todo $x \in A$.

Así, b, b' son negaciones de a , entonces $b \wedge a = b' \wedge a = 0$ (porque $b \leq b'$ y $b' \leq b$). Así, $b \leq b'$ y $b' \leq b$, por lo cual $b = b'$. Es decir, las negaciones son únicas en caso de existir, así que, si un elemento $a \in A$ tiene negación, ésta se denota como $\neg a$. Nótese que, en este caso, para demostrar la unicidad no se requirió que A fuera distributiva.

Sin embargo, si A es distributiva y $a \in A$ tiene complemento a' (único, por distributividad), entonces a' también es la negación de a , es decir, $\neg a = a'$. En efecto, es claro que $x \leq a' \implies x \wedge a = 0$; mientras que, si $x \wedge a = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a' \vee a) \\ &= (x \wedge a') \vee (x \wedge a) \\ &= x \wedge a', \end{aligned}$$

por lo cual $x \leq a'$.

Juntando estas observaciones, obtenemos el siguiente resultado:

Lema 1.5. Si A es una retícula distributiva, un elemento $a \in A$ con negación tiene complemento a' si, y solo si, $\neg a \vee a = 1$ y, en este caso, $a' = \neg a$.

En particular, en un álgebra booleana A , todo elemento $a \in A$ tiene negación dada por el complemento: $\neg a = a'$.

De la definición de la negación, tenemos que $x \leq \neg \neg a$ si, y solo si, $x \wedge \neg a = 0$. Dado que $a \wedge \neg a = 0$, podemos deducir que $a \leq \neg \neg a$. Aunque en un álgebra booleana se tiene la otra comparación (es decir, $\neg \neg a = a$), esto no es cierto en general:

Ejemplo 1.6. Sea S un espacio topológico y consideremos el marco \mathcal{OS} . Todo abierto $u \in \mathcal{OS}$ tiene negación $\neg u$ en \mathcal{OS} . En efecto, para todo abierto $v \in \mathcal{OS}$ tenemos

$$\begin{aligned} u \cap v = \emptyset &\iff v \subseteq u' \\ &\iff v \subseteq (u')^\circ \in \mathcal{OS}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, u tiene negación dada como $\neg u = (u')^\circ = \bar{u}'$.

En particular, el abierto $u = (-1, 0) \cup (0, 1) \in \mathcal{O}\mathbb{R}$ tiene cerradura $\bar{u} = [-1, 1]$, así que

$$\begin{aligned}\neg\neg u &= \neg(\bar{u}') \\ &= \neg([-1, 1]') \\ &= ([-1, 1]')^\circ \\ &= [-1, 1]^\circ \\ &= (-1, 1) \\ &\neq u.\end{aligned}$$

Es decir, aunque $\neg a$ tenga negación, en general solo tenemos la comparación $a \leq \neg\neg a$. Sin embargo, si $\neg\neg a$ tiene negación, entonces sí se cumple que $\neg\neg\neg a = \neg a$. En efecto, dado que

$$a \leq \neg\neg a,$$

al hacer ínfimo con $\neg\neg a$ obtenemos

$$\begin{aligned}\neg\neg\neg a \wedge a &\leq \neg\neg\neg a \wedge \neg\neg a \\ &= 0,\end{aligned}$$

lo cual, por definición de la negación, es equivalente a $\neg\neg\neg a \leq \neg\neg a$, mientras que la otra comparación $\neg a \leq \neg\neg\neg a$ ya la teníamos.

En el ejemplo 1.6 encontramos una retícula distributiva donde todo elemento tiene negación. Ahora consideraremos ese tipo de retículas.

Por el lema 1.5, sabemos que a tiene complemento a' ssi $a \vee \neg a = 1$. Esto justifica el primer punto de la siguiente definición.

Definición 1.7. Sea A una retícula distributiva donde todo elemento tiene negación y tomemos un elemento $a \in A$. Decimos que

- a es complementado si $a \vee \neg a = 1$,
- a es regular si $\neg\neg a = a$,
- a es denso si $\neg a = 0$.

Nótese que $\neg a$ es regular para todo a , ya que $\neg\neg\neg a = \neg a$.

Ejemplo 1.8. Consideremos un espacio topológico S y un abierto $u \in \mathcal{O}S$. Por el ejemplo 1.6, sabemos que u tiene negación dada como $\neg u = \bar{u}' = (u')^\circ$. Por lo tanto

1. u es complementado en el sentido de retículas ($u \vee \neg u = 1$) si, y solo si, su complemento es abierto.
2. el abierto u es regular en el sentido de retículas ($\neg\neg u = u$) si, y solo si, es regular en el sentido topológico ($(\bar{u})^\circ = u$).

3. Similarmente, u es denso como elemento de la retículas ($\neg u = 0$) si, y solo si, es denso en el sentido topológico ($\bar{u} = S$).

Proposición 1.9. Un elemento a de una retícula A es denso ($\neg a = 0$) si, y solo si $\neg\neg a = 1$.

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}\neg a = 0 &\iff \neg a \leq 0 \\ &\iff 1 \wedge \neg a \leq 0 \\ &\iff 1 \leq \neg\neg a \\ &\iff 1 = \neg\neg a.\end{aligned}$$

□

Proposición 1.10. Si A es una retícula distributiva y $a, b \in A$ tienen negación, entonces $a \vee b$ también tiene negación y tenemos

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$$

Demostración. Para cualquier $x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}x \wedge (a \vee b) \leq 0 &\iff (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \leq 0 \\ &\iff (x \wedge a) \leq 0, (x \wedge b) \leq 0 \\ &\iff x \leq \neg a, x \leq \neg b \\ &\iff x \leq (\neg a \wedge \neg b).\end{aligned}$$

Así, $\neg a \wedge \neg b$ es la negación de $a \vee b$, como se quería.

□

Ahora, si en una retícula distributiva A todos los elementos tienen negación, entonces

$$\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = 0,$$

por lo cual $a \vee \neg a$ siempre es denso. Además

$$\begin{aligned}\neg\neg a \wedge (a \vee \neg a) &= (\neg\neg a \wedge a) \vee (\neg\neg a \wedge \neg a) \\ &= a \wedge 0 \\ &= a,\end{aligned}$$

así que todo elemento $a \in A$ se puede expresar como el ínfimo de un elemento denso y un elemento regular.

Lema 1.11. Sea A una retícula distributiva donde todos los elementos tienen negación. Entonces A es un álgebra booleana (todo elemento es complementado) si, y solo si, todo elemento es regular.

Demostración. \Rightarrow) Supongamos que A es booleana, entonces todo $a \in A$ cumple $a \vee \neg a = 1$. Luego $\neg a \vee \neg\neg a = 1$, es decir, $\neg\neg a$ es complementado. Como el complemento de $\neg a$ es único, se tiene que $\neg\neg a = a$.

\Leftarrow) Supongamos que todos los elementos de A son regulares y sea $a \in A$. Como a y $a \vee \neg a$ son regulares, tenemos $a \vee \neg a = \neg\neg(a \vee \neg a) = \neg(\neg a \wedge \neg\neg a) = \neg 0 = 1$. Por lo tanto, $a \vee \neg a = 1$, es decir, a es complementado. Con ello A es un álgebra booleana.

□

1.6. Completez

Decimos que un copo A es superiormente completo si cualquier subconjunto $X \subseteq A$ tiene supremo $\bigvee X$. En este caso, también decimos que A es una \bigvee -semirretícula. Notemos que una \bigvee -semirretícula es, en particular, una \vee -semirretícula. Un morfismo de \bigvee -semirretículas (o \bigvee -morfismo) es una función que preserva supremos; es decir: $f(\bigvee X) = \bigvee \{f(x) \mid x \in X\}$ para todo subconjunto $X \subseteq A$.

Las \bigvee -semirretículas, junto con sus morfismos, forman una categoría SupSLat . Nótese que un morfismo de \bigvee -semirretículas es un morfismo de \vee -semirretículas (aunque no al revés), así que tenemos un funtor $\text{SupSLat} \rightarrow \text{Pos}^\vee$. En particular, un \bigvee -morfismo también es una función monótona (ver 1.2).

De manera completamente análoga, decimos que un copo es inferiormente completo (o es una \bigwedge -semirretícula) si todo $X \subseteq A$ tiene ínfimo $\bigwedge X$, tenemos morfismos de \bigwedge -semirretículas y un funtor $\text{InfSLat} \rightarrow \text{Pos}^\wedge$.

Decimos que un copo es completo (o una retícula completa) si todo subconjunto $X \subseteq A$ tiene ínfimo $\bigwedge X$ y supremo $\bigvee X$. En particular, una retícula completa es una \bigvee -semirretícula y una \bigwedge -semirretícula. Definimos un morfismo de retículas completas como una función que es tanto \bigvee -morfismo como \bigwedge -morfismo. En este caso, decimos que el morfismo es completo. Así, las retículas completas y los morfismos completos forman una categoría CLat .

Si un copo A es superiormente completo, entonces dado un subconjunto $X \subseteq A$ podemos considerar el conjunto $\text{cotInf} X$ de cotas inferiores de X .

$$\text{cotInf} X = \{c \in A \mid \forall x \in X, c \leq x\}.$$

Notemos que, todo $x \in X$ es una cota superior de $\text{cotInf} X$, ya que tenemos $y \leq x$ para todo $y \in \text{cotInf} X$. Así, $\bigvee \text{cotInf} X \leq x$, por lo cual $\bigvee \text{cotInf} X \in \text{cotInf} X$. Esto significa que $\bigvee \text{cotInf} X$ es el ínfimo de X :

$$\bigvee \text{cotInf} X = \bigwedge X.$$

Como $X \subseteq A$ era cualquier subconjunto, esto muestra que, si A es superiormente completo, entonces también es inferiormente completo. Análogamente, si A es inferiormente completo, entonces también es superiormente completo, por lo cual hemos demostrado que

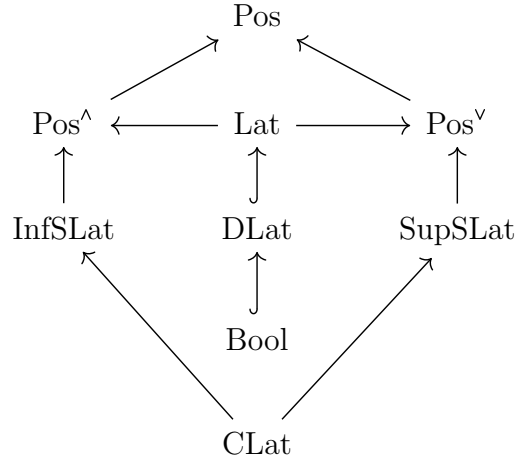
Teorema 1.12. *Un copo A es superiormente completo si, y solo si, es inferiormente completo.*

En otras palabras, las categorías InfSLat , SupSLat y CLat tienen exactamente los mismos objetos: las retículas completas. Es importante observar que esto no implica que las categorías sean la misma: en general, dadas dos retículas completas A, B , las contenciones entre los conjuntos de morfismos

$$\text{InfSLat}(A, B) \supseteq \text{CLat}(A, B) \subseteq \text{SupSLat}(A, B)$$

son propias. Es decir, hay \vee -morfismos que no son \wedge -morfismos y viceversa. En cualquier caso, sí tenemos funtores fieles $\text{SupSLat} \leftarrow \text{CLat} \rightarrow \text{InfSLat}$.

En resumen, hasta ahora tenemos categorías y funtores fieles



donde los funtores marcados como \leftrightarrow son fielmente plenos.

1.7. Marcos

Hasta ahora, las definiciones y los teoremas han sido completamente duales. Ahora introducimos los marcos, que son un cierto tipo de retículas completas, pero la simetría que hasta ahora hemos observado deja de mantenerse.

La definición de un marco surge al estudiar las propiedades algebraicas de las topologías: si S es un espacio topológico, la topología $\mathcal{O}S$ es un subcopo del conjunto potencia $\mathcal{P}S$ que, por definición, es cerrado bajo ínfimos finitos y supremos arbitrarios. Es decir, $\mathcal{O}S$ es una sub- \wedge -semiretícula y una sub- \vee -semiretícula de $\mathcal{P}S$. Además, como en $\mathcal{P}S$ se cumple la ley distributiva $U \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{U \cap V \mid V \in \mathcal{F}\}$, entonces la misma ley se satisface en $\mathcal{O}S$. Estas son las propiedades de una topología que abstrae un marco.

Definición 1.13. *Un marco A es una retícula completa que satisface la siguiente ley distributiva:*

$$y \wedge \bigvee X = \bigvee \{y \wedge x \mid x \in X\}.$$

En particular, un marco es una retícula distributiva. Un morfismo de marcos es un morfismo de copos que respeta supremos arbitrarios e ínfimos finitos. Ya que los \wedge -morfismos y los \vee -morfismos son cerrados bajo composición, también lo son los morfismos de marcos, con lo cual obtenemos una categoría Frm .

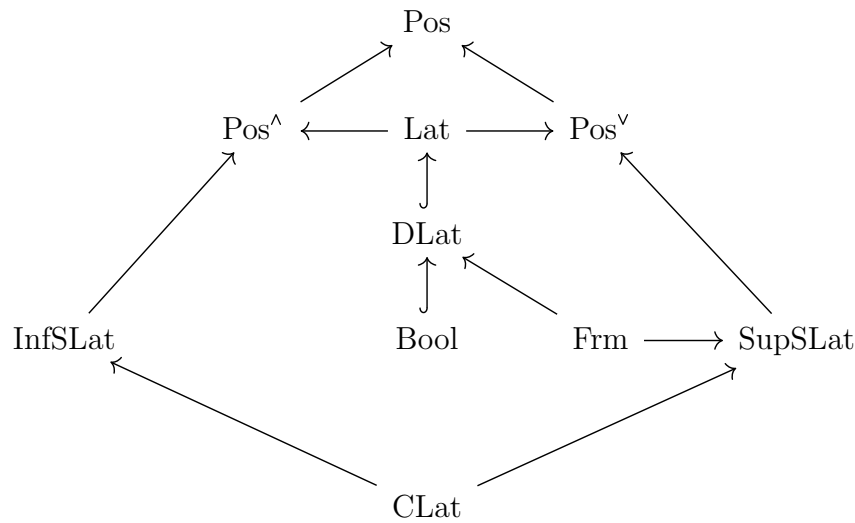
Ejemplo 1.14. 1. *Dado un conjunto S cualquiera, el conjunto potencia $\mathcal{P}S$ es un marco.*

2. *Dados dos conjuntos S, T y una función $f : S \rightarrow T$, la preimagen $f^{-1} : \mathcal{P}T \rightarrow \mathcal{P}S$ preserva ínfimos y supremos arbitrarios, así que, en particular, es un morfismo de marcos.*

3. *Dado cualquier espacio topológico S , la topología $\mathcal{O}S$ es un marco y la inclusión $\mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{P}S$ es un morfismo de marcos.*
4. *Dados dos espacios topológicos S, T y una función continua $f : S \rightarrow T$, la preimagen $f^{-1} : \mathcal{P}T \rightarrow \mathcal{P}S$ manda abiertos en abiertos, así que se restringe a una función $\mathcal{O}T \rightarrow \mathcal{O}S$ que denotamos como $\mathcal{O}f$. En la parte III de este texto, veremos que esta asignación es, de hecho, un funtor contravariante que forma parte de una adjunción entre Top y Frm .*

Notemos que los morfismos de marcos pueden no preservar ínfimos arbitrarios. Además, en general, los supremos finitos no distribuyen sobre ínfimos arbitrarios.

Nuestro diagrama de categorías ahora se ve así



1.8. La completación de secciones inferiores

Si A es una \wedge -semirretícula, nos gustaría encontrar un marco \hat{A} que complete a A “de la mejor manera posible”.

¿Qué tal el conjunto potencia $\mathcal{P}A$? Es un álgebra booleana completa, tiene leyes distributivas fuertes; quizá demasiado fuertes. Además, la retícula que buscamos debería tener a A como una subretícula, mientras que la función obvia $A \rightarrow \mathcal{P}A$ dada por $a \mapsto \{a\}$ no preserva el orden, así que no es una inclusión de retículas. Vamos a refinar esta situación.

Si A es un copo, una sección inferior de A es un subconjunto $L \subseteq A$ que “absorbe hacia abajo”. Es decir, si $a \leq b \in L$, entonces $a \in L$.

Denotemos como $\mathcal{L}A$ al conjunto de todas las secciones inferiores en A . Nótese que, por vacuidad, el conjunto vacío $\emptyset \subseteq A$ es una sección inferior de A . Además, la intersección de dos secciones inferiores vuelve a ser una sección inferior, mientras que la unión arbitraria de secciones inferiores también lo es. En otras palabras, $\mathcal{L}A$ es un submarco de $\mathcal{P}A$.

Así, $\mathcal{L}A$ es una topología en A , que podríamos llamar la topología de coespecialización. (La topología de especialización en un copo A es el conjunto de secciones superiores). Las topologías de especialización y coespecialización tienen la propiedad interesante de que una función entre dos copos es monótona ssi es continua en la topología de especialización ssi es continua en la topología de coespecialización. Sin embargo, ahora nos enfocaremos más en el aspecto reticular de $\mathcal{L}A$ que en sus propiedades como topología de A .

Para cada subconjunto $F \subseteq A$, el conjunto

$$\downarrow F = \{a \in A \mid \exists c \in F, a \leq c\} \subseteq A$$

es una sección inferior. De hecho, es la sección inferior más pequeña que contiene a F . Decimos que $\downarrow F$ es la sección inferior generada por F . La asignación $F \mapsto \downarrow F$ nos da una función

$$\downarrow : \mathcal{P}A \rightarrow \mathcal{P}A$$

cuyo conjunto de sus puntos fijos (es decir, los $F \in \mathcal{P}A$ con $F = \downarrow F$) es $\mathcal{L}A$. Además, \downarrow es una función monótona, idempotente, infla (es decir, $F \subseteq \downarrow F$) y cumple $\downarrow(F \cup G) = \downarrow F \cup \downarrow G$. En general, la igualdad $\downarrow(F \cap G) = \downarrow F \cap \downarrow G$ no se cumple. Sin embargo, si A es una semiretícula inferior, entonces tenemos una identidad similar. Definiendo $F \wedge G := \{x \wedge y \mid x \in F, y \in G\}$, tenemos $\downarrow(F \wedge G) = \downarrow F \cap \downarrow G$, ya que

$$\begin{aligned} a \in \downarrow(F \wedge G) &\iff \exists (c \in F \wedge G). (a \leq c) \\ &\iff \exists (f \in F, g \in G). (a \leq f \wedge g) \\ &\iff \exists (f \in F, g \in G). (a \leq f, a \leq g) \\ &\iff a \in \downarrow F, a \in \downarrow G \\ &\iff a \in \downarrow F \cap \downarrow G. \end{aligned}$$

En particular, si A es una \wedge -semiretícula, entonces la función

$$\begin{aligned} \downarrow : A &\rightarrow \mathcal{L}A \\ a &\mapsto \downarrow a := \downarrow \{a\} \end{aligned}$$

es un morfismo de \wedge -semiretículas. Así, A se puede ver como una sub- \wedge -semiretícula del marco $\mathcal{L}A$. En este sentido, $\mathcal{L}A$ “le da” a A los supremos que le faltan para ser un marco. Además, es de esperarse que existan otros marcos B y morfismos de \wedge -semiretículas $A \rightarrow B$. Sin embargo, afirmamos que $\downarrow : A \rightarrow \mathcal{L}A$ es el mejor de estos morfismos, en el sentido de que $\downarrow : A \rightarrow \mathcal{L}A$ exhibe a $\mathcal{L}A$ como el marco libre sobre la \wedge -semiretícula A .

Solución. Consideremos el funtor de olvido $U : \mathbf{Frm} \rightarrow \mathbf{Pos}^\wedge$. Precomponer con \downarrow nos da una flecha

$$\mathbf{Frm}(\mathcal{L}A, -) \rightarrow \mathbf{Pos}^\wedge(A, U-),$$

Resta ver que esta flecha es una biyección. Es decir, dado un morfismo $f : A \rightarrow B$ de \wedge -semiretículas, debemos probar que existe un único morfismo de marcos $f^\sharp : \mathcal{L}A \rightarrow B$ que factoriza a f a través de \downarrow :

$$f^\sharp \downarrow = f.$$

Es decir, $f^\sharp(\downarrow a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Esta condición determina completamente a f^\sharp . En efecto, para toda sección inferior $F \in \mathcal{L}A$ tenemos $F = \bigcup \{\downarrow a \mid a \in F\}$ y, como también queremos que f^\sharp respete supremos, se debe cumplir

$$\begin{aligned} f^\sharp(F) &= \bigvee \{f^\sharp(\downarrow a) \mid a \in F\} \\ &= \bigvee \{f(a) \mid a \in F\}. \end{aligned}$$

Tomando esta ecuación como la definición de f^\sharp , es claro que $f^\sharp(\downarrow a) = f(a)$. Por lo tanto, si $f^\sharp : \mathcal{L}A \rightarrow B$ es un morfismo de marcos, es el único con esta propiedad. Verificamos las propiedades directamente.

- En efecto, si $F \subseteq G \in \mathcal{L}A$, entonces

$$\{f(a) \mid a \in F\} \subseteq \{f(a) \mid a \in G\}.$$

Tomando supremos, obtenemos $f^\sharp(F) \leq f^\sharp(G)$, así que f^\sharp es monótona.

- Dadas $F, G \in \mathcal{L}A$, hay que mostrar que $f^\sharp(F \cap G) = f^\sharp(F) \wedge f^\sharp(G)$. La comparación \leq se sigue de la monotonía de f^\sharp . Por otro lado, observemos que

$$\{a \wedge b \mid a \in F, b \in G\} \subseteq F \cap G, \quad (*)$$

pues F y G son secciones inferiores. Luego,

$$\begin{aligned} f^\sharp(F) \wedge f^\sharp(G) &= \bigvee \{f(a) \wedge f(b) \mid a \in F, b \in G\} && \text{ley dist. de marcos} \\ &= \bigvee \{f(a \wedge b) \mid a \in F, b \in G\} \\ &\leq \bigvee \{f(c) \mid c \in F \cap G\} && \text{por } (*) \\ &= f^\sharp(F \cap G), \end{aligned}$$

como se quería.

- Dado $X \subseteq \mathcal{L}A$, hay que mostrar que $f^\sharp(\bigcup X) = \bigvee \{f^\sharp(F) \mid F \in X\}$. Como f^\sharp es monótona, $f^\sharp(\bigcup X)$ es cota superior de $\{f^\sharp(F) \mid F \in X\}$. Para ver que es la mínima, sea $b \in B$ tal que $f^\sharp(F) \leq b$ para todo $F \in X$. Por definición de f^\sharp , esto significa que $f(a) \leq b$ para cualesquiera $a \in F, F \in X$. Luego,

$$\begin{aligned} f^\sharp(\bigcup X) &= f^\sharp(\{a \in A \mid a \in F \text{ para algún } F \in X\}) \\ &= \bigvee \{f(a) \in A \mid a \in F \text{ para algún } F \in X\} \\ &\leq b, \end{aligned}$$

como se deseaba.

Por lo tanto, f^\sharp es morfismo de marcos. Así, tenemos un isomorfismo

$$\text{Frm}(\mathcal{L}A, -) \xrightarrow{-\circ\downarrow} \text{Pos}^\wedge(A, U-)$$

y, así, $\mathcal{L}A$ es el marco libre en A .

Observemos que esto es válido para cualquier semiretícula A . Más aún, dado un morfismo de \wedge -semiretículas $g : A \rightarrow A'$, la composición

$$\mathcal{L}A' \xleftarrow{\downarrow} A' \xleftarrow{g} A$$

es un morfismo de \wedge -semiretículas y $\mathcal{L}A'$ es un marco, así que existe un único morfismo de marcos $g^\sharp : \mathcal{L}A \rightarrow \mathcal{L}A'$ que factoriza a $\downarrow g$ a través de $\downarrow : A \rightarrow \mathcal{L}A$. Si definimos $\mathcal{L}g = g^\sharp : \mathcal{L}A \rightarrow \mathcal{L}A'$, obtenemos una función

$$\text{Pos}^\wedge(A, A') \rightarrow \text{Frm}(\mathcal{L}A, \mathcal{L}A').$$

Más aún, las propiedades de unicidad de $\mathcal{L}g = g^\sharp$ aseguran que \mathcal{L} es un funtor $\mathcal{L} : \text{Pos}^\wedge \rightarrow \text{Frm}$. Luego, tenemos una adjunción $\mathcal{L} \dashv U$ (ver 13.4). ■

1.9. Álgebras booleanas completas

Recordemos que un álgebra booleana es una retícula distributiva donde todo elemento tiene un complemento, el cual es único por la distributividad. (Ver 1.4). Un álgebra booleana completa es un álgebra booleana que es completa como retícula. (Ver 1.6).

También recordemos que, en un álgebra booleana, la negación coincide con el complemento, así que la función $\neg : A \rightarrow A$ que cumple $\neg\neg = \text{id}_A : A \rightarrow A$. (Ver 1.5).

La categoría CBA de las álgebras booleanas completas se define estipulando que los morfismos entre dos álgebras booleanas completas A, B son los morfismos completos:

$$\text{CBA}(A, B) = \text{CLat}(A, B).$$

Es decir, funciones que preservan supremos arbitrarios e ínfimos arbitrarios. Así, tenemos una inclusión $\text{CBA} \hookrightarrow \text{CLat}$. En particular, los morfismos de álgebras booleanas completas son morfismos de álgebras booleanas, ya que preservan supremos e ínfimos finitos, por lo cual tenemos un funtor fiel $\text{CBA} \rightarrow \text{CLat}$. Sin embargo no todo morfismo de álgebras booleanas entre álgebras booleanas completas preserva los supremos e ínfimos arbitrarios, así que este funtor no es pleno.

El primer objetivo de esta sección es probar que el funtor compuesto $\text{CBA} \rightarrow \text{Bool} \hookrightarrow \text{DLat}$ se factoriza a través de Frm , para lo cual es suficiente mostrar que toda álgebra booleana completa es un marco, pues los morfismos completos son morfismos de marcos automáticamente.

Para esto, demostraremos un lema que usaremos recurrentemente.

Lema 1.15 (Caballo de batalla). *Sea A una retícula distributiva y $a \in A$ un elemento complementado. Entonces $\neg a = a'$ satisface*

$$a \wedge x \leq y \quad \text{si, y solo si} \quad x \leq \neg a \vee y$$

para cualesquiera $x, y \in A$.

Demostración. Por un lado, supongamos que $a \wedge x \leq y$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= x \wedge 1 \\ &= x \wedge (a \vee \neg a) \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge \neg a) \\ &\leq y \vee (x \wedge \neg a) \\ &\leq y \vee \neg a. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $x \leq \neg a \vee y$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} a \wedge x &\leq a \wedge (\neg a \vee y) \\ &= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge y) \\ &= 0 \vee (a \wedge y) \\ &= a \wedge y \\ &\leq y, \end{aligned}$$

como se quería. □

Con nuestro caballo de batalla, demostraremos el siguiente resultado.

Lema 1.16. *Toda álgebra booleana completa A es un marco. Es decir, satisface la distributividad de marcos*

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

para cualesquiera $a \in A$ y $X \subseteq A$.

Demostración. Por un lado, para todo $x \in X$ tenemos que $x \leq \bigvee X$, así que $a \wedge x \leq a \wedge \bigvee X$. Luego,

$$\bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} \leq a \wedge \bigvee X,$$

así que solo resta demostrar la otra comparación:

$$a \wedge \bigvee X \leq \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}.$$

Aquí es donde usamos nuestro lema. Éste nos dice que la comparación anterior es equivalente a

$$\bigvee X \leq \neg a \vee \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\},$$

lo cual es fácil: en efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \neg a \vee \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} &= \bigvee \{\neg a \vee (a \wedge x) \mid x \in X\} \\ &= \bigvee \{(\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee x) \mid x \in X\} \\ &= \bigvee \{1 \wedge (\neg a \vee x) \mid x \in X\} \\ &= \bigvee \{\neg a \vee x \mid x \in X\} \\ &\geq \bigvee \{x \mid x \in X\} \\ &= \bigvee X, \end{aligned}$$

ya que $\neg a \vee x \geq x$ para todo $x \in X$. Esto es lo que se quería. □

Tomemos dos álgebras booleanas completas A, B . El resultado anterior nos dice que A y B son marcos. Además, como los morfismos $\text{CBA}(A, B)$ son morfismos completos, así que también son morfismos de marcos, ya que preservan supremos arbitrarios e ínfimos finitos. Es decir, tenemos una inclusión entre los conjuntos de morfismos

$$\text{CBA}(A, B) \subseteq \text{Frm}(A, B).$$

Como habíamos anunciado, esto muestra que el funtor $\text{CBA} \rightarrow \text{Bool} \hookrightarrow \text{DLat}$ se factoriza a través de Frm , por lo cual que tenemos un diagrama conmutativo de funtores fieles

$$\begin{array}{ccc} \text{CBA} & \longrightarrow & \text{Frm} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Bool} & \hookrightarrow & \text{DLat}. \end{array}$$

(De nuevo, \hookrightarrow indica un funtor fielmente pleno). El segundo objetivo de la sección es mostrar que el lado superior de este cuadrado también es fielmente pleno. Para lograr esto, primero demostraremos el siguiente resultado.

Lema 1.17 (Ley de DeMorgan). *Sea A un álgebra booleana completa y $X \subseteq A$. Entonces*

$$\neg \bigwedge X = \bigvee \{ \neg x \mid x \in X \}.$$

Demostración. Sabemos que, como A es booleana, la negación es el complemento. Por lo tanto, basta mostrar que $\bigwedge X$ y $\bigvee \{ \neg x \mid x \in X \}$ son complementarios; es decir: que su ínfimo es 0 y su supremo es 1. Por un lado, cualquier $x \in X$ cumple $\bigwedge X \leq x$, así que

$$\bigwedge X \wedge \neg x \leq x \wedge \neg x = 0.$$

Luego, por la ley distributiva de marcos, tenemos

$$\begin{aligned} \bigwedge X \wedge \bigvee \{ \neg x \mid x \in X \} &= \bigvee \{ \bigwedge x \wedge \neg x \mid x \in X \} \\ &= \bigvee \{ 0 \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $x \in X$ tenemos $\neg x \leq \bigvee \{ \neg x \mid x \in X \}$. Usando el caballo de batalla dos veces, vemos que esto equivale a $\neg \bigvee \{ \neg x \mid x \in X \} \leq x$. Como $x \in X$ era arbitraria, tenemos que

$$\neg \bigvee \{ \neg x \mid x \in X \} \leq \bigwedge X.$$

Usando el caballo de batalla una vez más, obtenemos

$$1 \leq \bigvee \{ \neg x \mid x \in X \} \vee \bigwedge X.$$

Esto concluye la demostración. □

Usando la ley de DeMorgan que acabamos de demostrar, podemos probar lo que queríamos. De hecho, podemos probar un poco más.

Lema 1.18. *Cualquier morfismo de marcos $f : A \rightarrow B$, donde A es un álgebra booleana completa, también respeta los ínfimos arbitrarios.*

Demostración. Por un lado, la desigualdad

$$f(\bigwedge X) \leq \bigwedge \{f(x) \mid x \in X\}$$

viene de la monotonía de f . Por otro lado, como $\bigwedge X$ y $\bigvee \{\neg x \mid x \in X\}$ son complementarios en A (por DeMorgan) y f preserva los complementos (pues respeta ínfimos y supremos finitos), entonces $f(\bigwedge X)$ y $\bigvee \{f(\neg x) \mid x \in X\}$ son complementarios en B . Luego, la desigualdad faltante

$$\bigwedge \{f(x) \mid x \in X\} \leq f(\bigwedge X)$$

es equivalente, por nuestro caballo de batalla, a la desigualdad

$$\bigwedge \{f(x) \mid x \in X\} \wedge \bigvee \{f(\neg x) \mid x \in X\} = 0,$$

la cual es sencilla de comprobar: para todo $y \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} \bigwedge \{f(x) \mid x \in X\} \wedge f(\neg y) &\leq f(y) \wedge f(\neg y) \\ &\leq f(y \wedge \neg y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

así que la distributividad de marcos implica

$$\begin{aligned} \bigwedge \{f(x) \mid x \in X\} \wedge \bigvee \{f(\neg x) \mid x \in X\} &= \bigvee \left\{ \bigwedge \{f(x) \mid x \in X\} \wedge f(\neg y) \mid y \in X \right\} \\ &= \bigvee \{0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

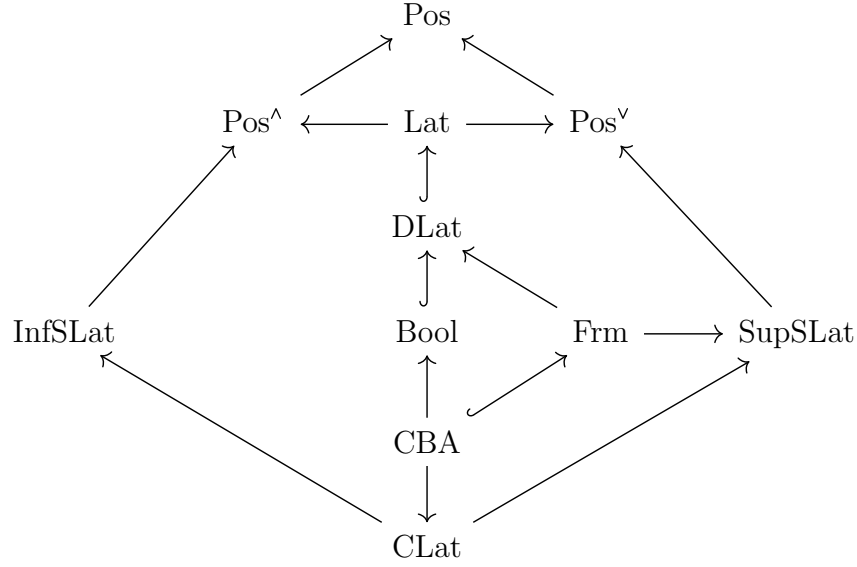
□

En particular, si A, B son álgebras booleanas completas, cualquier morfismo de marcos $f : A \rightarrow B$ es un morfismo completo. Es decir, la inclusión $\text{CBA}(A, B) \subseteq \text{Frm}(A, B)$ es una igualdad:

$$\text{CBA}(A, B) = \text{Frm}(A, B).$$

Por lo tanto, CBA es una subcategoría plena de Frm. Nuestro diagrama ahora

se ve como sigue:



1.10. Implicaciones

Una implicación en una semiretícula inferior A es una operación $(- > -) : A \rightarrow A$ tal que, para cualesquiera $a, x, y \in A$ se tiene

$$x \wedge y \leq a \quad \text{si, y solo si} \quad x \leq (y > a).$$

Ejemplo 1.19. En un álgebra booleana, nuestro caballo de batalla nos dice que

$$x \wedge y \leq a \quad \text{si, y solo si} \quad x \leq \neg y \vee a.$$

Por lo tanto, toda álgebra booleana tiene implicación dada como $(y > a) = \neg y \vee a$.

Ahora vienen dos lemas técnicos.

Lema 1.20. Sea A una \wedge -semiretícula con implicación. Entonces

1. $(x > -)$ infla.
2. $x \wedge (x > a) = x \wedge a$
3. $(- > a)$ es antítona.

Demostración. 1. Como $a \wedge x \leq a$, tenemos $a \leq (x > a)$.

2. Consideremos $a, x \in A$. Para cada z tenemos que

$$\begin{aligned} z \leq x \wedge (x > a) &\iff z \leq x \text{ y } z \leq (x > a) \\ &\iff z \leq x \text{ y } z \wedge x \leq a \\ &\iff z \leq x \text{ y } z \leq a \\ &\iff z \leq a \wedge x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \wedge (x > a) = x \wedge a$.

3. Supongamos que $x \leq y$. Consideremos $z = (y > a)$, entonces $x \wedge z \leq y \wedge z$ y por los incisos anteriores de este lema, $y \wedge z \leq a$. Así, $x \wedge z \leq a$ y por la definición de implicación obtenemos que $(y > a) \leq (x > a)$. \square

Lema 1.21. *Sea A una \wedge -semiretícula con implicación. Para cualquier elemento $a \in A$, la función $((- > a) > a) : A \rightarrow A$ tiene las siguientes propiedades.*

1. $((- > a) > a)$ infla. (Inmediado del punto 2 del lema anterior).
2. $((- > a) > a)$ es monótona. (Inmediado del punto 3 del lema anterior).
3. $((- > a) > a)$ es idempotente.

Demostración. Solo falta probar el punto 3. Por el punto 1, tenemos

$$(x > a) \leq (((x > a) > a) > a),$$

así que resta probar

$$(((x > a) > a) > a) \leq (x > a),$$

que, por definición de la implicación, equivale a

$$(((x > a) > a) > a) \wedge x \leq a.$$

Recordemos que $x \leq ((x > a) > a)$, porque $((- > a) > a)$ infla, y que $(y > a) \wedge y = y \wedge a$ para todo $y \in A$. En particular, para $y = ((x > a) > a)$, tenemos

$$\begin{aligned} (((x > a) > a) > a) \wedge x &\leq (((x > a) > a) > a) \wedge ((x > a) > a) \\ &= (y > a) \wedge y \\ &= y \wedge a \\ &\leq a, \end{aligned}$$

como se quería. \square

En el capítulo 2 definiremos los operadores cerradura como funciones $A \rightarrow A$ que cumplen estas tres propiedades (definición 2.8). Allí veremos que estos operadores juegan un papel importante en el contexto de \vee -semirretículas.

Así, el resultado anterior dice que, si A es una \wedge -semiretícula con implicación, entonces $((- > a) > a)$ es un operador cerradura. Además, el operador $((- > a) > a)$ tiene otra propiedad: preserva ínfimos.

Lema 1.22. *Si A es una \wedge -semirretícula con implicación, entonces*

$$(((x \wedge y) > a) > a) = ((x > a) > a) \wedge ((y > a) > a).$$

Demostración. Por un lado, como $((- > a) > a)$ es monótono, tenemos

$$\begin{aligned} (((x \wedge y) > a) > a) &\leq ((x > a) > a) \\ (((x \wedge y) > a) > a) &\leq ((y > a) > a) \end{aligned}$$

así que $((x \wedge y) > a) > a)$ es cota inferior de $((x > a) > a)$ y $((y > a) > a)$.

Ahora, dada cualquier cota inferior z de estos dos elementos, queremos probar que $z \leq (((x \wedge y) > a) > a)$, lo cual equivale a $z \wedge ((x \wedge y) > a) \leq a$. Como z es cota inferior, tenemos

$$z \leq ((x > a) > a) \qquad z \leq ((y > a) > a)$$

lo cual, por definición de la implicación, es

$$z \wedge (x > a) \leq a \qquad z \wedge (y > a) \leq a.$$

Ahora sea $w = ((x \wedge y) > a)$, de modo que

$$\begin{aligned} z \wedge w \wedge x \wedge y &= z \wedge ((x \wedge y) > a) \wedge (x \wedge y) \\ &\leq z \wedge a \\ &\leq a \end{aligned}$$

por definición de la implicación, esto nos da

$$z \wedge w \wedge x \leq (y > a).$$

Al hacer ínfimo con z obtenemos

$$z \wedge w \wedge x \leq z \wedge (y > a) \leq a$$

aplicando de nuevo la definición de la implicación,

$$z \wedge w \leq (x > a)$$

y haciendo ínfimo con z ,

$$z \wedge w \leq z \wedge (x > a) \leq a$$

Luego, $z \leq (w > a) = (((x \wedge y) > a) > a)$, como se quería. \square

También en el capítulo 2, veremos que los operadores cerradura con esta propiedad, llamados núcleos (definición 2.18) tienen gran relevancia en el contexto de marcos.

1.11. Álgebras de Heyting

Si una retícula tiene implicación, diremos que es un álgebra de Heyting. Un morfismo de álgebras de Heyting es un morfismo de retículas que preserva la implicación. Observemos que toda álgebra de Heyting tiene una negación dada por $\neg a = (a > 0)$.

Lema 1.23. *Toda álgebra de Heyting es distributiva, por lo que tenemos un funtor de inclusión $\text{Heyt} \rightarrow \text{DLat}$.*

Demostración. Notemos que $a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y de igual manera $a \wedge c \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Por la definición de implicación, estas desigualdades equivalen a las siguientes:

$$b \leq (a > ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))) \text{ y } c \leq (a > ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)))$$

Entonces $b \vee c \leq (a > ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)))$ y de nuevo por la definición de implicación resulta $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Además, para cualquier retícula se cumple que $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, es decir, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, pero esto pasa si y sólo si $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Por lo tanto, toda álgebra de Heyting es distributiva. \square

Teorema 1.24. *Una retícula completa A es un marco si, y solo si, A tiene implicación.*

Demostración. \Rightarrow) Supongamos que A es un marco y sean $a, b \in A$. Consideremos el elemento

$$y = \bigvee \{c \in A \mid a \wedge c \leq b\}$$

Por un lado, para todo $x \in A$ se tiene $a \wedge x \leq b \implies x \leq y$, pues es consecuencia directa de la definición de y . Ahora, si $x \leq y$, tenemos que

$$\begin{aligned} a \wedge x &\leq a \wedge y \\ &= a \wedge \bigvee \{x \in A \mid a \wedge x \leq b\} \\ &= \bigvee \{a \wedge x \mid a \wedge x \leq b\} \leq b \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq y$, así que $y = (a > b)$.

\Leftarrow) Supongamos que A tiene implicación. Sean $a \in A$ y $X \subseteq A$. Basta probar que A cumple la LDM. Como $a \wedge x \leq a \wedge \bigvee X$, tenemos que $\bigvee \{x \wedge a \mid x \in X\} \leq a \wedge \bigvee X$. Solo falta demostrar la otra desigualdad. Consideremos $y = \bigvee \{x \wedge a \mid x \in X\}$, entonces $a \wedge x \leq y$ para toda $x \in X$, es decir, $x \leq (a > y)$ para toda $x \in X$. Entonces $\bigvee X \leq (a > y) \Leftrightarrow a \wedge \bigvee X \leq y = \bigvee \{x \wedge a \mid x \in X\}$. Por lo tanto se cumple la LDM. \square

En particular, este resultado nos dice que un marco es lo mismo que un álgebra de Heyting completa. Sin embargo, los morfismos de marcos no necesariamente respetan la implicación, ni los morfismos de álgebras de Heyting necesariamente respetan los supremos arbitrarios. En particular, la inclusión $\text{Ob}(\text{Frm}) \rightarrow \text{Ob}(\text{Heyt})$ no se extiende a un funtor $\text{Frm} \rightarrow \text{Heyt}$.

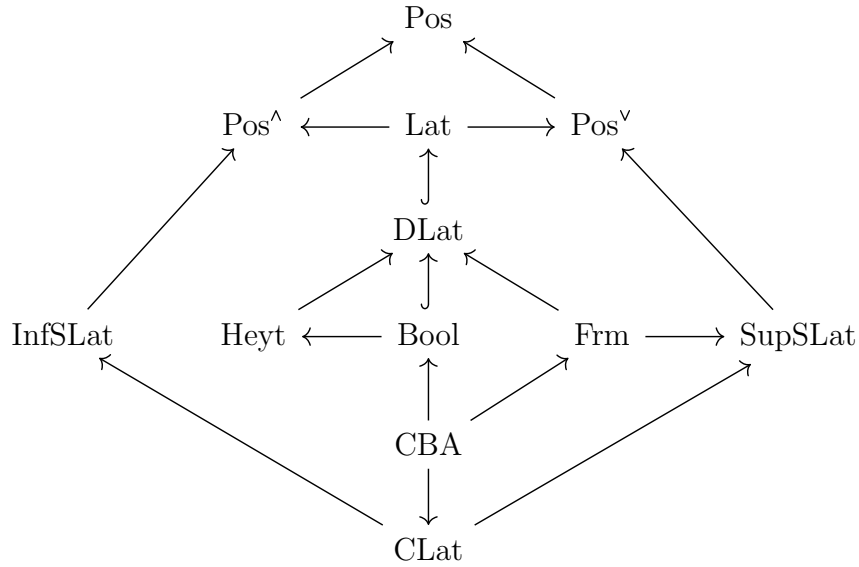
Ejemplo 1.25. Sea S un espacio topológico. Por el teorema anterior, dados $u, v \in \mathcal{O}S$ existe la implicación $v > u \in \mathcal{O}S$. Para todo $w \in \mathcal{O}S$, tenemos

$$\begin{aligned} w \leq (v > u) &\iff w \cap v \leq u \\ &\iff w \leq v' \cup u \\ &\iff w \leq (v' \cup u)^\circ. \end{aligned}$$

Se sigue que $v > u = (u \cup v')^\circ$.

Ejemplo 1.26. Ya vimos que toda álgebra booleana A tiene implicación dada como $v > u = \neg v \vee u$, así que A también es un álgebra de Heyting. Además, como un morfismo de álgebras booleanas preserva supremos e ínfimos finitos y negaciones, se sigue que también respeta las implicaciones, por lo cual es morfismo de álgebras booleanas. Por lo tanto, tenemos un funtor de inclusión $\text{Bool} \rightarrow \text{Heyt}$.

Ahora nuestro diagrama de inclusiones se ve así:



Lema 1.27. Sean A un marco, $a \in A$ y $X \subseteq A$. Entonces

$$(\bigvee X) > a = \bigwedge \{(x > a) \mid x \in X\}.$$

En particular, tomando $X = \{x, y\}$, tenemos

$$(x \vee y) > a = (x > a) \wedge (y > a).$$

Demostración. Para todo $y \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} y \leq (\bigvee X) > a &\iff y \wedge \bigvee X \leq a \\ &\iff \bigvee \{y \wedge x \mid x \in X\} \leq a \\ &\iff (\forall x \in X, y \wedge x \leq a) \\ &\iff (\forall x \in X, y \leq (x > a)) \\ &\iff y \leq \bigvee \{(x > a) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1 (Para el lector). *Dado un copo A , ¿Quién será la negación y la implicación en $\mathcal{L}A$?*

1.12. Morfismos adjuntos de copos

Recordemos que, cuando vemos a A y a B como categorías, un morfismo de copos $f : A \rightarrow B$ es lo mismo que un funtor, así que podemos aplicar el concepto de adjunción entre funtores. En este caso, dos morfismos de copos $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ cumplen $(f \dashv g)$ (es decir, g es adjunto derecho de f y f es adjunto izquierdo de g) si

$$B(fa, b) \simeq A(a, gb);$$

esto es:

$$fa \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad a \leq gb.$$

Ejemplo 1.28. *Sea A un álgebra de Heyting (por ejemplo, un marco). Para todo $a \in A$ la implicación $(a > -)$ es el adjunto derecho del ínfimo $- \wedge a$, pues*

$$y \wedge a \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad y \leq (a > b).$$

Ejemplo 1.29. *Sea $\varphi : S \rightarrow T$ una función entre conjuntos. Entonces la imagen directa $\varphi_! : \mathcal{P}S \rightarrow \mathcal{P}T$ y la imagen inversa $\varphi^{-1} : \mathcal{P}T \rightarrow \mathcal{P}S$, definidas para cualesquiera $U \subseteq S$ y $V \subseteq T$ como*

$$\begin{aligned} \varphi_!(U) &= \{\varphi(x) \mid x \in U\} = \{y \in T \mid \exists x \in U, y = \varphi(x)\} \\ \varphi^{-1}(V) &= \{x \in S \mid \varphi(x) \in V\} \end{aligned}$$

son morfismos de copos que satisfacen

$$\begin{aligned} \varphi_!(U) \subseteq V &\iff \forall x \in U, \varphi(x) \in V \\ &\iff \forall x \in U, x \in \varphi^{-1}(V) \\ &\iff U \subseteq \varphi^{-1}(V), \end{aligned}$$

así que $\varphi_! \dashv \varphi^{-1}$.

Más aún, φ^{-1} también tiene adjunto derecho. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(V) \subseteq U &\iff U' \subseteq \varphi^{-1}(V)' \\ &\iff U' \subseteq \varphi^{-1}(V') \\ &\iff \varphi_!(U') \subseteq V' \\ &\iff V \subseteq \varphi_!(U')'. \end{aligned}$$

Así, definiendo $\varphi_? : \mathcal{P}S \rightarrow \mathcal{P}T$ por la fórmula $\varphi_?(U) = \varphi_!(U')'$, tenemos $\varphi^{-1} \dashv \varphi_?$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} \varphi_?(U) &= \{y \in T \mid x \notin \varphi_!(U')\} \\ &= \{y \in T \mid \forall x \in U', y \neq \varphi(x)\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.30. Si $\varphi : S \rightarrow T$ es una función continua entre espacios topológicos, el morfismo de marcos $\varphi^* = \mathcal{O}\varphi : \mathcal{O}T \rightarrow \mathcal{O}S$, definido como $\varphi^*(v) = \varphi^{-1}(v)$ para cada $v \in \mathcal{O}T$, tiene adjunto derecho. Si $\varphi_? : \mathcal{P}S \rightarrow \mathcal{P}T$ es el adjunto derecho de la preimagen $\varphi^{-1} : \mathcal{P}T \rightarrow \mathcal{P}S$ (ver ejemplo 1.29), tenemos

$$\begin{aligned}\varphi^*(v) \leq u &\iff \varphi^{-1}(v) \leq u \\ &\iff v \leq \varphi_?(u) \\ &\iff v \leq \varphi_?(u)^\circ,\end{aligned}$$

ya que $\varphi_?(u)^\circ$ es el abierto más grande contenido en $\varphi_?(u)$. Por lo tanto, el adjunto derecho $\varphi_* : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}T$ de φ^* se calcula como

$$\varphi_*(u) = \varphi_?(u)^\circ = (\varphi_!(u'))^\circ = \overline{\varphi_!(u')}' ,$$

donde $\varphi_! : \mathcal{P}S \rightarrow \mathcal{P}T$ es la imagen directa.

Lema 1.31. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de \vee -semiretículas (por ejemplo, un morfismo de marcos). Entonces la función $f_* : B \rightarrow A$ dada como

$$f_*(b) = \bigvee \{x \in A \mid f(x) \leq b\}$$

es un morfismo de copos y es adjunto derecho de f . Más aún, f_* es morfismo de \wedge -semiretículas.

Demostración. Sea $X = \{x \in A \mid f(x) \leq b\}$. Si $a \in A$ es tal que $f(a) \leq b$, entonces $a \in X$, por lo cual

$$a \leq \bigvee X = f_*(b).$$

Recíprocamente, si $a \leq f_*(b) = \bigvee X$, entonces

$$\begin{aligned}f(a) &\leq f(\bigvee X) \\ &= \bigvee \{f(x) \mid f(x) \leq b\} \\ &\leq b,\end{aligned}$$

ya que f preserva supremos.

La monotonía de f_* se sigue de que preserva ínfimos (lo cual probaremos abajo) pero de todos modos es fácil verlo, así que lo haremos por separado. Si tenemos $b \leq c \in B$, entonces

$$\{x \in X \mid f(x) \leq b\} \subseteq \{x \in X \mid f(x) \leq c\}.$$

Aplicando supremos, obtenemos $f_*(b) \leq f_*(c)$.

Finalmente, veamos que f_* preserva ínfimos. Si $Y \subseteq B$ es cualquier subconjunto, entonces todo $a \in A$ cumple

$$\begin{aligned}a \leq f_*(\bigwedge Y) &\iff f(a) \leq \bigwedge Y \\ &\iff (\forall y \in Y, f(a) \leq y) \\ &\iff (\forall y \in Y, a \leq f_*(y)) \\ &\iff a \leq \bigwedge \{f_*(y) \mid y \in Y\}.\end{aligned}$$

Se sigue que $f_*(\bigwedge Y) = \bigwedge \{f_*(y) \mid y \in Y\}$. □

Sin embargo, nótese que, aunque $f : A \rightarrow B$ sea un morfismo de marcos, su adjunto derecho $f_* : B \rightarrow A$ puede no preservar supremos finitos.

1.13. Monomorfismos y epimorfismos

Recordemos que, dada una categoría \mathcal{C} , un morfismo es

- un monomorfismo si es cancelable por la izquierda,
- un epimorfismo si es cancelable por la derecha y
- un bimorfismo si es monomorfismo y epimorfismo.

Ejercicio 2 (Para el lector). *Muéstrese que, en la categoría Top de los espacios topológicos, un morfismo es*

- *suprayectivo si, y solo si, es un epimorfismo,*
- *inyectivo si, y solo si, es un monomorfismo.*

Este también es el caso las categorías de conjuntos, grupos y espacios vectoriales, pero no en la categoría de anillos. En efecto, aunque un morfismo de anillos es

$$\begin{aligned} \text{inyectivo} &\iff \text{monomorfismo y} \\ \text{suprayectivo} &\implies \text{epimorfismo,} \end{aligned}$$

la inclusión

$$i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

es un ejemplo de un epimorfismo de anillos que no es suprayectivo.

Veremos que, en este aspecto, la categoría de marcos se comporta parecido a la categoría de anillos, pues aunque en Frm es cierto que

$$\begin{aligned} \text{inyectivo} &\iff \text{monomorfismo y} \\ \text{suprayectivo} &\implies \text{epimorfismo,} \end{aligned}$$

también existen epimorfismos no suprayectivos.

Lema 1.32. *Todo monomorfismo de marcos es inyectivo, así que, en Frm , un morfismo es*

$$\text{inyectivo} \iff \text{monomorfismo.}$$

Demostración. Vamos a usar el marco

$$3 \quad = \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \star \\ | \\ 0. \end{array}$$

Sea $m : A \rightarrow B$ un monomorfismo y $a, b \in A$ tales que $m(a) = m(b)$. Como las funciones $f_a, f_b : 3 \rightarrow A$ dadas por $f_a(\star) = a$ y $f_b(\star) = b$ son morfismos de marcos que cumplen $m(f_a(\star)) = m(a) = m(b) = m(f_b(\star))$, se sigue que $m f_a = m f_b$. Como m es monomorfismo, se sigue que $f_a = f_b$, así que $a = f_a(\star) = f_b(\star) = b$. \square

Del truco del marco 3 que usamos en la demostración anterior, se puede deducir que las asignaciones

$$\begin{aligned} B &\rightleftharpoons \text{Frm}(3, B) \\ a &\mapsto f_a \\ f(\star) &\leftarrow f \end{aligned}$$

forman un isomorfismo de marcos, donde $\text{Frm}(3, B)$ tiene el orden puntual.

Ahora queremos construir un epimorfismo de marcos que no es suprayectivo.

Lema 1.33. *Si S es un espacio topológico T_1 , entonces la inclusión $i : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{P}S$ es un epimorfismo.*

Demostración. Sean

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} \mathcal{P}S \xleftarrow{i} \mathcal{O}S$$

morfismos en Frm con $fi = gi$.

Dado $p \in S$, consideremos $X_p = \{p\}, U_p = \{p\}' \in \mathcal{P}S$. Como X_p y U_p son complementarios en $\mathcal{P}S$, sus imágenes en A (bajo f y bajo g) son complementarias. Ahora, como S es T_1 , entonces X_p es cerrado, así que U_p es abierto. Como $fi = gi$, esto implica que

$$\begin{aligned} f(U_p) &= f(i(U_p)) \\ &= g(i(U_p)) \\ &= g(U_p). \end{aligned}$$

Luego, la unicidad de los complementos nos da

$$\begin{aligned} f(X_p) &= \neg f(U_p) \\ &= \neg g(U_p) \\ &= g(X_p). \end{aligned}$$

Ahora, para cualquier $E \in \mathcal{P}S$ tenemos $E = \bigvee \{X_p \mid p \in E\}$. Como f y g son morfismos de marcos,

$$\begin{aligned} f(E) &= \bigvee \{f(X_p) \mid p \in E\} \\ &= \bigvee \{g(X_p) \mid p \in E\} \\ &= g(E), \end{aligned}$$

por lo cual $f = g$. Se sigue que i es un epimorfismo. \square

En particular, si S es un espacio topológico T_1 no discreto (es decir, $\mathcal{O}S \neq \mathcal{P}S$), entonces la inclusión $i : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{P}S$ es un ejemplo de epimorfismo de marcos que no es suprayectivo.

Capítulo 2

Cocientes

Ahora queremos investigar qué significa que un marco sea cociente de otro. Para esto, hagamos una comparación rápida de cómo funcionan los cocientes en otros contextos:

- Dado un conjunto S , un cociente de S es otro conjunto que se construye a partir de una relación de equivalencia \sim en S . Los elementos del cociente S/\sim son los bloques de S con respecto a la relación dada y se obtiene una función de proyección $\pi : S \rightarrow S/\sim$.
- Un cociente de un espacio vectorial V es otro espacio vectorial que se construye a partir de un subespacio $U \leq V$. A partir de U , se construye una relación de equivalencia en V y el cociente V/U es el conjunto de bloques de la relación, con lo cual se obtiene una función de proyección $\pi : V \rightarrow V/U$.
- Un cociente de un grupo G es otro grupo que se forma a partir de un subgrupo normal $H \leq G$. Éste grupo H induce una relación de equivalencia en G y el cociente G/H es el conjunto de bloques de la relación, con lo cual se obtiene una función de proyección $\pi : G \rightarrow G/H$.
- Dado un anillo A , un cociente de A es otro anillo que se forma a partir de un ideal bilateral I de A . El ideal I induce una relación de equivalencia en A y el anillo cociente A/I es el conjunto de bloques de la relación, así que obtenemos una función de proyección $\pi : A \rightarrow A/I$.

En cada caso, el cociente es el conjunto de bloques con respecto a una relación de equivalencia y la función de proyección π induce en el cociente una estructura similar a la del objeto original (el cociente de un grupo es un grupo, el cociente de un anillo es un anillo, etc.) de tal manera que π es un morfismo en la categoría correspondiente.

Para que esto sea posible, es preciso tomar el tipo de subestructuras que se mencionaron arriba: si el subgrupo $H \leq G$ no es normal, sí obtenemos una relación de equivalencia en G , pero $\pi : G \rightarrow G/H$ no induce una estructura de grupo en G que convierta a π en un morfismo; si el ideal bilateral I se reemplaza

por un ideal izquierdo, derecho o incluso por un subanillo, también obtenemos relaciones de equivalencia en A , pero no hay estructura de anillo en A/I tal que $\pi : A \rightarrow A/I$ sea un morfismo.

Esta característica depende completamente de la relación de equivalencia y, a las relaciones de equivalencia que satisfacen esta propiedad se les llama congruencias. Es decir, las congruencias de grupos son precisamente las relaciones de equivalencia inducidas por subgrupos normales, las congruencias de anillos son precisamente las relaciones de equivalencia inducidas por ideales bilaterales, etc.

En nuestro estudio de los marcos, también consideraremos congruencias de marcos: relaciones de equivalencia tales que la proyección sea un morfismo de marcos, pero las congruencias de marcos no estarán codificadas por ciertos tipos de submarcos (en contraste con el caso de los grupos, espacios vectoriales, etc).

Además, en los casos mencionados arriba, los cocientes satisfacen otras propiedades que también se satisfacen en la categoría de marcos.

La primera es que cualquier morfismo $f : A \rightarrow B$ de la categoría relevante se factoriza a través de un cociente de A .

Los cocientes satisfacen otra propiedad importante. Supongamos que C es un cociente de A dado por una congruencia. Si un morfismo $f : A \rightarrow B$ en la categoría respeta la congruencia dada, entonces f se factoriza de manera única a través de C .

Dado un morfismo de grupos $\varphi : G \rightarrow H$, existe un subgrupo normal $\ker \varphi \leq G$ tal que φ se factoriza a través del cociente $G/\ker \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & \searrow & \nearrow \tilde{\varphi} \\ & G/\ker \varphi & \end{array} .$$

Más aún, este cociente es universal en el sentido de que, para cualquier morfismo $\psi : G \rightarrow H'$ con $\ker \varphi \leq \ker \psi$, existe un único morfismo $\varphi^\sharp : G/\ker \varphi \rightarrow H'$ que factoriza a ψ a través del cociente:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & H' \\ & \searrow & \nearrow \varphi^\sharp \\ & G/\ker \varphi & \end{array} .$$

Vale la pena notar que la relación de equivalencia

$$g \sim h \quad \text{si, y solo si} \quad \varphi(g) = \varphi(h)$$

está codificada en el subgrupo $\ker \varphi$ de G . Esta situación se repite en las categorías de anillos, espacios vectoriales, módulos, álgebras, etc. Queremos llevar esta situación a un contexto más general, donde no tenemos estructura de grupo.

2.1. Cocientes de conjuntos

Consideremos una función de conjuntos $\varphi : A \rightarrow B$. Queremos definir algo que haga el papel del núcleo de φ . Aquí no tenemos estructura de grupo, pero sí podemos definir una relación de equivalencia \sim en A :

$$a \sim b \quad \text{si, y solo si} \quad \varphi(a) = \varphi(b).$$

Como es usual, denotando al conjunto de bloques de la relación como A/\sim , tenemos la función $\eta : A \rightarrow A/\sim$ que manda un elemento $a \in A$ a su bloque $[a]$ correspondiente. Es decir:

$$\begin{aligned} \eta : A &\rightarrow A/\sim \\ a &\mapsto [a] = \{x \in A \mid x \sim a\}. \end{aligned}$$

En particular, se tiene que

$$\eta(x) = \eta(y) \quad \text{si, y solo si} \quad x \sim y.$$

Una consecuencia es que tenemos una función $\varphi^\sharp : A/\sim \rightarrow B$ que cierra el triángulo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow \eta & \nearrow \varphi^\sharp \\ & A/\sim & \end{array}$$

dada como $\varphi^\sharp([a]) = \varphi(a)$. El hecho de que φ^\sharp esté bien definida como función se debe, precisamente, a la definición de la relación de equivalencia: si $[a] = [b]$, entonces $a \sim b$, por lo cual $\varphi(a) = \varphi(b)$, i.e., $\varphi^\sharp([a]) = \varphi^\sharp([b])$. Más aún, tenemos $A/\sim \simeq \text{im } \varphi$. En particular, si φ es suprayectiva, entonces $A/\sim \simeq B$.

También aquí sucede que η es universal con respecto a esta propiedad: si $\psi : A \rightarrow B'$ es una función tal que $\varphi(a) = \varphi(b) \implies \psi(a) = \psi(b)$, entonces existe una única $\psi^\sharp : A/\sim \rightarrow B'$ que factoriza a ψ a través de η . Nos gustaría decir que el “núcleo” de φ es la relación de equivalencia \sim inducida por φ .

2.2. Cocientes en SupSLat

Nuestro objetivo es estudiar los cocientes en la categoría de marcos. Para esto, estudiaremos primero los cocientes en un caso más sencillo: la categoría de \vee -semirretículas. (recordemos que tenemos un funtor de inclusión $\text{Frm} \rightarrow \text{SupSLat}$).

Primero veremos que todo morfismo induce una congruencia. Luego, veremos que toda congruencia produce un morfismo cociente y que este morfismo induce la congruencia original.

En la categoría de conjuntos, todo morfismo $\varphi : A \rightarrow B$ induce una relación de equivalencia \sim en A y, recíprocamente, toda relación de equivalencia \sim en

A está inducida por un morfismo (porque podemos formar el cociente A/\sim). Queremos obtener un resultado análogo en SupSLat .

Un \vee -morfismo $f : A \rightarrow B$ es, en particular, una función, así que induce una relación de equivalencia en A . Sin embargo, no todas las relaciones de equivalencia son interesantes. Nos enfocaremos en las relaciones de equivalencia que respeten la estructura de \vee -semirretícula, las cuales llamaremos \vee -congruencias.

Supongamos que tenemos una relación de equivalencia \sim en una \vee -semirretícula A . Si $X, Y \subseteq A$ son dos subconjuntos indicados por un conjunto I

$$X = \{x_i \mid i \in I\} \qquad Y = \{y_i \mid i \in I\}$$

tales que para cada índice $i \in I$ se tiene $x_i \sim y_i$, entonces usaremos la notación $X \sim Y$.

Decimos que una relación de equivalencia $\sim \subseteq A \times A$ es una \vee -congruencia si, para todo par de subconjuntos $X, Y \subseteq A$ con $X \sim Y$, se tiene $\vee X \sim \vee Y$.

El primer resultado es

Lema 2.1 (Todo morfismo induce una congruencia). *Sea $\varphi : A \rightarrow B$ un \vee -morfismo. Entonces la relación de equivalencia en A inducida por φ :*

$$a \sim b \quad \text{si, y solo si} \quad \varphi(a) = \varphi(b)$$

es una \vee -congruencia.

Demostración. Tomemos subconjuntos $X \sim Y \subseteq A$ indicados por I . Esto es, para todo $i \in I$ tenemos $x_i \sim y_i$, por lo cual $\varphi(x_i) = \varphi(y_i)$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi(\vee X) &= \vee \{\varphi(x_i) \mid i \in I\} \\ &= \vee \{\varphi(y_i) \mid i \in I\} \\ &= \varphi(\vee Y). \end{aligned}$$

Luego, $\vee X \sim \vee Y$, por lo cual \sim es una \vee -congruencia. \square

Lema 2.2 (Toda congruencia produce un cociente). *Dada una \vee -semirretícula A y una \vee -congruencia \sim sobre A , la estructura de semirretícula superior en A/\sim inducida por $\eta : A \rightarrow A/\sim$ es el único orden que convierte a A/\sim en una \vee -semirretícula y a $\eta : A \rightarrow A/\sim$ en un \vee -morfismo.*

Demostración. Sean $[a], [b] \in A/\sim$. Como \sim es una \vee -congruencia, el bloque de $[a \vee b]$ no depende de los representantes, ya que $a \sim a'$ y $b \sim b'$ implica que $a \vee b \sim a' \vee b'$. Luego, podemos definir una operación en A/\sim como

$$\begin{aligned} [a] \vee [b] &= \vee \{[a], [b]\} \\ &= \vee \eta(\{a, b\}) \\ &= \eta(a \vee b) \\ &= [a \vee b]. \end{aligned}$$

para cualesquiera $[a], [b] \in A/\sim$. Como A es un monoide conmutativo idempotente, entonces esta operación en A/\sim también lo convierte en uno, por lo cual la relación

$$[a] \leq [b] \quad \text{si, y solo si} \quad [a \vee b] = [b]$$

es un orden parcial en A/\sim cuyo supremo (binario) es \vee . (Ver 1.2). Más aún, la igualdad $[a] \vee [b] = [a \vee b]$ nos dice que η es un morfismo de semirretículas superiores y, de hecho, esta es la única estructura de semirretícula superior en A/\sim que lo logra, ya que si \vee' es otra estructura en A/\sim compatible con η , entonces tenemos

$$\begin{aligned} [a] \vee' [b] &= \eta(a) \vee' \eta(b) \\ &= \eta(a \vee b) \\ &= [a \vee b] \\ &= [a] \vee [b]. \end{aligned}$$

Ahora nos falta ver que A/\sim es superiormente completo y que η preserva los supremos arbitrarios. Notemos que cualquier subconjunto $Y \subseteq A/\sim$ es de la forma $Y = \eta(X)$ para algún $X \subseteq A$: por ejemplo, $Y = \eta(\eta^{-1}(Y))$.

Si probamos que el supremo de $\eta(X)$ es $\eta(\bigvee X)$, esto mostrará, al mismo tiempo, que A/\sim tiene supremos arbitrarios y que la función $\eta: A \rightarrow A/\sim$ es un \vee -morfismo.

Tomemos $\eta(X) \subseteq A/\sim$. Como η preserva supremos binarios, se sigue que η es monótona. Luego, $\eta(\bigvee X)$ es cota superior de $\eta(X)$. Ahora sea $[a] \in A/\sim$ una cota superior de $\eta(X)$; esto es: $[x] \leq [a]$ (o bien, $[x \vee a] = [a]$, o bien, $x \vee a \sim a$) para todo $x \in X$. Luego, poniendo

$$Y = \{x \vee a \mid x \in X\} \qquad Z = \{a \mid x \in X\},$$

(los cuales son conjuntos indicados por X) tenemos $Y \sim Z$. Como \sim es una \vee -congruencia, tenemos $\bigvee Y \sim \bigvee Z$, pero esto es

$$\bigvee X \vee a \sim a.$$

Se sigue que $[\bigvee X \vee a] = [a]$. Es decir, $[\bigvee X] \vee [a] = [a]$ o, equivalentemente $[\bigvee X] \leq [a]$. Así,

$$\eta(\bigvee X) \leq [a].$$

Esto muestra que $\eta(\bigvee X)$ es el supremo de $\eta(X)$ en A/\sim :

$$\eta(\bigvee X) = \bigvee \eta(X).$$

Así, A/\sim es superiormente completa y η es un \vee -morfismo. □

El resultado anterior nos dice que en la categoría de \vee -semirretículas también existe la noción de cociente, al igual que en las categorías más familiares de anillos, grupos, etc. Una \vee -semirretícula B es cociente de A si es de la forma A/\sim para alguna \vee -congruencia \sim en A . Más formalmente, hacemos la siguiente definición:

Definición 2.3. Decimos que un morfismo $f : A \rightarrow B$ es un morfismo cociente de A , o que exhibe a B como cociente de A , si hay una congruencia \sim en A y un isomorfismo $A/\sim \simeq B$ de forma que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta \downarrow & \nearrow \simeq & \\ A/\sim & & \end{array}$$

es conmutativo. En este caso, decimos que B es el cociente de A por \sim .

Con esta definición se entiende el título del lema anterior: “toda congruencia produce un cociente”.

Observación 2.4 (Correspondencia entre congruencias y cocientes).

- Toda \vee -congruencia \sim es la \vee -congruencia inducida por su morfismo cociente $\eta : A \rightarrow A/\sim$.
- Todo morfismo cociente $f : A \rightarrow B$ es el cociente de A por la congruencia \sim inducida por f .

Así, los morfismos cociente son exactamente los morfismos suprayectivos.

Proposición 2.5 (Teorema del factor, versión 1). Sea A una \vee -semirretícula y \sim una \vee -congruencia en A . Si $f : A \rightarrow B$ un \vee -morfismo que respeta a \sim , entonces f se factoriza de manera única a través de $\eta : A \rightarrow A/\sim$.

Demostración. Como f respeta a \sim como relación de equivalencia, entonces se factoriza de manera única a través de A/\sim en la categoría de conjuntos:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta \searrow & & \nearrow f^\sharp \\ & A/\sim & \end{array}$$

Notemos que tanto f como η son \vee -morfismos, así que basta ver que f^\sharp también es un \vee -morfismo, pero esto es fácil: cualquier subconjunto de A/\sim tiene la forma $\eta(X)$ para algún $X \subseteq A$, así que

$$\begin{aligned} f^\sharp(\bigvee \eta(X)) &= f^\sharp(\eta(\bigvee X)) \\ &= f(\bigvee X) \\ &= \bigvee f(X) \\ &= \bigvee f^\sharp(\eta(X)). \end{aligned}$$

□

Además, si \sim es la congruencia inducida por f , entonces f se factoriza como $f = f^\sharp \eta$, con f^\sharp inyectivo y η suprayectivo.

2.2.1. Operadores cerradura

El apartado anterior vimos que las \vee -semirretículas tienen muchos paralelismos con los grupos, anillos, módulos, etc. Sin embargo, en éstos últimos casos, las congruencias tienen representaciones alternativas: las congruencias de un grupo están en correspondencia con sus subgrupos normales, las congruencias de un módulo están en correspondencia con sus submódulos, las congruencias de un anillo están en correspondencia con sus ideales bilaterales, etc.

En vista de esto, queremos encontrar una representación alternativa de las congruencias de una \vee -semirretícula. De hecho, encontraremos no una, sino dos de estas representaciones: los operadores cerradura y los subconjuntos \wedge -cerrados.

Dada una \vee -congruencia \sim en A , sabemos construir la \vee -semirretícula cociente A/\sim . Sin embargo, los elementos de A/\sim son los bloques $[x]$ de A con respecto a \sim y a veces es molesto trabajar con clases de equivalencia. En otro tipo de estructuras como espacios vectoriales y anillos, podríamos pensar en tomar un representante de cada bloque y trabajar con ellos en vez de trabajar con los bloques, pero no hay una elección canónica de representantes. Sin embargo, en el caso de las \vee -semirretículas cada bloque tiene un representante natural: su supremo. Para que esta idea funcione bien, lo primero que hay que verificar es que el supremo de cada bloque sigue estando en el bloque:

Lema 2.6. *Si \sim es una \vee -congruencia en A , entonces cada bloque de \sim tiene un mayor elemento. Es decir, para cada $[a] \in A/\sim$, tenemos $\bigvee [a] \in [a]$.*

Demostración. Tomemos $[a] \in A/\sim$ y definamos nuestro conjunto de índices como $I = [a]$. Sean

$$\begin{aligned} X &= \{x_i \mid i \in I\} \\ Y &= \{y_i \mid i \in I\} \end{aligned}$$

donde $x_i = i$ y $y_i = a$ para cada $i \in I = [a]$. Por construcción, tenemos $x_i \sim y_i$ para cada $i \in I$: esto es, $X \sim Y$. Luego, como \sim es una \vee -congruencia, se sigue que $\bigvee X \sim \bigvee Y$. Esto es,

$$\bigvee [a] = \bigvee X \sim \bigvee Y = a.$$

Por lo tanto, $\bigvee [a] \in [a]$. □

Este resultado dice que, si tomamos un bloque $[a] \in A/\sim$, nos fijamos en su supremo y luego volvemos a bajar con $\eta : A \rightarrow A/\sim$, caemos en el bloque en el que empezamos. Es decir:

$$\eta(\bigvee [a]) = [a].$$

Ahora consideramos la otra composición:

Definición 2.7. *Sea \sim una \vee -congruencia en A . El selector de \sim es la función $j : A \rightarrow A$ dada por*

$$j(a) = \bigvee \eta(a) = \bigvee [a] = \bigvee \{x \in A \mid x \sim a\}.$$

El selector tiene algunas propiedades interesantes.

- Si $x \sim a$, entonces $x \leq j(a)$. En particular, $a \leq j(a)$, ya que $a \sim a$. Decimos que j infla.
- Supongamos que $a \leq b$. Dado que $a \sim j(a)$ y $b \sim j(b)$, entonces

$$b = a \vee b \sim j(a) \vee j(b)$$

porque \sim es \vee -congruencia. Luego, $j(a) \vee j(b) \leq j(b)$. Entonces

$$j(a) \leq j(a) \vee j(b) \leq j(b).$$

Es decir, j es monótona.

- Ahora tomemos $a \in A$. Sabemos que $a \sim j(a)$ y que $j(a) \sim j(j(a))$, por lo cual $a \sim j(j(a))$. Luego, $j(j(a)) \leq j(a)$. Por otro lado, también tenemos $j(a) \leq j(j(a))$ (porque j infla) así que $j(a) = j(j(a))$. En otras palabras, j es idempotente.

Definición 2.8 (Operador cerradura). Si A es un copo, un operador cerradura en A es una función $j : A \rightarrow A$ tal que

- Infla: $a \leq j(a)$ para todo $a \in A$
- Es monótona: $a \leq b$ implica que $j(a) \leq j(b)$.
- Es idempotente: $j(j(a)) = a$.

Así, lo que acabamos de mostrar es que, si j es el selector de una \vee -congruencia \sim , entonces j es un operador cerradura. Ahora queremos ver el camino de regreso: dado un operador cerradura j en A , ¿podemos obtener una \vee -congruencia de manera natural? La respuesta es sí y, de hecho, estas construcciones son inversas una de la otra.

Lema 2.9. Sea A una \vee -retícula. Los selectores de A son precisamente los operadores cerradura. Además cada operador cerradura es selector para una única \vee -congruencia. Es decir, hay una relación biyectiva entre \vee -congruencias y operadores cerradura en A .

Demostración. Ya sabemos que el selector de una \vee -congruencia es un operador cerradura.

Ahora tomemos un operador cerradura $j : A \rightarrow A$. Como j es una función, sabemos que la relación

$$x \sim y \quad \text{si, y solo si} \quad j(x) = j(y)$$

es de equivalencia. Veamos que es una \vee -congruencia. Supongamos que $X, Y \subseteq A$ son subconjuntos indicados por un conjunto I y que $X \sim Y$. Entonces para cualquier $y_i \in Y$ tenemos $y_i \sim x_i$ con $x_i \in X$. Como j infla y es monótono, tenemos

$$y_i \leq j(y_i) = j(x_i) \leq j(\bigvee X)$$

Así, $\bigvee Y \leq j(\bigvee X)$. Aplicando j obtenemos $j(\bigvee Y) \leq j(\bigvee X)$, pues j es idempotente. Análogamente, tenemos $j(\bigvee X) \leq j(\bigvee Y)$, por lo cual $j(\bigvee X) = j(\bigvee Y)$ y así $\bigvee X \sim \bigvee Y$, así que \sim es una \bigvee -congruencia.

Ahora veamos que estas correspondencias son inversas una de la otra.

Sea j un operador cerradura y \sim su \bigvee -congruencia asociada. Para ver que j es el selector de \sim , basta ver que $j(y)$ es el supremo del bloque de y con respecto a \sim . Notemos que, si $x \sim y$, entonces $x \leq j(x) = j(y)$ porque j infla, así que $j(y)$ es cota superior del bloque de y . Además, tenemos $y \sim j(y)$, ya que $j(y) = j(j(y))$. Por lo tanto, si z es una cota superior del bloque de y , entonces en particular $j(y) \leq z$.

Ahora sea \sim una \bigvee -congruencia y j su selector. Debemos ver que \sim es la congruencia de j . Es decir, mostraremos que

$$x \sim y \quad \text{si, y solo si} \quad j(x) = j(y).$$

Por un lado $x \sim y$ significa que $[x] = [y]$, por lo cual sus supremos $j(x)$ y $j(y)$ son iguales. Por otro lado, dado que $x \sim j(x)$ para todo $x \in A$, si $j(x) = j(y)$ entonces tenemos $x \sim j(x) = j(y) \sim y$, con lo cual terminamos. \square

Conjuntos \bigwedge -cerrados

Vimos que, en una \bigvee -semirretícula, hay una correspondencia entre operadores cerradura y \bigvee -congruencias. De hecho, ahora veremos que la correspondencia es triple: los operadores cerradura también están en correspondencia con los subconjuntos de A que son cerrados bajo ínfimos arbitrarios.

Definición 2.10. Si A es una \bigvee -semirretícula, un subconjunto $F \subseteq A$ se dice que es \bigwedge -cerrado si, para todo subconjunto $X \subseteq F$, se tiene $\bigwedge X \in F$.

Ahora mostraremos que hay una correspondencia entre operadores cerradura y conjuntos \bigwedge -cerrados.

Lema 2.11.

1. Dado un operador cerradura j en A , el conjunto de sus puntos fijos

$$A_j = \{x \in A \mid j(x) = x\}$$

es \bigwedge -cerrado.

2. Dado un conjunto \bigwedge -cerrado $F \subseteq A$, la función $j_F : A \rightarrow A$ dada por

$$j_F(a) = \bigwedge \{x \in F \mid a \leq x\}$$

es un operador cerradura.

3. Las construcciones $F \mapsto j_F$ y $j \mapsto A_j$ son inversas una de la otra y, por lo tanto, establecen una biyección entre operadores cerradura en A y los conjuntos \bigwedge -cerrados de A , que, además, están en biyección con las \bigvee -congruencias de A .

Demostración. 1. Tomemos un subconjunto $X \subseteq A_j$. Para cualquier $x \in X$ tenemos $\bigwedge X \leq x$, por lo cual

$$j(\bigwedge X) \leq j(x) = x$$

ya que j es monótona y $x \in A_j$. Esto significa que $j(\bigwedge X)$ es cota inferior de X , por lo cual

$$j(\bigwedge X) \leq \bigwedge X$$

y, además, la otra desigualdad $\bigwedge X \leq j(\bigwedge X)$ se da porque j infla. Luego, $j(\bigwedge X) = \bigwedge X$, pero esto es $\bigwedge X \in A_j$.

2. En efecto, dado que cualquier $a \in A$ es cota inferior de $\{x \in F \mid a \leq x\}$, se sigue que $a \leq j_F(a)$.

Ahora, dados $a \leq b \in A$, tenemos

$$\{x \in F \mid a \leq x\} \supseteq \{x \in F \mid b \leq x\}$$

lo cual, tomando ínfimos, nos da $j_F(a) \leq j_F(b)$.

Finalmente, como F es \wedge -cerrado, para cualquier $a \in A$ tenemos $j_F(a) \in F$ (por definición de j_F), de modo que $j_F(a) \in \{x \in F \mid j_F(a) \leq x\}$. Una vez más, por la definición de j_F se sigue que $j_F(j_F(a)) \leq j_F(a)$ y la otra desigualdad $j_F(a) \leq j_F(j_F(a))$ es porque j_F infla.

3. Sea $F \subseteq A$ un conjunto \wedge -cerrado. Entonces

$$\begin{aligned} j_F(a) &= \bigwedge \{x \in F \mid a \leq x\} \\ A_{j_F} &= \{a \in A \mid j_F(a) = a\}. \end{aligned}$$

Observemos que $F \subseteq A_{j_F}$, ya que $a = \bigwedge \{x \in F \mid a \leq x\}$ para todo $a \in F$. Por otro lado, como F es \wedge -cerrado, tenemos $j_F[A] \subseteq F$. Luego, $A_{j_F} = j_F[A_{j_F}] \subseteq F$ y, así, $F = A_{j_F}$.

Recíprocamente, sea $j : A \rightarrow A$ un operador cerradura. Entonces

$$\begin{aligned} A_j &= \{a \in A \mid j(a) = a\} \\ j_{A_j}(a) &= \bigwedge \{x \in A_j \mid a \leq x\}. \end{aligned}$$

Como j infla y es idempotente, todo $a \in A$ satisface

$$j(a) \in \{x \in A_j \mid a \leq x\}.$$

Además, $j(a)$ es una cota inferior del conjunto, pues para todo $x \in A_j$ con $a \leq x$ tenemos $j(a) \leq j(x) = x$. Por lo tanto,

$$j(a) = \bigwedge \{x \in A_j \mid a \leq x\} = j_{A_j}(a).$$

Esto muestra que $j = j_{A_j}$. Luego, las construcciones $F \mapsto j_F$ y $j \mapsto A_j$ son inversas, lo cual establece la biyección deseada. \square

La correspondencia entre operadores cerradura y cocientes

Al principio de esta sección, vimos que todo \vee -morfismo $f : A \rightarrow B$ induce una \vee -congruencia en A . Por lo tanto, también induce un operador cerradura $k : A \rightarrow A$

Definición 2.12. Para cada \vee -morfismo $f : A \rightarrow B$, el núcleo de φ es el operador cerradura $k : A \rightarrow A$ que le corresponde a la \vee -congruencia inducida por f . Es decir k está determinado por la condición

$$k(x) = k(y) \quad \text{si, y solo si} \quad f(x) = f(y).$$

También vimos que toda \vee -congruencia en A produce un cociente de A . Por lo tanto, todo operador cerradura $k : A \rightarrow A$ produce un cociente de A .

Como estas correspondencias son biyecciones, cualquier cociente $f : A \rightarrow B$ es el cociente producido por su núcleo, mientras que todo operador cerradura es el núcleo del cociente que produce.

Ahora veremos que estas correspondencias tienen descripciones más directas.

Si $f : A \rightarrow B$ es un \vee -morfismo, entonces preserva supremos, por lo cual tiene un adjunto derecho $f_* : B \rightarrow A$. (Ver 1.12). Es decir, f_* es un morfismo de copos determinado por la condición

$$a \leq f_*(b) \quad \text{si, y solo si} \quad f(a) \leq b$$

y está dado por la fórmula

$$f_*(b) = \bigvee \{x \in A \mid f(x) \leq b\}.$$

Proposición 2.13 (El operador cerradura de un morfismo). Si $f : A \rightarrow B$ es un \vee -morfismo y $f_* : B \rightarrow A$ es su adjunto derecho, entonces la función $k = f_*f : A \rightarrow A$ es un operador cerradura y, de hecho es el núcleo de f .

Demostración. Primero veremos que $k = f_*f$ es un operador cerradura.

- k es monótona porque f y f_* lo son.
- Usando la fórmula para f_* , tenemos

$$k(a) = f_*f(a) = \bigvee \{x \in A \mid f(x) \leq f(a)\} \geq a,$$

pues $a \in \{x \in A \mid f(x) \leq f(a)\}$. Así, k infla.

- Para ver la idempotencia de k , calculemos $ff_*f : A \rightarrow B$.

$$\begin{aligned} ff_*f(a) &= f(k(a)) \\ &= f\left(\bigvee \{x \in A \mid f(x) \leq f(a)\}\right) \\ &= \bigvee \{f(x) \mid f(x) \leq f(a)\} \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Es decir, $ff_*f = f$. Por lo tanto, $k^2 = f_*ff_*f = f_*f = k$, como se quería

Ahora veamos que $k = f_*f$ cumple la propiedad de ser el núcleo de f ; es decir:

$$k(x) = k(y) \quad \text{si, y solo si} \quad f(x) = f(y).$$

Tomemos $x, y \in A$ tales que $k(x) = k(y)$, esto es, $f_*f(x) = f_*f(y)$, o bien

$$f_*f(x) \leq f_*f(y) \quad \quad \quad f_*f(y) \leq f_*f(x).$$

Como f_* es adjunto derecho de f , esto sucede si, y solo si,

$$ff_*f(x) \leq f(y) \quad \quad \quad ff_*f(y) \leq f(x).$$

Recordando que $ff_*f = f$ (de la demostración de idempotencia), esto es equivalente a

$$f(x) \leq f(y) \quad \quad \quad f(y) \leq f(x),$$

es decir, $f(x) = f(y)$. Esto prueba que $k = f_*f$ es el núcleo de f , como se quería. \square

Esto nos permite probar otra caracterización del núcleo de un \vee -morfismo:

Corolario 2.14. *Dado un \vee -morfismo $f : A \rightarrow B$, el núcleo de f es el operador cerradura $k : A \rightarrow A$ determinado por la condición*

$$x \leq k(a) \quad \text{si, y solo si} \quad f(x) \leq f(a).$$

Demostración. Recordemos que la adjunción nos da la equivalencia

$$x \leq f_*(y) \quad \text{si, y solo si} \quad f(x) \leq y.$$

Tomando $y = f(a)$, tenemos la equivalencia deseada. \square

Ahora veamos el regreso. Dado un operador cerradura j , podemos obtener una descripción sencilla del morfismo cociente asociado. Sabemos que el conjunto de puntos fijos A_j de j es \wedge -cerrado y, por lo tanto, es una retícula completa con el orden inducido de A , aunque los supremos, en general, no coinciden con lo supremos en A .

Por otro lado, notemos que la función $j^* : A \rightarrow A_j$ definida como $j^*(a) = j(a)$ es suprayectiva e induce en A la relación de equivalencia

$$a \sim b \quad \text{si, y solo si} \quad j(a) = j(b),$$

que es, precisamente, la congruencia en A inducida por j . Por lo tanto, se sigue que el orden en A_j inducido por j^* es el único orden que hace que j^* sea un \vee -morfismo.

Lema 2.15. *Sean $j : A \rightarrow A$ un operador cerradura y $j^* : A \rightarrow A_j$ la restricción de j a su imagen. Entonces el orden en A_j heredado de A , que convierte a A_j en una \vee -semirretícula, concide con el orden inducido por j^* que convierte a j^* en un \vee -morfismo.*

Demostración. Gracias al lema 2.2, basta ver que el orden en A_j heredado de A convierte a j^* en un morfismo de semirretículas superiores. Es decir, denotando como \vee_j al supremo calculado en A_j con el orden inducido de A , basta ver que, para cualesquiera $a, b \in A_j$, tenemos $a \vee_j b = j(a \vee b)$.

Por un lado, como j infla, tenemos $a, b \leq a \vee b \leq j(a \vee b)$. Así, $j(a \vee b) \in A_j$ es cota superior de a y b . Además, si $z \in A_j$ está por encima de a y b , tenemos $a \vee b \leq z$, por lo cual $j(a \vee b) \leq j(z) = z$. Se sigue que $j(a \vee b)$ es el supremo de a y b en A_j . \square

Corolario 2.16. Para cualquier subconjunto $Y \subseteq A_j$, se tiene

$$\bigvee_j Y = j(\bigvee Y),$$

donde \bigvee_j denota como al supremo calculado en A_j .

Demostración. Considerando a Y como subconjunto de A , tenemos

$$j(\bigvee Y) = \bigvee_j j(Y) = \bigvee_j Y$$

porque j^* es \vee -morfismo y $j(Y) = Y$. \square

Con toda la información que tenemos, podemos probar el teorema del factor en la categoría de \vee -semiretículas.

Teorema 2.17 (Teorema del factor en SupSLat). Sea A una \vee -semiretícula y k un operador cerradura en A . Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo cuyo núcleo k satisface $j \leq k$, entonces existe un único morfismo $f^\sharp : A_j \rightarrow B$ tal que el siguiente triángulo conmuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow j^* & \nearrow f^\sharp \\ & A_j & \end{array} .$$

2.3. Cocientes en Frm: núcleos

En el caso de \vee -semiretículas, teníamos la correspondencia entre operadores cerradura, conjuntos \wedge -cerrados y \vee -congruencias. Cuando trabajamos en un marco, esta correspondencia se puede refinar más.

Definición 2.18 (Núcleo en un marco). Un núcleo en un marco A es un operador cerradura $j : A \rightarrow A$ que cumple con $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b) \forall a, b \in A$. Al conjunto de núcleos de A lo denotamos como NA . Nótese que, para un morfismo de marcos $f : A \rightarrow B$, el operador cerradura k inducido por f (visto como morfismo de \vee -retículas) también es un núcleo de marcos, ya que

$$\begin{aligned} x \leq k(a \wedge b) &\iff f(x) \leq f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \\ &\iff f(x) \leq f(a), f(x) \leq f(b) \\ &\iff x \leq k(a), x \leq k(b) \\ &\iff x \leq k(a) \wedge k(b) \end{aligned}$$

Definición 2.19 (Conjunto implicativo). Decimos que un subconjunto F de un marco A es un conjunto implicativo si es \wedge -cerrado y $a \in F \implies \forall x \in A, (x \succ a) \in F$.

Lema 2.20. Sea k un operador cerradura en un marco A . Entonces k es un núcleo si y sólo si A_k es implicativo.

Demostración. \Leftarrow

Sean $x, y \in A$ y sea $a = k(x \wedge y)$, y nótese que $a \in A_k$. Así, se cumple que

$$\begin{aligned} x \wedge y \leq a &\iff y \leq (x \succ a) \in A_k \\ &\implies k(y) \leq (x \succ a) \\ &\iff k(y) \wedge x \leq a \end{aligned}$$

Similarmente, $k(x) \wedge y \leq a$, por lo que

$$k(x) \wedge k(y) \leq a$$

También, $a \leq k(x) \wedge k(y)$, ya que k es monótona. Por lo tanto, $k(x \wedge y) = k(x) \wedge k(y)$ y $k \in NA$. \Rightarrow

Sea $y = (x \succ a)$, donde $a \in A_k, x \in A$. Así, $x \wedge y \leq a$, y se cumple que

$$x \wedge k(y) \leq k(x) \wedge k(y) = k(x \wedge y) \leq k(a)$$

por lo que $x \wedge k(y) \leq k(a) = a$, lo que implica que $k(y) \leq (x \succ a) = y$. Por lo tanto, $k(y) = y$ y $y \in A_k$. \square

Recordemos que, si $j \in CA$, entonces A_j es una \vee -semirretícula y $j^* : A \rightarrow A_j$ dada como $j^*(a) = j(a)$ es un morfismo de \vee -semirretículas; esto es:

$$j(\bigvee X) = \bigvee_j X$$

para cualesquiera $j \in NA, X \subset A_j$, donde \bigvee_j denota al supremo en A_j . Nótese que, si $j \in NA$, entonces A_j es una retícula completa que, por el lema anterior, tiene implicación, así que A_j es un marco y j es un morfismo de marcos, ya que j preserva ínfimos. Poniendo juntas estas observaciones, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.21. Sea $j \in CA$. Entonces $j \in NA$ si, y solo si, A_j es un marco (con el orden heredado de A) y $j^* : A \rightarrow A_j$ es un morfismo de marcos suprayectivo.

Definición 2.22. Un cociente de un marco A es un morfismo suprayectivo $f : A \rightarrow B$. Equivalentemente, B es un cociente de A si existe un morfismo suprayectivo $f : A \rightarrow B$.

Ejercicio 3. Para cualquier marco A , existe una biyección entre el conjunto de cocientes de A y NA .

Solución. Defínase $\mathcal{C} = \{\text{Cocientes de } A\}$. Sea $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}$. Así, $F = f_* \circ f \in NA$, y si $g : A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ es tal que $G = g_* \circ g = f_* \circ f = F$, entonces $A_F = A_G$, y $F^* = G^*$, donde $F^* : A \rightarrow A_F$ se define como $F^*(a) = F(a)$. Sabemos entonces que existe un único morfismo $f^\sharp : A_F \rightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow F^* & \nearrow f^\sharp \\ & A_F & \end{array}$$

conmuta, así como g^\sharp que cumple lo mismo para g y A_G . Sin embargo, como $G = F$, $A_F = A_G$ y $F^* = G^*$, entonces $f = F^\sharp \circ F^* = G^\sharp \circ G^* = G$, y por lo tanto la función $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow NA$ definida como $\varphi(f) = F = f_* \circ f$ es inyectiva. También, si $j \in NA$, claramente $j^* : A \rightarrow A_j$ es un cociente de A , con $j_* \circ j = j$. Por lo tanto, φ es una biyección entre \mathcal{C} y NA . ■

El teorema del factor en Frm se deja como ejercicio:

Teorema 2.23. Sean $A \in \text{Frm}$ y $j \in NA$, y considérese $f : A \rightarrow B$ morfismo de marcos con núcleo $k \geq j$. Entonces existe un único morfismo $f^\sharp : A_j \rightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow j^* & \nearrow f^\sharp \\ & A_j & \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Dado que j es núcleo, A_j es un marco, con $A_j = j(A)$, y j^* es un morfismo de marcos suprayectivo. Tomando en cuenta lo anterior, defínase $f^\sharp : A_j \rightarrow B$ como

$$f^\sharp(j(a)) = f(a)$$

Como A_j es un marco, es cerrado bajo supremos e ínfimos arbitrarios, por lo que

- Sean $a, b \in A$ tales que $j(a) = j(b)$. Nótese que como $j \in NA$, entonces $a \leq j(a)$ y $b \leq j(b)$, por lo que a su vez $f(a) \leq f(j(a))$ y $f(b) \leq f(j(b))$. También, dado que $k \geq j$, se tiene que

$$\begin{aligned} j(a) = j(b) &\leq k(b) \text{ de donde, por la definición de } k \\ j(a) &\leq k(b) \iff f(j(a)) \leq f(b) \text{ y} \\ j(b) &\leq k(a) \iff f(j(b)) \leq f(a) \end{aligned}$$

Por lo anterior, se cumplen las desigualdades $f(a) \leq f(b)$ y $f(b) \leq f(a)$, por lo que $f(a) = f(b)$ y f^\sharp está bien definida.

- Para $j(a), j(b) \in A_j$ cualesquiera,

$$\begin{aligned}
 f^\sharp(j(a) \wedge j(b)) &= f^\sharp(j^*(a \wedge b)) \\
 &= f(a \wedge b) \\
 &= f(a) \wedge f(b) \\
 &= f^\sharp(j^*(a)) \wedge f^\sharp(j^*(b))
 \end{aligned}$$

- Sea $X \subset A_j$. Así,

$$\begin{aligned}
 f^\sharp(\bigvee X) &= f^\sharp(\bigvee j^*(X')) \\
 &= f^\sharp(j^*(\bigvee X')) \\
 &= f(\bigvee X') \\
 &= \bigvee f(X') \\
 &= \bigvee f^\sharp(X)
 \end{aligned}$$

Por lo anterior, f^\sharp es morfismo de marcos. Claramente, $f^\sharp \circ j^* = f$, y si $g : A_j \rightarrow B$ es tal que $g \circ j^* = f$, entonces $g(j(a)) = f(a) \forall j(a) \in A_j$, por lo que $g = f^\sharp$. Así, f^\sharp es único.

□

Esto termina de establecer las correspondencias que queríamos.

2.3.1. Algunos núcleos particulares

En cualquier marco A , es fácil encontrar núcleos. Por ejemplo, los lemas 1.21 y 1.22 implican que, para cualquier elemento $a \in A$ de un marco A , la función $((- > a) > a) : A \rightarrow A$ es un núcleo. Además hay, al menos, otras dos maneras de obtener núcleos a partir de a .

Definición 2.24 (Núcleos cerrado, abierto y regular). Sea $a \in A$ fijo, y considérense los operadores siguientes.

- $\mathbf{u}_a : A \rightarrow A$, definido como $\mathbf{u}_a(x) = a \vee x$.
- $\mathbf{v}_a : A \rightarrow A$, definido como $\mathbf{v}_a(x) = (a > x)$.
- $\mathbf{w}_a : A \rightarrow A$, definido como $\mathbf{w}_a(x) = ((x > a) > a)$.

Los operadores \mathbf{u}_a , \mathbf{v}_a y \mathbf{w}_a son llamados los núcleos cerrado, abierto y regular de a , respectivamente.

Proposición 2.25. Los operadores \mathbf{u}_a , \mathbf{v}_a y \mathbf{w}_a son núcleos, para cualquier $a \in A$.

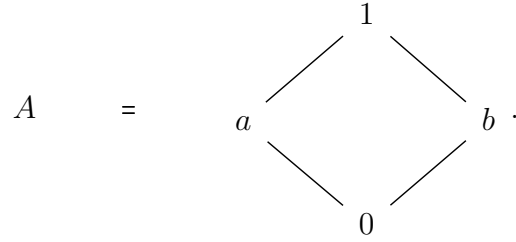
Demostración. En efecto, \mathbf{u}_a infla, es idempotente y monótono. Además, la afirmación de que preserva ínfimos es precisamente la ley distributiva.

terminar

Para \mathbf{v}_a, \dots

Finalmente, la demostración para \mathbf{w}_a está dada por los lemas 1.21 y 1.22. □

Ejemplo 2.26. *Encontremos todos los núcleos del marco*



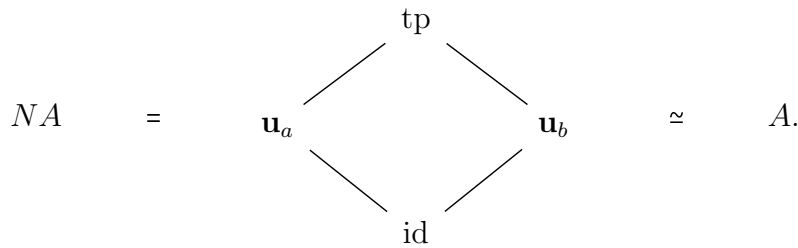
Dado que todos los núcleos mandan el 1 al 1 y también preservan ínfimos, cada núcleo está determinado por sus valores en a y en b , pues $0 = a \wedge b$. Como los núcleos inflan, cada núcleo solo puede mandar a a sí misma o al 1, y b a sí misma o al 1, así que hay, a lo más, 4 núcleos. Los núcleos cerrados, abiertos y regulares asociados a a y a y b son

\mathbf{u}_a	\mathbf{v}_a	\mathbf{w}_a
$a \mapsto a \vee a = a$	$a \mapsto (a > a) = 1$	$a \mapsto ((a > a) > a) = (1 > a) = a$
$b \mapsto a \vee b = 1$	$b \mapsto (a > b) = b$	$b \mapsto ((b > a) > a) = (a > a) = 1$
\mathbf{u}_b	\mathbf{v}_b	\mathbf{w}_b
$a \mapsto b \vee a = 1$	$a \mapsto (b > a) = a$	$a \mapsto ((a > b) > b) = (b > b) = 1$
$b \mapsto b \vee b = b$	$b \mapsto (b > b) = 1$	$b \mapsto ((b > b) > b) = (1 > b) = b$

así,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \mathbf{v}_b = \mathbf{w}_a \\ \mathbf{u}_b &= \mathbf{v}_a = \mathbf{w}_b \end{aligned}$$

son dos núcleos diferentes, mientras que los otros dos núcleos son la identidad $\text{id} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_1$ y la función constante 1, denotada como tp . Notemos que $\text{tp} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_0$. Para ver la estructura ordenada de NA , notemos que \mathbf{u}_a y \mathbf{u}_b no son comparables, por lo cual



Ejemplo 2.27. *Sea S un espacio topológico y consideremos el marco \mathcal{OS} . Para cualesquiera abiertos $A, X \in \mathcal{OS}$, tenemos*

- $\mathbf{u}_A(X) = A \cup X$
- $\mathbf{v}_A(X) = (A > X) = (A' \cup X)^\circ$
- $\mathbf{w}_A(X) = ((X > A) > A) = (((X' \cup A)^\circ)' \cup A)^\circ = (\overline{X \cap A'} \cup A)^\circ$

La razón de la nomenclatura para los núcleos cerrado y abierto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.28. Sea S un espacio topológico y $U \in \mathcal{O}S$ un abierto. Observemos que

$$V \in (\mathcal{O}S)_{\mathbf{u}_U} \iff U \cup V = V \iff U \subset V.$$

Luego,

$$(\mathcal{O}S)_{\mathbf{u}_U} = \{V \in \mathcal{O}S \mid U \subset V\}.$$

Es decir, los puntos fijos de \mathbf{u}_U son los abiertos que contienen a U . Ahora consideremos el cerrado U^c de S y su topología como subespacio:

$$\mathcal{O}U^c = \{W \cap U^c \mid W \in \mathcal{O}S\}.$$

Las funciones $\mathcal{O}U^c \rightleftarrows (\mathcal{O}S)_{\mathbf{u}_U}$ dadas como

$$\begin{aligned} V \cap U^c &\mapsto (V \cap U^c) \cup U = V \cup U \\ W \cap U^c &\leftarrow W \end{aligned}$$

constituyen un isomorfismo de marcos. En efecto, para cualesquiera $V \cap U^c \in \mathcal{O}U^c$ y $W \in (\mathcal{O}S)_{\mathbf{u}_U}$, tenemos

$$\begin{aligned} ((V \cap U^c) \cup U) \cap U^c &= (V \cup U) \cap U^c \\ &= V \cap U^c, \\ (W \cap U^c) \cup U &= W \cup U \\ &= W. \end{aligned}$$

Como estas funciones son monótonas, son un isomorfismo de copos y, por lo tanto, un isomorfismo de marcos.

Similarmente, \mathbf{v}_U se relaciona con la topología de subespacio de U :

$$\mathcal{O}U = \{V \in \mathcal{O}S : V \subseteq U\}.$$

Las funciones dadas por $\mathcal{O}U \rightleftarrows (\mathcal{O}S)_{\mathbf{v}_U}$

$$\begin{aligned} V &\mapsto (U \times V) \\ W \cap U &\leftarrow W. \end{aligned}$$

son un isomorfismo de marcos. En efecto, para cualesquiera $V \in \mathcal{O}U$ y $W \in (\mathcal{O}S)_{\mathbf{v}_U}$, tenemos

$$\begin{aligned} (U \times V) \cap U &= U \cap V \\ &= V \\ (U \times (W \cap U)) &= (U \times W) \cap (U \times U) \\ &= U \times W \\ &= W \end{aligned}$$

Como estas funciones son monótonas, son un isomorfismo de copos y, por lo tanto, un isomorfismo de marcos.

Ejemplo 2.29. En general, dado un marco A y un elemento $a \in A$, los mismos argumentos del ejemplo anterior demuestran que

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{u}_a} &= \{x \in A \mid a \leq x\} = [a, 1] \\ A_{\mathbf{v}_a} &\simeq \{x \in A \mid x \leq a\} = [0, a], \end{aligned}$$

donde el último isomorfismo está dado como $y \mapsto y \wedge a$ y $(a > x) \mapsto x$.

Por otro lado, los \mathbf{w}_a se llaman núcleos regulares por el caso $a = 0$ de un núcleo espacial:

Ejemplo 2.30. Considerando $\mathbf{w}_\emptyset : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}S$, definido como

$$\mathbf{w}_\emptyset(U) = ((U > \emptyset) > \emptyset) = (\overline{U})^\circ$$

se tiene que los puntos fijos son

$$(\mathcal{O}S)_{\mathbf{w}_\emptyset} = \{U \in \mathcal{O}S : (\overline{U})^\circ = U\} = \{\text{Abiertos regulares de } S\}.$$

Ahora estudiaremos más sobre los núcleos regulares de un marco. El ejemplo anterior nos mostró que, en un espacio topológico S , los puntos fijos $(\mathcal{O}S)_{\mathbf{w}_\emptyset}$ son el marco de abiertos regulares de S . Del siguiente lema se sigue, en particular, que $(\mathcal{O}S)_{\mathbf{w}_\emptyset}$ es un álgebra booleana completa.

Lema 2.31. Si $a \in A \in \text{Frm}$, entonces $A_{\mathbf{w}_a} \in \text{CBA}$.

Demostración.

$$\mathbf{w}_a(0) = ((0 > a) > a) = (1 > a) = a$$

por lo tanto, $a \in A_{\mathbf{w}_a}$ es el menor elemento de $A_{\mathbf{w}_a}$. Mostraremos que todo $x \in A_{\mathbf{w}_a}$ es complementado. Dado $x \in A_{\mathbf{w}_a}$, considérese $y = (x > a)$. Por un lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a(y) &= \mathbf{w}_a(x > a) \\ &= (\mathbf{w}_a(x) > a) \\ &= (x > a) \\ &= y \end{aligned}$$

por lo que $y \in A_{\mathbf{w}_a}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x \wedge (x > a) \\ &= x \wedge a \\ &= a \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a(x \vee y) &= ((x \vee y) > a) > a \\ &= (((x > a) \wedge (y > a)) > a) \\ &= ((y \wedge (y > a)) > a) \\ &= ((y \wedge a) > a) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Luego, y es el complemento de x en $A_{\mathbf{w}_a}$. Se sigue que $A_{\mathbf{w}_a} \in \text{CBA}$. □

Un caso particular del resultado anterior es cuando $a = 0$. En este caso, el álgebra booleana completa $A_{\mathbf{w}_0}$ se denota como $A_{\neg, \neg}$. Como se mencionó antes del lema, en el caso espacial, esto nos dice que los abiertos regulares de un espacio topológico forman un álgebra booleana completa.

Lema 2.32. *Para cualquier núcleo $j \in NA$ se tiene la equivalencia*

$$j(0) = 0 \quad \text{si, y solo si} \quad j \leq \mathbf{w}_0.$$

(C.f. con el lema 3.25). Si un núcleo $j \in NA$ cumple $j \leq \mathbf{w}_0$, decimos que j es un núcleo denso. Así, \mathbf{w}_0 es el mayor núcleo denso en A .

Demostración. Supongamos que $j \leq \mathbf{w}_0$. Entonces $0 \leq j(0) \leq \mathbf{w}_0(0) = ((0 > 0) > 0) = 0$. Así, $j(0) = 0$.

Supongamos ahora que $j(0) = 0$. Dado cualquier $x \in A$, queremos mostrar que $j(x) \leq \mathbf{w}_0 x = ((x > 0) > 0)$ o, equivalentemente, que $j(x) \wedge (x > 0) \leq 0$. Como j infla, tenemos

$$\begin{aligned} j(x) \wedge (x > 0) &\leq j(x) \wedge j(x > 0) \\ &= j(x \wedge (x > 0)) \\ &= j(x \wedge 0) \\ &= j(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

que es lo que se quería. □

El lema 2.31 nos dice que los núcleos regulares producen cocientes booleanos. Ahora tenemos el recíproco.

Teorema 2.33. *Sean A un marco y $j \in NA$. Si el cociente A_j es booleano, entonces $j = \mathbf{w}_a$, donde $a = j(0)$. Así, los cocientes booleanos de A están dados, precisamente, por los núcleos regulares \mathbf{w}_a .*

Demostración. Sea $x \in A$. Como B es booleano, $f(x)$ es complementado. Basta mostrar que $f(x > a)$ es el complemento $\neg f(x)$ de $f(x)$, ya que, en este caso, tenemos

$$\begin{aligned} y \leq j(x) &\iff f(y) \leq f(x) \\ &\iff f(y) \wedge f(x > a) \leq 0 && \text{caballo de batalla} \\ &\iff f(y \wedge (x > a)) \leq 0 = f(0) \\ &\iff y \wedge (x > a) \leq j(0) = a \\ &\iff y \leq ((x > a) > a) = \mathbf{w}_a(x) \end{aligned}$$

y, así, $j(x) = \mathbf{w}_a(x)$.

Ahora bien, como $a = j(0) = f_*(f(0))$, se sigue que $f(a) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) \wedge f(x > a) &= f(x \wedge (x > a)) \\ &= f(x \wedge a) \\ &\leq f(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, como f es suprayectiva, podemos tomar $\tilde{x} \in A$ con $f(\tilde{x}) = \neg f(x)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x \wedge \tilde{x}) &= f(x) \wedge \neg f(x) \\ &= 0 \\ &= f(0), \end{aligned}$$

lo cual sucede si, y solo si, $x \wedge \tilde{x} \leq j(0) = a$. Esto es, $\tilde{x} \leq (x > a)$, así que $f(\tilde{x}) \leq f(x > a)$. Aplicando supremo con $f(x)$, tenemos

$$1 \leq f(x) \vee f(x > a).$$

Concluimos que $f(x > a) = \neg f(x)$, lo cual finaliza la prueba. \square

Teorema 2.34. *Sea A un marco. Si A es un álgebra booleana completa y $j \in NA$, entonces $j = \mathbf{u}_a$, donde $a = j(0)$.*

Dado que A es booleano, entonces A_j también lo es, así que el resultado anterior también nos da $j = \mathbf{w}_a$.

Demostración. Dado $x \in A$, debemos mostrar que $j(x) = \mathbf{u}_a(x) = x \vee a$. Por un lado, tenemos $0 \leq x$, así que $a = j(0) \leq j(x)$. Como $x \leq j(x)$, se sigue que $x \vee a \leq j(x)$. Por nuestro caballo de batalla, la otra desigualdad ($j(x) \leq x \vee a$) es equivalente a $j(x) \wedge \neg x \leq a$ (ya que x es complementado), pero esto es sencillo:

$$\begin{aligned} j(x) \wedge \neg x &\leq j(x) \wedge j(\neg x) \\ &= j(x \wedge \neg x) \\ &= j(0) \\ &= a. \end{aligned}$$

\square

2.3.2. Núcleos espacialmente inducidos en una topología

Sea $\varphi : T \rightarrow S$ un morfismo de espacios topológicos. El morfismo de marcos $\varphi^* = \mathcal{O}\varphi : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}T$ tiene adjunto derecho dado por

$$\varphi_*(W) = \bigcup \{U \in \mathcal{O}S \mid \varphi^*(U) \leq W\}.$$

En el ejemplo 1.30, vimos que $\varphi_* : \mathcal{O}T \rightarrow \mathcal{O}S$ se puede calcular como

$$\varphi_*(W) = \overline{\varphi[W']}^\circ = (\varphi[W']')^\circ.$$

De todos modos, aquí repetimos una demostración alternativa.

Demostración. Recordemos que tenemos la adjunción $\varphi[-] \dashv \varphi^{-1}$ entre la imagen directa $\varphi[-] : \mathcal{P}S \rightarrow \mathcal{P}T$ y la imagen inversa $\varphi^{-1} : \mathcal{P}T \rightarrow \mathcal{P}S$. Sea $U \in \mathcal{O}S$. Dado que $\varphi^* : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}T$ es la restricción de $\varphi^{-1} : \mathcal{P}S \rightarrow \mathcal{P}T$, para todo $W \in \mathcal{O}T$, tenemos

$$\begin{aligned} \varphi^*(U) \leq W &\iff \varphi^{-1}(U) \leq W \\ &\iff W' \leq \varphi^{-1}(U)' \\ &\iff W' \leq \varphi^{-1}(U') \\ &\iff \varphi[W'] \leq U' \\ &\iff U \leq \varphi[W']' \\ &\iff U \leq (\varphi[W']')^\circ = \overline{\varphi[W']}', \end{aligned}$$

como se quería. \square

Teorema 2.35. Si $\varphi : T \rightarrow S$ es un morfismo de espacios topológicos, el núcleo $k : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}S$ del morfismo de marcos $\varphi^* : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}T$ tiene la descripción

$$k(U) = (\varphi[T]' \cup U)^\circ.$$

Demostración. Sabemos que $k = \varphi_*\varphi^*$. Observando que $\varphi[\varphi^*(U)] = U \cap \varphi[T]$, tenemos

$$\begin{aligned} U \leq k(V) &\iff U \leq \varphi_*(\varphi^*(V)) \\ &\iff \varphi^*(U) \leq \varphi^*(V) \\ &\iff \varphi[\varphi^*(U)] \leq V \\ &\iff U \cap \varphi[T] \leq V \\ &\iff U \leq \varphi[T]' \cup V && \text{caballo de batalla en } \mathcal{P}S \\ &\iff U \leq (\varphi[T]' \cup V)^\circ. \end{aligned}$$

Luego, $k(V) = (\varphi[T]' \cup V)^\circ$. \square

Sea S un espacio topológico. Para cualquier subconjunto $E \subset S$, definimos el operador $[E] : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}S$ como $[E](U) = (E \cup U)^\circ$. Nótese que, si $U \in \mathcal{O}S$, entonces $[U] = \mathbf{u}_U$ y $[U'] = \mathbf{v}_U$. Además, dada una función continua $\varphi : T \rightarrow S$, el teorema anterior dice que el núcleo $k : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}S$ de $\varphi^* : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}T$ es $k = [\varphi[T]']$. En general, $[E]$ siempre es un núcleo.

Proposición 2.36. Si S es un espacio topológico y $E \subseteq S$ un subconjunto, entonces $[E] : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}S$ es un núcleo.

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{O}S$. Primero, $[E]$ es inflacionario, pues

$$\begin{aligned} [E](U) &= (E \cup U)^\circ \\ &\geq (U)^\circ \\ &= U. \end{aligned}$$

Además, es idempotente: por un lado, por el punto anterior tenemos $[E](U) \leq [E]([E](U))$, mientras que

$$\begin{aligned} [E]([E](U)) &= (E \cup (E \cup U)^\circ)^\circ \\ &\leq (E \cup E \cup U)^\circ \\ &= (E \cup U)^\circ \\ &= [E](U). \end{aligned}$$

Además, preserva ínfimos binarios, pues

$$\begin{aligned} [E](U \cap V) &= (E \cup (U \cap V)^\circ)^\circ \\ &= ((E \cup U) \cap (E \cap V))^\circ \\ &= ((E \cup U)^\circ \cap (E \cap V))^\circ \\ &= [E](U) \cap [E](V). \end{aligned}$$

Finalmente, $[E]$ es monótono, ya que, si $U \leq V$, entonces

$$\begin{aligned} [E](U) &= (E \cup U)^\circ \\ &\leq (E \cup V)^\circ \\ &= [E](V). \end{aligned}$$

□

Definición 2.37. Sea S un espacio topológico. Un núcleo $j \in NOS$ es espacialmente inducido si es de la forma $j = [E]$ para algún $E \subseteq S$.

Parte II

El ensamble

Capítulo 3

Derivadas, estables, prenúcleos y núcleos

En el capítulo anterior definimos los núcleos de un marco y vimos éstos están en correspondencia con los cocientes del marco. Ahora veremos que los núcleos de un marco tienen una importancia central en la estructura del marco base. El teorema principal es que el conjunto NA de los núcleos de un marco A es, de nuevo, un marco, llamado el ensamble de A y, de hecho A es un submarco de NA .

Además de los núcleos, arriba definimos los operadores cerradura y vimos que los núcleos son algunos operadores cerradura. En nuestro estudio sistemático del ensamble, usaremos otras familias de operadores monótonos.

3.1. Derivadas, derivadas estables, prenúcleos, operadores cerradura y núcleos

Definición 3.1 (Derivadas). *Una inflación o derivada en A es una función $f : A \rightarrow A$ que es monótona e infla. Es decir:*

- $a \leq b$ implica $f(a) \leq f(b)$.
- $a \leq f(a)$.

Usaremos la notación DA para el conjunto de todas las derivadas en A .

Notemos que un operador cerradura (definición 2.8) es una derivada idempotente, y recordemos que usamos la notación CA para el conjunto de los operadores cerradura en A .

Definición 3.2 (Derivadas estables). *Una derivada $f \in DA$ es estable si*

$$f(x) \wedge y \leq f(x \wedge y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Denotamos como SA al conjunto de derivadas estables en A .

Definición 3.3 (Prenúcleos). *Un prenúcleo sobre A es una derivada $f \in DA$ tal que*

$$f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y).$$

Notemos que la otra desigualdad se cumple para cualquier función monótona, de modo que los prenúcleos separan ínfimos binarios. Usaremos la notación PA para referirnos al conjunto de prenúcleos de A . Además, cualquier prenúcleo es estable, ya que $y \leq f(y)$ implica

$$\begin{aligned} f(x) \wedge y &\leq f(x) \wedge f(y) \\ &\leq f(x \wedge y) \end{aligned} \quad \text{pues } f \in PA$$

En resumen tenemos las contenciones

$$\begin{aligned} NA &\subseteq PA \subseteq SA \subseteq DA \\ NA &\subseteq CA \subseteq DA. \end{aligned}$$

También es claro que $NA = PA \cap CA$. Es decir, un núcleo es exactamente un prenúcleo idempotente. De hecho, tenemos $NA = SA \cap CA$. Estos conjuntos son, en sí mismos, conjuntos parcialmente ordenados, donde el orden está dado puntualmente. Esto es, dadas dos funciones $f, g : A \rightarrow A$, decimos que $f \leq g$ si, y solo si,

$$\forall x \in A, f(x) \leq g(x).$$

Notemos que las derivadas DA , las estables SA y los prenúcleos PA son cerrados bajo composición. Es decir:

- si $f, g \in DA$, entonces $fg, gf \in DA$,
- si $f, g \in SA$, entonces $fg, gf \in SA$,
- si $f, g \in PA$, entonces $fg, gf \in PA$.

Por otro lado, las cerraduras CA y los núcleos NA no lo son, en general.

Veremos que cada uno de estos conjuntos tiene más estructura que la de conjunto parcialmente ordenado.

3.2. Ínfimos en familias de derivadas

Sea $J \subseteq DA$. Definimos la función $\bigwedge J : A \rightarrow A$ como

$$(\bigwedge J)(a) = \bigwedge \{f(a) \mid f \in J\}.$$

Afirmamos que $\bigwedge J$ es una derivada y, de hecho, es el ínfimo de J en DA :

- Si $a \leq b \in A$, entonces $f(a) \leq f(b)$ para cada $f \in J$. Luego, cada elemento de $\{f(b) \mid f \in J\}$ está acotado inferiormente por un elemento de $\{f(a) \mid f \in J\}$, por lo cual

$$\bigwedge \{f(a) \mid f \in J\} \leq \bigwedge \{f(b) \mid f \in J\}.$$

- Similarmente $\bigwedge J$ infla.
- Si $h \in DA$ es una derivada que está por debajo de cada elemento $f \in J$. Esto es, para cualesquiera $a \in A$ y $f \in J$ se tiene $h(a) \leq f(a)$. Luego, $h(a)$ es cota inferior de $\{f(a) \mid f \in J\}$, por lo cual $h(a) \leq (\bigwedge J)(a)$.

De hecho, se puede probar lo siguiente:

Ejercicio 4.

1. si $J \subseteq SA$, entonces $\bigwedge J \in SA$,
2. si $J \subseteq PA$, entonces $\bigwedge J \in PA$,
3. si $J \subseteq CA$, entonces $\bigwedge J \in CA$,
4. si $J \subseteq NA$, entonces $\bigwedge J \in NA$.

Solución. 1. Sean $x, y \in A$. Así,

$$\begin{aligned} \bigwedge J(x) \wedge y &= \bigwedge \{j(x) : j \in J\} \wedge y \\ &\leq j(x) \wedge y \\ &\leq j(x \wedge y) \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

Por lo que $\bigwedge J(x) \wedge y$ es una cota inferior del conjunto $\{j(x \wedge y) : j \in J\}$. Así, como $\bigwedge J(x \wedge y)$ es el ínfimo de $\{j(x \wedge y) : j \in J\}$, se cumple que $\bigwedge J(x) \wedge y \leq \bigwedge J(x \wedge y)$, y $\bigwedge J \in SA$.

2. Sean $x, y \in A$.

$$\begin{aligned} \bigwedge J(x) \wedge \bigwedge J(y) &= \bigwedge \{j(x) : j \in J\} \wedge \bigwedge \{j(y) : j \in J\} \\ &\leq j(x) \wedge j(y) \\ &\leq j(x \wedge y) \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

por lo que $\bigwedge J(x) \wedge \bigwedge J(y)$ es una cota inferior del conjunto $\{j(x \wedge y) : j \in J\}$. Así, se cumple que $\bigwedge J(x) \wedge \bigwedge J(y) \leq \bigwedge J(x \wedge y)$, y entonces $\bigwedge J \in PA$.

3. Nótese que si $j \in J$, j infla, y se cumple que

$$f(x) \leq j(f(x)) \quad \forall j, f \in J$$

Por lo tanto,

$$\bigwedge J(x) \leq f(\bigwedge J(x)) \quad \forall x \in A, f \in J$$

y $\bigwedge J$ es cota inferior del conjunto $\{f(\bigwedge J(x)) : f \in J\}$.

Ahora bien, sea $f \in DA$ tal que $f(x) \leq j(\bigwedge J(x)) \quad \forall x \in A, j \in J$. Entonces, como $j(j(x)) = j(x) \quad \forall j \in J$, ocurre que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq j(x) \quad \forall j \in J \\ \Rightarrow f(x) &\leq \bigwedge J(x) \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

Por lo anterior, $\bigwedge J(\bigwedge J(x)) = \bigwedge J(x)$, y $\bigwedge J \in CA$.

4. sean $x, y \in A$. Así,

$$\begin{aligned}\bigwedge J(x \wedge y) &= \bigwedge \{j(x \wedge y) : j \in J\} \\ &= \bigwedge \{j(x) \wedge j(y) : j \in J\} \\ &= \left(\bigwedge \{j(x) : j \in J\} \right) \wedge \left(\bigwedge \{j(y) : j \in J\} \right) \\ &= \bigwedge J(x) \wedge \bigwedge J(y)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigwedge J \in NA$

■

3.3. Supremos en familias de derivadas

Supremos de derivadas (DA)

Definición 3.4. Si $J \subseteq DA$ es un conjunto de derivadas, definimos el supremo puntual $\dot{\bigvee} J : A \rightarrow A$ de J como la función dada por

$$(\dot{\bigvee} J)(a) = \bigvee \{f(a) \mid f \in J\}$$

para todo $a \in A$.

Notemos que, si $J = \emptyset \subseteq DA$, entonces

$$\begin{aligned}(\dot{\bigvee} \emptyset)(a) &= \bigvee \{f(a) \mid f \in \emptyset\} \\ &= \bigvee \emptyset \\ &= 0 \in A\end{aligned}$$

lo cual ya no es una derivada (a menos que A sea trivial). Sin embargo, si $J \neq \emptyset$ es una familia de derivadas, entonces $\dot{\bigvee} J$ es una derivada y es el supremo de J en DA . Es decir, los supremos (no vacíos) en DA se calculan puntualmente.

Observemos que, en DA , el menor elemento es la identidad $\text{id} : A \rightarrow A$ y el mayor elemento es $\text{tp} : A \rightarrow A$ dada como $\text{tp}(a) = 1$.

Supremos de estables (SA)

Supongamos que J es un conjunto no vacío de derivadas estables ($\emptyset \neq J \subseteq SA$). Entonces, para cualesquiera $a, b \in A$, la derivada $\dot{\bigvee} J$ satisface

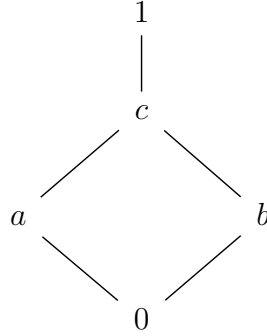
$$\begin{aligned}(\dot{\bigvee} J)(a) \wedge b &= \bigvee \{f(a) \mid f \in J\} \wedge b \\ &= \bigvee \{f(a) \wedge b \mid f \in J\} && \text{por la ley distributiva de marcos} \\ &\leq \bigvee \{f(a \wedge b) \mid f \in J\} && \text{cada } f \in SA \\ &= (\dot{\bigvee} J)(a \wedge b),\end{aligned}$$

de modo que $\dot{\bigvee} J \in SA$. Es decir, los supremos (no vacíos) en SA se calculan puntualmente.

Supremos de prenúcleos (PA)

En contraste con lo que sucede con derivadas y estables, el supremo de una familia de prenúcleos no se calcula puntualmente, en general.

Ejemplo 3.5. *Tomemos el marco A dado como*



Después de algunos cálculos obtenemos la siguiente tabla de los valores de los núcleos abiertos, cerrados y regulares. Nótese que, como todo núcleo j fija al 1 y preserva ínfimos, es suficiente conocer los valores de j en a, c y b (ya que $0 = a \wedge b$).

j	$j(a)$	$j(c)$	$j(b)$
$\mathbf{v}_a = \mathbf{w}_b$	1	1	b
$\mathbf{v}_b = \mathbf{w}_a$	a	1	1
\mathbf{v}_c	a	1	b
\mathbf{u}_a	a	c	c
\mathbf{u}_b	c	c	b
$\mathbf{u}_c = \mathbf{w}_c$	c	c	c

En particular, todos estos son prenúcleos. Sin embargo, afirmamos que $\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b$ no es prenúcleo. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(a \wedge b) &= (\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(0) \\
 &= \mathbf{v}_a(0) \vee \mathbf{v}_b(0) \\
 &= b \vee a \\
 &= c, \\
 (\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(a) \wedge (\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(b) &= (\mathbf{v}_a(a) \vee \mathbf{v}_b(a)) \wedge (\mathbf{v}_a(b) \vee \mathbf{v}_b(b)) \\
 &= (1 \vee a) \wedge (b \vee 1) \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

así que $\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b$ no es un prenúcleo.

Sin embargo, hasta cierto punto, esto se puede enmendar: aunque el supremo puntual de un subconjunto arbitrario $J \subseteq PA$ puede no ser prenúcleo, la situación es mejor cuando J es dirigido.

Lema 3.6. Si $J \subseteq PA$ es un conjunto dirigido, entonces la derivada estable $\dot{\bigvee} J$ sí es un prenúcleo. Recordemos que un conjunto J es dirigido si todo subconjunto finito $X \subseteq J$ tiene una cota superior en J . En particular, $J \neq \emptyset$, pues $\emptyset \subseteq J$ tiene una cota superior en J .

Demostración. Si J es dirigido, entonces $\dot{\bigvee} J$ es, en efecto, una derivada, pues $J \neq \emptyset$. Además,

$$\begin{aligned} (\dot{\bigvee} J)(a) \wedge (\dot{\bigvee} J)(b) &= \bigvee \{f(a) \wedge g(b) \mid f, g \in J\} && \text{ley distributiva de marcos} \\ &= \bigvee \{h(a) \wedge h(b) \mid h \in J\} && J \text{ es dirigido} \\ &\leq \bigvee \{h(a \wedge b) \mid h \in J\} && \text{cada } h \in J \text{ es prenúcleo} \\ &= (\dot{\bigvee} J)(a \wedge b), \end{aligned}$$

por lo cual $\dot{\bigvee} J \in PA$. □

Más sobre conjuntos dirigidos

Tomemos dos derivadas (estables, prenúcleos) f y g en A . Como g infla, para todo $a \in A$ tenemos $a \leq g(a)$ y, aplicando f , se sigue que $f(a) \leq f(g(a))$. Como f también infla, tenemos $g(a) \leq f(g(a))$. Luego, $f(a) \vee g(a) \leq f(g(a))$. Esto es:

$$f \dot{\bigvee} g \leq fg.$$

Análogamente, obtenemos $f \dot{\bigvee} g \leq gf$, por lo cual

$$f \dot{\bigvee} g \leq fg \wedge gf.$$

En particular, si un conjunto J de derivadas (estables, prenúcleos) es cerrado bajo composición, entonces J es dirigido.

3.4. El teorema fundamental de la teoría de marcos

Las derivadas estables forman un marco

Ya vimos que, en DA y en SA , todos los ínfimos y los supremos no vacíos se calculan puntualmente, mientras que $\bigvee \emptyset = \text{id}$.

Ahora veremos cómo interactúan los ínfimos finitos y los supremos en SA . Tomemos un subconjunto $J \subseteq SA$. Si $J = \emptyset$, entonces la igualdad

$$f \wedge \bigvee J = \bigvee \{f \wedge g \mid g \in J\}$$

se cumple, pues ambos lados son $\text{id} : A \rightarrow A$. Por otro lado, si $J \neq \emptyset$, entonces

para todo $x \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}
 (f \wedge \dot{\bigvee} J)(x) &= f(x) \wedge (\dot{\bigvee} J)(x) \\
 &= f(x) \wedge \bigvee \{g(x) \mid g \in J\} \\
 &= \bigvee \{f(x) \wedge g(x) \mid g \in J\} && \text{ley distributiva de marcos} \\
 &= \bigvee \{(f \wedge g)(x) \mid g \in J\} \\
 &= (\dot{\bigvee} \{f \wedge g \mid g \in J\})(x).
 \end{aligned}$$

de modo que $f \wedge \bigvee J = \bigvee \{f \wedge g \mid g \in J\}$. Esto muestra que SA es un marco. En particular, SA tiene una implicación.

Los núcleos forman un marco

La afirmación es que NA es un subconjunto implicativo de SA . Es decir: NA es cerrado bajo ínfimo (lo cual ya sabemos) y, para cualquier estable $f \in SA$ y cualquier núcleo $k \in NA$, la derivada estable $(f > k)$ es un núcleo. Como toda derivada estable e idempotente es núcleo, basta demostrar que $(f > k)$ es idempotente.

Sea $G = \{g \in SA \mid f \wedge g \leq k\}$. Como G no es vacío (por ejemplo, $\text{id} \in G$), tenemos

$$(f > k) = \dot{\bigvee} \{g \in SA \mid f \wedge g \leq k\}.$$

Primero mostraremos que G es cerrado bajo composiciones. Observemos que, para cualesquiera $g, h \in G$ y $x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
 (f \wedge gh)(x) &= f(x) \wedge g(h(x)) \\
 &= f(x) \wedge f(x) \wedge g(h(x)) \\
 &\leq f(x) \wedge g(f(x) \wedge h(x)) && g \in SA \\
 &\leq f(x) \wedge g(k(x)) && f \wedge h \leq k, \text{ pues } h \in G \\
 &\leq f(k(x)) \wedge g(k(x)) \\
 &\leq k(k(x)) && f \wedge g \leq k, \text{ pues } g \in G \\
 &= k(x).
 \end{aligned}$$

Esto prueba que $f \wedge gh \leq k$ y, así, $gh \in G$, como se quería.

Ahora mostraremos que $j = (f > k) \in G$. En efecto, para todo $x \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}
 (f \wedge j)(x) &= f(x) \wedge (\dot{\bigvee} G)(x) \\
 &= f(x) \wedge \bigvee \{g(x) \mid g \in G\} \\
 &= \bigvee \{f(x) \wedge g(x) \mid g \in G\} \\
 &= k(x),
 \end{aligned}$$

como se quería. Luego, $j^2 = jj \in G$, así que $j^2 \leq \dot{\bigvee} G = j$. Concluimos que $j^2 = j$. Como j es una derivada estable e idempotente, se sigue que es un núcleo.

Esto muestra lo que queríamos probar: que NA es un subconjunto implicativo de SA . Una consecuencia inmediata es

Teorema 3.7 (Isbell-Simmons-Johnstone). *Para cada marco A , el ensamble NA es un marco.*

Demostración. NA es \wedge -cerrado y, $(j \in k) \in NA$ para cualesquiera $k \in SA$, $k \in NA$. Es decir, NA es un subconjunto implicativo del marco SA , por lo cual es un marco. \square

Sin embargo, el hecho de que NA sea un subconjunto implicativo de SA nos dice aún más. Todo subconjunto implicativo de un marco es un cociente de éste, así que NA es de la forma $NA = (SA)_j$ para algún núcleo $j : SA \rightarrow SA$. La pregunta es, ¿qué núcleo?

3.5. Las iteraciones de una derivada

Iteraciones en DA .

Denotaremos como Ord a la clase de ordinales y, para cada ordinal, definimos

$$\begin{aligned} f^0 &= \text{id} \\ f^{\alpha+1} &= f f^\alpha \\ f^\lambda &= \bigvee \{ f^\alpha \mid \alpha < \lambda \} \end{aligned} \quad \text{si } \lambda \text{ es límite.}$$

De este modo, obtenemos una cadena de derivadas

$$f^0 \leq f^1 \leq f^2 \leq \dots \leq f^\alpha \leq f^{\alpha+1} \leq \dots$$

Como Ord no es cardinable, la cadena $(f^\alpha \mid \alpha \in \text{Ord})$ se detiene, por fuerza, en algún ordinal γ , es decir: $f^{\gamma+1} = f^\gamma$. Además, dado que la clase de ordinales es bien ordenada, existe un primer ordinal $\infty \in \text{Ord}$ tal que $f^\infty = f^{\infty+1}$. Dado que $f^{\infty+1} = f^\infty$, se sigue que $f^\alpha f^\infty = f^\infty$ para todo $\alpha \in \text{Ord}$, por inducción en α . En particular, f^∞ es idempotente, así que es un operador cerradura en A . Más aún, f^∞ es el menor operador cerradura en A que está por encima de f . Para ver esto, mostraremos que, si k es un operador cerradura que está por encima de f , entonces también está por encima de toda la cadena de iteraciones de f . Tomemos $k \in CA$ con $f \leq k$ y hagamos inducción.

- Para $\alpha = 0$, tenemos $f^0 = \text{id} \leq k$.
- Supongamos que $f^\alpha \leq k$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{\alpha+1} &= f f^\alpha \\ &\leq k k \\ &= k. \end{aligned}$$

- Finalmente, si λ es un ordinal límite, supongamos que $f^\alpha \leq k$ para todo $\alpha < \lambda$. Entonces $f^\lambda = \bigvee \{ f^\alpha \mid \alpha < \lambda \} \leq k$.

Como esto es válido para todo ordinal, en particular tenemos $f^\infty \leq k$. Luego, f^∞ es el menor operador cerradura que está por arriba de f .

CA como un conjunto fijo

Luego, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.8. *La construcción $(-)^{\infty}$ es un operador cerradura en DA cuyos puntos fijos son los operadores cerradura en A :*

$$\begin{aligned} (-)^{\infty} &\in CDA \\ (DA)_{\infty} &= CA. \end{aligned}$$

Demostración. Claramente, $f \leq f^{\infty}$, así que $(-)^{\infty}$ infla. Como f^{∞} es idempotente, tenemos $(f^{\infty})^{\alpha} = f^{\infty}$ para todo ordinal α . En particular, $(f^{\infty})^{\infty} = f^{\infty}$, así que $(-)^{\infty}$ es idempotente. Finalmente, si $f \leq g$ son derivadas, veamos que $f^{\alpha} \leq g^{\alpha}$ para todo ordinal α .

- El caso $\alpha = 0$ es obvio.
- Supongamos que $f^{\alpha} \leq g^{\alpha}$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{\alpha+1} &= f f^{\alpha} \\ &\leq g g^{\alpha} \\ &= g^{\alpha+1} \end{aligned}$$

- Supongamos que λ es un ordinal límite y que $f^{\alpha} \leq g^{\alpha}$ para todo $\alpha < \lambda$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{\lambda}(x) &= \bigvee \{f^{\alpha}(x) \mid \alpha < \lambda\} \\ &\leq \bigvee \{g^{\alpha}(x) \mid \alpha < \lambda\} \\ &= g^{\lambda}(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in A$, así que $f^{\lambda} \leq g^{\lambda}$.

En particular, $f^{\infty} \leq g^{\infty}$, así que $(-)^{\infty}$ es monótono. Finalmente, la igualdad $(DA)_{\infty} = CA$ se obtiene al observar que todo operador cerradura es un punto fijo de $(-)^{\infty}$. \square

Iteraciones en SA .

Lema 3.9. *Si f es un prenúcleo en A , entonces cada iteración f^{α} es un prenúcleo, f^{∞} es un núcleo y, más aún, f^{∞} es el menor núcleo por encima de A .*

Demostración. Sea $f \in PA$. Mostraremos, usando inducción, que $f^{\alpha} \in PA$ para cada ordinal α .

- Si $\alpha = 0$, entonces $f^0 = \text{id} \in PA$.
- Supongamos que f^{α} es prenúcleo. Como los prenúcleos son cerrados bajo composición, $f^{\alpha+1} = f f^{\alpha}$ es prenúcleo.

- Si λ es un ordinal límite, supongamos que $f^\alpha \in PA$ para cada ordinal $\alpha < \lambda$. Recordemos que $f^\lambda = \dot{\bigvee}\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Hay que probar que f^λ es prenúcleo. Para cada $x, y \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}
f^\lambda(x) \wedge f^\lambda(y) &= \bigvee\{f^\alpha(x) \wedge f^\beta(y) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && \text{ley distributiva para marcos} \\
&= \bigvee\{f^\gamma(x) \wedge f^\gamma(y) \mid \gamma < \lambda\} \\
&\leq \bigvee\{f^\gamma(x \wedge y) \mid \gamma < \lambda\} && f^\gamma \in PA \text{ por hipótesis} \\
&= f^\lambda(x \wedge y).
\end{aligned}$$

En particular, f^∞ es un prenúcleo y, como también es idempotente, se sigue que f^∞ es un núcleo.

Finalmente, recordemos que f^∞ es el menor operador cerradura por encima de f . Luego, para cualquier núcleo $j \in NA$ que esté por encima de f , se tiene $f^\infty \leq j$, así que f^∞ es el menor núcleo por encima del prenúcleo f . \square

Este resultado se puede refinar un poco más:

Lema 3.10. *Si $f \in SA$ es cualquier estable, entonces f^α es estable para todo ordinal α . Más aún, f^λ es un prenúcleo, para cada ordinal límite λ y, finalmente, f^∞ es el menor núcleo por encima de f .*

Demostración. Sea f una derivada estable. Por inducción, probamos que f^α es estable para cada ordinal α . El caso $\alpha = 0$ y el paso inductivo de α a $\alpha + 1$ es exactamente igual a la demostración anterior (porque SA es cerrado bajo composición). Ahora, si λ es un ordinal límite, tenemos $f^\lambda = \dot{\bigvee}\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, de modo que, para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}
f^\lambda(x) \wedge y &= \bigvee\{f^\alpha(x) \mid \alpha < \lambda\} \wedge y \\
&= \bigvee\{f^\alpha(x) \wedge y \mid \alpha < \lambda\} && \text{ley distributiva para marcos} \\
&\leq \bigvee\{f^\alpha(x \wedge y) \mid \alpha < \lambda\} \\
&= f^\lambda(x \wedge y),
\end{aligned}$$

como se quería.

Más aún, debemos probar que f^λ es prenúcleo, siempre que λ es un ordinal límite. Para cualesquiera $x, y \in A$ tenemos

$$\begin{aligned}
f^\lambda(x) \wedge f^\lambda(y) &= \bigvee\{f^\alpha(x) \wedge f^\beta(y) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && \text{ley distributiva de marcos} \\
&\leq \bigvee\{f^\alpha(x \wedge f^\beta(y)) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && f^\alpha \in SA \\
&\leq \bigvee\{f^\alpha(f^\beta(x \wedge y)) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && f^\beta \in SA \\
&\leq \bigvee\{f^\gamma(x \wedge y) \mid \gamma < \lambda\} && (?) \\
&= f^\lambda(x \wedge y),
\end{aligned}$$

como se quería. \square

NA como un conjunto fijo

Con estas observaciones, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *Para cada marco A , el operador cerradura $(-)^{\infty} : SA \rightarrow SA$ es un núcleo cuyo conjunto de puntos fijos es el ensamble de A :*

$$(SA)_{\infty} = NA.$$

Demostración. Como $(-)^{\infty} : SA \rightarrow SA$ es un operador cerradura, solo queda demostrar que $(-)^{\infty}$ es prenúcleo. Es decir, que la desigualdad

$$f^{\infty} \wedge g^{\infty} \leq (f \wedge g)^{\infty}$$

se cumple para cualesquiera estables $f, g \in SA$.

Sea $l = (f \wedge g)^{\infty}$. Por inducción, mostraremos que $f^{\alpha} \wedge g \leq l$ para todo ordinal α .

- Para $\alpha = 0$, tenemos $f^0 \wedge g = \text{id} \leq l$.
- Supongamos que $f^{\alpha} \wedge g \leq l$. Entonces, para todo $x \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} (f^{\alpha+1} \wedge g)(x) &= f(f^{\alpha}(x)) \wedge g(x) \\ &= f(f^{\alpha}(x)) \wedge g(x) \wedge g(x) \\ &\leq f(f^{\alpha}(x)) \wedge g(f^{\alpha}(x)) \wedge g(x) && \text{pues } x \leq f^{\alpha}(x) \\ &\leq l(f^{\alpha}(x)) \wedge g(x) && f \wedge g \leq (f \wedge g)^{\infty} = l \\ &\leq l(f^{\alpha}(x) \wedge g(x)) && l \in SA \\ &\leq l(l(x)) && f^{\alpha} \wedge g \leq l \\ &= l(x) && l \in CA. \end{aligned}$$

- Si λ es límite, supongamos que $f^{\alpha} \wedge g \leq l$ para todo ordinal $\alpha < \lambda$. Entonces, para todo $x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} (f^{\lambda} \wedge g)(x) &= f^{\lambda}(x) \wedge g(x) \\ &= \bigvee \{f^{\alpha}(x) \mid \alpha < \lambda\} \wedge g(x) \\ &= \bigvee \{f^{\alpha}(x) \wedge g(x) \mid \alpha < \lambda\} \\ &\leq l(x) && \text{pues } f^{\alpha} \wedge g \leq l. \end{aligned}$$

Esto muestra que $f^{\infty} \wedge g \leq l$. De manera similar, podemos probar que $f^{\infty} \wedge g^{\alpha} \leq l$ para todo α . Luego, $f^{\infty} \wedge g^{\infty} \leq l$, como se quería.

Como f^{∞} es un núcleo para cada $f \in SA$, la igualdad $(SA)_{\infty} = NA$ se obtiene de observar que todo núcleo k es un punto fijo de $(-)^{\infty} : SA \rightarrow SA$. \square

3.6. Cálculos en el ensamble

Supremos de núcleos (NA).

Ya probamos que los supremos no vacíos en DA y en SA se calculan puntualmente, y que los supremos dirigidos en PA también. Sin embargo, aún queda encontrar una descripción para, al menos, algunos supremos en NA .

Sea $J \subseteq NA$ un conjunto no vacío de núcleos. Como $J \subseteq SA$, entonces $\dot{\vee} J$ es el supremo de J en SA . Por otro lado, consideremos la familia J° de composiciones (finitas) de elementos de J :

$$J^\circ = \{j_1 \cdots j_m \mid j_i \in J \text{ para } 1 \leq i \leq m\}.$$

Dado que J° es una familia dirigida de prenúcleos (pues J° es cerrado bajo composiciones), $\dot{\vee} J^\circ$ es el supremo de J° en PA .

Lema 3.12. *Si $J \subseteq NA$ es una familia no vacía de núcleos sobre un marco A , entonces el núcleo*

$$\left(\dot{\vee} J\right)^\infty = \left(\dot{\vee} J^\circ\right)^\infty$$

es el supremo de J en NA .

Demostración. Sean

$$j = \left(\dot{\vee} J\right)^\infty \qquad k = \left(\dot{\vee} J^\circ\right)^\infty.$$

Es claro que j y k son núcleos que acotan superiormente a J . Si $l \in NA$ es un núcleo que acota superiormente a J , entonces también acota superiormente a J° , ya que

$$j_1 \cdots j_m \leq l^m = l$$

para cualquier $j_1 \cdots j_m \in J^\circ$. Luego, $\dot{\vee} J \leq l$ y $\dot{\vee} J^\circ \leq l$, pues $\dot{\vee} J, \dot{\vee} J^\circ \in SA$ son los supremos de J y J° (respectivamente) en SA y $l \in SA$. Se sigue que $j, k \leq l$, pues j y k son el menor núcleo por encima de $\dot{\vee} J$ y $\dot{\vee} J^\circ$, respectivamente. \square

Uno de los pasos de la demostración anterior nos permite mostrar un resultado bastante útil.

Corolario 3.13. *Sea J una familia de núcleos. Si $j \in J^\circ$ es una cota superior de J y es idempotente, entonces $j = \dot{\vee} J$ en NA .*

En particular, esto sucede cuando J es finito y todos los elementos de J aparecen en $j = j_1 \cdots j_n \in J^\circ$.

Demostración. Nótese que $j = j_1 \cdots j_n \in J^\circ$ es un prenúcleo porque es composición de prenúcleos. Como también es idempotente, se sigue que $j \in NA$. Ahora, para cualquier núcleo $k \in NA$ que acote a J por arriba, tenemos

$$j = j_1 \cdots j_n \leq k^n = k.$$

Luego, $j = \dot{\vee} J$ en NA . \square

Los núcleos abiertos y cerrados son complementarios

Recordemos que cualquier elemento a de un marco A tiene asociados los núcleos u_a y v_a dados por

$$u_a(x) = a \vee x \qquad v_a(x) = (a > x).$$

No es difícil ver que

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{tp} = v_0 \\ u_0 &= \text{id} = v_1. \end{aligned}$$

Esto se puede generalizar para cualquier elemento $a \in A$.

Lema 3.14. *Sea A un marco. Para cualquier $a \in A$ se tiene*

$$v_a \wedge u_a = \text{id} \qquad v_a \vee u_a = \text{tp}$$

en NA . Es decir, u_a y v_a son complementos uno del otro.

Demostración. Sabemos que $u_a \vee v_a = (v_a \circ u_a)^\infty$, pero $(v_a \circ u_a)(x) = (a > (a \vee x)) = 1$, para toda $x \in A$. Entonces $v_a \vee u_a = (v_a \circ u_a)^\infty = \text{tp}$.

Además, $(v_a \wedge u_a)(x) = v_a(x) \wedge u_a(x) = (a > x) \wedge (a \vee x) = x \vee (a \wedge x) = x$. Es decir, $v_a \wedge u_a = \text{id}$.

Por lo tanto u_a y v_a son complementados. □

La representación en núcleos abiertos y cerrados

Lema 3.15. *Sea A un marco. Para cualesquiera $j \in NA$ y $a \in A$, se tiene*

1. $j u_a$ es idempotente y, por lo tanto, un núcleo,
2. $j \vee u_a = j u_a$ (el supremo en NA),
3. $u_{j(a)} \wedge v_a \leq j$.

Demostración. 1. Como PA es cerrado bajo composición, al menos tenemos $j u_a \in PA$. Luego, para ver que $j u_a$ es un núcleo, basta demostrar que es idempotente. Para todo $x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} j u_a j u_a(x) &= j u_a j(a \vee x) \\ &= j(a \vee j(a \vee x)) \\ &= j(j(a \vee x)) && \text{pues } a \leq j(a \vee x) \\ &= j(a \vee x) \\ &= j u_a(x), \end{aligned}$$

como se quería.

2. Por 1, $j u_a$ es un núcleo que acota superiormente a j y a u_a . Por otro lado, si k es cualquier núcleo con $j \leq k$ y $u_a \leq k$, tenemos $j u_a \leq k k = k$.

3. Para cualquier $x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j(a)}(x) &= j(a) \vee x \\ &\leq j(a \vee x) \\ &= j\mathbf{u}_a(x). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j(a)} &\leq j\mathbf{u}_a \\ &= j \vee \mathbf{u}_a && \text{por 2} \\ &= \neg \mathbf{v}_a \vee j && \text{pues } \neg \mathbf{v}_a = \mathbf{u}_a \\ &= (\mathbf{v}_a > j) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \leq j$. □

Teorema 3.16 (La representación en núcleos abiertos y cerrados). *Sea A un marco y j un núcleo en A . Entonces*

$$j = \bigvee \{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}$$

en NA .

Demostración. Sea $k = \bigvee \{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}$. Por el lema anterior tenemos que $k \leq j$. Para la otra desigualdad, tomemos $a \in A$. Entonces $(\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a)(a) = j(a) \wedge (a > a) = j(a) \wedge 1 = j(a)$; es decir: $j(a) = (\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a)(a) \leq k(a)$, por lo cual $j \leq k$. □

Corolario 3.17. *Si A es un marco finito, entonces su ensamble NA es un álgebra booleana completa.*

Demostración. Por el teorema anterior cualquier $j \in NA$ tiene complemento, pues j se puede expresar como un supremo finito de elementos complementados. Por lo tanto NA es un álgebra booleana completa. □

3.7. El encaje de un marco en su ensamble

Definición 3.18. *Si A es un marco, la función $\eta_A : A \rightarrow NA$ está dada como*

$$\eta_A(a) = \mathbf{u}_a.$$

Teorema 3.19. *Si A es un marco, η_A es un morfismo de marcos inyectivo y es un epimorfismo.*

Demostración. Para ver que η_A es un morfismo de marcos primero notemos que $\eta_A(0) = \mathbf{u}_0 = \text{id}$ y $\eta_A(1) = \mathbf{u}_1 = \text{tp}$. También es una función monótona pues si

consideramos $a \leq b$, con $a, b \in A$, $\eta_A(a) = \mathbf{u}_a \leq \mathbf{u}_b = \eta_A(b)$.

Además, $\eta_A(a) \wedge \eta_A(b) = \mathbf{u}_a \wedge \mathbf{u}_b$, entonces

$$(\mathbf{u}_a \wedge \mathbf{u}_b)(x) = \mathbf{u}_a(x) \wedge \mathbf{u}_b(x) = (a \wedge b) \vee x = \mathbf{u}_{a \wedge b}(x)$$

Así $\eta_A(a) \wedge \eta_A(b) = \eta_A(a \wedge b)$.

Ahora consideremos $X \subseteq A$, queremos ver que $\bigvee \eta_A(X) = \eta_A(\bigvee X)$. Como η_A es monótona, se cumple que $\eta_A(x) \leq \eta_A(\bigvee X)$ para todo $x \in A$, es decir, $\bigvee \eta_A(X) \leq \eta_A(\bigvee X)$. Resta ver la otra desigualdad.

Consideremos $c = \bigvee X$ y $j = \bigvee \eta_A(X) = \bigvee \{\mathbf{u}_x \mid x \in X\}$. Queremos ver que $\mathbf{u}_c \leq j$. Sea $a \in A$, entonces

$$\mathbf{u}_c(a) = c \vee a = \bigvee X \vee a = \bigvee \{x \vee a \mid x \in X\} = \left(\bigvee \{\mathbf{u}_x \mid x \in X\} \right)(a) \leq j(a)$$

pues el supremo puntual es menor que el supremo en NA .

Veamos ahora que η_A es inyectiva. Consideremos $a, b \in A$ tales que $\eta_A(a) = \eta_A(b)$, entonces $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_b$. Evaluando en $x = 0$, obtenemos que $a = a \vee 0 = b \vee 0 = b$. Así, η_A es inyectiva.

Por último veamos que η_A es un epimorfismo. Para ello consideremos dos morfismos

$$NA \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B,$$

donde B es un marco y $f \circ \eta_A = g \circ \eta_A$, es decir, $f(\mathbf{u}_a) = g(\mathbf{u}_a)$ para todo $a \in A$. Por el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} f(j) &= f\left(\bigvee \{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}\right) = \bigvee \{f(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge f(\mathbf{v}_a) \mid a \in A\} & \text{y} \\ g(j) &= g\left(\bigvee \{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}\right) = \bigvee \{g(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge g(\mathbf{v}_a) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

Ahora usemos que $f(\mathbf{u}_{j(a)}) = g(\mathbf{u}_{j(a)})$ y, tomando complementos, $f(\mathbf{v}_a) = g(\mathbf{v}_a)$, pues \mathbf{v}_a y \mathbf{u}_a son complementarios en A y los morfismos de marcos f, g preservan complementos. Por lo tanto, para todo $j \in NA$, tenemos $f(j) = g(j)$. Así, η_A es un epimorfismo. \square

El ensamble como solución a un problema universal

Vimos que, para cada marco A , el ensamble NA es un marco y tenemos un morfismo

$$\begin{aligned} \eta_A : A &\rightarrow NA \\ a &\mapsto \mathbf{u}_a \end{aligned}$$

el cual es mono y epi, aunque en general no es suprayectivo. En particular, Frm no es una categoría balanceada.

Corolario 3.20 (Adjunción del ensamble). *Sea A un marco. El adjunto derecho del morfismo $\eta_A : A \rightarrow NA$ está dado por $\perp : NA \rightarrow A$, $\perp(j) = j(0)$. Es decir, tenemos*

$$\mathbf{u}_a \leq j \quad \text{si, y solo si} \quad a \leq j(0).$$

Demostración. Si $u_a \leq j$, entonces $a = u_a(0) \leq j(0)$. Por otro lado, si $a \leq j(0)$, entonces para todo $x \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} u_a(x) &= a \vee x \\ &\leq j(0) \vee x \\ &\leq j(0) \vee j(x) \\ &= j(x). \end{aligned}$$

Luego, $u_a \leq j$. □

Definición 3.21. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de marcos. Diremos que f resuelve el problema de complementación para A si, para todo $a \in A$, $f(a) \in B$ es complementado en B .

Ejemplo 3.22. Para todo $a \in A$, el núcleo u_a es complementado en NA (su complemento es v_a). Es decir, $\eta_A : A \rightarrow NA$ resuelve el problema de complementación para A .

Teorema 3.23. Sea A un marco. El morfismo $\eta_A : A \rightarrow NA$ resuelve el problema de complementación de manera universal. Es decir, para cualquier morfismo $f : A \rightarrow B$ que resuelve el problema de complementación, existe un único morfismo $f^\sharp : NA \rightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \eta_A & \nearrow f^\sharp \\ & NA & \end{array}$$

es conmutativo.

Más aún, si $f_* : B \rightarrow A$ es el adjunto derecho de $f = f^* : A \rightarrow B$, el adjunto derecho $f_\sharp : B \rightarrow NA$ de $f^\sharp : NA \rightarrow B$ se calcula como

$$f_\sharp(b) = f_* u_b f^* \in NA.$$

Demostración. Para empezar, como η_A es epi, la factorización de f a través de η_A es única, en caso de existir. Es decir, si $f^\sharp, f^! : NA \rightarrow B$ son tales que $f^\sharp \eta_A = f = f^! \eta_A$, entonces $f^\sharp = f^!$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \eta_A & \nearrow f^\sharp \\ & NA & \nearrow f^! \end{array}$$

Por lo tanto, basta con mostrar la existencia de f^\sharp .

Recordemos que queremos definir $f^\sharp : NA \rightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \eta_A & \nearrow f^\sharp \\ & NA & \end{array}$$

conmute. Es decir, tal que $f^\sharp(\mathbf{u}_a) = f(a)$. Recordemos que cada núcleo $j \in NA$ se puede representar como

$$j = \bigvee \{ \mathbf{u}_{j(a)} \wedge \neg \mathbf{u}_a \mid a \in A \},$$

pues $\neg \mathbf{u}_a = \mathbf{v}_a$. Dado que los morfismos de marcos respetan complementos, si existiese un morfismo $f^\sharp : NA \rightarrow B$ con las propiedades deseadas, necesariamente debería cumplirse que

$$\begin{aligned} f^\sharp(j) &= f^\sharp \left(\bigvee \{ \mathbf{u}_{j(a)} \wedge \neg \mathbf{u}_a \mid a \in A \} \right) \\ &= \bigvee \{ f^\sharp(\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \neg \mathbf{u}_a) \mid a \in A \} \\ &= \bigvee \{ f^\sharp(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge f^\sharp(\neg \mathbf{u}_a) \mid a \in A \} \\ &= \bigvee \{ f^\sharp(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge \neg f^\sharp(\mathbf{u}_a) \mid a \in A \} \\ &= \bigvee \{ f(j(a)) \wedge \neg f(a) \mid a \in A \}. \end{aligned}$$

Con esta motivación, definimos f^\sharp como

$$f^\sharp(j) = \bigvee \{ f(j(a)) \wedge \neg f(a) \mid a \in A \}.$$

Hay que probar que esta definición nos da un morfismo de marcos con las propiedades deseadas. Verificamos la monotonidad. Si $k \leq j$ son núcleos en A , entonces $k(x) \leq j(x)$ para todo $x \in A$. Aplicando f tenemos $f(k(x)) \leq f(j(x))$, y así $f(k(x)) \wedge f(x) \leq f(j(x)) \wedge f(x)$. Esto nos dice que f^\sharp es monótono.

Por otro lado $f_\flat : B \rightarrow NA$ también es monótona, pues si $b \leq c \in B$, entonces $\mathbf{u}_b \leq \mathbf{u}_c \in NB$. Luego, $f_* \mathbf{u}_b f^* \leq f_* \mathbf{u}_c f^*$, pero esto es $f_\flat(b) \leq f_\flat(c)$.

Ahora veamos que $f^\sharp \dashv f_\flat$. Dados $j \in NA$ y $b \in B$ arbitrarios, debemos mostrar la equivalencia

$$f^\sharp(j) \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad j \leq f_\flat(b).$$

Por definición $f^\sharp(j) = \bigvee \{ f^*(j(x)) \wedge \neg f^*(x) \mid x \in A \}$. Luego, tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned} f^\sharp(j) \leq b &\iff \forall (x \in A) \ f^*(j(x)) \wedge \neg f^*(x) \leq b \\ &\iff \forall (x \in A) \ f^*(j(x)) \leq (\neg f^*(x) > b) \\ &\iff \forall (x \in A) \ f^*(j(x)) \leq f^*(x) \vee b && \text{caballo de batalla} \\ &\iff \forall (x \in A) \ j(x) \leq f_*(b \vee f^*(x)) && \text{adjunción } f^* \dashv f_* \\ &\iff \forall (x \in A) \ j(x) \leq f_*(\mathbf{u}_b(f^*(x))) \\ &\iff j \leq f_* \mathbf{u}_b f^* = f_\flat(b). \end{aligned}$$

Esto muestra que $f^\sharp \dashv f_*$. En particular, f^\sharp preserva supremos arbitrarios. Ahora hay que ver que f^\sharp preserva ínfimos finitos. Como f^\sharp es monótona, tenemos

$f^\sharp(j \wedge k) \leq f^\sharp(j) \wedge f^\sharp(k)$, así que falta probar la otra comparación. Tenemos

$$\begin{aligned}
 f^\sharp(j) \wedge f^\sharp(k) &= \bigvee \left\{ [f(j(x)) \wedge \neg f(x)] \wedge [f(j(y)) \wedge \neg f(y)] \mid x, y \in A \right\} \\
 &= \bigvee \left\{ f(j(x) \wedge k(y)) \wedge \neg f(x \vee y) \mid x, y \in A \right\} \\
 &\leq \bigvee \left\{ f(j(x \vee y) \wedge k(x \vee y)) \wedge \neg f(x \vee y) \mid x, y \in A \right\} \\
 &= \bigvee \left\{ f(j(z) \wedge k(z)) \wedge \neg f(z) \mid z \in A \right\} \\
 &= \bigvee \left\{ f((j \wedge k)(z)) \wedge \neg f(z) \mid z \in A \right\} \\
 &= f^\sharp(j \wedge k).
 \end{aligned}$$

Finalmente, hay que ver que $f = f^\sharp \eta_A$. En efecto: para cualquier $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
 f^\sharp(\eta_A(a)) &= f^\sharp(\mathbf{u}_a) \\
 &= \bigvee \{ f(\mathbf{u}_a(x)) \wedge \neg f(x) \mid x \in A \} \\
 &= \bigvee \{ f(a \vee x) \wedge \neg f(x) \mid x \in A \} \\
 &= \bigvee \{ (f(a) \vee f(x)) \wedge \neg f(x) \mid x \in A \} \\
 &= \bigvee \{ f(a) \wedge \neg f(x) \mid x \in A \} \\
 &= f(a) \wedge \bigvee \{ \neg f(x) \mid x \in A \} \\
 &= f(a) \wedge 1 \\
 &= f(a),
 \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. \square

Teorema 3.24 (El ensamble como indicador de booleanidad). *Sea A un marco. Entonces el encaje $\eta_A : A \rightarrow NA$ es suprayectivo (y, por lo tanto, un isomorfismo) si, y solo si, A es un álgebra booleana completa.*

Demostración. Supongamos que η_A es suprayectiva. Entonces, para todo elemento $a \in A$, $\eta_A(a) = \mathbf{u}_a$ tiene complemento \mathbf{v}_a en NA . Como η_A es isomorfismo, entonces a tiene complemento en A . Luego, A es booleana.

Por otro lado, supongamos que A es booleana. Dado $j \in NA$, mostraremos que $\eta_A(a) = j$, donde $a = j(0)$. Como $a \leq j(0)$, tenemos que $\mathbf{u}_a \leq j$ (por la adjunción $\eta_A \dashv \perp$). Queda demostrar la comparación $j \leq \mathbf{u}_a$; esto es: $j(x) \leq x \vee a$ para todo $x \in A$. Como A es booleana, podemos usar nuestro caballo de batalla, que nos dice que esto es equivalente a mostrar que $j(x) \wedge \neg x \leq a$ para todo $x \in A$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
 j(x) \wedge \neg x &\leq j(x) \wedge j(\neg x) \\
 &= j(x \wedge \neg x) \\
 &= j(0) \\
 &= a.
 \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbf{u}_a = j$, así que η_A es suprayectiva y, por lo tanto, un isomorfismo. \square

3.8. Más cálculos en el ensamble

Lema 3.25 (Tres equivalencias). *Sea A un marco. Entonces*

$$\mathbf{u}_a \leq j \iff a \leq j(0) \quad \mathbf{v}_a \leq j \iff 1 = j(a) \quad j \leq \mathbf{w}_a \iff j(a) = a.$$

Nótese que la primera equivalencia es la adjunción $\eta_A \dashv \perp$ que demostramos en 3.7. También demostramos, en el lema 2.32, el caso $a = 0$ de la tercera equivalencia.

Demostración. Mostraremos la segunda y tercera equivalencias.

Supongamos que $\mathbf{v}_a \leq j$. Evaluando en a , obtenemos $1 = (a > a) \leq j(a)$, así que $1 = j(a)$. Por otro lado, supongamos que $1 = j(a)$. Para todo $x \in A$, tenemos $\mathbf{v}_a(x) = a > x$, por lo cual $\mathbf{v}_a(x) \wedge a \leq x$. Aplicando j , obtenemos

$$\begin{aligned} j(x) &\geq j(\mathbf{v}_a(x) \wedge a) \\ &= j(\mathbf{v}_a(x)) \wedge j(a) \\ &= j(\mathbf{v}_a(x)) \wedge 1 \\ &\geq j(\mathbf{v}_a(x)) \\ &\geq \mathbf{v}_a(x). \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{v}_a \leq j$.

Ahora supongamos que $j \leq \mathbf{w}_a$. Evaluando en a , obtenemos $j(a) \leq a$. Como j infla, esto es equivalente a $j(a) = a$. Por otro lado, supongamos que $j(a) = a$. Debemos mostrar que $j \leq \mathbf{w}_a$; esto es: que $j(x) \leq ((x > a) > a)$ para todo $x \in A$. Recordando que siempre tenemos $x \wedge (x > a) = x \wedge a$, se sigue que

$$\begin{aligned} j(x) \wedge (x > a) &\leq j(x) \wedge j(x > a) \\ &= j(x \wedge (x > a)) \\ &= j(a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Luego, $j(x) \leq ((x > a) > a) = \mathbf{w}_a(x)$, como se quería mostrar. \square

Lema 3.26. *Sea A un marco y $j, k \in NA$ núcleos. Si $jk \leq kj$, entonces $k \vee j = kj$.*

Demostración. Supongamos que $jk \leq kj$. Sea $g = kj$. Entonces

$$\begin{aligned} g^2 &= kjkj \\ &\leq kkjj \\ &= k^2j^2 \\ &= kj \\ &= g. \end{aligned}$$

Es decir, g es un prenúcleo idempotente, y así $g \in NA$ es un núcleo por encima de k y de j .

Ahora, si $h \in NA$ es cualquier núcleo con $j \leq h$ y $k \leq h$, entonces $g = kj \leq h^2 = h$. Se sigue que $g = k \vee j$. \square

Lema 3.27 (Supremos con núcleos abiertos y cerrados). *Sea A un marco. Dado cualquier núcleo $j \in NA$ y elementos $a, b \in A$, tenemos*

$$\mathbf{v}_b \vee j \vee \mathbf{u}_a = \mathbf{v}_b j \mathbf{u}_a.$$

Demostración. Antes probamos que $j \vee \mathbf{u}_a = j \mathbf{u}_a$, por lo cual basta demostrar $\mathbf{v}_b \vee j = \mathbf{v}_b j$. Por el lema anterior, es suficiente con probar la desigualdad $j \mathbf{v}_b \leq \mathbf{v}_b j$. Es decir, hay que probar que $j(b > x) \leq (b > j(x))$ para todo $x \in A$. Para esto, observemos que

$$\begin{aligned} j \mathbf{v}_b(x) \wedge b &= j(b > x) \wedge b \\ &\leq j((b > x) \wedge b) \\ &= j(b \wedge x) \\ &\leq j(x). \end{aligned}$$

Usando la definición de la implicación, esto nos da $j \mathbf{v}_b(x) \leq (b > j(x))$, que es lo que queríamos. \square

La representación de un núcleo generado por una derivada

Ya probamos que todo núcleo $j \in NA$ se puede representar como

$$j = \bigvee \{ \mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A \}.$$

Si existe una derivada $f \in DA$ tal que $j = f^\infty$, esta construcción se puede mejorar. En esta sección, fijamos una derivada $f \in DA$ y suponemos que $j = f^\infty \in NA$. Usando la cadena de iteraciones de f , construiremos una cadena en A , y luego una cadena en NA .

- Para cada $a \in A$ y cada ordinal α , definimos $a(\alpha) = f^\alpha(a)$. Esto nos da una cadena en A

$$(a(\alpha) \mid \alpha \in \text{Ord})$$

la cual, por cardinalidad, se estaciona en algún ordinal. En particular, por la definición de $a(\alpha)$, se tiene $a(\infty + 1) = a(\infty)$ (recordemos que la cadena de los f^α se estaciona en el ordinal ∞).

- Usando la cadena anterior, construimos una nueva cadena en NA .

$$\begin{aligned} j_{a,0} &= \text{id}_A \\ j_{a,\alpha+1} &= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \\ j_{a,\lambda} &= \bigvee \{ j_{a,\alpha} \mid \alpha < \lambda \} \quad (\text{si } \lambda \text{ es límite}). \end{aligned}$$

Dado que los $a(\alpha)$ se estacionan, los $j_{a,\alpha}$ también. En efecto, si $a(\alpha) = a(\alpha + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} j_{a,\alpha+1} &= (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \\ &= \text{id}_A \vee j_{a,\alpha} \\ &= j_{a,\alpha}. \end{aligned}$$

Sea j_a el mayor de los $j_{a,\alpha}$. Es decir,

$$\begin{aligned} j_a &= \bigvee \{j_{a,\alpha} \mid \alpha \in \text{Ord}\} \\ &= \bigvee \{(\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \mid \alpha \in \text{Ord}\} \\ &= \bigvee \{\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \mid \alpha \in \text{Ord}\} \end{aligned}$$

En particular, observemos que $j_a = j_{a,\infty}$.

El siguiente resultado nos dice que los núcleos $j_{a,\alpha}$ tienen una descripción más simple.

Lema 3.28. *Para cada ordinal α , el núcleo $j_{a,\alpha}$ se puede expresar como*

$$j_{a,\alpha} = \mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a.$$

En particular, para $\alpha = \infty$, tenemos

$$j_a = j_{a,\infty} = \mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a.$$

Una consecuencia inmediata es que

$$f^\infty = \bigvee \{j_a \mid a \in A\},$$

pues $f^\infty = \bigvee \{\mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}$.

Demostración. Probamos la afirmación por inducción

- Para $\alpha = 0$, tenemos $j_{a,0} = \text{id}$, mientras que $\mathbf{u}_{a(0)} \wedge \mathbf{v}_a = \mathbf{u}_a \wedge \mathbf{v}_a = \text{id}$.
- Supongamos que $j_{a,\alpha} = \mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a$. Entonces

$$\begin{aligned} j_{a,\alpha+1} &= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \\ &= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a) \\ &= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a)) \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a)) \\ &= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a)) \\ &= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee \mathbf{u}_{a(\alpha)}) \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee \mathbf{v}_a) \\ &= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \text{tp} \wedge \mathbf{v}_a \\ &= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_a, \end{aligned}$$

como se quería.

- Si λ es un ordinal límite, supongamos que $j_{a,\alpha} = \mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a$ para todo ordinal $\alpha < \lambda$. Entonces

$$\begin{aligned} j_{a,\lambda} &= \bigvee \{j_{a,\alpha} \mid \alpha < \lambda\} \\ &= \bigvee \{\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a \mid \alpha < \lambda\} \\ &= \bigvee \{\mathbf{u}_{a(\alpha)} \mid \alpha < \lambda\} \wedge \mathbf{v}_a \\ &= \mathbf{u}_{\bigvee \{a(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}} \wedge \mathbf{v}_a \\ &= \mathbf{u}_{a(\lambda)} \wedge \mathbf{v}_a, \end{aligned}$$

como se deseaba.

□

Con este resultado, podemos probar que el núcleo $j = f^\infty$ tiene una descripción más simple que la canónica.

Lema 3.29. *Si $f \in DA$ es una derivada tal que f^∞ es un núcleo, entonces*

$$f^\infty = \bigvee \{ \mathbf{u}_{f(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A \}.$$

Demostración. Dado que

$$\mathbf{u}_{f(a)} \wedge \mathbf{v}_a \leq \mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a$$

para todo $a \in A$, se sigue que

$$\bigvee \{ \mathbf{u}_{f(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A \} \leq \bigvee \{ \mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A \} = f^\infty.$$

Por otro lado, para cada $a \in A$ y cada ordinal α , tenemos

$$a(\alpha + 1) = f^{\alpha+1}(a) = f(f^\alpha(a)) = f(\alpha(a)),$$

por lo cual

$$\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \in \{ \mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A \}$$

(poniendo $b = a(\alpha)$). Se sigue que

$$\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \leq \bigvee \{ \mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A \}.$$

Como esto es válido para todos los ordinales, tenemos

$$j_a \leq \bigvee \{ \mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A \},$$

pues $j_a = \bigvee \{ \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \mid \alpha \in \text{Ord} \}$. De nuevo, como esto es válido para cualquier $a \in A$, concluimos que

$$f^\infty \leq \bigvee \{ \mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A \},$$

pues $f^\infty = \bigvee \{ j_a \mid a \in A \}$ (aquí es donde usamos el lema anterior). □

Los núcleos regulares

Recordemos que los núcleos regulares de un marco (esto es, los de la forma \mathbf{w}_a) son exactamente los que corresponden a sus cocientes booleanos. Ahora probaremos que todo núcleo se puede descomponer en núcleos regulares.

Teorema 3.30 (La representación en núcleos regulares). *Sea A un marco y $j : A \rightarrow A$ un núcleo. Entonces*

$$j = \bigwedge \{ \mathbf{w}_{j(a)} \mid a \in A \} = \bigwedge \{ \mathbf{w}_a \mid a \in A_j \}.$$

Como $\{ \mathbf{w}_{j(a)} \mid a \in A \} = \{ \mathbf{w}_a \mid a \in A_j \}$, basta probar la primera igualdad.

Demostración. Sea $l = \bigwedge \{w_{j(a)} \mid a \in A\}$. En 3.8 probamos que

$$j \leq w_a \quad \text{si, y solo si} \quad j(a) = a,$$

por lo cual $j \leq w_{j(a)}$ para todo $a \in A$. Luego, $j \leq l$. Para la otra desigualdad, observemos que siempre tenemos $l \leq w_{j(a)}$. Luego,

$$\begin{aligned} l(a) &\leq l(j(a)) \\ &\leq w_{j(a)}(j(a)) \\ &= j(a), \end{aligned}$$

así que $l \leq j$, como se quería. \square

Lema 3.31. Sean A un marco y $a \in A$. Si $j \in NA$ es un núcleo tal que $w_a \leq j$, entonces

$$j = w_a \vee u_b = w_b,$$

donde $b = j(0)$. Nótese que, en particular, este resultado implica que los núcleos regulares forman una sección superior.

También nótese que, por el lema [Supremos con núcleos abiertos y cerrados], el miembro central es igual a $w_a u_b$.

Demostración. Como $b \leq j(0)$, tenemos $u_b \leq j$ (por la adjunción $\eta_A \dashv \perp$). Luego,

$$w_a \vee u_b \leq j.$$

Notemos, además, que $j(b) = j(j(0)) = j(0) = b$, lo cual sucede si, y solo si,

$$j \leq w_b.$$

Finalmente, resta probar que $w_b \leq w_a \vee u_b$. Por nuestro caballo de batalla, esto es equivalente a $w_b \wedge v_b \leq w_a$ lo cual sucede si, y solo si, $(w_b \wedge v_b)(a) = a$. Dado que $w_a \leq j$, tenemos $a = w_a(0) \leq j(0) = b$. Luego, $(a > b) = 1$, por lo cual

$$\begin{aligned} (w_b \wedge v_b)(a) &= w_b(a) \wedge v_b(a) \\ &= ((a > b) > b) \wedge (b > a) \\ &= (1 > b) \wedge (b > a) \\ &= b \wedge (b > a) \\ &= b \wedge a \\ &= a. \end{aligned}$$

Esto es lo que se quería mostrar. \square

Lema 3.32. Sean $d \in DA$ y $j \in CA$. Entonces

$$dj = j \quad \text{si, y solo si} \quad d \leq j \quad \text{si, y solo si} \quad jd = j.$$

Demostración. Probaremos la primera equivalencia, pues la segunda es completamente análoga. Supongamos que $jd = j$. Como $x \leq j(x)$, tenemos que $d(x) \leq d(j(x)) = j(x)$. Luego, $d \leq j$. Por otro lado, si $d \leq j$, entonces tenemos $dj \leq jj = j$. La otra desigualdad ($j \leq dj$) se sigue porque d infla. \square

Teorema 3.33. Sean A un marco y $a \in A$. Si $k \in NA$ es un núcleo tal que $\mathbf{u}_a \leq k \leq \mathbf{w}_a$, entonces, para todo $j \in NA$ se tiene

$$\mathbf{w}_a \vee j = \mathbf{w}_a j k = \mathbf{w}_b,$$

donde $b = \mathbf{w}_a(j(a))$.

Demostración. Para la primera igualdad, basta ver que el prenúcleo $h = \mathbf{w}_a j k$ es idempotente y, por lo tanto, un núcleo. (En efecto, una vez probado esto, tendremos que cualquier núcleo l que esté sobre \mathbf{w}_a y j queda por debajo de h , pues $h = \mathbf{w}_a j k \leq \mathbf{w}_a j \mathbf{w}_a \leq l^3 = l$).

Ahora, para probar la idempotencia de h , basta ver que $jh = h$ pues, por el resultado anterior, $k \leq \mathbf{w}_a$ implica $k\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_a$, lo cual nos da

$$\begin{aligned} h^2 &= \mathbf{w}_a j k \mathbf{w}_a j k \\ &= \mathbf{w}_a j \mathbf{w}_a j k & (k\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_a) \\ &= \mathbf{w}_a \mathbf{w}_a j k & (jh = h) \\ &= \mathbf{w}_a j k \\ &= h. \end{aligned}$$

Probemos, pues, que $jh = h$. Sea $x \in A$ y definamos $y = jk(x)$, de modo que $jh(x) = h(x)$ es lo mismo que $j(\mathbf{w}_a(y)) = \mathbf{w}_a(y)$. Una desigualdad es porque j infla, así que queda probar la otra desigualdad: $j(\mathbf{w}_a(y)) \leq \mathbf{w}_a(y)$, la cual equivale a $j(\mathbf{w}_a(y)) \wedge (y > a) \leq a$. Como $\mathbf{u}_a \leq k$, tenemos $a \leq k(0)$, así que

$$\begin{aligned} j\mathbf{w}_a(y) \wedge (y > a) &\leq j\mathbf{w}_a(y) \wedge j(y > a) \\ &= j(\mathbf{w}_a(y) \wedge (y > a)) \\ &= j(((y > a) > a) \wedge (y > a)) \\ &= j((y > a) \wedge a) \\ &= j(a) \\ &\leq j(k(0)) & (a \leq k(0)) \\ &\leq j(k(x)) \\ &= y. \end{aligned}$$

Haciendo ínfimo con $(y > a)$, obtenemos

$$\begin{aligned} j(\mathbf{w}_a(y)) \wedge (y > a) &\leq y \wedge (y > a) \\ &= y \wedge a \\ &\leq a, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos.

Ahora veamos la otra igualdad. Evaluando las desigualdades $w_a \leq k \leq w_a$ en 0, obtenemos $k(0) = a$. Como $h = w_a j k$ está por encima de w_a , hace dos lemas vimos que $h = w_b$, donde

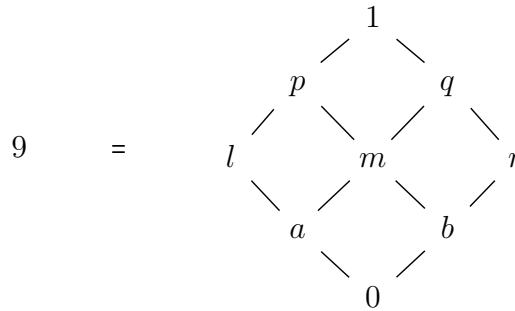
$$\begin{aligned} b &= h(0) \\ &= w_a j k(0) \\ &= w_a j(a), \end{aligned}$$

como se quería. □

Corolario 3.34. Tomando $a = 0$ en el resultado anterior, vemos que todo $j \in NA$ satisface

$$j \vee w_0 = w_{\neg\neg j(0)}.$$

Ejercicio 5. Obtén los núcleos regulares del marco



Solución. Como los núcleos preservan los ínfimos y el 1, basta conocer su acción sobre $\{l, p, q, r\}$.

$j = w_x$	$j(l)$	$j(p)$	$j(q)$	$j(r)$
$w_1 = tp$	1	1	1	1
w_p	p	p	1	1
w_q	1	1	q	q
w_l	l	1	1	1
w_m	p	p	q	q
w_r	1	1	1	r
w_a	l	1	q	q
w_b	p	p	1	r
w_0	l	1	1	r

■

Parte III

El espacio de puntos

Capítulo 4

La adjunción entre \mathbf{Frm} y \mathbf{Top}

La asignación que manda cada espacio topológico S a su marco de abiertos $\mathcal{O}S$ es un funtor contravariante $\mathcal{O} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Frm}$.

Queremos ver que hay un funtor de regreso $\text{pt} : \mathbf{Frm} \rightarrow \mathbf{Top}$, que a cada marco A le asigna un espacio topológico cuyos elementos se verán como los puntos del marco. Veremos que \mathcal{O} y pt forman una adjunción

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{Top} & \\ \mathcal{O} \downarrow & \dashv & \uparrow \text{pt} \\ & \mathbf{Frm}^{\text{op}} & \end{array}$$

Dado un espacio con un punto $\{*\}$, el conjunto de puntos de S está en biyección con las funciones continuas $\{*\} \rightarrow S$:

$$S \simeq \mathbf{Top}(\{*\}, S)$$

donde cada punto $s \in S$ está asociado a la función $* \mapsto s$. Así, si 2 es el marco de dos elementos $2 = \{0 < 1\}$, cada de estas funciones $s : \{*\} \rightarrow S$ induce un morfismo de marcos $\chi_s : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}\{*\} \simeq 2$ dado como

$$\chi_s(u) = \begin{cases} 1 & s \in u \\ 0 & s \notin u \end{cases}.$$

Así, para cada marco A , tiene sentido definir los puntos de A como morfismos $\mathbf{Frm}(A, 2)$. En efecto, más adelante consideraremos esta construcción. Sin embargo, primero consideraremos otra construcción equivalente: representaremos cada morfismo $\chi : A \rightarrow 2$ con un elemento de A de manera canónica: el elemento

$$p = \bigvee \{x \in A \mid \chi(x) = 0\}$$

es el único elemento de A que cumple

$$x \leq p \quad \text{si, y solo si} \quad \chi(x) = 0.$$

En particular, dado que $\chi(1) = 1$, tenemos $p \neq 1$. Por otro lado, para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \wedge y \leq p$, tenemos

$$\chi(x) \wedge \chi(y) = \chi(x \wedge y) = 0,$$

así que $\chi(x) = 0$ o bien $\chi(y) = 0$, pues χ toma valores en el marco 2. es decir: $x \leq p$ o bien $y \leq p$.

Definición 4.1. Sea $A \in \text{Frm}$. Un punto o elemento \wedge -irreducible de A es un elemento $p \in A$ con $p \neq 1$ tal que si $x \wedge y \leq p$, entonces $x \leq p$ ó $y \leq p$. Denotamos por $\text{pt}A$ al conjunto de todos los puntos de A .

Lema 4.2. Sea $A \in \text{Frm}$.

- Cada máximo de A es \wedge -irreducible.
- Si A es booleano, entonces todo elemento \wedge -irreducible de A es máximo.
- Si A es una cadena, entonces cada elemento propio de A es \wedge -irreducible.

Demostración.

- Sea $p \in A$ máximo, entonces $p < 1$. Si $x \wedge y \leq p$ y suponiendo que $x \not\leq p$, entonces $p < x \vee p$ y, por la maximalidad de p , tenemos que $p \vee x = 1$. Similarmente, $y \not\leq p$ implica $p \vee y = 1$. Si $x \not\leq p$ y $y \not\leq p$, se tiene que

$$p = p \vee (x \wedge y) = (p \vee x) \wedge (p \vee y) = 1.$$

Esto es una contradicción ya que $p < 1$.

- Supongamos que A es booleano. Sean $p \in \text{pt}A$ y $x, y \in A$ con $p < x$ y $y = \neg x$. Tenemos que $x \wedge y = 0 \leq p$, entonces $x \leq p$ ó $y \leq p$ ya que p es \wedge -irreducible. Además $y \leq p < x$ puesto que $p < x$. En consecuencia, $x \vee y = 1 = x$, así, p es máximo.
- Supongamos que A es una cadena. Para cualesquiera $x, y \in A$, tenemos que $x \leq y$ ó $y \leq x$, es decir, $x \wedge y \leq x$ ó $x \wedge y \leq y$. Sea $p \in A$ con $p < 1$. Si $x \wedge y \leq p$, entonces $x \leq p$ ó $y \leq p$.

□

4.1. La reflexión espacial de un marco

Sean $A \in \text{Frm}$ y $a \in A$. Decimos que un punto $p \in \text{pt}A$ está en $U_A(a) \subseteq \text{pt}A$ si, y sólo si $a \not\leq p$.

Ejercicio 6. Demostrar el siguiente lema:

Lema 4.3. Sean $A \in \text{Frm}$ y $a, b \in A$.

- $U_A(1) = \text{pt}A$.
- $U_A(0) = \emptyset$.
- $U_A(a \wedge b) = U_A(a) \cap U_A(b)$.
- $U_A(\bigvee X) = \bigcup \{U_A(x) \mid x \in X\}, \forall X \subseteq A$.

Demostración. Sean $A \in \text{Frm}$ y $a, b \in A$.

- Por definición $U_A(1) \subseteq \text{pt}A$. Sea $p \in \text{pt}A$, entonces $p \neq 1$. Además $1 \not\leq p$, por lo que $p \in U_A(1)$. Así, $U_A(1) = \text{pt}A$.
- Supongamos que $U_A(0) \neq \emptyset$. Sea $p \in U_A(0)$. Por definición, $0 \not\leq p$ pero $0 \leq a, \forall a \in A$. Por lo tanto, $U_A(0) = \emptyset$.
- Sea $p \in \text{pt}A$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 p \in U_A(a \wedge b) &\iff a \wedge b \not\leq p \\
 &\iff a \not\leq p \quad y \quad b \not\leq p \\
 &\iff p \in U_A(a) \quad y \quad p \in U_A(b) \\
 &\iff p \in U_A(a) \cap U_A(b).
 \end{aligned}$$

Por lo que $U_A(a \wedge b) = U_A(a) \cap U_A(b)$.

- Sea $X \subseteq A$ y notemos que si $X = \emptyset$, entonces ocurre el segundo punto. En caso contrario,

$$\begin{aligned}
 p \in U_A(\bigvee X) &\Rightarrow \bigvee X \not\leq p \\
 &\Rightarrow \text{existe } x \in X \text{ tal que } x \not\leq p \\
 &\Rightarrow p \in U_A(x) \\
 &\Rightarrow p \in \bigcup \{U_A(x) \mid x \in X\}.
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 p \in \bigcup \{U_A(x) \mid x \in X\} &\Rightarrow p \in U_A(x) \text{ para algún } x \in X \\
 &\Rightarrow x \not\leq p \\
 &\Rightarrow \bigvee X \not\leq p \\
 &\Rightarrow p \in U_A(\bigvee X).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $U_A(\bigvee x) = \bigcup \{U_A(x) \mid x \in X\}, \forall X \subseteq A$.

□

Por el lema anterior, $U_A(A) = \{U_A(a) \mid a \in A\}$ es una topología en $\text{pt}A$ y $U_A: A \rightarrow \mathcal{O}_{\text{pt}A}$ es un morfismo suprayectivo de marcos. Al espacio topológico $(\text{pt}A, U_A(A))$ lo llamamos el *espacio de puntos* de A , mientras que al morfismo $U_A: A \rightarrow \mathcal{O}_{\text{pt}A}$ lo llamamos la *reflexión espacial* de A .

Además, si U_A es un isomorfismo (basta con que sea inyectivo), decimos que el marco A es *espacial*.

Observemos que, como U_A es suprayectivo, existe un núcleo $S \in NA$ tal que $A_S \cong \mathcal{O}\text{pt}A$.

Sabemos que S está caracterizado como $x \leq S(a) \iff U(x) \subseteq U(a)$. Probaremos que $S(a) = \bigwedge \{p \in \text{pt}A \mid a \leq p\}$.

$$\begin{aligned} x \leq S(a) &\iff U(x) \subseteq U(a) \\ &\iff (\forall p \in \text{pt}A)[x \not\leq p \Rightarrow a \not\leq p] \\ &\iff (\forall p \in \text{pt}A)[a \leq p \Rightarrow x \leq p] \\ &\iff x \leq \bigwedge \{p \in \text{pt}A \mid a \leq p\} \end{aligned}$$

4.2. El orden de especialización

Ejercicio 7 (Para el lector). Sean $S \in \text{Top}$ y $p, q \in S$. Probar que la relación

$$q \sqsubseteq p \iff \bar{q} \subseteq \bar{p}$$

es un preorden. Si el espacio es T_0 , entonces es un orden parcial.

A la relación del ejercicio 7 le llamamos el *orden de especialización*.

Sean $p, q \in \text{pt}A$. Notemos que

$$\begin{aligned} q \sqsubseteq p &\iff \bar{q} \subseteq \bar{p} \\ &\iff (\forall x \in A)[q \in U(x) \Rightarrow p \in U(x)] \\ &\iff (\forall x \in A)[x \leq p \Rightarrow x \leq q] \\ &\iff p \leq q. \end{aligned}$$

Es decir, el orden de especialización del espacio de puntos es el orden opuesto del marco original.

$$(\text{pt}A, \sqsubseteq) = (\text{pt}A, \leq)^{\text{op}}.$$

En particular, esto prueba que el espacio de puntos, $\text{pt}A$, es T_0 .

4.3. El espacio de puntos del marco de abiertos

Tomemos un espacio topológico $S \in \text{Top}$. ¿Cómo se relacionan los puntos $s \in S$ con los puntos $p \in \mathcal{O}S$? Dado $s \in S$ y $u \in \mathcal{O}S$ con $u \subseteq \bar{s}'$. Tenemos que

$$u \subseteq \bar{s}' \iff \bar{s} \subseteq u' \iff s \in u' \iff s \notin u.$$

Primero, observemos que $\bar{s}' \neq S$ ya que, de otro modo, tendríamos $s \in \bar{s} = \emptyset$.

Además, si $u, v \in \mathcal{O}S$ son tales que $u \cap v \subseteq \bar{s}'$, entonces $s \notin u \cap v$. Esto implica que $s \notin u$ ó $s \notin v$, es decir, $u \subseteq \bar{s}'$ ó $v \subseteq \bar{s}'$. Esto nos dice que \bar{s}' es un punto de

$\mathcal{O}S$. Por lo tanto, tenemos una función $\Phi_S : S \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S$ dada como $\Phi_S(s) = \bar{s}'$. Además, si consideramos a $\text{pt}\mathcal{O}S$ con la topología $U_{\mathcal{O}S}(\mathcal{O}S)$, tenemos que

$$\begin{aligned} s \in (\Phi_S)^{-1}(U_{\mathcal{O}S}(u)) &\iff \Phi_S(s) \in U_{\mathcal{O}S}(u) \\ &\iff u \notin \Phi_{\mathcal{O}S}(s) \\ &\iff u \notin \bar{s}' \\ &\iff s \in u. \end{aligned}$$

Es decir, $(\Phi_S)^{-1}$ manda abiertos de $\text{pt}\mathcal{O}S$ en abiertos de S , así que $\Phi_S : S \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S$ es continua.

4.4. La funtorialidad del espacio de puntos

Queremos ver que la asignación $A \mapsto \text{pt}A$ es un funtor. Además comprobaremos que, si varía A , la reflexión espacial es una transformación natural

$$U_\bullet : \text{id}_{\text{Frm}} \rightarrow \mathcal{O}\text{pt}(-).$$

Notemos que, para un morfismo de marcos $f: A \rightarrow B$ y un punto $p \in \text{pt}B$, $z \leq f_*(p) \iff f(z) \leq p$, donde f_* es adjunto derecho de f . En particular, si $1 \leq f_*(p) \iff f(1) = 1 \leq p$. Esto es imposible ya que $p \in \text{pt}B$. Por lo que $f_*(p) \neq 1$.

Sean $x, y \in A$ tales que $x \wedge y \leq f_*(p)$. Esto pasa si, y sólo si $f(x) \wedge f(y) \leq p$, en consecuencia, $f(x) \leq p$ ó $f(y) \leq p$, i.e., $x \leq f_*(p)$ ó $y \leq f_*(p)$. Por lo que $f_*(p) \in \text{pt}A$.

En resumen, dado un morfismo de marcos $f: A \rightarrow B$, obtenemos una función $\text{pt}f: \text{pt}B \rightarrow \text{pt}A$ dada por la restricción de $f_*: B \rightarrow A$.

Observemos que, para todo $p \in \text{pt}B$, tenemos

$$\begin{aligned} p \in (\text{pt}f)^{-1}(U_A(a)) &\iff f_*(p) \in U_A(a) \\ &\iff a \not\leq f_*(p) \\ &\iff f(a) \not\leq p \\ &\iff p \in U_B(f(a)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{pt}f: \text{pt}B \rightarrow \text{pt}A$ es continua. Es fácil ver que, dados morfismos $k: C \rightarrow B$ y $h: B \rightarrow A$, se satisface $(hk)_* = k_*h_*$. Además, el adjunto derecho de $\text{id}: A \rightarrow A$ también es la identidad de A . De estas observaciones se sigue que la asignación pt es un funtor (contravariante) $\text{pt}: \text{Frm} \rightarrow \text{Top}$.

Además, en el párrafo anterior probamos que

$$\mathcal{O}(\text{pt}f)(U_A(a)) = U_B(f(a))$$

para todo $a \in A$. Es decir: el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ U_A \downarrow & & \downarrow U_B \\ \mathcal{O}\text{pt}A & \xrightarrow{\mathcal{O}\text{pt}f} & \mathcal{O}\text{pt}B \end{array}$$

es conmutativo, así que $U_{\bullet} = (U_A \mid A \in \text{Frm})$ es una transformación natural $U_{\bullet} : \text{id}_{\text{Frm}} \rightarrow \mathcal{O}\text{pt}$.

Por último, hagamos la siguiente observación. Dada una función continua $\psi : S \rightarrow T$, las funciones $\Phi_S : S \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S$ hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\psi} & T \\ \Phi_S \downarrow & & \downarrow \Phi_T \\ \text{pt}\mathcal{O}S & \xrightarrow{\text{pt}\mathcal{O}\psi} & \text{pt}\mathcal{O}T \end{array}$$

En efecto, para todo $v \in \mathcal{O}T$, tenemos

$$\begin{aligned} v \subseteq (\text{pt}\mathcal{O}\psi)(\Phi_S(s)) &\iff v \subseteq (\mathcal{O}\psi)_*(\Phi_S(s)) \\ &\iff (\mathcal{O}\psi)(v) \subseteq \Phi_S(s) \\ &\iff \psi^{-1}(v) \subseteq \bar{s}' \\ &\iff s \notin \psi^{-1}(v) \\ &\iff \psi(s) \notin v \\ &\iff v \subseteq \overline{\psi(s)}' \\ &\iff v \subseteq \Phi_T(\psi(s)), \end{aligned}$$

por lo cual $(\text{pt}\mathcal{O}\psi)(\Phi_S(s)) = \Phi_T(\psi(s))$. Luego, la familia de funciones

$$\Phi_{\bullet} = (\Phi_S : S \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S \mid S \in \text{Top})$$

es una transformación natural

$$\Phi_{\bullet} : \text{id}_{\text{Top}} \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}.$$

4.5. La adjunción

En la primera parte, vimos que todo morfismo de marcos $f : A \rightarrow B$ induce una función continua $\text{pt}f : \text{pt}B \rightarrow \text{pt}A$ dada como la restricción del adjunto derecho $f_* : B \rightarrow A$ de f y probamos que esta asignación es un funtor $\text{pt} : \text{Frm} \rightarrow \text{Top}$. Ahora veremos que pt y el funtor de abiertos $\mathcal{O} : \text{Top} \rightarrow \text{Frm}$ son las mitades de una adjunción contravariante entre Top y Frm ; es decir: que existe un isomorfismo

$$\text{Frm}(A, \mathcal{O}S) \simeq \text{Top}(S, \text{pt}A) \quad (4.1)$$

natural en A y en S .

Cuando aprendimos sobre adjunciones, vimos el caso covariante, en el cual el isomorfismo de adjunción es equivalente a la existencia de dos transformaciones naturales que satisfacen las identidades triangulares.

Ahora veremos que, en el caso contravariante, tenemos el resultado análogo: las identidades triangulares adecuadas implican el isomorfismo natural (4.1).

Recordemos que las transformaciones naturales $U_\bullet : \text{id}_{\text{Frm}} \rightarrow \mathcal{O}\text{pt}$ y $\Phi_\bullet : \text{id}_{\text{Top}} \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}$ tienen componentes dadas como

$$\begin{aligned} U_A : A &\rightarrow \mathcal{O}\text{pt}A \\ a &\mapsto U_A(a) = \{p \in \text{pt}A \mid a \not\leq p\}, \\ \Phi_S : S &\rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S \\ s &\mapsto \Phi_S(s) = \bar{s}'. \end{aligned}$$

Primero veremos que se cumplen las identidades triangulares

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}S & & \text{pt}A \\ \swarrow \text{id}_{\mathcal{O}S} & \downarrow U_{\mathcal{O}S} & \swarrow \text{id}_{\text{pt}A} \\ \mathcal{O}S & \xleftarrow{\mathcal{O}\Phi_S} \mathcal{O}\text{pt}\mathcal{O}S & \text{pt}A \xleftarrow{\text{pt}U_A} \text{pt}\mathcal{O}\text{pt}A \end{array}$$

En efecto, usando las equivalencias

$$\begin{aligned} u \subseteq \Phi_S(s) &\quad \text{si, y solo si} \quad s \notin u, \\ x \in U_A(a) &\quad \text{si, y solo si} \quad a \not\leq x, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} x \in (\mathcal{O}\Phi_S)(U_{\mathcal{O}S}(u)) &\iff \Phi_S(x) \in U_{\mathcal{O}S}(u) \\ &\iff u \not\leq \Phi_S(x) \\ &\iff x \in u, \\ a \leq (\text{pt}U_A)(\Phi_{\text{pt}A}(x)) &\iff U_A(a) \leq \Phi_{\text{pt}A}(x) \\ &\iff x \notin U_A(a) \\ &\iff a \leq x. \end{aligned}$$

Es decir, $(\mathcal{O}\Phi_S)(U_{\mathcal{O}S}(u)) = u$ y $(\text{pt}U_A)(\Phi_{\text{pt}A}(x)) = x$, como se quería.

Ahora, afirmamos que las funciones

$$\begin{aligned} \text{Frm}(A, \mathcal{O}S) &\rightarrow \text{Top}(S, \text{pt}A) \\ f &\mapsto \bar{f} = (\text{pt}f)\Phi_S, \\ \text{Frm}(A, \mathcal{O}S) &\leftarrow \text{Top}(S, \text{pt}A) \\ (\mathcal{O}\varphi)U_A &= \bar{\varphi} \leftarrow \varphi. \end{aligned}$$

conforman una biyección. En efecto, la naturalidad de Φ_\bullet , U_\bullet y las identidades triangulares implican la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}S & \xleftarrow{f} & A & & \text{pt}A \xleftarrow{\varphi} S \\ \swarrow \text{id}_{\mathcal{O}S} & \downarrow U_{\mathcal{O}S} & \downarrow U_A & & \swarrow \text{id}_{\text{pt}A} \downarrow \Phi_{\text{pt}A} \\ \mathcal{O}S & \xleftarrow{\mathcal{O}\Phi_S} \mathcal{O}\text{pt}\mathcal{O}S & \xleftarrow{\mathcal{O}\text{pt}f} \mathcal{O}\text{pt}A & & \text{pt}A \xleftarrow{\text{pt}U_A} \text{pt}\mathcal{O}\text{pt}A \xleftarrow{\text{pt}\mathcal{O}\varphi} \text{pt}\mathcal{O}S \end{array}$$

por lo cual tenemos

$$\begin{aligned}
 \bar{f} &= \overline{(\text{pt}f)\Phi_S} & \bar{\varphi} &= \overline{(\mathcal{O}\varphi)U_A} \\
 &= \mathcal{O}((\text{pt}f)\Phi_S)U_A & &= \text{pt}((\mathcal{O}\varphi)U_A)\Phi_S \\
 &= (\mathcal{O}\Phi_S)(\mathcal{O}\text{pt}f)U_A & &= (\text{pt}U_A)(\text{pt}\mathcal{O}\varphi)\Phi_S \\
 &= f, & &= \varphi.
 \end{aligned}$$

Esto nos da la biyección (4.1). De manera explícita, la biyección está dada como $\text{Frm}(A, \mathcal{O}S) \ni f \leftrightarrow \varphi \in \text{Top}(S, \text{pt}A)$, donde

$$s \in f(a) \quad \text{si, y solo si} \quad a \notin \varphi(s)$$

para cualesquiera $s \in S, a \in A$, puesto que

$$\begin{aligned}
 s \in f(a) &\iff f(a) \notin \Phi_S(s) \\
 &\iff a \notin (\text{pt}f)(\Phi_S(s)) = \bar{f}(s), \\
 a \notin \varphi(s) &\iff \varphi(s) \in U_A(a) \\
 &\iff s \in (\mathcal{O}\varphi)(U_A(a)) = \bar{\varphi}(a).
 \end{aligned}$$

La naturalidad de la biyección se deja como ejercicio:

Ejercicio 8. Verifica que la biyección (4.1) es natural en A y en S .

Solución. Dado un morfismo de marcos $g : A \rightarrow B$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Frm}(B, \mathcal{O}S) & \xrightarrow{f \mapsto f} & \text{Top}(S, \text{pt}B) \\
 \downarrow - \circ g & & \downarrow \text{pt}g \circ - \\
 \text{Frm}(A, \mathcal{O}S) & \xrightarrow{h \mapsto h} & \text{Top}(S, \text{pt}A)
 \end{array}$$

es conmutativo:

$$\begin{aligned}
 \overline{fg} &= \text{pt}(fg)\Phi_S \\
 &= (\text{pt}g)(\text{pt}f)\Phi_S \\
 &= (\text{pt}g)\bar{f}.
 \end{aligned}$$

Similarmente, dada una función continua $\psi : S \rightarrow T$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Frm}(A, \mathcal{O}T) & \xleftarrow{\bar{\varphi} \leftarrow \varphi} & \text{Top}(T, \text{pt}A) \\
 \downarrow \mathcal{O}\psi \circ - & & \downarrow - \circ \psi \\
 \text{Frm}(A, \mathcal{O}S) & \xleftarrow{\bar{\xi} \leftarrow \xi} & \text{Top}(S, \text{pt}A)
 \end{array}$$

es conmutativo:

$$\begin{aligned}
 \overline{\varphi\psi} &= \mathcal{O}(\varphi\psi)U_A \\
 &= (\mathcal{O}\psi)(\mathcal{O}\varphi)U_A \\
 &= (\mathcal{O}\psi)\bar{\varphi}.
 \end{aligned}$$

■

El ejercicio anterior concluye la demostración.

4.6. La propiedad universal de las reflexiones

La biyección

$$\begin{aligned}\mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) &\simeq \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A) \\ f &\mapsto \bar{f} = (\mathrm{pt}f)\Phi_S \\ (\mathcal{O}\varphi)U_A &= \bar{\varphi} \leftarrow \varphi.\end{aligned}$$

se puede leer como sigue: dado un morfismo $f : A \rightarrow \mathcal{O}S$, existe una única función continua $\varphi : S \rightarrow \mathrm{pt}A$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}S \\ U_A \downarrow & \nearrow \mathcal{O}\varphi & \\ \mathcal{O}\mathrm{pt}A & & \end{array}$$

conmuta. Similarmente, dada una función continua $\varphi : S \rightarrow \mathrm{pt}A$, existe un único morfismo $f : A \rightarrow \mathcal{O}S$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{pt}A \\ \Phi_S \downarrow & \nearrow \mathrm{pt}f & \\ \mathrm{pt}\mathcal{O}S & & \end{array}$$

conmuta.

Capítulo 5

Espacios sobrios y marcos espaciales

Recordemos que, por definición, un marco A es espacial si su reflexión espacial $U_A : A \rightarrow \mathcal{O}pt A$ es un isomorfismo (o, equivalentemente, si U_A es inyectiva). Los marcos espaciales, junto con los morfismos de marcos, forman la subcategoría Sp de Top .

Ahora nuestro objetivo es ver que Top tiene una subcategoría dual a Sp , de tal modo que la dualidad está dada por la restricción de la adjunción. La categoría que queremos es la de los espacios sobrios, a la cual denotaremos como Sob . También veremos que, análogamente a lo que pasa con los marcos espaciales, un espacio topológico S es sobrio si, y solo si, $\Phi_S : S \rightarrow pt\mathcal{O}S$ es un isomorfismo.

5.1. Espacios sobrios

Comenzaremos por definir los espacios topológicos sobrios.

Recordemos que, dado un espacio topológico S , $pt\mathcal{O}S$ es el conjunto de elementos \wedge -irreducibles del marco $\mathcal{O}S$. Además, $pt\mathcal{O}S$ tiene una topología canónica, donde los abiertos son los conjuntos de la forma

$$U_{\mathcal{O}S}(u) = \{p \in pt\mathcal{O}S \mid u \not\leq p\}.$$

También recordemos que, dotando a ptA con esta topología, la función $\Phi_S : S \rightarrow pt\mathcal{O}S$ dada como

$$\Phi_S(x) = \bar{x}' = S - \overline{\{x\}}.$$

es continua. A $\Phi_S(x) : S \rightarrow pt\mathcal{O}S$ le llamamos la reflexión sobria de S , debido a la siguiente definición.

Definición 5.1. Decimos que un espacio topológico S es sobrio si cada abierto \wedge -irreducible es de la forma $\Phi_S(x)$ para un único punto $x \in S$. En otras palabras, un espacio S es sobrio si su reflexión sobria $\Phi_S : S \rightarrow \mathcal{O}S$ es biyectiva.

Puede parecer extraño definir la sobriedad en términos de la biyectividad de Φ_S , en lugar de pedir que Φ_S sea un homeomorfismo. Más adelante, veremos que estas condiciones son equivalentes.

Denotamos como Sob a la categoría formada por los espacios topológicos sobrios y sus funciones continuas.

Lema 5.2. Sea S un espacio topológico. Si S es de Hausdorff, entonces S es sobrio. Si S es sobrio, entonces es de Kolmogorov. Esto es

$$T_2 \implies \text{sobrio} \implies T_0.$$

Demostración. Supongamos que S es Hausdorff y sea $u \in \text{pt}\mathcal{O}S$. Es decir, u es un elemento \wedge -irreducible de $\mathcal{O}S$. Queremos ver que $u = \bar{x}'$ (i.e.: $u' = \bar{x}$) para un único punto $x \in S$. Como S es Hausdorff, esto sucede si, y solo si, $u' = \{x\}$ para algún $x \in S$. Por definición, $u \neq S$, así que existe, al menos, un punto en u' . Supongamos que hay dos puntos $x, y \in u'$ distintos. Como S es Hausdorff, existen abiertos $v_1, v_2 \in \mathcal{O}S$ con $x \in v_1, y \in v_2$ y $v_1 \wedge v_2 = \emptyset$. Luego,

$$\begin{aligned} u &= u \vee (v_1 \wedge v_2) \\ &= (u \vee v_1) \wedge (u \vee v_2). \end{aligned}$$

Como u es \wedge -irreducible, esto implica que $v_1 \leq u$ o que $v_2 \leq u$, pero esto implicaría que $x \in u$ o que $y \in u$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $u' = \{x\}$, que es lo que se quería demostrar.

Ahora supongamos que S es sobrio. Si $x, y \in S$ son puntos distintos, entonces Dados $x, y \in S$, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_S(x) = \Phi_S(y) &\iff \bar{x}' = \bar{y}' \\ &\iff \bar{x} = \bar{y} \\ &\iff \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{U}(x)$ y $\mathcal{U}(y)$ son los filtros de vecindades abiertas de x y y , respectivamente. Como Φ_S es inyectiva, dados $x, y \in S$ distintos, tenemos

$$\mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y),$$

así que existe una vecindad abierta de x que no contiene a y o una vecindad abierta de y que no contiene a x . Esto es, S es T_0 . \square

Reformulando un poco la definición de sobriedad, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 5.3. Un espacio S es sobrio si, y solo si, todo cerrado irreducible de S (esto es, todo elemento \vee -irreducible de $\mathcal{C}S$) tiene un único punto genérico.

Demostración. Los cerrados \vee -irreducibles son exactamente los de la forma $c = u'$ para u un abierto \wedge -irreducible. Tomando complementos, vemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Todo abierto \wedge -irreducible es de la forma $u = \bar{x}'$ para un único $x \in S$.

- Todo cerrado \vee -irreducible es de la forma $c = \overline{x}$ para un único $x \in S$.

La primera afirmación es la sobriedad de S , mientras que la segunda dice que todo cerrado irreducible de S tiene un único punto genérico. \square

Ejemplo 5.4. *Dado un anillo conmutativo R , el espectro primo $\text{Spec} R$ es un espacio sobrio.*

Por ejemplo, los cerrados irreducibles de $\text{Spec} \mathbb{Z}$ son de la forma $c = \{p\}$ (para un primo $p \in \mathbb{Z}$) o $c = \text{Spec} \mathbb{Z}$. En el primer caso, el punto genérico es p . De otro modo, tenemos $\overline{\{0\}} = \text{Spec} \mathbb{Z}$.

5.2. La topología de Skula

Recordemos que, dado un marco A , el ensamble NA viene equipado con un morfismo $\eta_A : A \rightarrow NA$ que resuelve el problema de complementación (de hecho, η_A es la solución universal).

Ahora queremos explorar una situación parecida, para una topología $\mathcal{O}S$, aunque solo consideraremos topologías en el conjunto S .

Definición 5.5. *Sea S un espacio topológico y $\mathcal{O}S$ su topología. Definimos $\mathcal{O}^f S$ como la topología más pequeña en S tal que todo $u \in \mathcal{O}S$ es abierto y cerrado. Es decir, $\mathcal{O}^f S$ es la topología generada por la subbase*

$$\mathcal{O}S \cup \{u' \mid u \in \mathcal{O}S\}.$$

En otras palabras, $\mathcal{O}^f S$ es la topología más pequeña sobre S tal que la inclusión $\mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}^f S$ resuelve el problema de complementación. $\mathcal{O}^f S$ se llama la topología de Skula de S , y al conjunto S equipado con $\mathcal{O}^f S$ lo denotamos $^f S$.

Ejemplo 5.6. *Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales. Consideraremos los espacios topológicos. Además, sean ${}^l\mathbb{R}$, ${}_m\mathbb{R}$ y ${}^r\mathbb{R}$ los espacios topológicos dados por \mathbb{R} equipado con la topologías generadas por*

$$\begin{aligned} &\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}, \\ &\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \\ &\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Nótese que $\mathcal{O}_m\mathbb{R}$ es la topología estandar. Además, tenemos

$$\mathcal{O}^l\mathbb{R} \subseteq \mathcal{O}_m\mathbb{R} \subseteq \mathcal{O}^r\mathbb{R}.$$

No es difícil ver que ${}^l\mathbb{R}$ es T_0 , aunque no es T_0 .

Entonces $\mathcal{O}^r\mathbb{R}$ es la topología de Skula en $\mathcal{O}^l\mathbb{R}$:

$$\mathcal{O}^f({}^l\mathbb{R}) = \mathcal{O}^r\mathbb{R}.$$

Dado que la inclusión $\iota : \mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}^f S$ es un morfismo de marcos que resuelve el problema de complementación, se factoriza de manera única a través de $\eta_{\mathcal{O}S}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}S & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}^f S \\ \eta_{\mathcal{O}S} \downarrow & \nearrow \iota^! & \\ N\mathcal{O}S & & \end{array}$$

Por la adjunción entre \mathcal{O} y pt , el morfismo $\iota^! : N\mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}^f S$ corresponde a un único morfismo $\varphi : {}^f S \rightarrow \text{pt}N\mathcal{O}S$. Reemplazando a $\mathcal{O}S$ por un marco arbitrario A y a S por $\text{pt}A$, se puede demostrar que φ es un isomorfismo.

5.3. Las distintas encarnaciones del espacio de puntos

Recordemos que definimos el espacio de puntos de un marco como el conjunto de sus elementos \wedge -irreducibles. Ahora veremos otras dos construcciones equivalentes.

Definición 5.7. Sea A es una retícula. Un subconjunto $F \subseteq A$ es un filtro si

- es sección superior (absorbe hacia arriba),
- es no vacío y
- es cerrado bajo ínfimos de dos elementos.

Además, un filtro F es propio si $0 \notin F$. Nótese que

$$0 \in F \quad \text{si, y solo si} \quad F = A.$$

Decimos que un filtro $F \subseteq A$ es primo si,

- es propio y
- siempre que $a \vee b \in F$, entonces $a \in F$ o $b \in F$.

Si A es una retícula completa (por ejemplo, un marco), entonces decimos que un filtro $F \subseteq A$ es completamente primo si,

- es propio y
- siempre que $\bigvee X \in F$, entonces existe $x \in X \cap F$.

Ejemplo 5.8. Sean S un espacio topológico y $x \in S$. Entonces el conjunto de vecindades abiertas de x

$$\mathcal{U}(x) = \{u \in \mathcal{O}S \mid x \in u\}$$

es un filtro completamente primo.

En efecto, $\mathcal{U}(x)$ es un filtro:

- si $x \in u \leq v$, entonces $x \in v$;
- $x \in S$;
- si $x \in u$ y $x \in v$, entonces $x \in u \wedge v$.

Además, $\mathcal{U}(x)$ es propio, ya que $\emptyset \notin \mathcal{U}(x)$. Finalmente, si $X \subseteq \mathcal{OS}$ es tal que $x \in \bigvee X$, entonces existe $u \in X$ tal que $x \in u$.

Definición 5.9. Un caracter en un marco A es un morfismo

$$\chi : A \rightarrow 2.$$

Teorema 5.10. Las funciones

$$\begin{aligned} (\text{pt}A, \sqsubseteq) &= (\text{pt}A, \leq)^{\text{op}} \rightleftarrows \text{Cp}(A) & \text{Cp}(A) &\rightleftarrows \text{Frm}(A, 2) \\ p &\mapsto F_p = \{a \in A \mid a \not\leq p\} & F &\mapsto \chi_F \\ \bigvee \{a \in A \mid a \notin F\} &= p_F \leftarrow F & \chi^{-1}(1) &= F_\chi \leftarrow \chi \end{aligned}$$

son isomorfismos de copos.

Demostración. **Primera parte.** Veamos que las funciones

$$\begin{aligned} \text{pt}A &\rightleftarrows \text{Cp}(A) \\ p &\mapsto F_p = \{a \in A \mid a \not\leq p\} \\ \bigvee \{a \in A \mid a \notin F\} &= p_F \leftarrow F \end{aligned}$$

están bien definidas.

- Dado un $p \in \text{pt}A$, sea $F_p = \{a \in A \mid a \not\leq p\}$. Como $p \neq 1$, tenemos $1 \not\leq p$, por lo cual $1 \in F_p$. Además, F_p es cerrado hacia arriba: Si $a \geq b$, entonces $a \leq p \implies b \leq p$, o bien $b \not\leq p \implies a \not\leq p$; es decir: $b \in F_p$ implica que $a \in F_p$. Si $a, b \in A$, la irreducibilidad de p implica que $a \wedge b \leq p \implies a \leq p \vee b \leq p$. Tomando contrapuesta, tenemos $a, b \in F_p \implies a \wedge b \in F_p$. Luego, F_p es un ideal.

Notemos que F_p es propio, pues $0 \leq p$ implica $0 \notin F_p$. Finalmente, si $X \subseteq A$ tenemos

$$(\forall x \in X, x \leq p) \implies \bigvee X \leq p$$

o, tomando contrapuesta:

$$\bigvee X \not\leq p \implies \exists x \in X, x \not\leq p.$$

Luego, F_p es completamente primo.

- Dado un filtro completamente primo F , consideremos $p_F = \bigvee \{x \in A \mid x \notin F\}$. Como F es completamente primo, tenemos $p_F \notin F$. Además, todo $x \leq p$

cumple $x \notin F$ (de otro modo, tendríamos $p \in F$, pues F es sección superior). Es decir:

$$x \notin F \iff x \leq p_F.$$

Notemos que $p_F \neq 1$, pues $1 \in F$. Como F es filtro, tenemos que $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$. Tomando contrapuesta, obtenemos $a \wedge b \leq p \implies a \leq p_F$ o $b \leq p_F$. Ahora sean $a, b \in A$ tales que $a \not\leq p_F$, $b \not\leq p_F$. Como F es sección superior, se sigue que $a \in F$, por lo cual $a \not\leq p_F$. Es decir, p_F es \wedge -irreducible, o bien $p_F \in \text{pt}A$.

Ahora veamos que estas funciones son inversas mutuas. Dado $p \in \text{pt}A$, tenemos $F_p = \{x \in A \mid x \not\leq p\}$. Entonces para todo $y \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} p_{F_p} \leq y &\iff \bigvee \{x \in A \mid x \notin F_p\} \leq y \\ &\iff (\forall x \in A, x \notin F_p \implies x \leq y) \\ &\iff (\forall x \in A, x \leq p \implies x \leq y) \\ &\iff p \leq y. \end{aligned}$$

Se sigue que $p_{F_p} = p$. Ahora sea $F \in \text{Cp}(A)$ y consideremos $p_F = \bigvee \{x \in A \mid x \notin F\}$. Arriba ya mostramos que, para todo $x \in A$, tenemos

$$x \leq p \iff x \notin F_p,$$

de modo que $F_{p_F} = \{x \in A \mid x \not\leq p\} = F$. Luego, las funciones forman una biyección.

Finalmente, notemos que, dados $p, q \in \text{pt}A$, tenemos

$$p \leq q \implies F_q = \{x \in A \mid x \not\leq q\} \subseteq \{x \in A \mid x \not\leq p\} = F_p,$$

por lo cual obtenemos un isomorfismo de copos

$$(\text{pt}A, \sqsubseteq) = (\text{pt}A, \leq)^{\text{op}} \simeq \text{Cp}(A).$$

Segunda parte. Veamos que las otras dos funciones

$$\begin{aligned} \text{Cp}(A) &\rightleftarrows \text{Frm}(A, 2) \\ F &\mapsto \chi_F \\ \chi^{-1}(1) &= F_\chi \leftarrow \chi \end{aligned}$$

están bien definidas.

- Si F es un filtro completamente primo de un marco A , entonces la función característica $\chi_F : A \rightarrow 2$ de F , dada como

$$\chi_F(a) = \begin{cases} 1 & a \in F \\ 0 & a \notin F, \end{cases}$$

es un morfismo de marcos y, por lo tanto, es un caracter de A .

En efecto, dados $x, y \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \chi_F(x \wedge y) = 1 &\iff x \wedge y \in F \\
 &\iff x \in F, y \in F && \text{ya que } F \text{ es filtro} \\
 &\iff \chi_F(x) = 1, \chi_F(y) = 1 \\
 &\iff \chi_F(x) \wedge \chi_F(y) = 1.
 \end{aligned}$$

Como χ_F toma valores en 2, esto muestra que χ_F preserva ínfimos de dos elementos. Además, $1 \in F$, por lo cual $\chi_F(1) = 1$.

Más aún, dado $X \subseteq A$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \chi_F(\bigvee X) = 1 &\iff \bigvee X \in F \\
 &\iff \exists x \in X, x \in F && \text{ya que } F \text{ es comp. primo} \\
 &\iff \exists x \in X, \chi_F(x) = 1 \\
 &\iff \bigvee \{\chi_F(x) \mid x \in X\} = 1 && \text{ya que } \chi_F \text{ es 2-valuado.}
 \end{aligned}$$

Luego, χ_F preserva supremos. Esto prueba que $\chi_F \in \text{Frm}(A, 2)$.

- Tomemos $\chi \in \text{Frm}(A, 2)$ y sea $F_\chi = \chi^{-1}(1)$. F_χ es no vacío, pues $1 \in F_\chi$. F_χ es cerrado hacia arriba: si $a \geq b \in F_\chi$, entonces $\chi(a) \geq \chi(b) = 1$, por lo cual $a \in F_\chi$. Ahora, dados $a, b \in F_\chi$ tenemos $\chi(a \wedge b) = \chi(a) \wedge \chi(b) = 1 \wedge 1 = 1$, así que $a \wedge b \in F_\chi$. Se sigue que F_χ es un ideal.

Además F_χ es propio, pues $0 \notin F_\chi$. Finalmente, si $X \subseteq A$ es tal que $\bigvee X \in F_\chi$, tenemos $1 = \chi(\bigvee X) = \bigvee \{\chi(x) \mid x \in X\}$, lo cual solo puede suceder si hay $x \in X$ con $\chi(x) = 1$, así que $x \in X \cap F_\chi$. Por lo tanto, F_χ es completamente primo.

Ahora veamos que estas funciones son inversas mutuas. Si $\chi : A \rightarrow 2$, consideremos $F_\chi = \chi^{-1}(1)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
 \chi_{F_\chi}(x) = 1 &\iff x \in F_\chi \\
 &\iff \chi(x),
 \end{aligned}$$

por lo cual $\chi_{F_\chi} = \chi$. Dado un filtro completamente primo F , consideremos χ_F . Entonces

$$\begin{aligned}
 F_{\chi_F} &= \chi_F^{-1}(1) \\
 &= \{x \in A \mid \chi_F(x) = 1\} \\
 &= \{x \in A \mid x \in F\} \\
 &= F.
 \end{aligned}$$

Luego, las funciones son inversas mutuas. Además, si $\chi \leq \xi$ son caracteres de A , tenemos que

$$\begin{aligned}
 F_\chi &= \{x \in A \mid \chi(x) = 1\} \\
 &\subseteq \{x \in A \mid \xi(x) = 1\} \\
 &= F_\xi,
 \end{aligned}$$

de modo que tenemos un isomorfismo de copos

$$\text{Cp}(A) \simeq \text{Frm}(A, 2).$$

Esto concluye la demostración. \square

Recordemos que los elementos de la topología en $\text{pt}A$ se definen como los de la forma

$$U_A(a) = \{p \in \text{pt}A \mid a \not\leq p\}.$$

El teorema anterior nos dice que, en vez de tomar al espacio de puntos $\text{pt}A$ formado por los elementos \wedge -irreducibles de A , a un marco le podemos asignar su espacio de puntos formado por sus filtros completamente primos

$$\text{pt}^{\mathcal{F}}A = \text{Cp}A$$

o su espacio de puntos formado por sus caracteres

$$\text{pt}^{\chi}A = \text{Frm}(A, 2).$$

cuyas topologías están dadas por la imagen de $\mathcal{O}\text{pt}A$ bajo las biyecciones. Explícitamente, las topologías en $\text{pt}^{\mathcal{F}}A$ y en $\text{pt}^{\chi}A$ están dadas por los conjuntos de la forma

$$U_A^{\mathcal{F}}(a) = \{F \in \text{Cp}(A) \mid a \in F\}$$

y

$$U_A^{\chi}(a) = \{\chi \in \text{Frm}(A, 2) \mid \chi(a) = 1\},$$

respectivamente.

En particular, dado un espacio topológico S , podemos formar los tres espacios homeomorfos $\text{pt}\mathcal{O}S$, $\text{pt}^{\mathcal{F}}\mathcal{O}S$ y $\text{pt}^{\chi}\mathcal{O}S$, y cada uno viene equipado con las reflexiones sobrias que se obtienen al componer con los homeomorfismos. Explícitamente, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_S : S &\rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S \\ x &\mapsto \overline{x}' \\ \Phi_S^{\mathcal{F}} : S &\rightarrow \text{pt}^{\mathcal{F}}\mathcal{O}S \\ x &\mapsto \{u \in \mathcal{O}S \mid x \in u\} = \mathcal{U}(x) \\ \Phi_S^{\chi} : S &\rightarrow \text{pt}^{\chi}\mathcal{O}S \\ x &\mapsto \chi_{\mathcal{U}(x)}. \end{aligned}$$

Dado que estas tres funciones tienen las mismas propiedades, podemos ver que un espacio S es sobrio si, y solo si, todo filtro completamente primo de $\mathcal{O}S$ es de la forma $\mathcal{U}(x)$ para un único $x \in X$, lo cual sucede si, y solo si, todo morfismo de marcos $\mathcal{O}S \rightarrow 2$ es de la forma $\chi_{\mathcal{U}(x)}$ para un único $x \in S$.

5.4. La dualidad entre Sob y Sp

Recordemos que un marco A es espacial si su reflexión espacial

$$U_A : A \rightarrow \mathcal{O}pt A$$

es un isomorfismo, y que un espacio topológico S es sobrio si su reflexión sobria

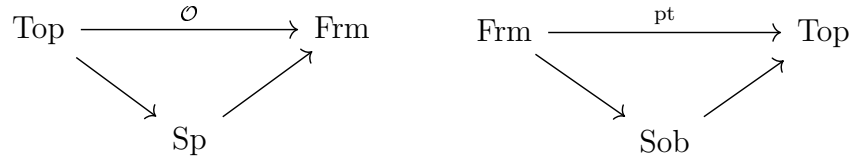
$$\Phi_S : S \rightarrow pt\mathcal{O}S$$

es biyectiva (después veremos que este es equivalente a que Φ_S sea un homeomorfismo).

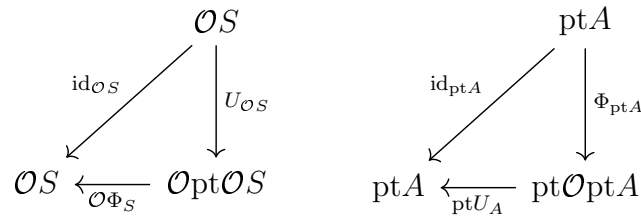
Lema 5.11.

- Para todo espacio S , el marco $\mathcal{O}S$ es espacial.
- Para todo marco A , el espacio $pt A$ es sobrio.

En otras palabras, los funtores $\mathcal{O} : \text{Top} \rightarrow \text{Frm}$ y $pt : \text{Frm} \rightarrow \text{Top}$ se factorizan a través de Sp y Sob , respectivamente:



Demostración. En 4.5 probamos que las identidades triangulares



siempre se satisfacen. Como queremos probar que $U_{\mathcal{O}S}$ es un isomorfismo y que $\Phi_{pt A}$ es biyectiva, basta probar que las otras composiciones también son las identidades en $\mathcal{O}S$ y en $pt A$, respectivamente. Esto es:

$$\begin{aligned}
 (U_{\mathcal{O}S})(\mathcal{O}\Phi_S) &= id_{\mathcal{O}S} \\
 (\Phi_{pt A})(ptU_A) &= id_{pt A}.
 \end{aligned}$$

Lo primero es fácil: todo abierto $U \in \mathcal{O}pt\mathcal{O}S$ es de la forma $U = U_{\mathcal{O}S}(u)$ para algún $u \in \mathcal{O}S$. Luego,

$$\begin{aligned}
 U_{\mathcal{O}S}(\mathcal{O}\Phi_S(U)) &= U_{\mathcal{O}S}(\mathcal{O}\Phi_S(U_{\mathcal{O}S}(u))) \\
 &= U_{\mathcal{O}S}(u) \\
 &= U.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, todo punto $z \in \text{pt}\mathcal{O}\text{pt}A$, es elemento de $\mathcal{O}\text{pt}A$ y, por lo tanto, es de la forma $z = U_A(x)$ para algún $x \in A$. Poniendo $y = (\text{pt}U_A)(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} y &= (\text{pt}U_A)(z) \\ &= (U_A)_*(z) \\ &= \bigvee \{a \in A \mid U_A(a) \leq z\} \\ &= \bigvee \{a \in A \mid U_A(a) \leq U_A(x)\}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} U_A(y) &= \bigvee \{U_A(a) \in A \mid U_A(a) \leq U_A(x)\} \\ &= U_A(x) \\ &= z. \end{aligned}$$

Luego, para todo $p \in \text{pt}A$ tenemos

$$\begin{aligned} p \in \Phi_{\text{pt}A}((\text{pt}U_A)(z)) &\iff p \in \Phi_{\text{pt}A}(y) \\ &\iff p \in \overline{y'} \\ &\iff y \not\leq p \\ &\iff p \in U_A(y) = z. \end{aligned}$$

□

Esta prueba también muestra que, si $\Phi_S : S \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S$ es biyectiva, entonces es un homeomorfismo, pues $\mathcal{O}\Phi_S : \mathcal{O}\text{pt}\mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}S$ siempre es un isomorfismo de marcos. Luego, un espacio S es sobrio si, y solo si, $\Phi_S : S \rightarrow \text{pt}\mathcal{O}S$ es un isomorfismo.

Una consecuencia inmediata es que las composiciones

$$\begin{aligned} \text{Sob} &\rightarrow \text{Frm} \rightarrow \text{Sp} \\ \text{Sp} &\rightarrow \text{Top} \rightarrow \text{Sob} \end{aligned}$$

son esencialmente suprayectivas. En efecto: para cualquier marco espacial A tenemos $A \simeq \mathcal{O}\text{pt}A$ con $\text{pt}A$ sobrio, mientras que, para cualquier espacio sobrio S , tenemos $S \simeq \text{pt}\mathcal{O}S$ con $\mathcal{O}S$ espacial.

Además, estos funtores son fielmente plenos, pues dados marcos espaciales A, B y espacios S, T sobrios, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Sp}(A, B) &= \text{Frm}(A, B) \\ &\simeq \text{Frm}(A, \mathcal{O}\text{pt}B) \\ &\simeq \text{Frm}(\text{pt}B, \text{pt}A) \\ &\simeq \text{Sob}(\text{pt}B, \text{pt}A), \\ \text{Sob}(S, T) &= \text{Top}(S, T) \\ &\simeq \text{Top}(S, \text{pt}\mathcal{O}T) \\ &\simeq \text{Frm}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}S) \\ &\simeq \text{Sp}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}S). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el resultado

Teorema 5.12. *La adjunción contravariante*

$$\text{Frm} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{O}} \\ \xleftarrow{\text{pt}} \end{array} \text{Top}$$

se restringe a una equivalencia dual entre Sp y Sob . Esto es:

$$\text{Sp}^{\text{op}} \simeq \text{Sob}.$$

5.5. Sp y Sob son reflexivas.

Ahora veremos que las subcategorías Sp de Frm y Sob de Top son reflexivas. Esto es: los funtores de inclusión

$$\text{Sp} \rightarrow \text{Frm}$$

$$\text{Sob} \rightarrow \text{Top}$$

tienen adjuntos izquierdos. De hecho, veremos que los adjuntos son (las restricciones de) \mathcal{O}_{pt} y $\text{pt}\mathcal{O}$, respectivamente. En realidad la demostración es bastante fácil. Usaremos la adjunción

$$\text{Frm}(A, \mathcal{O}S) \simeq \text{Top}(S, \text{pt}A).$$

Denotemos, por un momento, como $i : \text{Sp} \rightarrow \text{Frm}$ al funtor de inclusión. Entonces, para todo marco A y todo marco espacial B , tenemos $\text{pt}\mathcal{O}_{\text{pt}}A \simeq \text{pt}A$ y $\mathcal{O}_{\text{pt}}B \simeq B$, por lo cual tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{Frm}(A, iB) &= \text{Frm}(A, B) \\ &\simeq \text{Frm}(A, \mathcal{O}_{\text{pt}}B) \\ &\simeq \text{Top}(\text{pt}B, \text{pt}A) \\ &\simeq \text{Top}(\text{pt}B, \text{pt}\mathcal{O}_{\text{pt}}A) \\ &\simeq \text{Frm}(\mathcal{O}_{\text{pt}}A, \mathcal{O}_{\text{pt}}B) \\ &\simeq \text{Frm}(\mathcal{O}_{\text{pt}}A, B) \\ &\simeq \text{Sp}(\mathcal{O}_{\text{pt}}A, B) \end{aligned}$$

naturales en A y en B . Se sigue que $\mathcal{O}_{\text{pt}} \dashv i$.

Ahora denotemos como $i : \text{Sob} \rightarrow \text{Top}$ al funtor de inclusión. Para todo espacio S y todo espacio sobrio T , tenemos $\mathcal{O}_{\text{pt}}\mathcal{O}S \simeq \mathcal{O}S$ y $\text{pt}\mathcal{O}T \simeq T$, por lo cual tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{Top}(S, iT) &= \text{Top}(S, T) \\ &\simeq \text{Top}(S, \text{pt}\mathcal{O}T) \\ &\simeq \text{Frm}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}S) \\ &\simeq \text{Frm}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}_{\text{pt}}\mathcal{O}S) \\ &\simeq \text{Top}(\text{pt}\mathcal{O}S, \text{pt}\mathcal{O}T) \\ &\simeq \text{Top}(\text{pt}\mathcal{O}S, T) \\ &\simeq \text{Sob}(\text{pt}\mathcal{O}S, T) \end{aligned}$$

naturales en S y en T . Se sigue que $\text{pt}\mathcal{O} \dashv i$.

5.6. Dualidad de Stone

Definición 5.13. Sea A una retícula completa. Decimos que un elemento $a \in A$ es compacto si, para todo $S \subseteq A$ tal que $a \leq \bigvee S$, existe un subconjunto finito $T \subseteq S$ tal que $a \leq \bigvee T$.

Al conjunto de elementos compactos de A lo denotamos como $\mathcal{K}A$.

Nótese que $\mathcal{K}A$ es cerrado bajo supremos finitos. En efecto, sean $a, b \in \mathcal{K}A$. Si $X \subseteq A$ es tal que $a \vee b \leq \bigvee X$, entonces $a \leq \bigvee X$ y $b \leq \bigvee X$, por lo cual existen subconjuntos finitos $S, T \subseteq X$ tales que $a \leq \bigvee S$ y $b \leq \bigvee T$. Luego, $a \vee b \leq \bigvee \{S \cup T\}$ con $S \cup T \subseteq X$ finito. Claramente, $0 \in \mathcal{K}A$.

Definición 5.14. Decimos que un marco A es coherente si

- Todo elemento de A es supremo de elementos en $\mathcal{K}A$.
- $\mathcal{K}A$ es cerrado bajo ínfimos finitos y $1 \in \mathcal{K}A$. Es decir, $\mathcal{K}A$ es una subretícula de A .

En particular, dado un marco coherente A , la retícula $\mathcal{K}A$ es distributiva.

Definición 5.15. Sea D una retícula distributiva. Un ideal de D es un subconjunto $I \subseteq D$ tal que

- Absorbe hacia abajo (esto es, $I \in \mathcal{L}A$).
- Es no vacío.
- Es cerrado bajo supremos finitos.

Al conjunto de ideales de D lo denotamos como $\mathcal{I}D$.

Lema 5.16. Sea D una retícula distributiva. El conjunto $\mathcal{I}D$ de ideales de D es un marco, con el orden de contención (el heredado de $\mathcal{P}D$).

Nótese que $\mathcal{I}D$ no es un submarco de $\mathcal{P}D$ ni de $\mathcal{L}D$, pues $\emptyset \notin \mathcal{I}D$.

Demostración. Nótese que D y $\{0\}$ son el mayor y menor elemento de $\mathcal{I}D$, respectivamente.

Sea $X \subseteq \mathcal{I}D$ y notemos que $\bigcap X$ es una sección inferior no vacía. Además, dados $a, b \in \bigcap X$, tenemos $a, b \in I$ para todo $I \in X$. Como cada I es ideal, se sigue que $a \wedge b \in I$ para todo $I \in X$; esto es: $a \wedge b \in \bigcap X$. Luego, $\bigcap X$ es ideal de D y, por lo tanto, es el ínfimo de X en $\mathcal{I}D$

$$\bigwedge X = \bigcap X,$$

Es decir, $\mathcal{I}D$ es una sub- \wedge -semiretícula de $\mathcal{P}D$ (y de $\mathcal{L}D$). En particular, $\mathcal{I}D$ es una retícula completa. Sin embargo, los supremos en $\mathcal{I}D$ no se calculan como en $\mathcal{P}D$.

Como \mathcal{ID} es un conjunto \wedge -cerrado de \mathcal{PD} , le corresponde un operador cerradura $j : \mathcal{PD} \rightarrow \mathcal{PD}$. Afirmamos que j está dado como

$$j(S) = \{\bigvee T \mid T \subseteq \downarrow S \text{ finito}\},$$

donde $\downarrow : \mathcal{PD} \rightarrow \mathcal{PD}$ es la sección inferior generada por S (el operador cerradura que le corresponde a \mathcal{LD}). En efecto, si I es un ideal que contiene a S , entonces $\downarrow S \subseteq I$ (porque I es sección inferior) así que, para todo $T \subseteq \downarrow S$ finito tenemos $\bigvee T \in I$. Además, $\{\bigvee T \mid T \subseteq \downarrow S \text{ finito}\}$ es ideal, ya que D es distributiva. En particular, para un ideal I y una sección inferior L , tenemos

$$\begin{aligned} I \cap j(L) &= I \cap \{\bigvee T \mid T \subseteq \downarrow L \text{ finito}\} \\ &= I \cap \{\bigvee T \mid T \subseteq L \text{ finito}\} \\ &= \{\bigvee T \mid \bigvee T \in I, T \subseteq L \text{ finito}\} \\ &= \{\bigvee T \mid T \subseteq I, T \subseteq L \text{ finito}\} & (\bigvee T \in I \iff T \subseteq I) \\ &= \{\bigvee T \mid T \subseteq (I \cap L) \text{ finito}\} \\ &= j(I \cap L). \end{aligned}$$

Ahora recordemos que los supremos en \mathcal{ID} se calculan como

$$\bigvee X = j(\bigcup X)$$

para $X \subseteq \mathcal{ID}$. Luego, dado $I \in \mathcal{ID}$, tenemos

$$\begin{aligned} I \wedge \bigvee X &= I \cap j(\bigcup X) \\ &= j(I \cap \bigcup X) & \text{pues } \bigcup X \text{ es sección inferior} \\ &= j(\bigcup \{I \cap J \mid J \in X\}) \\ &= \bigvee \{I \wedge J \mid J \in X\}. \end{aligned}$$

Se sigue que \mathcal{ID} es marco. □

Teorema 5.17. ■ Si A es un marco coherente, entonces

$$A \simeq \mathcal{IK}A.$$

(Recordemos que \mathcal{KA} es una retícula distributiva).

■ Si D es una retícula distributiva, entonces

$$D \simeq \mathcal{KID},$$

donde \mathcal{ID} es un marco coherente.

Nótese: este teorema implica que los marcos coherentes son exactamente los marcos de ideales de las retículas distributivas.

Demostración. ■ Sea A un marco coherente. Entonces la función $\iota_A : A \rightarrow \mathcal{IK}A$ dada como

$$\iota_A(a) = \{c \in \mathcal{K}A \mid c \leq a\} = \downarrow a \cap \mathcal{K}A$$

es monótona y, para cualesquiera $a \in A, I \in \mathcal{IK}A$, tenemos

$$\begin{aligned} \bigvee \iota_A(a) &= \bigvee \{c \in \mathcal{K}A \mid c \leq a\} \\ &= a && \text{porque } A \text{ es coherente} \\ \iota_A(\bigvee I) &= \{c \in \mathcal{K}A \mid c \leq \bigvee I\} \\ &= I. \end{aligned}$$

Se sigue que $\iota_A : A \rightarrow \mathcal{IK}A$ tiene inversa dada por

$$\iota_A^{-1}(I) = \bigvee I.$$

- Ahora sea D una retícula distributiva. Por un lado, notemos que toda sección inferior principal $\downarrow d$ es un ideal. Afirmamos que $\downarrow d$ es compacto:

Supongamos que X es una familia de ideales de D con $\downarrow d \leq \bigvee X$; es decir: $d \in j(\bigcup X)$, de modo que tenemos $d = \bigvee \{d_1, \dots, d_n\}$, donde $d_i \in I_i \in X$ para $i = 1, \dots, n$. Luego, $d \in j(\bigcup_{i=1}^n I_i)$, por lo cual $\downarrow d \leq \bigvee \{I_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Esto muestra la compacidad de $\downarrow d$.

Recíprocamente, todo ideal compacto I es principal:

Observemos que $I \leq \bigvee \{\downarrow d \mid d \in I\}$, lo cual implica que existen $d_1, \dots, d_n \in I$ tales que $I \leq \bigvee \{\downarrow d_1, \dots, \downarrow d_n\}$, pero

$$I \leq \bigvee \{\downarrow d_1, \dots, \downarrow d_n\} = \downarrow (d_1 \vee \dots \vee d_n),$$

con $d_1 \vee \dots \vee d_n \in I$, pues I es ideal. Luego, $I = \downarrow (d_1 \vee \dots \vee d_n)$, de modo que I es principal.

Luego, la función $\kappa_D : D \rightarrow \mathcal{KID}$ dada como

$$\kappa_D(d) = \downarrow d$$

es un isomorfismo. Nótese que, como todo ideal compacto I es principal, el elemento $d \in D$ que lo genera es su mayor elemento, por lo cual I tiene supremo $\bigvee I = d$.

Solo falta verificar que \mathcal{ID} es coherente, pero esto es sencillo: Primero, todo ideal $I \in \mathcal{ID}$ es supremo de ideales coherentes:

$$I = \bigvee \{\downarrow d \mid d \in I\}.$$

Además, el ideal total

$$1_{\mathcal{ID}} = D = \downarrow 1_D$$

es compacto y, dados ideales compactos $\downarrow d, \downarrow e \in \mathcal{KID}$, tenemos que su ínfimo $\downarrow d \wedge \downarrow e = \downarrow (d \wedge e)$ es compacto.

□

Definición 5.18. Sean A y B marcos coherentes. Decimos que un morfismo de marcos $f : A \rightarrow B$ es coherente si $f(\mathcal{K}A) \subseteq \mathcal{K}B$.

Los marcos coherentes, junto con los morfismos coherentes, forman una categoría, a la cual denotamos como CohFrm . Nótese que tenemos un funtor de inclusión $\text{CohFrm} \rightarrow \text{Frm}$.

Por definición, un morfismo de marcos coherentes $f : A \rightarrow B$ se restringe a un morfismo de retículas (distributivas) $\mathcal{K}f : \mathcal{K}A \rightarrow \mathcal{K}B$. Además, dado un morfismo de retículas distributivas $g : D \rightarrow E$, definimos $\mathcal{I}g : \mathcal{I}D \rightarrow \mathcal{I}E$ como

$$\mathcal{I}g(I) = \bigvee \{ \downarrow g(d) \mid d \in I \},$$

lo cual respeta supremos (ya que $I = \bigvee \{ \downarrow d \mid d \in I \}$) y respeta ínfimos, pues

$$\begin{aligned} \mathcal{I}g(I) \wedge \mathcal{I}g(J) &= \bigvee \{ \downarrow g(d) \mid d \in I \} \wedge \bigvee \{ \downarrow g(e) \mid e \in J \} \\ &= \bigvee \{ \downarrow g(d \wedge e) \mid d \in I, e \in J \} \\ &\leq \bigvee \{ \downarrow g(x) \mid x \in I \cap J \}. \end{aligned}$$

(La otra comparación se sigue de la monotonía).

También es claro que las asignaciones $f \mapsto \mathcal{K}f$ y $g \mapsto \mathcal{I}g$ respetan la identidad y la composición de morfismos, por lo cual obtenemos funtores $\mathcal{I} : \text{DLat} \rightarrow \text{CohFrm}$ y $\mathcal{K} : \text{CohFrm} \rightarrow \text{DLat}$.

Teorema 5.19. Los funtores

$$\text{DLat} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{I}} \\ \xleftarrow{\mathcal{K}} \end{array} \text{CohFrm}$$

constituyen una equivalencia.

Demostración. Dado que, para toda retícula distributiva D y todo marco coherente A , κ_D y ι_A son isomorfismos, basta demostrar que las familias de morfismos

$$\begin{aligned} \kappa_\bullet &= (\kappa_D \mid D \in \text{DLat}) \\ \iota_\bullet &= (\iota_A \mid A \in \text{CohFrm}) \end{aligned}$$

son transformaciones naturales

$$\begin{aligned} \kappa_\bullet : \text{id}_{\text{DLat}} &\rightarrow \mathcal{K}\mathcal{I} \\ \iota_\bullet : \text{id}_{\text{CohFrm}} &\rightarrow \mathcal{I}\mathcal{K}. \end{aligned}$$

Dado un morfismo de retículas distributivas $g : D \rightarrow E$, debemos verificar la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}\mathcal{I}D & \xleftarrow{\kappa_D} & D \\ \mathcal{K}\mathcal{I}g \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{K}\mathcal{I}E & \xleftarrow{\kappa_E} & E \end{array}$$

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}\mathcal{I}g(\kappa_D(d)) &= \mathcal{I}g(\downarrow d) \\
 &= \bigvee \{\downarrow g(x) \mid x \in \downarrow d\} \\
 &= \bigvee \{\downarrow g(x) \mid x \leq d\} \\
 &= \downarrow g(d) \\
 &= \kappa_E(g(d)).
 \end{aligned}$$

Esto muestra la naturalidad de κ_\bullet .

Por otro lado, dado un morfismo de marcos coherentes $f : A \rightarrow B$ debemos verificar la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{I}\mathcal{K}A & \xleftarrow{\iota_A} & A \\
 \mathcal{I}\mathcal{K}f \downarrow & & \downarrow f \\
 \mathcal{I}\mathcal{K}B & \xleftarrow{\iota_B} & B
 \end{array}$$

Primero notemos que, para $c \in A$ compacto, tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(c)) &= \bigvee \{\downarrow f(x) \cap \mathcal{K}B \mid x \in \iota_A(c)\} \\
 &= \bigvee \{\downarrow f(x) \cap \mathcal{K}B \mid x \leq c, x \in \mathcal{K}A\} \\
 &= \downarrow f(c) \cap \mathcal{K}B \\
 &= \iota_B(f(c)).
 \end{aligned}$$

Como todo elemento de A es supremo de compactos, podemos tomar $a \in A$ y encontrar $X \subseteq A$ con $a = \bigvee X$. Luego, como $\mathcal{I}\mathcal{K}f$, ι_A , ι_B y f son morfismos de marcos, tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(a)) &= \mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(\bigvee X)) \\
 &= \bigvee \{\mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(c)) \mid c \in X\} \\
 &= \bigvee \{\iota_B(f(c)) \mid c \in X\} \\
 &= \iota_B(f(\bigvee X)) \\
 &= \iota_B(f(a)).
 \end{aligned}$$

Esto muestra la naturalidad de ι_\bullet . □

El siguiente lema, junto con el lema de Zorn, nos servirán para mostrar que todo marco coherente es espacial.

Lema 5.20. Sean A un marco y $d \in A$. Denotemos como $Z(d)$ al conjunto de los ideales de A que no contienen a d . Entonces

1. el copo $Z(d)$ es cerrado bajo uniones de familias dirigidas,
2. cada elemento máximo de $Z(d)$ es un ideal primo de A y,
3. si d es compacto, entonces cada máximo de $Z(d)$ es principal.

Demostración. 1. Basta observar que $\mathcal{I}A$ es cerrado bajo uniones dirigidas.

2. Sea M un elemento máximo de $Z(d)$. Notemos que $M \neq A$, pues $d \notin M$. Para mostrar que es primo, veremos que $x, y \notin M$ implica $x \wedge y \notin M$. En efecto, si $x, y \notin M$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} M &< M \vee \downarrow x = j(M \cup \{x\}), \\ M &< M \vee \downarrow y = j(M \cup \{y\}), \end{aligned}$$

donde $j(S)$ es el ideal de A generado por $S \subseteq A$. Por la maximalidad de M , tenemos que $d \in j(M \cup \{x\})$ y $d \in j(M \cup \{y\})$. Luego, $d \leq m_1 \vee x$ y $d \leq m_2 \vee y$, para algunos $m_1, m_2 \in M$, por la construcción de j . Poniendo $m = m_1 \vee m_2$, tenemos $m \in M$, por lo cual

$$\begin{aligned} d &\leq (m_1 \vee x) \wedge (m_2 \vee y) \\ &\leq (m \vee x) \wedge (m \vee y) \\ &= m \vee (x \wedge y) \in j(M \cup \{x \wedge y\}) = M \vee \downarrow(x \wedge y). \end{aligned}$$

Luego, $x \wedge y \notin M$ pues, de otro modo, tendríamos $d \in M \vee \downarrow(x \wedge y) = M$, lo cual no sucede porque $M \in Z(d)$.

3. Supongamos que $d \in A$ es compacto y sea M un elemento máximo de $Z(d)$. Si $p = \bigvee M$, entonces tenemos $M \subseteq \downarrow p$, por lo cual basta mostrar que $p \in M$. Si fuera el caso que $p \notin M$, entonces M estaría propiamente contenido en el ideal $\downarrow p$. Por la maximalidad de M , tendríamos $d \leq p = \bigvee M$ y la compacidad de d implicaría que $d \in M$.

□

Nótese que, si $d \in A$ es un elemento compacto, entonces por el lema de Zorn y el punto 1, todo elemento de $Z(d)$ está contenido en un elemento máximo de $Z(d)$, el cual es un ideal primo principal de A , por los puntos 2 y 3.

Lema 5.21. *Todo marco coherente es espacial.*

Demostración. Sea A un marco coherente. Debemos ver que $U_A : A \rightarrow \mathcal{O}_{\text{pt}}A$ es inyectiva. Tomemos elementos $a, b \in A$ distintos (digamos $a \not\leq b$). Entonces mostraremos que $U_A(a) \neq U_A(b)$ probando que existe $p \in U_A(a)$ con $p \notin U_A(b)$; es decir: un elemento irreducible $p \in A$ tal que $a \not\leq p$ y $b \leq p$.

Dado que A es coherente, existe un compacto $d \in \mathcal{K}A$ tal que $d \leq a$ y $d \not\leq b$ (de otro modo, tendríamos $a \leq b$, por la coherencia de A). Por el lema anterior, podemos tomar un ideal primo $I = \downarrow p$ que es máximo en $Z(d)$ y contiene a $\downarrow b \in Z(d)$. Notemos que

- $p \in \text{pt}A$, pues I es primo,
- $a \not\leq p$ pues, de otro modo, tendríamos $d \leq a \leq p$,
- $b \leq p$, pues I contiene a $\downarrow b$.

Luego, p es el elemento primo que buscábamos. \square

Definición 5.22. Sea S un espacio sobrio. Decimos que S es coherente si $\mathcal{O}S$ es un marco coherente.

Sea $f : S \rightarrow T$ una función continua entre espacios coherentes. Decimos que f es coherente si $\mathcal{O}f : \mathcal{O}T \rightarrow \mathcal{O}S$ es un morfismo coherente. Es decir, si todo abierto compacto de T tiene preimagen compacta en S .

Los espacios coherentes con sus funciones continuas coherentes forman una categoría llamada CohTop .

De la definición anterior, es claro que la equivalencia $\text{Sob} \simeq (\text{Sp})^{\text{op}}$ se restringe a una equivalencia $\text{CohTop} \simeq (\text{CohFrm})^{\text{op}}$. (Nota: en algunos lugares de la literatura, a los espacios coherentes se les llama espacios espectrales).

Teorema 5.23 (Dualidad de Stone generalizada). La categoría de espacios coherentes es dual a la categoría de retículas distributivas:

$$\text{CohTop} \simeq (\text{DLat})^{\text{op}}.$$

Demostración. Se sigue de lo anterior:

$$\text{CohTop} \simeq (\text{CohFrm})^{\text{op}} \simeq (\text{DLat})^{\text{op}}.$$

\square

Un caso especial del teorema anterior es la dualidad de Stone clásica.

Definición 5.24. Decimos que un espacio topológico es cero dimensional si existe una base de la topología que consiste en conjuntos cerrados-abiertos.

Un espacio cero dimensional, compacto y Hausdorff es llamado un espacio de Stone.

Los espacios de Stone y las funciones continuas forman una categoría que denotamos como Stone .

Se puede probar que un espacio topológico es de Stone si, y solo si, es Hausdorff y coherente, y que todas las funciones continuas entre espacios de Stone son coherentes, de modo que la dualidad anterior se restringe como sigue.

Teorema 5.25 (Dualidad de Stone).

$$\text{Stone} \simeq (\text{Bool})^{\text{op}}.$$

Fin de la sesión 23 (2 de diciembre)

Capítulo 6

Ejemplos relevantes

Sea A un marco y $j \in NA$. Sea $p \in pt(A_j)$, visto como un morfismo $p : A_j \rightarrow 2$. Así, el morfismo $p_j = p \circ j$ representa un punto en A , esto es, que todo punto en A_j es un punto en A . Por lo anterior, $ptA_j = \{p \in ptA \mid j(p) = p\}$. Para cualquier retícula distributiva, sea $specA$ el conjunto de ideales primos de un marco A , equivalente al conjunto de filtros primos de A . Nótese que $specA$ siempre es no vacío por el lema de Zorn; sin embargo, el conjunto de puntos de un marco A sí puede ser vacío.

Ejemplo 6.1. Sea $S \in \text{Top}$ sobrio y T_1 , y considérese el marco $\mathcal{O}(S)_{\neg\neg}$ que es el marco de puntos fijos de la doble negación, o el álgebra Booleana completa formada por los abiertos regulares de S , $R\mathcal{O}S$. Sea $p \in R\mathcal{O}S$; así, $p = \overline{s'}$ para algún $s \in S = \{s\}'$, ya que S es T_1 . Nótese que

$$\begin{aligned} \{s\}' \in R\mathcal{O}S &\iff \neg\neg\{s\}' = \{s\}' \\ &\iff \overline{\{s\}'}^\circ = \{s\}' \\ &\iff \overline{\{s\}}^\circ = \{s\} \end{aligned}$$

Ahora bien, sea $U = \{s\}^\circ$, y nótese que $U \neq \emptyset$ porque $\{s\} = \overline{U}$. Por ello, s es un punto aislado en S . Por lo tanto, $R\mathcal{O}S$ es un álgebra Booleana completa sin átomos, por lo que el espacio de puntos del marco $R\mathcal{O}S$ es vacío.

Un área activa de investigación procura caracterizar los núcleos de un marco A para los que a_j es espacial, así como los marcos para los que todo cociente es espacial.

Ejemplo 6.2. Considérense $\{G \in \mathbb{Z} - \text{Mod} \mid t(G) = G\} = \mathcal{T}_t$ la clase de grupos de torsión, y $\{G \in \mathbb{Z} - \text{Mod} \mid t(G) = 0\} = \mathcal{F}_t$, la clase de grupos libres de torsión. Nótese que \mathbb{T}_t es cerrada bajo submódulos, cocientes, isomorfismos, extensiones y productos, por lo que es una clase de torsión hereditaria. Ahora bien, las clases de torsión en la categoría de $\mathbb{Z} - \text{Mod}$ forman un conjunto, $\mathbb{Z}\text{-tors}$, que a la vez es un marco. Esto es cierto también en el caso de \mathbb{R} -módulos y \mathbb{Q} -módulos. Estos marcos no son la topología de ningún espacio.

Parte IV

Temas selectos

Capítulo 7

Aspectos Booleanos de la teoría de Marcos

Ejercicio 9. Muestre que la categoría Top_0 de espacios topológicos T_0 reflexiva en Top . Es decir, que el funtor de inclusión $\text{Top}_0 \rightarrow \text{Top}$ tiene un adjunto izquierdo.

Recordemos que, dada una derivada $f \in DA$, definimos ∞ como el menor ordinal donde la cadena

$$f^0 \leq f^1 \leq \dots \leq f^\alpha \leq f^{\alpha+1} \leq \dots$$

se detiene. Esta construcción nos permite obtener el menor operador cerradura f^∞ que está por encima de f .

Ahora veremos que hay derivadas $f \in DA$ tales que su ordinal de cerradura ∞ es arbitrariamente grande.

Dado un espacio topológico S , denotaremos como \mathcal{CS} al conjunto de los cerrados de S . Es decir,

$$\mathcal{CS} = \{u' \mid u \in \mathcal{OS}\}.$$

Además, dado un subconjunto $X \subseteq S$, decimos que un punto $x \in S$ es un punto límite de X si, para toda vecindad abierta $u \in \mathcal{OS}$ de x , existe un punto $y \in u \cap X$, $y \neq x$. Al conjunto de puntos límite de X lo denotamos como $\text{lim } X$.

No es difícil verificar las siguientes propiedades.

- si $X \in \mathcal{CS}$, entonces $\text{lim } X \in \mathcal{CS}$,
- si $X \in \mathcal{CS}$, entonces $\text{lim } X \subseteq X$,
- si $X, Y \in \mathcal{CS}$ y $X \subseteq Y$, entonces $\text{lim } X \subseteq \text{lim } Y$.
- si $x, Y \in \mathcal{CS}$, entonces $\text{lim}(X \cup Y) = \text{lim } X \cup \text{lim } Y$.

Ahora, dado un abierto $u \in \mathcal{OS}$, definimos $\text{cbd } u = \text{lim}(u')'$. Debido a las cuatro propiedades de arriba, se sigue que cbd es una función $\text{cbd} : \mathcal{OS} \rightarrow \mathcal{OS}$ monótona que, además, infla, y respeta ínfimos (intersección). En otras palabras, cbd es un prenúcleo en \mathcal{OS} , al cual llamamos la derivada de Cantor-Bendixon.

Notemos que, dado un punto $x \in S$, tenemos $\lim(\{x\}) = \emptyset$, de modo que $\text{cbd}(\{x\}') = S$.

En topología, un conjunto perfecto es un subconjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación (es decir, el conjunto carece de puntos aislados).

Un conjunto es booleano si para cualquier elemento dentro del conjunto, este tiene complemento dentro del conjunto.

- La derivada de Cantor-Bendixson es una herramienta que permite construir conjuntos perfectos.
- La derivada de Cantor-Bendixson mide que tan booleano es un conjunto

Definición 7.1. Para un marco A y elementos $a \leq b$, el intervalo $[a, b]$ es booleano si, como marco, este es booleano.

En otras palabras, si $x \in [a, b]$ existe un único elemento $y \in [a, b]$ tal que $x \wedge y = a$ y $x \vee y = b$. Cuando existe este elemento y es de la forma

$$y = (x > a) \wedge b \text{ (ó } x = (y > a) \wedge b).$$

Por ejemplo, al sustituir a x obtenemos lo siguiente:

- $x \wedge y = ((y > a) \wedge b) \wedge y = y \wedge a \wedge b = a$
- $x \vee y = ((y > a) \wedge b) \vee y = ((y > a) \vee y) \wedge (b \vee y) = (y > a) \vee y \wedge b = b$.

Notemos que si x es el complemento de y , $x \vee y = b$. Luego

$$(y > a) = (y > x \wedge y) \leq x \Rightarrow y \vee (y > a) \leq y \vee x = b.$$

Entonces $x = (y > a) \wedge b$.

Lema 7.2. Sean $A \in \text{Frm}$ y $a \in A$. Sea $X \subseteq A$,

$$X = \{x \in X \mid a \leq x \text{ y } [a, x] \text{ es booleano}\},$$

entonces $\bigvee X \in X$.

Demostración. Sea $b = \bigvee X$. Notemos que $a \leq \bigvee X$ así resta ver que $[a, b]$ es booleano.

Sea $y \in A$ tal que $a \leq y \leq b$. Sabemos que para cualquier $x \in X$, $[a, x]$ es booleano. Como $a \leq x \wedge y \leq x \exists z(x) \in [a, x]$ tal que

$$z(x) \wedge (x \wedge y) = a \text{ y } z(x) \vee (x \wedge y) = x.$$

Tomemos $z = \bigvee \{z(x) \mid x \in X\}$, entonces $y \wedge z = y \wedge \bigvee \{z(x) \mid x \in X\}$. Al ser $z(x) \leq x$, entonces $z(x) \wedge x = z(x)$, luego $z(x) \wedge x \wedge y = z(x) \wedge y$, pero $z(x) \wedge (x \wedge y) = a$. Por lo tanto $y \wedge z = \bigvee \{z(x) \wedge y \mid x \in X\} = a$.

Resta ver $z \vee y = b$. Sabemos que $x = z(x) \vee (x \wedge y) = (z(x) \vee x) \wedge (z(x) \vee y)$, pero como $z(x) \leq x$, entonces $x = x \wedge (z(x) \vee y)$ y esto implica que $x \leq z(x) \vee y \leq b = \bigvee X$. Luego

$$y \vee z = y \vee \bigvee \{z(x) \mid x \in X\} = \bigvee \{y \vee z(x) \mid x \in X\} \leq b.$$

Además, $b = \bigvee X \leq \bigvee \{z(x) \vee y \mid x \in X\}$. Por lo tanto $y \vee z = b$. Así, hemos probado que el intervalo $[a, b]$ es booleano y de esta forma $b = \bigvee X \in X$. \square

Definición 7.3. Para cualquier marco A , si $a, x \in A$, decimos que x es *esencialmente mayor que* a ($a \lessdot x$) si y sólo si

$$a \leq x \text{ y } (x > a) = a.$$

Con esta relación entre elementos de un marco ya podemos definir la *derivada de Cantor-Bendixson* como

$$cbd^A(a) = \bigwedge \{x \in A \mid a \lessdot x\}.$$

Lema 7.4. Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para cualquier $a \in A$, $[a, cbd^A(a)]$ es el intervalo booleano más grande arriba de a . Es decir, para cualquier $x \in A$, si $[a, x]$ es booleano, entonces $x \leq cbd^A(a)$.

Demostración. Supongamos que $[a, y]$ es un intervalo booleano y sea $x \in A$ tal que $a \lessdot x$. Sea $b = x \wedge y$, entonces $a \leq b \leq y$. Como $[a, y]$ es booleano existe $c \in [a, y]$ tal que

$$c \wedge b = a \text{ y } c \vee b = y.$$

Si $c \wedge x \wedge y \leq c \wedge y \leq a$, entonces $c \wedge y \leq (x > a) = a$. Como $a \leq x \wedge y = b$ tenemos que $c \wedge y \leq b$.

Así, $b = b \vee (y \wedge c) = (b \vee y) \wedge (b \vee c) = (b \vee y) \wedge y = y$. Con ello $b = x \wedge y = y$, es decir, $y \leq x$ para cualquier $x \in A$ con $a \lessdot x$. Entonces $y \leq \bigwedge \{x \in A \mid a \lessdot x\} = cbd^A(a)$.

Veamos que $[a, cbd^A(a)]$ es booleano. Sea $d = cbd^A(a)$ y $y \in A$ tal que $a \leq y \leq d$. Tomemos $z = (y > a)$, entonces $a \leq (y > a) = z$ y $y \wedge z = y \wedge (y > a) = a$. Con ello $((y \vee z) > a) = (y > a) \wedge (z > a) = a$. De aquí que

$$a \leq z \vee y \text{ y } ((y \vee z) > a) = a,$$

es decir, $a \lessdot (y \vee z)$. Por lo tanto, $d = \bigwedge \{x \in A \mid a \lessdot x\} \leq y \vee z$.

Notemos que

$$y \wedge (z \wedge d) = (y \wedge z) \wedge d = a \wedge d = a$$

y

$$y \vee (z \wedge d) = (y \vee z) \wedge (y \vee d) = (y \vee z) \wedge d = d,$$

es decir, $z \wedge d$ es el complemento de y en $[a, cbd^A(a)]$. Por lo tanto $[a, cbd^A(a)]$ es booleano. \square

Lema 7.5. Sea $A \in \mathbf{Frm}$, para cualesquiera $a, b, y, x \in A$ tenemos que:

$$1. \ b \leq a \lessdot x \leq y \Rightarrow b \lessdot y.$$

2. Si $a \leq x$ y $b \leq y$, entonces $a \wedge b \leq x \wedge y$.

Demostración. Para la primera parte, por hipótesis $a \leq x$ y $(x > a) = a$, de aquí que $b \leq y$. Resta ver que $(y > b) = b$. Sabemos que $b \leq (y > b)$. Ahora si $x \leq y$, entonces $(y > b) \wedge x \leq (y > b) \wedge y = y \wedge b = b \leq a$, así $(y > b) \wedge x \leq a$. Por definición de implicación $(y > b) \leq (x > a) = a \leq y$. Con ello $(y > b) = (y > b) \wedge y = y \wedge b \leq b$. De esta forma $(y > b) = b$.

Por lo tanto $b \leq y$.

Para la segunda parte, notemos que $a \leq x$ y $b \leq y$, entonces $a \wedge b \leq x \wedge y$. Veamos que $((x \wedge y) > (a \wedge b)) = a \wedge b$.

Sea $z = ((x \wedge y) > (a \wedge b))$, luego $z \wedge (x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge (a \wedge b) \leq a \wedge b \leq b$. Entonces

$$\begin{aligned} z \wedge x \leq (y > b) = b \leq y &\Rightarrow z \wedge x \leq z \wedge x \wedge y \leq a \wedge b \leq a \\ &\Rightarrow z \leq (x > a) = a. \end{aligned}$$

Así, $z = z \wedge a \leq z \wedge x \leq b$ implica que $z \leq a$ y si $z \leq b$, entonces $z \leq a \wedge b$. Además también se cumple que $a \wedge b \leq z$, pues $(a \wedge b) \leq ((x \wedge y) > (a \wedge b))$. Por lo tanto $a \wedge b \leq x \wedge y$. \square

En el contexto de teoría de marcos, la derivada de Cantor-Bendixson en el marco A es el operador

$$\begin{aligned} cbd : A &\rightarrow A \\ cbd(a) &= \bigwedge \{x \in A \mid a \leq x\}. \end{aligned}$$

Tomemos ahora un marco A y $j \in NA$. Si $j \in NA$, entonces A_j es un marco y su derivada de Cantor-Bendixson es

$$\begin{aligned} cbd^{A_j} : A_j &\rightarrow A_j \\ cbd^{A_j}(a) &= \bigwedge \{x \in A_j \mid a \leq x\}. \end{aligned}$$

Recordemos que si $j \in NA$, A_j es un conjunto implicativo, es decir, $(x > a) \in A_j$. Entonces

esencialmente mayor en $A_j \Rightarrow$ esencialmente mayor en A .

Consideremos la siguiente composición

$$A \xrightarrow{j} A_j \xrightarrow{cbd^{A_j}} A_j \xrightarrow{i} A$$

Esta composición nos da un operador de A que llamamos cbd_j^A y al fijarnos puntualmente en la composición tenemos que

$$\begin{aligned} cbd_j^A : A &\rightarrow A \\ cbd_j^A(a) &= \bigwedge \{x \in A_j \mid j(a) \leq x\}. \end{aligned}$$

Notemos que $cbd_j^A \neq cbd^{A_j}$ pues el primero es un operador en A y el segundo en A_j . Si $j = id_A$ entonces $cbd_j^A = cbd^{A_j}$.

En lo que sigue, cuando sea claro el marco en el que se este trabajando omitiremos escribir el supraíndice.

Teorema 7.6. Sea $A \in \text{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $cbd_j^A \in PA$.

Demostración. Sea $j \in NA$ y $x \in A$. Tomemos $e_x = j \circ u_x \circ v_x \circ j$. Como $j, u_x, v_x \in NA$, entonces e_x es al menos un prenúcleo. Sea $e = \bigwedge \{e_x | x \in A\}$, entonces $e \in PA$, pues es ínfimo de prenúcleos.

Afirmación: $cbd_j = e$.

Veamos que $cbd_j \leq e$. Sean $a \in A$ y $x \in A_j$ tales que $j(a) < x$. Por como se definió e_x , $e_x(a) = (j \circ u_x \circ v_x \circ j)(a) = j(x \vee (x > j(a))) = j(x \vee j(a)) = j(x) = x$ pues $j(a) < x$ y $x \in A_j$. Además, $e \leq e_x$, entonces

$$e(a) \leq e_x(a) = x \leq \bigwedge \{x \in A | j(a) < x\} = cbd_j(a).$$

Por lo tanto $e \leq cbd_j$.

Para la otra desigualdad. Tomamos $x, a \in A$ y $z = x \vee (x > j(a)) = (u_x \circ v_x \circ j)(a)$ y $y = e_x(a) = j(z) = (j \circ u_x \circ v_x \circ j)(a)$. Entonces $j(a) \leq z \leq j$.

Notemos que

$$(y > j(a)) = (j(z) > j(a)) = (z > j(a)) = ((x \vee (x > j(a))) > j(a)) = j(a).$$

Como $j(a) \leq y$ entonces $j(a) < y$ y por la definición de derivada para el núcleo j tenemos que $cbd_j \leq y = e_x(a)$.

Así, $cbd_j \leq e_x \forall x \in A$. Por lo tanto $e = cbd_j$ y $cbd_j \in PA$. \square

Lema 7.7. Si $A \in \text{Frm}$ y $j \in NA$, la cerradura idempotente de cbd_j , cbd_j^∞ , es el núcleo mas pequeño que colapsa a todos los intervalos $[a, b]$ en A si $[j(a), j(b)]$ es booleano en A_j .

Demostración. Como $cbd_j \in PA$, entonces $(cbd_j)^\infty \in$ es un núcleo.

Sean $a, b \in A$ tales que $[j(a), j(b)]$ es booleano en A_j . Veamos que $((cbd_j)^\infty)(a) = ((cbd_j)^\infty)(b)$. Notemos

$$b \leq j(b) \leq cbd_j^{A_j}(j(a)) = cbd_j^A(a) \leq (cbd_j^A)^\infty(a)$$

Como $(cbd_j^A)^\infty \in NA$ entonces

$$((cbd_j^A)^\infty)(b) \leq ((cbd_j^A)^\infty)((cbd_j^A)^\infty(a)) = (cbd_j^A)^\infty(a).$$

Así, $cbd_j(b) \leq cbd_j(a)$.

Para la otra desigualdad notemos que, si $a \leq b$ entonces

$$((cbd_j^A)^\infty)(a) \leq ((cbd_j^A)^\infty)(b).$$

Por lo tanto, $((cbd_j^A)^\infty)(a) = ((cbd_j^A)^\infty)(b)$.

Ahora solo nos queda ver que $(cbd_j^A)^\infty$ es el menor núcleo que colapsa intervalos que son booleanos bajo j en A_j . Supongamos que existe un operador $k \in NA$ tal que cumple la propiedad mencionada.

Queremos ver que si $s \in A$, entonces $(cbd_j^A)(a) \leq k(a)$. Tomemos el intervalo $[a, cbd_j^A(a)]$ en A , entonces $[j(a), j(cbd_j^A(a))]$ es un intervalo en A_j . Notemos que

$$j(cbd_j^A(a)) = cbd_j^A(a) = cbd^{A_j}(j(a)).$$

Así, $[j(a), j(cbd_j^A(a))] = [j(a), cbd^{A_j}(j(a))]$. Por lema 7.4 este es booleano. Como k colapsa los intervalos de A que son booleanos en A_j bajo j , entonces

$$k(cbd_j^A(a)) = k(a)$$

de esta forma podemos ver que

$$cbd_j^A(a) \leq k(a).$$

Así,

$$cbd_j^A(a) \leq (cbd_j^A)^\infty \leq k(a).$$

Por lo tanto $(cbd_j^A)^\infty$ es el menor núcleo que cumple la propiedad mencionada. \square

Si consideramos $j = id$ en el lema anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.8. Para cualquier $A \in \text{Frm}$, $(cbd^A)^\infty$ es el núcleo mas pequeño que colapsa a todos los intervalos booleanos de A .

Teorema 7.9. Sea $A \in \text{Frm}$, entonces para cualesquiera $j \in NA$ y $a \in A$

$$cbd_j^A(a) = (w_{j(a)} > j)(a)$$

Notemos que la implicación que se enuncia en el Teorema es en NA que no se define como la evaluación puntual.

Demostración. Sean $j \in NA$ y $a \in A$ y consideremos $b = cbd_j^A(a)$ y $k = (w_{j(a)} > j)$. Veamos que $b = k(a)$

Para la desigualdad $b \leq k(a)$. Tomemos el núcleo $l = u_b \wedge v_{j(a)}$. Notemos que

$$j(a) \leq (w_{j(a)} > j)(a) \Rightarrow a \leq j(a) \leq k(a).$$

Afirmación: $l \leq k$.

Sea $x \in A$ y $y = (x > j(a))$, entonces

$$\begin{aligned} y \wedge w_{j(a)}(x) &= y \wedge ((x > j(a)) \wedge j(a)) \\ &= y \wedge (y > j(a)) \\ &= y \wedge j(a) \leq j(a) \end{aligned}$$

Entonces

$$y \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x) \leq j(a) \wedge v_{j(a)}(x) = (j(a) > x) \wedge j(a) \leq x.$$

Luego

$$x \vee (y \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x)) = (y \vee x) \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x) \leq x \quad (7.1)$$

Recordemos que $((x \vee (x > j(a))) > j(a)) = j(a)$ y además $j(a) \leq (x > j(a)) \leq x \vee (x > j(a))$, es decir,

$$j(a) \leq (x \vee (x > j(a))) = x \vee y \leq j(x \vee y).$$

Luego $j(a) \leq j(x \vee y)$.

Como $j(x \vee y) \in A_j$, entonces $b = cbd_j^A(a) = cbd_{j(a)}^A(a) \leq j(x \vee y)$. Así,

$$\begin{aligned} b \vee x \leq j(x \vee y) \vee x = j(x \vee y) &\Rightarrow \forall x \in A, x \vee b = u_b(x) \leq j(x \vee y). \\ &\Rightarrow u_b(x) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \\ &\leq j(x \vee y) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \\ &\leq j(x \vee y) \wedge j(v_{j(a)}(x)) \wedge j(w_{j(a)}(x)) \\ &= j((y \vee x) \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x)) \leq j(x). \end{aligned}$$

La última desigualdad la obtenemos de aplicar j en (7.1).

Como $l = u_b \vee v_{j(a)}$ sustituyendo obtenemos que

$$\begin{aligned} (l \wedge w_{j(a)})(x) \leq j(x) &\Rightarrow l \leq w_{j(a)} > j = k \\ &\Rightarrow l(j(a)) \leq k(j(a)). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} l(j(a)) &= (u_b \wedge v_{j(a)})(j(a)) = (b \vee j(a)) \wedge (j(a) > j(a)) \\ &= b \vee j(a) = cbd_j^A(a) \vee j(a) \\ &= cbd_j^A(a) \end{aligned}$$

y $j(a) \leq k(a) \leq k(k(a)) = k(a)$. Por lo tanto $b \leq k(a)$.

Para la otra desigualdad. Sea $y \in A_j$ tal que $j(a) \leq y$, entonces $a \leq j(a) \leq y = j(y)$ y $w_{j(a)}(y) = ((y > j(a)) > j(a)) = (j(a) > j(a)) = 1$.

Luego

$$\begin{aligned} k(a) \leq k(y) &= k(y) \wedge 1 = k(y) \wedge w_{j(a)}(y) \\ &\leq (k \wedge w_{j(a)})(y) \\ &= ((w_{j(a)} > j) \wedge w_{j(a)})(y) \\ &= (w_{j(a)} \wedge j)(y) \\ &\leq j(y) = y. \end{aligned}$$

Así, $k(a) \leq y$, para cualquier $y \in A_j$ que cumpla $j(a) \leq y$. Entonces $k(a) \leq \bigwedge \{y \in A_j \mid j(a) \leq y\} = cbd_j^A(a) = b$.

Por lo tanto $k(a) = b$. □

Corolario 7.10. Sea $A \in \text{Frm}$ para cualquier $j \in NA$, $cbd_j^A = tp \Leftrightarrow j = w_a$, donde $a = j(0)$.

Demostración. Sean $A \in \text{Frm}$ y $j \in NA$. Sea $a = j(0)$. Como $j(j(0)) = j(0)$, entonces $j \leq w_{j(0)} = w_a$. Por el teorema anterior $cbd_j^A(0) = (w_a > j)(0)$. De aquí que

$$\begin{aligned} cbd_j^A = tp &\Leftrightarrow 1 = cbd_j^A(0) = (w_a > j)(0) \\ &\Leftrightarrow (w_a > j) = 1 \\ &\Leftrightarrow w_a \leq j \\ &\Leftrightarrow w_a = j. \end{aligned}$$

□

Notemos que para cada marco A le asignamos su derivada cbd^A . Recordemos que NA también es un marco, entonces de manera similar podemos asignarle su derivada cbd^{NA} . Esto mismo puede hacerse para cada $N^\alpha A$ del ensamble.

Para identificar las distintas derivadas en los primeros niveles de la torre de ensambles, introducimos más notación. Como notaremos mas adelante, existe una relación entre ellas.

Notación:

- La derivada en A :

$$\begin{aligned} cbd_j^A : A &\rightarrow A \\ cbd_j^A(a) &= \bigwedge \{x \in A_j \mid j(a) < x\} \end{aligned}$$

- La derivada en NA :

$$\begin{aligned} Cbd_J^A &= cbd_J^{NA} : NA \rightarrow NA \\ Cbd_J^A(k) &= \bigwedge \{l \in NA_J \mid J(k) < l\} \end{aligned}$$

- La derivada en N^2A :

$$\begin{aligned} CBD_{\mathfrak{J}}^A &= Cbd_{\mathfrak{J}}^{NA} = cbd_{\mathfrak{J}}^{N^2A} : N^2A \rightarrow N^2A \\ CBD_{\mathfrak{J}}^A(K) &= \bigwedge \{L \in N^2A_{\mathfrak{J}} \mid \mathfrak{J}(K) < L\} \end{aligned}$$

- La derivada en N^3A :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}BD_{\mathfrak{j}}^A &= CBD_{\mathfrak{j}}^{NA} = Cbd_{\mathfrak{j}}^{N^2A} = cbd_{\mathfrak{j}}^{N^3A} : N^3A \rightarrow N^3A \\ \mathbb{C}BD_{\mathfrak{j}}^A(\mathfrak{K}) &= \bigwedge \{\mathfrak{L} \in N^3A_{\mathfrak{j}} \mid \mathfrak{j}(\mathfrak{K}) < \mathfrak{L}\} \end{aligned}$$

Siguiendo esta idea podemos construir la derivada para los distintos niveles de la torre de ensambles.

Teorema 7.11. Sea $A \in \text{Frm}$, entonces $(cbd_j^A)^\infty = Cbd^A(j)$. Para cada $j \in NA$.

Demostración. Veamos que $(cbd_j^A)^\infty \leq Cbd^A(j)$ y $Cbd^A(j) \leq (cbd_j^A)^\infty$.

Sean $j, k \in NA$ tales que $j < k$. Sea $x \in A$ y definimos $a = k(x)$, entonces $a \leq j(a) \leq k(a) = k(k(x)) = k(x) = a$, es decir, $j(a) = k(a) = a$. Así,

$$k \leq w_a \Rightarrow (w_a > j) \leq (k > j) = j$$

Por el teorema anterior

$$cbd_j^A(a) = (w_a > j)(a) \leq j(a) = a \Rightarrow cbd_j^A(a) \leq a$$

Al ser cbd_j^A un prenúcleo se cumple también $a \leq cbd_j^A(a)$. Por lo tanto, $cbd_j^A(a) = a$. Veamos por inducción sobre los ordinales que $a = cbd_j^\alpha(a)$. Si $\alpha = 0$ obtenemos el caso anterior.

Tomemos $\alpha = \beta^+$ y supongamos que $cbd_j^\beta(a) = a$. Entonces

$$cbd_j^\alpha(a) = cbd_j(cbd_j^\beta(a)) = cbd_j(a) = a.$$

Finalmente si α es ordinal límite y suponemos que para cualquier ordinal $\beta \leq \alpha$, $cbd_j^\beta(a) = a$ obtenemos que

$$cbd_j^\alpha(a) = \bigvee \{cbd_j^\beta(a) \mid \beta \leq \alpha\} = a.$$

Como esta propiedad se cumple para cualquier ordinal, en particular se cumple para $cbd_j^\infty(a) = a$. Entonces

$$cbd_j^\infty(x) = cbd_j^\infty(a) = a = k(x), \quad \forall x \in A$$

Así $cbd_j^\infty \leq k$, $\forall k \in NA$ tal que $j < k$ y por la definición de derivada obtenemos $cbd_j^\infty \leq Cbd(j)$.

Para la otra desigualdad. Sea $x \in A$ y consideremos $a = cbd_j^\infty(x)$. Entonces

$$a \leq j(a) \leq cbd_j(a) = cbd_j(cbd_j^\infty(x)) = cbd_j^\infty(x) = a$$

Así, $j(a) = ah$ con ello $j \leq w_a$. Por el teorema anterior

$$\begin{aligned} a = cbd_j(a) &= (w_{j(a)} > j)(a) = (w_a > j)(a) \Rightarrow a = (w_a > j)(a) \\ &\Rightarrow (w_a > j) \leq w_a \end{aligned}$$

y $j \leq (w_a > j)$. De esta forma

$$(w_a > j) = (w_a > j) \wedge w_a = w_A \wedge j = j \Rightarrow j < w_a$$

Luego al evaluar ambos operadores en x obtenemos

$$Cbd(j) \leq w_a \Rightarrow Cbd(j)(x) \leq w_a(x) \leq w_A(a) = a = cbd_j^\infty(x), \quad \forall x \in A.$$

Por lo tanto $cbd_j^\infty = Cbd(j)$.

□

Lema 7.12. Sea $A \in Frm$, entonces

$$Cbd(v_b \vee j \vee u_a) = v_b \vee Cbd(j) \vee u_a = v_b \circ Cbd(j) \circ u_a$$

para todo $a, b \in A$ y $j \in NA$.

Demostración. Recordemos que los supremos entre prenúcleos se relacionan con la composición. Con ello obtenemos la segunda igualdad. Para la otra mostremos que se cumplen las desigualdades

$$Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a \text{ y } Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \geq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a.$$

Notemos que $Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a$ ya que $u_a, v_b, Cbd(j) \leq Cbd(v_b \vee j \vee u_a)$, pues Cbd infla y es monótona.

Para la otra desigualdad como Cbd es un prenúcleo obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a) &\leq Cbd(u_b \wedge v_a) \wedge Cbs(v_b \vee j \vee u_a) \\ &= Cbd((u_b \wedge v_a) \wedge (v_b \vee j \vee u_a)) \\ &= Cbd((u_b \wedge v_a \wedge v_b) \vee (u_b \wedge v_a \wedge j) \vee (u_b \wedge v_a \wedge u_a)) \\ &= Cbd(u_b \wedge j \wedge v_a) \leq Cbd(j). \end{aligned}$$

Entonces $u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq Cbd(j)$. Haciendo supremos con v_b y u_a en ambos lados de la desigualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} v_b \vee Cbd(j) \vee u_a &\geq v_b \vee (u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a)) \vee u_a \\ &= v_b \vee Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \vee u_a \\ &= Cbd(v_b \vee j \vee u_a). \end{aligned}$$

Así $Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a$. Por lo tanto obtenemos la igualdad buscada. \square

Notemos que para cada nivel del ensamble, la derivada se denota de una forma diferente. En relación con el teorema anterior se obtiene la siguiente notación la cual se utiliza solo para simplificar la escritura.

Notación:

- **Nivel 0:** Se menciona en el teorema anterior.
- **Nivel 1:** $NA \in Frm \Rightarrow (cbd_j^{NA})^\infty = Cbd^{NA}(j) \ \forall j \in N^2A$
- **Nivel 2:** $N^2A \in Frm \Rightarrow (cbd_j^{N^2A})^\infty = Cbd^{N^2A}(j) \ \forall j \in N^3A$
- **Nivel 3:** $N^3A \in Frm \Rightarrow (cbd_j^{N^3A})^\infty = Cbd^{N^3A}(j) \ \forall j \in N^4A$
- ...

Si tomamos $j = id$

- **Nivel 0:** $(cbd^A)^\infty = Cbd^A(id)$.
- **Nivel 1:** $NA \in Frm \Rightarrow (cbd^{NA})^\infty = Cbd^{NA}(id), id \in N^2A$
- **Nivel 2:** $N^2A \in Frm \Rightarrow (cbd^{N^2A})^\infty = Cbd^{N^2A}(id), id \in N^3A$
- **Nivel 3:** $N^3A \in Frm \Rightarrow (cbd^{N^3A})^\infty = Cbd^{N^3A}(id), id \in N^4A$
- ...

La notación que usaremos para la identidad y la constante uno para los distintos niveles de la torre es la siguiente

$$id, tp \in NA, \quad Id, Tp \in N^2A, \quad ID, TP \in N^3A.$$

También se introduce nueva notación para facilitara la escritura de las derivadas en los distintos niveles y la relación que hay entre ellas según el teorema 7.11.

- NA :
 $\delta = Cbd(id) = cbd^\infty$
 $\theta = CBD(Id)(id) = Cbd^\infty(id)$
 $\xi = CBD(ID)(Id)(id) = CBD^\infty(Id)(id)$
- N^2A :
 $\Delta = CBD(Id) = Cbd^\infty$
 $\Theta = CBD(ID)(Id) = CBD^\infty(Id)$
 $\Xi = CBD^\infty(ID)(Id)$
- N^3A :
 $\Delta = CBD(ID) = CBD^\infty$
 $\Theta = CBD^\infty(ID)$
 $\Xi = \dots$

Teorema 7.13. Para $A \in Frm$

1. A es booleano $\Leftrightarrow cbd(0) = 1$
2. NA es booleano $\Leftrightarrow \delta = tp \Leftrightarrow \delta(0) = 1$
3. N^2A es booleano $\Leftrightarrow \theta = tp \Leftrightarrow \theta(0) = 1$
4. N^3A es booleano $\Leftrightarrow \xi = tp \Leftrightarrow \xi(0) = 1$
5. ...

Demostración. 1. Si A es booleano, por el lema 7.4 $[0, cbd(0)]$ es el intervalo más grande por arriba de 0 que es booleano, pero el intervalo más grande es $[0, 1]$. De aqui que $cbd(0) = 1$. Si $cbd(0) = 1$, entonces $[0, cbd(0)]$ es el intervalo booleano mas grande por arriba del 0, pero el intervalo es $[0, 1] = A$.

2. $\delta = Cbd(id)$, por el lema 7.4, $0 = id \in NA$, entonces $[id, Cbd(id)]$ es el intervalo más grande por arriba de id que es booleano, pero el intervalo booleano más grande por arriba de id es $[id, tp] \Leftrightarrow \delta = Cbd(id) = tp$, pero eso solo ocurre si y sólo si $Cbd(id)(0) = Cbd(0) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = 1$.
3. N^2A es booleano \Leftrightarrow por el lema 7.4 $[Id, \theta(id)]$ es el intervalo más grande por arriba de Id que es booleano $\Leftrightarrow \theta(id) = Tp \Leftrightarrow \theta = tp$.
4. Para este inciso se usa el mismo argumento, pero para N^3A , pues $\xi = \mathbb{C}BD(ID)(Id)(id)$ y $\xi = tp \Leftrightarrow \mathbb{C}BD(ID)(Id)(id) = Tp \Leftrightarrow \mathbb{C}BD(ID) = TP$. \square

Teorema 7.14. Para $A \in Frm$ y $j \in NA$ son equivalentes las siguientes condiciones:

1. $cbd_j = j$
2. $Cbd(j) = j$
3. $\Delta(j) = j$.

Corolario 7.15. Para $A \in Frm$ son equivalentes las siguientes condiciones:

1. $cbd = id$
2. $\delta = id$
3. $\theta = id$.

7.1. El caso espacial

El contexto original en que se definió la derivada de Cantor-Bendixson fue para espacios topológicos. Veremos cómo se relaciona esta construcción con la construcción de arriba.

Definición 7.16. Si S es un espacio topológico y $Y, X \subseteq S$ subconjuntos cerrados del espacio. Decimos que Y es una parte no esencial de X , denotado por $Y \sqsubset X$ si

$$Y \subseteq X \quad y \quad X = (X - Y)^-.$$

Además para cualquier $X \subseteq S$ cerrado, $X \in CS$

$$\lim_S(X) = (\bigcup \{Y \in CS \mid Y \sqsubset X\})^-$$

Recordemos que OS es un marco y la implicación en OS esta dada por

$$(V > U) = (V' \cup U)^\circ$$

y la negación

$$\neg U = U^{-'}$$

para cualesquiera $U, V \in OS$.

Además los ínfimos arbitrarios se calculan de la siguiente forma: $\forall U = (\bigcap U)^\circ$.

Lema 7.17. Para cualquier espacio topológico S se cumple

$$Y \sqsubset X \Leftrightarrow X' \triangleleft Y', \quad U \triangleleft V \Leftrightarrow V' \sqsubset U',$$

donde $X, Y \in CS$ y $U, V \in OS$. Además se cumple que

$$\lim_S(X)' = \text{cbd}^{OS}(X'), \quad \text{cbd}^{OS}(U)' = \lim_S(U').$$

Demostración. Sean $X, Y \in CS$. Tenemos que

$$X' \triangleleft Y' \Leftrightarrow (Y' \succ X') = X' \Leftrightarrow (Y' \cup X)^\circ = X'.$$

Luego $(Y' \cup X)^\circ = (Y' \cap X)^{\circ\circ} = (Y' \cap X)^{-\prime}$. Así.

$$X \triangleleft Y' \Leftrightarrow X' = (Y' \cap X)^{-\prime} \Leftrightarrow X = (Y' \cap X)^- \Leftrightarrow Y \sqsubset X.$$

Para la otra equivalencia basta con cambiar X' y Y' por U y V respectivamente.

Ahora sea $X \in CS$, entonces

$$\text{cbd}(X') = \left(\bigcap \{V \in OS \mid X' \triangleleft V\} \right)^\circ = \left(\bigcap \{V \in OS \mid V' \sqsubset X\} \right)^\circ.$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{cbd}(X')' &= \left(\bigcap \{V \in OS \mid X' \triangleleft V\} \right)^{\circ\prime} \\ &= \left(\bigcup \{V \in OS \mid V' \sqsubset X\} \right)^{\prime-} \\ &= \left(\bigcup \{V' \in OS \mid V' \sqsubset X\} \right)^- \\ &= \left(\bigcup \{V \in CS \mid V' \sqsubset X\} \right)^- \\ &= \lim_S(X). \end{aligned}$$

Para la otra igualdad basta con cambiar X' por U . □

Ahora tenemos un lema dual al lema 7.4 que nos da información sobre el espacio topológico. Para este lema solo hay que recordar que los puntos límite de un subconjunto $X \subseteq CS$ con S espacio topológico, son aquellos puntos que no son aislados en X . Un punto aislado de X , $p \in X$, es aquel para el cual existe un abierto $U \in OS$ tal que $X \cap U = \{p\}$.

Lema 7.18. Sea S un espacio topológico T_0 . Para cualquier $X \in CS$ el conjunto $\lim_S(X) \subseteq X$ es el conjunto de puntos límite de X .

Por la dualidad que se tiene entre cbd y \lim , podemos traducir un problema de marcos a el espacio topológico correspondiente o viceversa. En particular ocupando los lemas 7.4, 7.17 y 7.18 podemos concluir que

$$\begin{aligned} OS \text{ es booleano} &\Leftrightarrow \text{cbd}^{OS}(\emptyset) = S \\ &\Leftrightarrow \lim_S(S) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow S \text{ no tiene puntos aislados.} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.19. 1. El operador cerradura para cbd , cbd^∞ , puede ser tan grande como queramos.

2. Sea Γ un ordinal lo suficientemente grande. Entonces tenemos el marco Γ^+ pero ahora nos tomamos el orden inverso de tal forma que Γ es el cero del marco y $0 = \emptyset$ es el uno del marco. Ahora los supremos serían los mínimos o la intersección y los ínfimos la unión.

Notemos que para $\alpha \neq 0$, $cbd(\alpha) = \alpha$ si y sólo si α es un ordinal límite

$$\bigwedge \{\kappa \leq \Gamma \mid \alpha < \kappa\} = cbd(\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow \bigcup \{\kappa \leq \Gamma \mid \alpha < \kappa\} = \{\kappa \leq \Gamma \mid \alpha > \kappa \text{ y } (\kappa > \alpha) = \alpha\} = \alpha$$

pues observemos que para cualquier κ ,

$$(\kappa > \alpha) = \bigcap \{\beta \leq \Gamma \mid \beta \cup \kappa \leq \alpha\}$$

entonces $(\kappa > \alpha) = \alpha \Leftrightarrow \kappa < \alpha$.

Sólo los límites y el cero son puntos fijos de cbd . Entonces, al obtener $Cbd(id) = cbd^\infty = \delta$, nos quedará que Γ_δ es el conjunto de ordinales límite menores o iguales que Γ . Si seguimos iterando Cbd tendríamos que

$Cbd(id)$ nos da a los ordinales límites.

$Cbd^2(id)$ nos da a los ordinales límites de los límites.

...

3. Considera el intervalo $[0, 1]$ en los reales con el orden usual. Entonces $[0, 1]$ es un marco linealmente ordenado donde los supremos e ínfimos se calculan como siempre. Notemos que aquí $cbd = id$ pues

$$cbd(a) = \bigwedge \{0 \leq b \leq 1 \mid a < b\} = \bigwedge \{0 \leq b \leq 1 \mid a \leq b \text{ y } b > a = a\},$$

pero $(b > a) = a \Leftrightarrow a < b$. Entonces $cbd(a) = \bigwedge \{0 \leq b \leq a \text{ y } a < b\} = a$. Así, $cbd = id \Rightarrow cbd^\infty = id$, por el corolario 3 $\theta = id$.

Capítulo 8

Existencia de productos y coproductos

8.1. Productos de marcos

Teorema 8.1 (Producto de marcos). Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{J}}$ de marcos arbitraria y sea L el producto cartesiano de los A_λ (vistos como conjuntos). Entonces L , dotado con los operadores puntuales \wedge, \vee , es un marco y, equipado con las proyecciones canónicas

$$\begin{aligned} p_\lambda : L &\rightarrow A_\lambda \\ a &\mapsto p_\lambda(a) = a_\lambda \end{aligned}$$

satisface la propiedad universal del producto de los A_λ .

Lema 8.2. $(L, \leq, \wedge, 0, \vee, 1)$, con $0 := (0_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{J}}$ y $1 := (1_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{J}}$ es un marco.

Demostración. \leq es orden parcial ya que:

$$\begin{aligned} x \leq x &\iff x_\lambda \leq x_\lambda \forall \lambda \in \mathcal{J}. \\ x \leq y, y \leq x &\implies x_\lambda \leq y_\lambda, y_\lambda \leq x_\lambda, \forall \lambda \in \mathcal{J} \\ &\implies x_\lambda = y_\lambda \forall \lambda \in \mathcal{J} \\ &\implies x = y. \\ x \leq y, y \leq z &\implies x_\lambda \leq y_\lambda, y_\lambda \leq z_\lambda \forall \lambda \in \mathcal{J} \\ &\implies x_\lambda \leq z_\lambda \forall \lambda \in \mathcal{J} \\ &\implies x \leq z. \end{aligned}$$

□

Para $x, y \in A$, ya que $x_\lambda \wedge_\lambda y_\lambda \in A_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathcal{J}$, entonces $x \wedge_\mathcal{J} y \in A$. Luego, ya que $0_\lambda \leq_\lambda x_\lambda$ para todo $x_\lambda \in A_\lambda$ y para cada $\lambda \in \mathcal{J}$, entonces $0_\mathcal{J} \leq_\mathcal{J} x$ para todo $x \in A$.

Similarmente, para $X \subseteq A$ arbitrario, consideramos los subconjuntos $X_\lambda \subseteq A_\lambda$ formados por los x_λ componentes, y tomamos $\vee X_\lambda =: s_\lambda \in A_\lambda$, para cada $\lambda \in \mathcal{J}$.

Entonces $\bigvee_{\mathcal{J}} X = (s_{\lambda})_{\lambda \in \mathcal{J}} \in A$.

Además, como $1_{\lambda} \geq_{\lambda} x_{\lambda}$ para todo $x_{\lambda} \in A_{\lambda}$, para cada $\lambda \in \mathcal{J}$, entonces $1_{\mathcal{J}} \geq_{\mathcal{J}} x \forall x \in A$. Por último, se cumple que:

$$\begin{aligned} a \wedge_{\mathcal{J}} \left(\bigvee_{\mathcal{J}} X \right) &= (a_{\lambda} \wedge_{\lambda} s_{\lambda})_{\lambda \in \mathcal{J}} \\ &= \left(\bigvee_{\lambda} \{a_{\lambda} \wedge_{\lambda} x_{\lambda} \mid x_{\lambda} \in X_{\lambda}\} \right)_{\lambda \in \mathcal{J}} \\ &= \bigvee_{\mathcal{J}} \{a \wedge_{\mathcal{J}} x \mid x \in X\} \end{aligned}$$

Y con esto, se cumple que A es un marco. Para cada $\lambda \in \mathcal{J}$, se define $p_{\lambda}^* : A \rightarrow A_{\lambda}$ la proyección de A sobre el respectivo componente A_{λ} , nótese el siguiente resultado:

Lema 8.3. p_{λ}^* es morfismo de marcos, para cada $\lambda \in \mathcal{J}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff x_{\lambda} \leq y_{\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathcal{J} \\ &\Rightarrow p_{\lambda}^*(x) \leq p_{\lambda}^*(y) \quad \forall \lambda \in \mathcal{J} \end{aligned}$$

Además se cumple que $p_{\lambda}^*(1_{\mathcal{J}}) = 1_{\lambda}$ y $p_{\lambda}^*(0_{\mathcal{J}}) = 0_{\lambda}$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} p_{\lambda}^*(x \wedge y) &= p_{\lambda}^*[(x_{\mu} \wedge y_{\mu})_{\mu \in \mathcal{J}}] \\ &= x_{\lambda} \wedge y_{\lambda} \\ &= p_{\lambda}^*(x) \wedge p_{\lambda}^*(y). \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} p_{\lambda}^*\left(\bigvee X\right) &= p_{\lambda}^*[(s_{\mu})_{\mu \in \mathcal{J}}] \\ &= s_{\lambda} \\ &= \bigvee X_{\lambda} \\ &= \bigvee p_{\lambda}^*[X]. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $B \in \text{Frm}$, y considere una familia arbitraria de morfismos:

$$\{r_{\lambda}^* : B \rightarrow A_{\lambda} \mid \lambda \in \mathcal{J}\}.$$

Definimos $p^* : B \rightarrow A$, de manera que, para $b \in B$:

$$p^*(b) = (r_{\lambda}^*(b))_{\lambda \in \mathcal{J}}.$$

□

Se sigue que p^* es morfismo de marcos, ya que la familia de r_λ^* son morfismos de marcos, y por la construcción de los operadores de A . Luego, para todo $b \in B$ y todo $\lambda \in \mathcal{J}$, se cumple que:

$$(p_\lambda^* \circ p^*)(b) = p_\lambda^*[(r_\mu(b))_{\mu \in \mathcal{J}}] = r_\lambda(b),$$

y nótese que p^* es único por construcción. Así, se concluye que A satisface la propiedad universal del producto en \mathbf{Frm} .

8.2. Sitios

Ya probamos que la categoría de marcos tiene productos. Para probar que también tiene coproductos, usaremos una técnica distinta, para la cual necesitamos algunos resultados concernientes a sitios.

Definición 8.4. Sea A una semirretícula inferior. Una función $C : A \rightarrow \mathcal{P}[\mathcal{P}(A)]$ es una cobertura o función de cubiertas sobre A si, para cualesquiera $a, b \in A$, se cumple que:

1. $S \in C(a) \implies S \subseteq \downarrow(a)$
2. $S \in C(a), b \leq a \implies \{b \wedge s \mid s \in S\} \in C(b)$.

Al par (A, C) se le llama sitio.

Definición 8.5 (C -ideales). Dado un sitio (A, C) , un subconjunto $I \subset A$ es un C -ideal de A si

1. $I \in \mathcal{L}(A)$
2. Siempre que $a \in A$ y $S \in C(a)$, entonces $S \subseteq I \implies a \in I$.

Al conjunto de todos los C -ideales del sitio (A, C) se le denota por $C\text{-Idl}$.

Ejemplo 8.6 (Ejemplos de sitios). Sea A una \wedge -retícula. Consideremos las funciones cubrientes C_\emptyset y C_T definidas como:

$$\begin{aligned} C_\emptyset(a) &= \emptyset \\ C_T(a) &= \{\emptyset\} \end{aligned}$$

para todo $a \in A$.

- En el primer caso, ninguna familia cubre a ningún elemento. Entonces, por vacuidad, toda sección inferior $F \subseteq A$ es un C_\emptyset -ideal. Es decir, $C_\emptyset\text{-Idl}(A) = \mathcal{L}(A)$.
- En el segundo caso, la familia vacía cubre a todos los elementos, así que el único C_T -ideal $F \subseteq A$ es la sección total $F = A$. Es decir, $C_T\text{-Idl}(A) = \{A\}$.

Ejemplo 8.7 (Más ejemplos de sitios). Sea A un marco y consideremos las funciones cubrientes C_\vee y C_\bigvee definidas como

$$\begin{aligned} X \in C_\vee(a) & \quad \text{si, y solo si} \quad X \text{ es finito y } a = \bigvee X \\ X \in C_\bigvee(a) & \quad \text{si, y solo si} \quad a = \bigvee X \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ y todo $X \subseteq A$. Entonces

- una sección inferior $F \subseteq A$ es un C_\vee -ideal si, y solo si es cerrada bajo supremos finitos. Por lo tanto, los C_\vee -ideales de A son los ideales de A en el sentido de retículas distributivas:

$$C_\vee\text{-Idl}(A) = \mathcal{I}A.$$

- una sección inferior $F \subseteq A$ es un C_\bigvee -ideal si, y solo si es cerrada bajo supremos arbitrarios.

Definición 8.8 (Marcos generado por un sitio). Sea (A, C) un sitio. Decimos que un marco B es generado por (A, C) si existe un morfismo de semiretículas inferiores $f : A \rightarrow B$ tal que, para todo $a \in A$, se cumple que f manda C -cubiertas en A a C_\bigvee -cubiertas de B :

$$S \in C(a) \implies f(a) = \bigvee \{f(s) \mid s \in S\}$$

y f es universal con respecto a esta propiedad. Explícitamente, la universalidad significa que, si B' es un marco y $f' : A \rightarrow B'$ es un morfismo de \wedge -semiretículas que convierte cubiertas en supremos, entonces existe un único morfismo de marcos $\bar{f} : B \rightarrow B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow f & \downarrow \exists! \bar{f} \\ A & & \\ & \searrow f' & \\ & & B' \end{array}$$

Por el argumento usual, entre cualesquiera dos marcos generados por (A, C) existe un único isomorfismo, de modo que podemos hablar de el marco generado por (A, C) .

Teorema 8.9 ($C\text{-Idl}$ es un marco). Sea (A, C) un cubriente, entonces, su conjunto de C -ideales $C\text{-Idl}$ es un marco con la contención, y es generado por (A, C) .

Recordemos que $\mathcal{L}A$ es un marco bajo la contención y que, si B es un marco y $\nu \in NA$ es cualquier núcleo, entonces $\nu[A] = A_\nu$ es marco con el orden heredado de A .

Lema 8.10 (Previo). La intersección arbitraria de C -ideales es un C -ideal.

Demostración. Sean $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia arbitraria de C -ideales, y $I = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha$ su intersección. Primero, sean $x \leq y \in A$ arbitrarios, con $y \in I$. Entonces $y \in I_\alpha \forall \alpha \in \Gamma$, y así, como cada I_α es sección inferior, entonces $x \in I_\alpha \forall \alpha \in \Gamma$, y esto implica que $x \in I$. Por tanto, cómo x, y son arbitrarios, se cumple que I es sección inferior de A .

Ahora, sean $a \in A, S \in C(a)$ arbitrarios, y supongáse que $S \subseteq I$, entonces, se cumple que $S \subseteq I_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Por tanto, ya que cada I_α es C -ideal, se sigue que $a \in I_\alpha \forall \alpha \in \Gamma$, y se sigue que $a \in I$.

Con esto, concluimos que I es un C -ideal. \square

Lema 8.11 (Parte 1). *Existe un núcleo $j : \mathcal{L}A \rightarrow \mathcal{L}A$ tal que $C\text{-Idl} = (\mathcal{L}A)_j$, de modo que $C\text{-Idl}$ es un cociente de $\mathcal{L}A$. En particular, $C\text{-Idl}$ es un marco.*

Demostración. Considere el marco de secciones inferiores de $A, \mathcal{L}A$, y considere la función $j : \mathcal{L}A \rightarrow \mathcal{L}A$ tal que

$$j(S) = \bigcap \{I \in C\text{-Idl} \mid S \subseteq I\} \quad S \in \mathcal{L}A.$$

Primero, para cualquier $S \in \mathcal{L}A$, por la definición de j , se tiene que $S \subseteq j(S)$, por tanto j infla. Luego, por el lema anterior, se tiene que $j(S)$ es C -ideal, y cómo $j(S) \subseteq j(S)$ trivialmente, y $j(j(S))$ debe ser el menor C -ideal que contiene a $j(S)$, obtenemos que $j(j(S)) = j(S)$, i.e. j es idempotente.

Ahora, sean $R, T \in \mathcal{L}A, I := j(R \cap T)$. Por definición de j , se tiene que $R \subseteq j(R)$ y $T \subseteq j(T)$, entonces $R \cap T \subseteq j(R) \cap j(T)$, y cómo j es idempotente, se sigue que $j(R \cap T) \subseteq j(R) \cap j(T)$.

Defináse ahora el conjunto

$$R' := \{d \in A \mid \forall t \in T, d \wedge t \in I\}.$$

Por la definición de I y ya que j infla, se cumple que $R \subseteq R', T \cap R' \subseteq I$. Por otro lado, cómo $I \in \mathcal{L}(A)$, obtenemos que $R' \in \mathcal{L}(A)$. Luego, consideremos $U \in C(A)$ tal que $U \subseteq R'$, entonces, para todo $t \in T$, se cumple que $\{u \wedge t \mid u \in U\} \subseteq I$, y además, utilizando la propiedad (ii) de C , se cumple que $\{u \wedge t \mid u \in U\} \in C(a \wedge t)$, y en consecuencia $a \wedge t \in I$, ya que I es C -ideal. Luego, cómo $t \in T$ es arbitrario, tenemos que $a \in R'$ y por tanto R' es un C -ideal.

Análogamente, se construye el C -ideal

$$T' := \{e \in A \mid \forall r \in R', e \wedge r \in I\},$$

y se cumple que $T \subseteq T', T' \cap R \subseteq I$ y T' es C -ideal. Así, se sigue que $j(R) \subseteq R', j(T) \subseteq T'$ y por tanto

$$j(R) \cap j(T) \subseteq R' \cap T' \subseteq I = j(R \cap T)$$

y en conclusion, j es núcleo cuyo conjunto de puntos fijos es $C\text{-Idl}$. \square

Lema 8.12 (Parte 2). *La función $f : A \rightarrow C\text{-Idl}$ definida como*

$$f(a) = j(\downarrow(a))$$

es un morfismo de \wedge -semiretículas que manda C -cubiertas en supremos de C -Idl. Más aún, f es universal con respecto a esta propiedad, de modo que C -Idl es el marco generado por (A, C) .

Demostración. Cómo j es núcleo y \downarrow es morfismo de \wedge -semiretículas, se cumple que f es morfismo de \wedge -retículas. Sean $a \in A, S \in C(a)$ arbitrarios. Entonces, cómo $j(\bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}) =: \mathcal{J}$ es un C -ideal que contiene a S , se sigue que $a \in \mathcal{J}$, luego

$$j(\downarrow(a)) \subseteq \mathcal{J}.$$

Por otro lado, se tiene $a \geq s$ para todo $s \in S$, por lo cuál $j(\downarrow(a)) \supseteq j(\downarrow(s))$. Luego, se sigue que

$$j(\downarrow(a)) \supseteq \bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}$$

y con esto, cómo j es monótona e idempotente, obtenemos que

$$f(a) \supseteq \mathcal{J}.$$

Por otra parte, sean $B \in \text{Frm}$, $g : A \rightarrow B$ un morfismo de \wedge -semiretículas que convierte cubiertas de C en supremos. Entonces, la función

$$\begin{aligned} \bar{g} : \mathcal{L}A &\rightarrow B \\ S &\rightarrow \bigvee_B \{g(s) \mid s \in S\} \end{aligned}$$

es el único morfismo de marcos que factoriza a g a través del marco libre de A , $\mathcal{L}A$, y además existe su adjunto derecho $g_* : B \rightarrow \mathcal{L}A$, que, por definición del adjunto derecho, para $b \in B$:

$$\begin{aligned} g_*(b) &= \bigcup\{L \in \mathcal{L}A \mid \bar{g}(L) \leq b\} \\ &= \bigcup\left\{L \in \mathcal{L}A \mid \bigvee_B \{g(a) \mid a \in L\} \leq b\right\} \\ &= \bigcup\{L \in \mathcal{L}A \mid g(a) \leq b(\forall a \in L)\} \\ &= \{a \in A \mid g(a) \leq b\} \end{aligned}$$

Y nótese que, si $S \in C(a)$ y $S \subseteq g_*(b)$, entonces se cumple que

$$g(a) = \bigvee_B \{g(s) \mid s \in S\} \leq b$$

y esto implica que $a \in g_*(b)$, por tanto $g_*(b)$ es un C -ideal.

Sea $a \in A$ arbitrario. Cómo \bar{g} y g_* son adjuntos, se tiene que

$$(\bar{g} \circ g_*)(g(a)) \leq g(a).$$

Además, cómo $g_*(g(a))$ es un C -ideal que contiene a $\downarrow(a)$, tenemos que

$$f(a) = j(\downarrow(a)) \subseteq g_*(g(a))$$

, y en consecuencia, se cumple la cadena de desigualdades:

$$g(a) \leq \bar{g}(f(a)) \leq (\bar{g} \circ g_*)(g(a)) \leq g(a)$$

Es decir, que $(\bar{g} \circ f)(a) = g(a)$ con a arbitrario, por tanto $\bar{g} \circ f = g$, con \bar{g} único, así que f es universal. \square

8.3. Coproductos de marcos

Ya probamos que la categoría de marcos tiene productos. Ahora queremos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 8.13. *Para una familia de marcos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{J}}$, existe el coproducto*

$$\coprod_{\lambda \in \mathcal{J}} A_\lambda.$$

Construiremos el coproducto como sigue: Tomaremos el coproducto A de la familia en la categoría Pos^\wedge de \wedge -semiretículas. Le daremos a A una estructura de sitio, equipándole una cobertura C . Finalmente, veremos que el marco $C\text{-Idl}$ generado por (A, C) viene equipado con morfismos que lo convierten en el coproducto de nuestra familia en la categoría de marcos.

Lema 8.14. *Consideremos el conjunto*

$$A = \left\{ a \in \prod_{\lambda \in \mathcal{J}} A_\lambda \mid a_\lambda \neq 1_{A_\lambda} \text{ para una cantidad finita de índices} \right\}.$$

Notemos que A es una subsemiretícula inferior del producto, ya que $1 \in A$ y, si $a, b \in A$, entonces $c = a \wedge b \in \prod_{\lambda \in \mathcal{J}} A_\lambda$ satisface

$$c_\lambda = \begin{cases} 1_\lambda, & \text{si } a_\lambda = b_\lambda = 1_\lambda \\ a_\lambda \wedge b_\lambda, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como hay una cantidad finita de $a_\lambda \neq 1_\lambda$ y $b_\lambda \neq 1_\lambda$, entonces los $a_\lambda \wedge b_\lambda$ son finitos, por lo que $c \in A$.

Definimos las funciones $q_\lambda: A_\lambda \rightarrow A$, para cada $\lambda \in \mathcal{J}$, dadas por

$$q_\lambda(x) = a,$$

donde $a_\lambda = x$ y $a_\mu = 1_\mu$ para $\mu \in \mathcal{J} \setminus \{\lambda\}$.

Claramente, q_λ es monótona y $q_\lambda(1_\lambda) = 1$. Además, si $x, y \in A_\lambda$, entonces $q_\lambda(x \wedge y) = q_\lambda(x) \wedge q_\lambda(y)$, ya que las operaciones son puntuales. Así, cada q_λ es un morfismo de semiretículas inferiores.

Afirmamos que A , junto con sus funciones

$$q_\lambda: A_\lambda \rightarrow A$$

es el coproducto de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{J}}$ en la categoría de \wedge -semiretículas.

Demostración. Para este resultado, los $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{J}}$ solo necesitan ser \wedge -semiretículas. Sean B una \wedge -semiretícula y $r_\lambda: A_\lambda \rightarrow B$ una familia de morfismos indicada por $\lambda \in \mathcal{J}$. Definimos $R: A \rightarrow B$ como

$$R(a) = \bigwedge \{r_\lambda(a_\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{J}\}.$$

Este ínfimo existe en B , ya que todo $a \in A$ tiene soporte finito. Claramente, R preserva ínfimos y hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_\lambda & \xrightarrow{r_\lambda} & B \\ q_\lambda \downarrow & \nearrow R & \\ A & & \end{array}$$

para todo $\lambda \in \mathcal{I}$. Finalmente, si $R' : A \rightarrow B$ es cualquier morfismo que hace conmutar el diagrama, tenemos

$$\begin{aligned} R'(a) &= R'(\bigwedge \{q_\lambda(a_\lambda) \mid a \in \mathcal{I}\}) \\ &= (\bigwedge \{R'(q_\lambda(a_\lambda)) \mid a \in \mathcal{I}\}) \\ &= (\bigwedge \{r_\lambda(a_\lambda) \mid a \in \mathcal{I}\}) \\ &= R(a). \end{aligned}$$

De este modo, la semiréticula A , equipada con R , es el coproducto de las A_λ en Pos^\wedge . \square

Definición 8.15. Sean $a = (a_\lambda) \in A$, $\mu \in \mathcal{I}$ y $S \subseteq A_\mu$, definimos el reemplazo de a por S en la entrada μ -ésima como

$$S(a, \mu) = \{(b_\lambda) \in A \mid b_\lambda = a_\lambda \text{ para } \lambda \in \mathcal{I} \setminus \{\mu\} \text{ y } b_\mu \in S\}$$

Ejemplo 8.16. Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \prod_{\lambda=1}^4 A_\lambda$, $\mu = 2$ y $S = \{x, y, z\} \subseteq A_2$, entonces

$$S(a, \mu) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1, x, a_3, a_4 \\ a_1, y, a_3, a_4 \\ a_1, z, a_3, a_4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lema 8.17 (La estructura de sitio en A). La función $C : A \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ definida como

$$C(a) = \{S(a, \mu) \mid \mu \in \mathcal{I}, S \subseteq A_\mu \text{ tal que } \bigvee S = a_\mu\}.$$

para cada $a \in A$, es una cobertura en A .

Demostración. Sean $a = (a_\lambda), b = (b_\lambda) \in A$ con $b \leq a$ y $W = S(a, \mu) \in C(a)$.

- Sea $c = (c_\lambda) \in W$. Por definición, $c_\lambda = a_\lambda$ para $\lambda \in \mathcal{I} \setminus \{\mu\}$ y $c_\mu \in S$, entonces $c_\mu \leq a_\mu$. Esto implica que $c \leq a$, es decir, $c \in \downarrow(a)$.
- Probaremos que $\{b \wedge w \mid w \in W\} = \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}(b, \mu)$.

⊆) Sea $b \wedge w \in \{b \wedge w \mid w \in W\}$. Observamos que

- $b \wedge w \in A$.
- $b_\lambda \wedge w_\lambda = b_\lambda \wedge a_\lambda = b_\lambda$ para $\lambda \in \mathcal{I} \setminus \{\mu\}$.
- $b_\mu \wedge w_\mu \in \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}$.

Por lo que $b \wedge w \in \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}(b, \mu)$.

\supseteq) Sea $c = (c_\lambda) \in \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}(b, \mu)$. Entonces $c_\lambda = b_\lambda$ para $\lambda \in \mathcal{J} \setminus \{\mu\}$ y $c_\mu \in \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}$.

Notemos que $c = b \wedge m$, donde $m_\lambda = a_\lambda$ para $\lambda \in \mathcal{J} \setminus \{\mu\}$ y $m_\mu = w_\mu$. Así, $m \in W$, es decir, $c \in \{b \wedge w \mid w \in W\}$.

Además, $\{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\} \subseteq A_\mu$ y

$$\bigvee \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\} = b_\mu \wedge (\bigvee S) = b_\mu \wedge a_\mu = b_\mu$$

Por lo tanto $\{b \wedge w \mid w \in W\} \in C(b)$.

□

La estructura de los C -ideales en A no es tan sencilla de entender a primera vista. Incluimos un ejemplo de un cálculo en $C\text{-Idl}(A)$.

Ejemplo 8.18 (El menor elemento de $C\text{-Idl}(A)$). Supongamos que $a \in A$ tiene alguna entrada cero. Es decir, $a_\lambda = 0 \in A_\lambda$ para algún λ .

Al fijarnos en la entrada $a_\lambda = 0 \in A_\lambda$, tenemos $\bigvee \emptyset 0 \in A_\lambda$. Como $\emptyset(a, \lambda) = \emptyset \subseteq A$, de la definición de las C -cubiertas se sigue que $\emptyset \in C(a)$; es decir: la familia vacía cubre a a .

En particular, para cualquier C -ideal $F \subseteq A_{\mathcal{J}}$, tenemos

$$\emptyset \in C(a) \quad \text{y} \quad \emptyset \subseteq F,$$

y, por la definición de C -ideal, se sigue que $a \in F$.

Esto nos dice que el conjunto G de los elementos que tienen alguna entrada nula

$$G = \{a \in A \mid a_\lambda = 0 \in A_\lambda \text{ para algún } \lambda \in \mathcal{J}\}$$

está contenido en todos los C -ideales. De hecho, probaremos que G es un C -ideal. Luego, es el menor elemento en el marco de C -ideales.

Claramente, G es sección inferior, por lo cual resta probar que es cerrado bajo C -cubiertas. En efecto, tomemos una cubierta

$$Y(a, \lambda) \in C(a) \quad \text{con} \quad Y(a, \lambda) \subseteq G.$$

Es decir, a tiene una entrada a_λ tal que $Y \subseteq A_\lambda$ y $\bigvee Y = a_\lambda$.

Si $\bigvee Y = 0$, entonces $0 = \bigvee Y = a_\lambda$, así que $a \in G$. De otro modo, existe un $y \in Y$, $y \neq 0$. Sea $b \in Y(a, \lambda)$ el único elemento de $\{y\}(a, \lambda)$. Entonces b tiene λ -ésima entrada $b_\lambda = y \neq 0$, pero como $b \in Y(a, \lambda) \subseteq G$, existe un índice $\mu \neq \lambda$ tal que $b_\mu = 0$. Como b es igual a a en todas las entradas que no son λ (pues $b \in Y(a, \lambda)$), en particular tenemos $b_\mu = a_\mu = 0$, así que $a \in G$.

Se sigue que G es un C -ideal y, como está contenido en todos los C -ideales, concluimos que G es el menor elemento de $C\text{-Idl}(A)$.

Lema 8.19 (Parte 2). Consideremos $C\text{-Idl}$ y los morfismos $Q_\lambda: A_\lambda \rightarrow C\text{-Idl}$ definidos como

$$Q_\lambda = j(\downarrow(q_\lambda(-))).$$

Entonces $C\text{-Idl}$, equipado con los morfismos Q_λ , es el coproducto de la familia de los A_λ en la categoría de marcos.

Demostración. Para cualquier marco Y y morfismos $f_\lambda: A_\lambda \rightarrow Y$ indicados por \mathcal{J} , queremos encontrar un único morfismo $f: C\text{-Idl} \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y \\ Q_\lambda \downarrow & \nearrow f & \\ C\text{-Idl} & & \end{array}$$

conmuta.

Sean X un marco y una familia de morfismos

$$\{r_\lambda: A_\lambda \rightarrow X \mid \lambda \in \mathcal{J}\}.$$

Dado que A , junto con los $q_\lambda: A_\lambda \rightarrow A$, es el coproducto de los A_λ como \wedge -semiretículas, obtenemos el morfismo de \wedge -semiretículas $R: A \rightarrow X$ dado por

$$\begin{aligned} R(a) &= \bigwedge_X \{r_\lambda(a_\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{J}\} \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \end{aligned}$$

donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ es el conjunto de las coordenadas de a distintas de 1. Este es el único morfismo de \wedge -semiretículas que factoriza a todos los r_λ a través de A . Probaremos que R convierte cubiertas de C en supremos.

Consideremos $\mu \in \mathcal{J}$, $S \subseteq A_\mu$ y $a = (a_\lambda) \in A$ tal que $a_\mu = \bigvee_{A_\mu} S$. Hay que probar que $\bigvee R(S(a, \mu)) = R(a)$. Si $a_\mu = 1_{A_\mu}$, tenemos

$$\begin{aligned} \bigvee R(S(a, \mu)) &= \bigvee \{R(b) \mid b \in S(a, \mu)\} \\ &= \bigvee \{1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \wedge r_\mu(s) \mid s \in S\} \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \wedge \bigvee \{r_\mu(s) \mid s \in S\} \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \wedge r_\mu(a_\mu) \\ &= R(a). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $a_\mu \neq 1_{A_\mu}$, tenemos $\mu = \lambda_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \bigvee R(S(a, \mu)) &= \bigvee R(S(a, \lambda_i)) \\ &= \bigvee \{R(b) \mid b \in S(a, \lambda_i)\} \\ &= \bigvee \{1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_i}(s) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \mid s \in S\} \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge \bigvee \{r_{\lambda_i}(s) \mid s \in S\} \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_i}(a_{\lambda_i}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \\ &= R(a). \end{aligned}$$

Como $R : A \rightarrow X$ manda C -cubiertas a supremos de X , la propiedad universal del marco $C\text{-Idl}$ generado por (A, C) asegura que existe un único morfismo de marcos $g : C\text{-Idl} \rightarrow X$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow g & \uparrow R \\ C\text{-Idl} & \xleftarrow{j(\downarrow(-))} & A \end{array}$$

conmuta.

Notemos que

$$r_\lambda = R \circ q_\lambda = g \circ j(\downarrow(q_\lambda(-))) = g \circ Q_\lambda.$$

Por lo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_\lambda & \xrightarrow{r_\lambda} & X \\ Q_\lambda \downarrow & \nearrow g & \uparrow R \\ C\text{-Idl} & \xleftarrow{j(\downarrow(-))} & A \end{array}$$

conmuta. □

Capítulo 9

El teorema de Tychonoff en marcos

Un espacio topológico es compacto si cualquier cubierta abierta del espacio admite una subcubierta finita. En la categoría de espacios topológicos tenemos el teorema de Tychonoff, que dice que un producto de espacios topológicos es compacto, si, y solo si, cada uno de los factores es un compacto.

Del mismo modo, cualquier marco tiene su noción de compacidad.

Definición 9.1 (Compacidad de marcos). *Un marco A es compacto si, para cualquier $S \in A$ se satisface lo siguiente:*

$$\bigvee S = 1_A \implies \text{existe } T \subseteq S \text{ finito, tal que } \bigvee T = 1_A.$$

El objetivo de esta sección es probar el teorema análogo al de Tychonoff, pero en la categoría de marcos:

Teorema 9.2. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{J}}$ una familia de marcos. El coproducto*

$$\coprod_{\lambda \in \mathcal{J}} A_\lambda$$

es compacto si, y solo si, cada A_λ es compacto.

9.1. Idea de la demostración

En la sección anterior probamos que $\coprod_{\lambda \in \mathcal{J}} A_\lambda$ es el marco de C -ideales de A , donde A es el coproducto de los A_λ como \wedge -semiretículas y C es cierta cobertura en A . Como $C\text{-Idl}$ es un cociente de $\mathcal{L}A$, los supremos en $C\text{-Idl}$ se calculan como

$$\bigvee S = j(\bigcup S),$$

donde $j : \mathcal{L}A \rightarrow \mathcal{L}A$ es el núcleo asociado a $C\text{-Idl}$. Por lo tanto, es de esperarse que la demostración de nuestra versión del teorema de Tychonoff involucre al núcleo j de alguna manera. De hecho, toda la demostración consiste en dar una construcción de j que facilite convertir ciertos supremos arbitrarios en supremos finitos. Para llevar a cabo esta idea, primero definiremos una cierta subcobertura

$C_f \subseteq C$, de tal modo que factorizaremos la proyección $\mathcal{L}A \rightarrow C\text{-Idl}$ a través de $C_f\text{-Idl}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}A & \longrightarrow & C\text{-Idl} \\ \downarrow & \nearrow & \\ C_f\text{-Idl} & & \end{array}$$

Más específicamente, el plan es el siguiente:

- Definimos una subcobertura $C_f \subseteq C$ en A y construimos la proyección $\mathcal{L}A \rightarrow C_f\text{-Idl}$. Es decir, dado $S \in \mathcal{L}(A)$, construimos el C_f -ideal FS generado por S .
- Vemos que el conjunto $\mathcal{D}S$ de supremos dirigidos de S está contenido en el C -ideal generado por S .
- Probamos que, si S es un C_f -ideal, entonces $\mathcal{D}S$ también lo es. Por lo tanto, $\mathcal{D}(FS)$ es un C_f ideal que contiene a S y está contenido en el C -ideal $j(S)$ generado por S .

$$S \subseteq \mathcal{D}(FS) \subseteq j(S).$$

Sin embargo, la última contención puede ser propia.

- Para saltar de $\mathcal{D}(FS)$ a $j(S)$, iteramos \mathcal{D} para construir una cadena de C_f -ideales que contienen a $\mathcal{D}(FS)$

$$FS \subseteq \mathcal{D}(FS) \subseteq \mathcal{D}^2(FS) \subseteq \dots$$

y probamos que, eventualmente, se alcanza $j(S)$.

- Con nuestra construcción de $j(S)$ veremos que, dada una familia $P \subseteq C\text{-Idl}(A)$, la igualdad $j(\bigcup P) = A$ implica $F(\bigcup P) = A$. En otras palabras, $\bigvee P = 1_{C\text{-Idl}(A)}$ implica $1 \in F(\bigcup P)$.
- Con esta última herramienta, podremos demostrar la implicación \Leftarrow del teorema.
- La implicación \Rightarrow es directa.

9.2. La cobertura de cubiertas finitas

Lema 9.3. La función $C_f : A \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ definida para todo $a \in A$ como

$$C_f(a) = \{S \subseteq A \mid S \in C(a), S \text{ finito}\}$$

es una cobertura sobre A .

Nuestra primera tarea será obtener una construcción para el núcleo asociado al cociente $\mathcal{L}A \rightarrow C_f\text{-Idl}$. Para esto, introduciremos algo de notación.

Definición 9.4. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{I}$ índices distintos y x_1, \dots, x_n elementos tales que $x_i \in A_{\lambda_i}$ para todo i . En otras palabras, $x = (x_1, \dots, x_n)$ es un elemento del producto $A_{\lambda_1} \times \dots \times A_{\lambda_n}$.

Para cualquier elemento $a \in A$ del coproducto de los A_λ en Pos^\wedge , denotaremos como $a(x) = a(x_1, \dots, x_n)$ al elemento de A que es igual a a pero con las entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reemplazadas por x_1, \dots, x_n . Es decir,

$$p_\lambda(a(x_1, \dots, x_n)) = a(x_1, \dots, x_n)_\lambda = \begin{cases} x_i, & \lambda = \lambda_i \\ a_\lambda & \lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \end{cases}.$$

En particular, si $x_i \in A_{\lambda_i}$, se cumple que

$$1(x_i) = q_{\lambda_i}(x_i) \\ 1(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge \{q_{\lambda_i}(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Definición 9.5. Dado un conjunto $S \subseteq A$, defino el conjunto FS especificando que $a \in FS$ si, y solo si, existe un conjunto finito no vacío de índices $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ que contiene al soporte de a y conjuntos S_1, \dots, S_n con $S_i \subseteq A_{\lambda_i}$ tales que $\forall S_i = a_{\lambda_i}$ y, para toda tupla $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$, el elemento

$$a(s_1, \dots, s_n)$$

está en S . En tal caso, decimos que a es Γ -generado por S y que $(\Gamma, S_1, \dots, S_n)$ es el testigo de $a \in FS$, ya que $(\Gamma, S_1, \dots, S_n)$ atestigua (o prueba) que a pertenece a FS .

9.3. Si S es sección inferior, FS también.

Sea S una sección inferior, $a \in FS$ y $b \leq a$.

Sea $a \in FS$ y sea $(\Gamma, S_1, \dots, S_n)$ su testigo. Sin perder generalidad, podemos suponer que Γ también contiene al soporte de b . En efecto, si $b_\gamma \neq 1_\gamma$ y $\gamma \notin \Gamma$, podemos agregar γ a Γ y poner $S_\gamma = \{1_\gamma\}$, de modo que $a_\gamma = 1_\gamma = \bigvee S_\gamma$ y, para todo $(s_1, \dots, s_n, 1_\gamma) \in \prod_{i=1}^n S_i \times S_\gamma$ se tiene

$$1(s_1, \dots, s_n, 1_\gamma) = 1(s_1, \dots, s_n) \in S.$$

Supongamos, pues, que b también tiene soporte contenido en Γ . Entonces haciendo $T_i = \{b_{\lambda_i} \wedge s \mid s \in S_i\}$ para todo $i = 1, \dots, n$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bigvee T_i &= b_{\lambda_i} \wedge \bigvee S_i \\ &= b_{\lambda_i} \wedge a_{\lambda_i} \\ &= b_{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Más aún, dado $(b_{\lambda_1} \wedge s_1, \dots, b_{\lambda_n} \wedge s_n) \in \prod_{i=1}^n T_{\lambda_i}$, tenemos

$$1(b_{\lambda_1} \wedge s_1, \dots, b_{\lambda_n} \wedge s_n) \leq 1(s_1, \dots, s_n) \in S.$$

y, como S es sección inferior, tenemos

$$1(b_{\lambda_1} \wedge s_1, \dots, b_{\lambda_n} \wedge s_n) \in S.$$

Se sigue que b es finitamente generado por S con testigo $(\Gamma, T_1, \dots, T_n)$, es decir: $b \in FS$, así que FS es sección inferior.

9.4. Si S es sección inferior, FS está contenido en todos los C_f -ideales que contienen a S .

Sea J un C_f -ideal que contiene a S . Tomemos un elemento $a \in FS$ con testigo (Γ, S) , donde $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Probaremos, por inducción sobre $k \leq n$, que, para cada tupla $(s_k, \dots, s_n) \in S_k \times \dots \times S_n$, el elemento $a(s_k, \dots, s_n)$ está en J .

Para toda tupla $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$, tenemos que

$$a(s_1, \dots, s_n) \in S \subseteq J$$

ya que $a \in FS$. Esto prueba el caso base ($k = 1$).

La hipótesis de inducción (k) nos dice que, para cada tupla $(s_k, \dots, s_n) \in S_k \times \dots \times S_n$, el elemento $a(s_k, \dots, s_n)$ está en J .

Ahora (el paso de inducción) sea $(s_{k+1}, \dots, s_n) \in S_{k+1} \times \dots \times S_n$ una tupla arbitraria y consideremos el conjunto

$$\{a(s, s_{k+1}, \dots, s_n) \mid s \in S_k\} = S_k(a(s_{k+1}, \dots, s_n), \lambda_k) \in C_f(a(s_{k+1}, \dots, s_n)).$$

Esta es, en efecto, una cubierta, ya que la λ_k -ésima coordenada de $a(s_{k+1}, \dots, s_n)$ es $a_{\lambda_k} = \bigvee S_k$. Más aún: por hipótesis de inducción, cada elemento de la cubierta está en J . Como J es un C_f -ideal, se sigue que

$$a(s_{k+1}, \dots, s_n) \in J.$$

Esto concluye la inducción para $k \leq n$. En particular, tenemos $a(s_n) \in J$ para cada $s_n \in S_n$, pero esta es una C_f -cubierta de a contenida en J , así que $a \in J$. Por lo tanto, $FS \subseteq J$.

9.5. Si S es sección inferior, FS es cerrado bajo cubiertas y, por lo tanto, es un C_f -ideal.

Si $a \in A$ tiene una cubierta vacía, entonces tiene una entrada cero, digamos $a_{\lambda_1} = 0$. Sea $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ el resto de su soporte. Poniendo $S_1 = \{\}$ y $S_i = \{a_{\lambda_i}\}$ para $i = 2, \dots, n$, obtenemos $\bigvee S_i = a_{\lambda_i}$. Como $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \emptyset$, se cumple que $a \in FS$ por vacuidad.

Luego, basta considerar cubiertas de dos elementos.

Sean $a, b \in FS$ con $a_\gamma = b_\gamma$ para todo $\gamma \neq \gamma_0$. Debemos mostrar que $a \vee b \in FS$.

Como antes, podemos suponer que tanto a como b tienen soporte en el mismo $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Por definición, tenemos F_γ, G_γ tales que $\bigvee F_\gamma = a_\gamma, \bigvee G_\gamma = b_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y

$$1(f_0, \dots, f_n) \in S$$

$$1(g_0, \dots, g_n) \in S.$$

9.6. EL CONJUNTO DE SUPREMOS DIRIGIDOS \mathcal{DS} ESTÁ CONTENIDO EN TODOS LOS C -IDEALES

siempre que $f_i \in F_{\gamma_i}$ y $g_i \in G_{\gamma_i}$.

Definamos $H_{\gamma_0} = F_{\gamma_0} \cup G_{\gamma_0}$ y $H_\gamma = \{f \wedge g \mid f \in F_\gamma, g \in G_\gamma\}$ para todo $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \gamma_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \bigvee H_{\gamma_0} &= \bigvee (F_{\gamma_0} \cup G_{\gamma_0}) \\ &= \bigvee F_{\gamma_0} \vee \bigvee G_{\gamma_0} \\ &= a_{\gamma_0} \vee b_{\gamma_0} \\ \bigvee H_\gamma &= \bigvee \{f \wedge g \mid f \in F_\gamma, g \in G_\gamma\} \\ &= \bigvee F_\gamma \wedge \bigvee G_\gamma \\ &= a_\gamma \wedge b_\gamma \\ &= a_\gamma \vee b_\gamma \text{ para } \gamma \neq \gamma_0, \end{aligned}$$

lo cual son las entradas de $a \vee b$.

Ahora, las tuplas $x = \prod_{i=0}^n H_{\gamma_i}$ son de dos formas posibles.

- Si $x = (f_0, f_1 \wedge g_1, \dots, f_n \wedge g_n)$, entonces

$$1(f_0, f_1 \wedge g_1, \dots, f_n \wedge g_n) \leq 1(f_0, f_1, \dots, f_n) \in S.$$

- de otro modo, $x = (g_0, f_1 \wedge g_1, \dots, f_n \wedge g_n)$, así que

$$1(g_0, f_1 \wedge g_1, \dots, f_n \wedge g_n) \leq 1(g_0, g_1, \dots, g_n) \in S.$$

Como S es sección inferior, se sigue que $1(x)$ siempre está en S , así que $a \vee b$ está en FS .

9.6. El conjunto de supremos dirigidos \mathcal{DS} está contenido en todos los C -ideales que contienen a S .

Sea S una sección inferior y \mathcal{DS} su conjunto de supremos dirigidos.

Sea J un C -ideal que contiene a S . Como todo $a \in \mathcal{DS}$ es el supremo de un $D \subseteq S$ dirigido y $D \subseteq S \subseteq J$, basta ver que J es cerrado bajo supremos dirigidos.

Tomemos un subconjunto dirigido $D \subseteq J$. Como D es dirigido, para cualquier $d \in D$ tenemos

$$\bigvee D = \bigvee (D \cap \uparrow d).$$

(\geq es obvia, para \leq basta observar que todo $a \in D$ está por debajo de un $c \in D$ con $\geq a \vee d$). Luego, podemos suponer que D está contenido en una sección superior principal. En particular podemos suponer que todos los elementos de D tienen soporte en $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Sea $a = \bigvee D$. Como D es dirigido, entonces sus proyecciones D_1, \dots, D_n a los marcos $A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_n}$ son dirigidas (todos los $x_1, y_1 \in D_1$ vienen de elementos $x, y \in D$; luego, existe $z \in D$ con $x, y \leq z$, por lo cual $x_1, y_1 \leq z_1$).

Por definición del supremo, tenemos

$$a = 1(\bigvee D_1, \dots, \bigvee D_n).$$

Por inducción sobre $k \leq n$, probaremos que, para toda tupla $(d_k, \dots, d_n) \in D_k \times \dots \times D_n$, el elemento

$$a(d_k, \dots, d_n) = 1(\bigvee D_1, \dots, \bigvee D_{k+1}, d_k, \dots, d_n)$$

está en J .

Para cualquier tupla $(d_1, \dots, d_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$, cada entrada d_i es la λ_i -ésima proyección de algún $x_i \in D$. Como D es dirigido, existe $z \in D$ con $x_1, \dots, x_n \leq z$. Luego,

$$1(d_1, \dots, d_n) \leq z \in D \subseteq J.$$

Como J es sección inferior, tenemos $1(d_1, \dots, d_n) \in J$. Esto prueba el caso base ($k = 1$).

La hipótesis de inducción (k) dice que, para cada tupla $(d_k, \dots, d_n) \in D_k \times \dots \times D_n$, el elemento $a(d_k, \dots, d_n)$ está en J .

Ahora (paso de inducción) sea $(d_{k+1}, \dots, d_n) \in D_{k+1} \times \dots \times D_n$ una tupla arbitraria y consideremos el conjunto

$$\{a(d, d_{k+1}, \dots, d_n) \mid d \in D_k\} = D_k(a(d_{k+1}, \dots, d_n), \lambda_k) \in C(a(d_{k+1}, \dots, d_n)).$$

Esta es, en efecto, una cubierta, ya que la λ_k -ésima coordenada de $a(d_{k+1}, \dots, d_n)$ es $\bigvee D_k$. Más aún: por hipótesis de inducción, cada elemento de la cubierta está en J . Como J es un C -ideal, se sigue que $a(d_{k+1}, \dots, d_n) \in J$. Esto concluye la inducción. En particular, para $k = n$, mostramos que $a(d_n) \in J$ para todo $d_n \in D_n$, pero este conjunto es una C -cubierta de a . Se sigue que $a \in J$, así que J es cerrado bajo supremos dirigidos. Por lo tanto, $\mathcal{D}S \subseteq J$.

9.7. Si S es un C_f -ideal, entonces $\mathcal{D}S$ también.

Dado $a \in S$, $\{a\} \subseteq S$ es dirigido, así que $a = \bigvee \{a\} \in \mathcal{D}S$, por lo que $S \subseteq \mathcal{D}S$.

Primero veamos que $\mathcal{D}S$ es sección inferior. Sean $a \in \mathcal{D}S$ y $b \leq a$. Podemos suponer que a y b tienen soporte en Γ . Tenemos $a = \bigvee D$ con $D \subseteq S$ dirigido. Es claro que

$$b = \bigvee \{b \wedge d \mid d \in D\}.$$

Como S es sección inferior, este último conjunto está en S , así que basta probar que es dirigido. Sean $b \in d, b \wedge d'$ con $d, d' \in D$. Entonces existe $d'' \in D$ con $d \vee d' \leq d''$, por lo cual $b \wedge d''$ cumple $(b \wedge d) \vee (b \wedge d') = b \wedge (d \vee d') \leq b \wedge d''$ y, así, el conjunto es dirigido. Luego $b \in \mathcal{D}S$ y $\mathcal{D}S$ es sección inferior.

Ahora veamos que $\mathcal{D}S$ es cerrado bajo C_f -cubiertas. Si $a \in A$ tiene una cubierta vacía, tenemos $a \in S$, así que $a \in \mathcal{D}S$ (pues S es C_f -ideal), por lo cual basta ver que $\mathcal{D}S$ es cerrado bajo C_f -cubiertas de dos elementos. Sean $a, b \in \mathcal{D}S$

con todas sus entradas iguales excepto γ_0 . Por definición, existen $D, E \subseteq S$ dirigidos con $a = \bigvee D$ y $b = \bigvee E$.

Definimos $*$: $D \times E \rightarrow A$ como

$$\begin{aligned}(d * e)_{\gamma_0} &= d_{\gamma_0} \vee e_{\gamma_0} \\ (d * e)_{\gamma} &= d_{\gamma} \wedge e_{\gamma} \text{ para } \gamma \neq \gamma_0\end{aligned}$$

y sea $F = \{d * e \mid d \in D, e \in E\}$.

Ahora veamos que F es dirigido. Si $d * e, d' * e' \in F$, entonces existen $d'' \in D$ y $e'' \in E$ con $d \vee d' \leq d''$ y $e \vee e' \leq e''$. Luego, $(d * e) \vee (d' * e') \leq d'' * e''$, pues la comparación es puntual y $*$ es monótono en cada coordenada; en efecto:

$$\begin{aligned}((d * e) \vee (d' * e'))_{\gamma_0} &= (d * e)_{\gamma_0} \vee (d' * e')_{\gamma_0} \\ &= d_{\gamma_0} \vee e_{\gamma_0} \vee d'_{\gamma_0} \vee e'_{\gamma_0} \\ &= (d_{\gamma_0} \vee d'_{\gamma_0}) \vee (e_{\gamma_0} \vee e'_{\gamma_0}) \\ &\leq d''_{\gamma_0} \vee e''_{\gamma_0} \\ ((d * e) \vee (d' * e'))_{\gamma} &= (d * e)_{\gamma} \vee (d' * e')_{\gamma} \\ &= (d_{\gamma} \wedge e_{\gamma}) \vee (d'_{\gamma} \wedge e'_{\gamma}) \\ &\leq d_{\gamma} \vee e'_{\gamma} \\ &\leq d''_{\gamma} \vee e''_{\gamma}.\end{aligned}$$

Se sigue que F es dirigido. Mas aún, $\bigvee F = a \vee b$, pues

$$\begin{aligned}(\bigvee F)_{\gamma_0} &= \bigvee \{(d * e)_{\gamma_0} \mid d \in D, e \in E\} \\ &= \bigvee \{d_{\gamma_0} \vee e_{\gamma_0} \mid d \in D, e \in E\} \\ &= \bigvee \{d_{\gamma_0} \mid d \in D\} \vee \bigvee \{e_{\gamma_0} \mid e \in E\} \\ &= (\bigvee D)_{\gamma_0} \vee (\bigvee E)_{\gamma_0} \\ &= a_{\gamma_0} \vee b_{\gamma_0} \\ (\bigvee F)_{\gamma} &= \bigvee \{(d * e)_{\gamma} \mid d \in D, e \in E\} \\ &= \bigvee \{d_{\gamma} \wedge e_{\gamma} \mid d \in D, e \in E\} \\ &= \bigvee \{d_{\gamma} \mid d \in D\} \wedge \bigvee \{e_{\gamma} \mid e \in E\} \\ &= (\bigvee D)_{\gamma} \wedge (\bigvee E)_{\gamma} \\ &= a_{\gamma} \wedge b_{\gamma} \\ &= a_{\gamma} \vee b_{\gamma} \text{ para } \gamma \neq \gamma_0,\end{aligned}$$

lo cual son las entradas de $a \vee b$.

Para mostrar que $a \vee b \in \mathcal{DS}$, solo queda ver que $F \subseteq S$. Para esto, usaremos que S es C_f -ideal (nótese que no lo habíamos usado excepto en un caso muy simple).

Sea $d * e \in F$; es decir: $d \in D \subseteq S$ y $e \in E \subseteq S$. Queremos construir una C_f -cubierta de $d * e$ que esté contenida en S . Consideremos $r, s \in A$ dados por

$$\begin{aligned}r_{\gamma} &= s_{\gamma} = d_{\gamma} \wedge e_{\gamma} \text{ para } \gamma \neq \gamma_0 \\ r_{\gamma_0} &= d_{\gamma_0} \\ s_{\gamma_0} &= e_{\gamma_0}.\end{aligned}$$

Observemos que $r \leq d \in D \subseteq S$ y que $s \leq e \in E \subseteq S$. Como S es sección inferior, tenemos $r, s \in S$. Finalmente, es claro que $r \vee s = d * e$ donde el supremo se concentra en una entrada. Es decir, $\{r, s\} \in C_f(d * e)$ y $\{r, s\} \subseteq S$. Como S es C_f -ideal, se sigue que $d * e \in S$. Así, $F \subseteq S$, por lo cual $a \vee b \in \mathcal{D}S$. Es decir, $\mathcal{D}S$ es cerrado bajo C_f -cubiertas, por lo cual también es un C_f -ideal.

9.8. Lema: saltar de $\mathcal{D}(FS)$ a $j(S)$.

Sea I un C_f -ideal de A . Como ya vimos, $\mathcal{D}I$ es un C_f -ideal contenido entre I y el C -ideal $j(I)$ generado por I . Aplicando esto a $\mathcal{D}I$, obtenemos

$$I \subseteq \mathcal{D}I \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{D}I) \subseteq j(\mathcal{D}I) = j(I).$$

Poniendo $I = FS$ (el C_f -ideal generado por una sección inferior $S \subseteq A$) e iterando \mathcal{D} , obtenemos una cadena de C_f -ideales

$$FS \subseteq \mathcal{D}(FS) \subseteq \mathcal{D}^2(FS) \subseteq \dots$$

contenidos en $j(FS) = j(S)$.

La extensión de esta cadena a todos los ordinales

$$\begin{aligned} I_0 &= FS \\ I_{\alpha+1} &= \mathcal{D}(I_\alpha) \\ I_\lambda &= \bigcup \{I_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \end{aligned} \quad \text{si } \lambda \text{ es límite}$$

se estaciona en el C -ideal $j(S)$ generado por S .

En efecto, sea γ el primer ordinal donde la cadena se detiene. Entonces $I_\gamma = I_{\gamma+1} = \mathcal{D}(I_\gamma)$. Es decir, I_γ es cerrado bajo supremos dirigidos. Como también es cerrado bajo supremos finitos (entrada por entrada), se sigue que es cerrado bajo supremos arbitrarios (entrada por entrada), así que es un C -ideal. Se sigue que $I_\gamma = j(S)$, como se afirmó.

9.9. Lema: generar a A como C -ideal implica generarlo como C_f -ideal

Tomemos una familia A_λ de marcos compactos y sea A su coproducto como \wedge -semiretículas. Equipémoslo con los cubrientes C y C_f .

Si $P \subseteq C\text{-Idl}(A)$ es tal que $\bigvee P = 1_{C\text{-Idl}(A)}$, entonces $1 \in F(\bigcup P)$. En otras palabras, si $j(\bigcup P) = A$, entonces $F(\bigcup P) = A$.

Demostración:

Supongamos que $A = j(\bigcup P)$. De la construcción anterior, tenemos $I_\gamma = j(\bigcup P)$ (donde γ es el primer ordinal donde se detiene la cadena de iteraciones $\mathcal{D}^\alpha(\bigcup P)$), así que $1 \in I_\gamma$.

Afirmamos que γ no puede ser ordinal límite. En efecto, si lo fuera, tendríamos

$$1 \in I_\gamma = \bigcup \{I_\alpha \mid \alpha < \gamma\},$$

por lo cual $1 \in I_\alpha$ para algún $\alpha < \gamma$, lo cual no puede suceder por la minimalidad de γ .

Más aún, γ no puede ser sucesor. Si fuera el caso que $\gamma = \beta + 1$, tendríamos $1 \in I_\gamma = \mathcal{D}(I_\beta)$; es decir: $1 = \bigvee D$ para algún conjunto dirigido $D \subseteq I_\beta$. Dado que D es dirigido, podemos tomar cualquier $d \in D$ y obtener

$$1 = \bigvee D = \bigvee \{a \in D \mid d \leq a\} = \bigvee (D \cap \uparrow d),$$

lo cual nos dice que, reemplazando a D por $D \cap \uparrow d$ en caso de ser necesario, podemos suponer que D está contenido en una sección superior principal. En particular, podemos suponer que todos los elementos de D tienen soporte contenido en un conjunto finito de índices Γ .

Para cada $\lambda \in \Gamma$, sea $D_\lambda = p_\lambda(D)$. Como $1 = \bigvee D$, tenemos $1_\lambda = \bigvee D_\lambda$ y, por compacidad de los A_λ , esto nos da familias finitas $E_\lambda \subseteq D_\lambda$ tales que $1_\lambda = \bigvee E_\lambda$.

Luego, todos los elementos de todos los E_λ aparecen como entradas de los elementos de un conjunto finito $E \subseteq D$. Como D es dirigido y E es finito, existe $a \in D$ tal que $\bigvee E \leq a$, pero $\bigvee E = 1$, así que

$$1 = a \in D \subseteq I_\beta,$$

lo cual contradice la minimalidad de γ .

Se sigue que $\gamma = 0$. Esto es, $A = j(\bigcup P) = I_0 = F(\bigcup P)$, como se deseaba.

9.10. Una implicación (Tychonoff)

Con toda esta herramienta, podemos demostrar el teorema de Tychonoff. Si A_λ es una familia de marcos compactos y A es su coproducto como \wedge -semirretículas, debemos mostrar que $C\text{-Idl}(A)$ es compacto. Sea $P \subseteq C\text{-Idl}(A)$ una familia de C -ideales tal que $\bigvee P = 1_{C\text{-Idl}(A)}$. En otras palabras: $\bigcup P$ genera a A como C -ideal.

$$j(\bigcup P) = A.$$

Como acabamos de probar, esto implica que $\bigcup P$ también genera a A como C_f -ideal:

$$F(\bigcup P) = A.$$

En particular, $1 \in F(\bigcup P)$; esto es: existe algún conjunto finito no vacío de índices Γ tal que $1 \in A$ es Γ -finitamente generado por $\bigcup P$.

Es decir: para cada $\lambda \in \Gamma$ existe un conjunto finito $S_\lambda \subseteq A_\lambda$ con $\bigvee S_\lambda = 1_\lambda$ y, siempre que se tenga una tupla $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ con $x_\lambda \in A_\lambda$, se cumple

$$1(x) = \bigwedge \{q_\lambda(x_\lambda) \mid \lambda \in \Gamma\} \in \bigcup P.$$

Ahora, como Γ es finito y cada S_λ también, solo se puede formar una cantidad finita de tuplas $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$. Así, el conjunto de los $1(x)$ es finito y, por lo tanto, está contenido en una cantidad finita de factores $P_1, \dots, P_n \in P$ de $\bigcup P$.

Luego, $1 \in A$ es Γ -finitamente generado por $\bigcup_{i=1}^n P_i$. Esto es $F(\bigcup_{i=1}^n P_i) = A$ y, así,

$$\bigvee \{P_1, \dots, P_n\} = j\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right) = A = 1_{C\text{-Idl}(A)}.$$

Luego, $C\text{-Idl}(A)$ es compacto.

9.11. La otra implicación

Necesitamos este pequeño resultado.

Lema 9.6. *Dada un elemento $x \in A_\lambda$, entonces*

$$j(\downarrow q_\lambda(x)) = \downarrow q_\lambda(x).$$

Demostración. En efecto, sea $a \in A$ y $S(a, \mu) \subseteq \downarrow q_\lambda(x)$ una C -cubierta de a . Queremos mostrar que $a \leq q_\lambda(x)$. Si $\mu \neq \lambda$, entonces $S(a, \mu) \subseteq \downarrow q_\lambda(x)$ nos dice que $a_\lambda \leq x$, así que $a \leq q_\lambda(x)$. Por otro lado, si $\mu = \lambda$, entonces $S(a, \lambda) \subseteq \downarrow q_\lambda(x)$ nos dice que, para todo $s \in S$ tenemos $s \leq x$. Por lo tanto, $a_\lambda = \bigvee S \leq x$, así que $a \leq q_\lambda(x)$. Se sigue que $\downarrow q_\lambda(x)$ es un C -ideal. \square

Ahora sí.

Lema 9.7. *Si el coproducto $C\text{-Idl}(A)$ de una familia de marcos A_λ es compacto, entonces cada A_λ también es compacto.*

Demostración. Supongamos que $C\text{-Idl}$ es compacto. Si $S \subseteq A_\lambda$ es tal que $\bigvee S = 1_\lambda$, entonces $S(\lambda, 1) \in C(1)$.

Para cada $s \in S$, sea $Q_\lambda(s) = j(\downarrow q_\lambda(s))$ el C -ideal generado por s bajo q_λ . Luego,

$$\bigvee \{Q_\lambda(s) \mid s \in S\} = 1_{C\text{-Idl}(A)} = A.$$

Por la compacidad de $C\text{-Idl}(A)$, existen $s_1, \dots, s_n \in S$ tales que

$$\bigvee \{Q_\lambda(s_i) \mid i = 1, \dots, n\} = A.$$

Como Q_λ es morfismo de marcos, esto es

$$Q_\lambda\left(\bigvee \{s_i \mid i = 1, \dots, n\}\right) = A.$$

Ahora, dado que $Q_\lambda(x) = \downarrow q_\lambda(x)$, tenemos

$$1 \in \downarrow q_\lambda\left(\bigvee \{s_i \mid i = 1, \dots, n\}\right),$$

o bien

$$1 = q_\lambda\left(\bigvee \{s_i \mid i = 1, \dots, n\}\right).$$

Proyectando a la λ -ésima coordenada, obtenemos

$$1_\lambda = \bigvee \{s_i \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Se sigue que A_λ es compacto. \square

Capítulo 10

Producto en Top vs coproducto en Frm

Definición 10.1 (Morfismo denso). *Un morfismo de marcos $f : A \rightarrow B$ es denso si $\forall a \in A$ se cumple que*

$$f(a) = 0 \implies a = 0$$

Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y considérense el marco de abiertos de su producto $\mathcal{O}(\prod_{i \in I} S_i)$ y su coproducto $\bigoplus_i \mathcal{O}(S_i)$. Dado que para cualquier $i \in I$ la proyección $p_i : \prod_{i \in I} S_i \rightarrow S_i$ es continua, entonces la preimagen $p_i^{-1} : \mathcal{O}S_i \rightarrow \mathcal{O}(\prod_{i \in I} S_i)$ es un morfismo de marcos. Por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $p^\sharp : \bigoplus_i \mathcal{O}S_i \rightarrow \mathcal{O}(\prod_{i \in I} S_i)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}S_i & \xrightarrow{k_i} & \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}S_i \\ & \searrow p_i^{-1} & \swarrow p_i^\sharp \\ & \mathcal{O}(\prod_{i \in I} S_i) & \end{array}$$

donde k_i es la inclusión de $\mathcal{O}S_i$ en $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}S_i$. Se cumple que p_i^\sharp siempre es suprayectivo y denso; sin embargo, rara vez es un isomorfismo.

Ejemplo 10.2. *Considérese el conjunto*

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{2^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$$

y nótese que con la topología usual de subespacio de \mathbb{R} es un espacio topológico isomorfo a \mathbb{Q} . Sea $S = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, y para $(x, y) = (\frac{a}{2^m}, \frac{b}{2^n})$, defínase $S_{x,y}$ como el cuadrado abierto con centro en (x, y) y lado $2^{-(|m-n|+1)}$. Por ejemplo, $S_{0,0} = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Nótese ahora que $A = \{S_{x,y} : (x, y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}\}$ es un marco, y sea \mathcal{C} la cubierta de coproducto de marcos definida en la sección 9.3. Así, defínase $R_{x,y}$ como el \mathcal{C} -ideal generado por $S_{x,y}$, y nótese que $\mathbb{D} \times \mathbb{D} = \bigcup_{x,y \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}} R_{x,y}$.

Para $\alpha \in \text{Ord}$, defínase la sucesión (R_α) de \mathcal{C} -ideales como

$$R_{\alpha+1} = \{a \in A : \exists S \in \mathcal{C}(a) \text{ con } S \subseteq R_\alpha\}$$

$$R_\lambda = \bigcup \{R_\alpha : \alpha < \lambda\} \text{ para } \lambda \text{ ordinal límite}$$

Dado que A es un conjunto, existe un $\alpha \in \text{Ord}$ tal que $R_\alpha = R_\gamma \forall \gamma > \alpha$; sea R_∞ el primer término de la sucesión donde esto sucede, y nótese que es el \mathcal{C} -ideal generado por $\{S_{x,y} : (x,y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}\}$.

Supóngase que $(a,b) \times (c,d) \in R_\infty \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Así para un $\delta_0 > 0$, existe $\alpha_0 \in \text{Ord}$, el menor ordinal tal que $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\alpha_0}$, y nótese que α_0 debe ser un ordinal sucesor, supóngase $\alpha_0 = \beta_0 + 1$. Sean $u, v \in \mathbb{R}$ tales que $(u,v) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\beta_0}$. Considérese $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3 \cdot 2^{n_0}} < \delta_0$, y sea

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^{2i}}$$

y nótese que $x_0 \in \mathbb{Q}$ tiene denominador 2^{n_0} . Así, el rectángulo $R_0 = R_{x_0,0}$ tiene lado $\delta_1 = \frac{1}{2^{2n_0+1}} < 2\delta_0$. Por otro lado, $x_0 < \frac{1}{3}$, y por lo tanto el rectángulo $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\beta_0}$. Sea α_1 un ordinal tal que

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\alpha_1}$$

y nótese qe también es ordinal sucesor. También, Sean $n_1 > n_0$ y

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1-n_0} \frac{1}{2^{2i}}$$

Se puede probar que el rectángulo

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (x_1\delta_1, x_1 + \delta_1)$$

no está en R_0 , ya que $x_1 < \frac{1}{3 \cdot 2^{2n_0}}$. Siguiendo el proceso inductivamente, se obtienen tres sucesiones: (α_i) , (δ_i) y (x_i) , donde $i \in \text{Ord}$. Sin embargo, la sucesión (δ_i) es estrictamente decreciente, por lo que $\delta_\alpha \neq \delta_\gamma \forall \gamma > \delta, \forall \alpha \in \text{Ord}$. Lo anterior es absurdo, ya que la sucesión (δ_i) es subconjunto de \mathbb{R} , y es cardinale. Por lo tanto, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times (-\delta_0, \delta_0) \notin R$, y el marco $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \times \mathcal{O}(\mathbb{D})$ no es espacial; esto es, $\mathcal{O}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \neq \mathcal{O}(\mathbb{D}) \times \mathcal{O}(\mathbb{D})$.

Sin embargo, sí es posible que $\bigoplus_i \mathcal{O}S_i \simeq \mathcal{O}(\prod_{i \in I} S_i)$. Es más:

Proposición 10.3. Si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios sobrios y el marco $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$ es espacial, entonces el morfismo p_i^\dagger es un isomorfismo de marcos $\forall i \in I$.

Demostración. Como $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$ es sobrio, los espacios $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$ y $\mathcal{O}(Y)$ son isomorfos, bajo un isomorfismo $\varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i) \rightarrow \mathcal{O}(Y)$ donde Y es el espacio de puntos de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$, que es sobrio.

Sean $\iota_i : \mathcal{O}(S_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$ las inclusiones canónicas. Sean $q_i = \varphi \circ \iota_i$. Sean $f_i : 2 \rightarrow S_i$ funciones continuas, donde 2 es el espacio de Sierpiński. Considérese el morfismo $h : \bigoplus \mathcal{O}(S_i) \rightarrow \mathcal{O}(2)$ que factoriza los morfismos inducidos por el funtor de abiertos, $\{\mathcal{O}(f_i)\}$, y sea $f : 2 \rightarrow Y$ el morfismo único que se factoriza como $\mathcal{O}(f) = h \circ \varphi^{-1}$, ya que los marcos 2 y $\mathcal{O}(Y)$ son espaciales.

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(q_i \circ f) &= f_i \\ &= h \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \iota_i \\ &= h \circ \iota_i \\ &= \mathcal{O}(f_i) \end{aligned}$$

Por lo que $q_i \circ f = f_i$. Por la propiedad universal del coproducto, existe un único isomorfismo $g : \bigoplus_{i \in I} S_i \rightarrow Y$ tal que $q_i \circ g = p_i$. Así, se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(g) \circ \varphi \circ \iota_i &= \mathcal{O}(q_i \circ g) \\ &= \mathcal{O}(p_i) \\ &= p^\sharp \circ \iota_i \end{aligned}$$

Por lo anterior, $\mathcal{O}(g) \circ \varphi = p^\sharp$. Como g es un isomorfismo, $\mathcal{O}(g)$ también lo es, y como φ es isomorfismo, entonces $\mathcal{O}(g) \circ \varphi = p^\sharp$ es un isomorfismo. \square

Definición 10.4. Sean A un marco y $a, b \in A$. Se dice que a está muy por debajo de b , o $a < b$, si

$$\neg a \vee b = 1$$

Definición 10.5 (Marco regular). Un marco A es regular si para todo $a \in A$ se cumple que

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x < a\}$$

La definición anterior se relaciona con la de un espacio topológico regular:

Definición 10.6. Un espacio $S \in \text{Top}$ es regular si para todo $F \subset S$ cerrado y cualquier $x \notin F$ existen abiertos disjuntos V_1, V_2 tales que $x \in V_1$ y $F \subset V_2$. Nótese que lo anterior es equivalente a que para todo abierto $U \subset S$ se cumple que

$$U = \bigcup \{V \in \mathcal{O}(S) \mid \overline{V} \subset U\}$$

Gracias a la definición de la negación en el marco $\mathcal{O}(S)$, se cumple que S es regular si y sólo si $\mathcal{O}(S)$ lo es.

Definición 10.7 (Marco continuo). Sean A un marco y $a, b \in A$. Se dice que a está bien por debajo de b , o $a << b$, si para todo $X \subset A$ se cumple que

$$b \leq \bigvee X \implies \exists F \subset X \text{ finito tal que } a \leq \bigvee F$$

A es un marco continuo si para todo $a \in A$ se cumple

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x << a\}$$

Es fácil probar que se cumplen los siguientes dos resultados.

Lema 10.8. ■ $S \in \text{Top}$ es localmente compacto si y sólo si el marco $\mathcal{O}(S)$ es continuo.

- Para cualesquiera a, b en un marco A se cumple que $a \ll b \implies a < b$.
- Todo marco continuo es espacial.
- Todo marco compacto regular es espacial.

Gracias a lo anterior, ocurre que las categorías de marcos continuos (ContFrm) y espacios topológicos localmente compactos (LKTop) son isomorfas. Así, la categoría de marcos regulares compactos (KRFrm) es isomorfa a la de espacios compactos Hausdorff (KHaus); este resultado es llamado Dualidad de Isbell. Gracias a estos resultados se cumple la siguiente proposición.

Proposición 10.9. Sean $S, T \in \text{Top}$, con T localmente compacto. Así, los marcos $\mathcal{O}(S) \times \mathcal{O}(T)$ y $\mathcal{O}(S \times T)$ son isomorfos.

Las proposiciones de esta sección muestran algunos casos en los que el teorema de Tychonoff es equivalente en las categorías de marcos y espacios topológicos.

Capítulo 11

Gavillas

Recordaremos la noción de gavilla en el contexto de espacios topológicos y veremos cómo generalizar esto al contexto de marcos.

11.1. Gavillas sobre espacios topológicos

Definición 11.1. Sean E, S espacios topológicos y $f : E \rightarrow S$ una función continua. Una sección local de f es una función continua $\sigma : U \rightarrow E$, donde U es un abierto de S , tal que $f\sigma = \text{id}_U$. Decimos que una sección $\sigma : U \rightarrow E$ de f es global si $U = S$.

Las secciones locales de una función continua $f : E \rightarrow S$ nos proporcionan información acerca del espacio E y la manera en la que éste yace sobre S . ¿En qué condiciones se puede reconstruir $f : E \rightarrow S$ si solo conocemos sus secciones?

Definición 11.2. Sean E, S espacios topológicos y $f : E \rightarrow S$ una función continua. Decimos que f es *étale* (o un homeomorfismo local) si, para cada punto $e \in E$ existen vecindades $U_e \in \mathcal{O}E$ de e y $V_{f(e)} \in \mathcal{O}S$ de $f(e)$, tales que la restricción $f_e : U_e \rightarrow V_{f(e)}$ de f es un homeomorfismo.

Veremos que la respuesta a la pregunta anterior es que una función $f : E \rightarrow S$ está completamente determinada por sus secciones exactamente cuando f es étale. Para mostrar esto, pasaremos por el concepto de gavilla.

Definición 11.3. Consideremos un espacio topológico S . Una *pregavilla* sobre S es un funtor $(\mathcal{O}S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$.

Por ejemplo, tomemos un espacio “objetivo” Y y, para cada abierto $U \subseteq S$, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} CU &= \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ es continua}\}, \\ KU &= \{f : U \rightarrow Y \mid f \text{ es constante}\}. \end{aligned}$$

Dada una inclusión $U \subseteq V$, tenemos funciones de restricción $CV \rightarrow CU$ y $KV \rightarrow KU$ dadas por $f \mapsto f|_U$. Estas asignaciones son functoriales, así que C y K son *pregavillas* sobre S .

Una pregavilla en S asigna información local, abierto por abierto. Queremos imponer una condición de tal modo que nos permita convertir esa información local en información global.

Definición 11.4. Sean S un espacio topológico y $F : (\mathcal{O}S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ una pregavilla sobre S .

Además, sean $U \in \mathcal{O}S$ un abierto y $\mathcal{U} = (U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ una cubierta abierta de U .

Decimos que una familia $(f_\alpha \in FU_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ subordinada a la cubierta \mathcal{U} es una familia compatible si se cumple

$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Gamma$.

En otras palabras: las inclusiones $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U_\alpha$ y $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U_\beta$ inducen dos funciones

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} FU_\gamma \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in \Gamma} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

que mandan $(f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$ a $(f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \mid \alpha, \beta \in \Gamma)$ y $(f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \mid \alpha, \beta \in \Gamma)$, respectivamente. Entonces una familia $(f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma) \in \prod_{\gamma \in \Gamma} FU_\gamma$ es compatible si sus imágenes bajo estas dos funciones coinciden.

Definición 11.5. Sea S un espacio topológico. Decimos que una pregavilla en S

$$F : (\mathcal{O}S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

es una gavilla si, para cualquier abierto $U \in \mathcal{O}S$, cualquier cubierta abierta $\mathcal{U} = (U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ y cualquier familia compatible $(f_\alpha \in FU_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$, existe un único $f \in FU$ tal que

$$f|_\alpha = f_\alpha$$

para todo $\alpha \in \Gamma$.

En otras palabras, F es una gavilla si, para cualquier abierto U de S y cualquier cubierta abierta $(U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ de U , el diagrama

$$FU \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} FU_\gamma \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in \Gamma} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un igualador.

Con estas herramientas, podemos demostrar que los morfismos étales están completamente determinados por sus secciones.

De hecho, demostraremos un resultado más fuerte, y la afirmación anterior será un corolario.

Por un lado, sabemos que los funtores $(\mathcal{O}S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ y las transformaciones naturales entre éstos forman una categoría, a la cual denotamos como $\text{Gav}(S)$.

Definición 11.6. Dado un espacio topológico S , definimos la categoría $\text{Et}(S)$ como sigue:

- Los objetos de Top/S son pares (E, f) , donde E es un espacio topológico y $f : E \rightarrow S$ es una función étale.

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow f \\ S \end{array}$$

- Dados objetos $(E, f), (E', f')$ de $\text{Et}(S)$, un morfismo $g : (E, f) \rightarrow (E', f')$ es una función continua $g : E \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ & \searrow f \quad \swarrow f' & \\ & S & \end{array}$$

Esta es, en efecto, una categoría, con la composición y la identidad heredadas de Top .

Nótese que, si en la definición de $\text{Et}(S)$ no pedimos que la función continua $f : E \rightarrow S$ sea coherente, seguimos obteniendo una categoría, a la cual denotamos como Top/S .

Ahora ¿qué relación hay entre gavillas y morfismos étales?

Notemos que, dado un objeto (E, f) de $\text{Et}(S)$, tenemos una pregavilla Γ_f en S que, a cada abierto $U \subseteq S$, le asigna las secciones locales de f con dominio U :

$$\Gamma_f U = \{\sigma : U \rightarrow E \mid f\sigma = \text{id}_U\}$$

y, a cada contención $U \subseteq V$, le asigna la función de restricción $\Gamma V \rightarrow \Gamma U$. De hecho, la pregavilla Γ_f asociada a (E, f) es una gavilla, pues las funciones continuas se pueden pegar a lo largo de abiertos. (Nótese que no usamos que f fuera étale, por lo cual esta construcción sigue funcionando en Top/S). Más aún, dado un morfismo $g : (E, f) \rightarrow (E', f')$ en $\text{Et}(S)$, obtenemos una transformación natural $g_* : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_{f'}$ dada como $g_*(\sigma) = g\sigma$ pues, dados abiertos $U \subseteq V$ de S , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_f V & \longrightarrow & \Gamma_f U \\ g_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ \Gamma_{f'} V & \longrightarrow & \Gamma_{f'} U \end{array}$$

es conmutativo.

Luego, obtenemos un funtor $\Gamma : \text{Et}(S) \rightarrow \text{Gav}(S)$. El resultado principal es el siguiente teorema.

Teorema 11.7. *El funtor $\Gamma : \text{Et}(S) \rightarrow \text{Gav}(S)$ es una equivalencia.*

Bosquejo de la demostración. La demostración se hace construyendo el funtor $\text{Gav}(S) \rightarrow \text{Et}(S)$ inverso a Γ . Es decir, dada una gavilla F en U , debemos construir un espacio topológico E y un morfismo étale $f : E \rightarrow S$ tal que $\Gamma_f \simeq F$.

Primero construiremos E fibra a fibra. Dado $s \in S$, ponemos

$$F_s = \left(\bigsqcup_{U \in \mathcal{O}S, s \in U} FU \right) / \sim_s,$$

donde \sim_s es la relación de equivalencia en $\bigsqcup_{U \in \mathcal{O}S, s \in U} FU$ dada, para cualesquiera $\sigma \in FU$, $\sigma' \in F(U')$, como $\sigma \sim_s \sigma'$ si, y solo si, existe un vecindad abierta $U_s \subseteq U \cap U'$ de s tal que $\sigma|_{U_s} = \sigma'|_{U_s}$. A la clase de equivalencia de $\sigma \in FU$ bajo la relación \sim_s la denotamos como $[\sigma]_s$.

Después ponemos $T(F) = \bigsqcup_{s \in S} F_s$ y definimos la proyección $f_F : T(F) \rightarrow S$ mandando $[\sigma]_s \in T(F)$ a $s \in S$. Equipamos a $T(F)$ con la topología generada por los básicos

$$B(\sigma, U) = \{[\sigma]_s \mid s \in U\}$$

siempre que $\sigma \in FU$ y $U \in \mathcal{O}S$. Finalmente, se muestra que $f_F : T(F) \rightarrow S$ es étale y que esta construcción es inversa a Γ . \square

11.2. Gavillas sobre marcos

Ahora, ¿cómo hacemos esto sobre un marco? En realidad, la teoría se puede usar casi sin modificación.

Definición 11.8.

- Una *pregavilla* sobre un marco A es un funtor $F : A^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Si $x \leq y \in A$, denotamos la función $Fy \rightarrow Fx$ inducida por F como $f \mapsto f|_x$.
- Una *pregavilla* $F : A^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ es *separada* si, para cualesquiera $X \subseteq A$ y $f, g \in F(\bigvee X)$, se tiene

$$(\forall x \in X, f|_x = g|_x) \implies f = g.$$

- Sea F una *pregavilla* sobre A . Dado un subconjunto $X \subseteq A$, una familia $(f_x \in Fx \mid x \in X)$ es *compatible* si $f_x|_{x \wedge y} = f_y|_{x \wedge y}$ para cualesquiera $x, y \in X$.
- Una *pregavilla* $F : A^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ es *cotejada* si, para cualquier subconjunto $X \subseteq A$ y cualquier familia compatible $(f_x \in Fx \mid x \in X)$ existe un $f \in F(\bigvee X)$ tal que $f|_x = f_x$ para todo $x \in X$.
- Una *pregavilla* $F : A^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ es una *gavilla* si es separada y cotejada.

Ejemplo 11.9. Sea Ω un marco. Dado $a \in \Omega$, consideremos

$$\begin{aligned} \Omega(a) &= \mathcal{L}(\downarrow a) \subseteq \mathcal{L}\Omega, \\ \Omega\langle a \rangle &= \{X \in \mathcal{L}(\downarrow a) \mid \bigvee X = a\} \subseteq \mathcal{L}\Omega, \\ \Omega[a] &= \downarrow a \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Cada una de estas asignaciones define una pregavilla, donde las restricciones están dadas, para $a \leq b$, como

$$\begin{aligned} X &\mapsto \{x \wedge b \mid x \in X\}, \\ X &\mapsto \{x \wedge b \mid x \in X\}, \\ x &\mapsto x \wedge b, \end{aligned}$$

respectivamente. Se verifica que, en general,

- $\Omega(\cdot)$ es cotejada pero no separada,
- $\Omega\langle\cdot\rangle$ es separada pero no cotejada y
- $\Omega[\cdot]$ es gavilla.

Dada una pregavilla F en un marco Ω , podemos obtener una gavilla F^+ en Ω como sigue.

Para cada $a \in \Omega$, ponemos

- $\langle a \rangle = \{X \subseteq \Omega \mid \forall X = a\}.$
- $F\langle a \rangle = \{(f_x \in Fx \mid x \in X) \text{ es compatible} \mid X \in \langle a \rangle\}$
- $F^+(a) = F\langle a \rangle / \sim$, donde $(f_x \in Fx \mid x \in X) \sim (g_y \wedge Fy \mid y \in Y)$ si existe $Z \in \langle a \rangle$, $Z \subseteq X \cap Y$ tal que $af_z = g_z$ para todo $z \in Z$.

Se puede demostrar que F^+ es una gavilla y, más aún, la asignación $F \mapsto F^+$ se extiende a un functor que resulta ser adjunto izquierdo de la inclusión $\text{Gav}(\Omega) \rightarrow [\Omega^{\text{op}}, \text{Set}]$ de las gavillas en las pregavillas.

Sin embargo, estas construcciones son muy largas y complicadas. Se puede trabajar con las gavillas en un marco a través de una categoría equivalente a $\text{Gav}(\Omega)$ llamada la categoría de Ω -conjuntos y denotada como $\text{Set}(\Omega)$, pero para desarrollar esta teoría se necesitaría más tiempo.

Capítulo 12

Marcos en teoría de anillos y módulos

Esto es una prueba jeje Ahora trataremos de dar una motivación algebraica para estudiar los núcleos de un marco. En realidad, el estudio de los núcleos se puede realizar en un contexto más general que el de marcos. A continuación damos un ejemplo de cómo se pueden usar los núcleos para estudiar anillos y módulos.

Localizaciones Recordemos que, en teoría de anillos, podemos localizar un anillo A con respecto a un conjunto multiplicativo $S \subseteq A$. Por ejemplo, tomando $A = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, obtenemos la localización $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$.

El morfismo $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ induce dos funtores

$$\text{Mod}_{\mathbb{Z}} \rightleftarrows \text{Mod}_{\mathbb{Q}}$$

llamados restricción y extensión de escalares. Las categorías, al igual que los anillos, tienen su propio concepto de localización. La definición (que no haremos aquí) es tal que los funtores $\text{Mod}_{\mathbb{Z}} \rightleftarrows \text{Mod}_{\mathbb{Q}}$ exhiben que $\text{Mod}_{\mathbb{Q}}$ es una localización de $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}$.

Teorías de torsión La clase de los \mathbb{Z} -módulos (es decir, grupos abelianos) contiene las clases \mathcal{T}_t y \mathcal{F}_t formadas por los \mathbb{Z} -módulos de torsión y los \mathbb{Z} -módulos libres de torsión, respectivamente. Notemos que \mathcal{T}_t y \mathcal{F}_t satisfacen:

- $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(M, N) = 0$ para cualesquiera $M \in \mathcal{T}_t$ y $N \in \mathcal{F}_t$.
- Si $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(P, N) = 0$ para todo $N \in \mathcal{F}_t$, entonces $P \in \mathcal{T}_t$.
- Si $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(M, P) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}_t$, entonces $P \in \mathcal{F}_t$.

Debido a que la pareja $(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$ satisface estos axiomas, decimos que es una teoría de torsión. Además, como \mathcal{T}_t es cerrada bajo submódulos, decimos que $(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$ es una teoría de torsión hereditaria.

Los ideales de \mathbb{Z} y un colímite Consideremos el conjunto $\Lambda(\mathbb{Z})$ de los ideales de \mathbb{Z} . Como todos los ideales de \mathbb{Z} son principales, tenemos

$$\Lambda(\mathbb{Z}) = \{\langle n \rangle \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

También consideraremos el conjunto $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ de los ideales de \mathbb{Z} distintos de 0.

Notemos que $\Lambda(\mathbb{Z})$ es una retícula, con ínfimo $\wedge = \cap$ y supremo $\vee = +$. Además, el subconjunto $\Lambda^*(\mathbb{Z}) \subseteq \Lambda(\mathbb{Z})$ satisface las siguientes propiedades:

- es no vacío,
- cerrado bajo intersecciones y
- absorbe hacia arriba (es decir, si $I \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$ y $I \leq J$, entonces $J \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$).

Si un subconjunto de una retícula tiene estas propiedades, decimos que es un filtro de la retícula. En otras palabras, $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ es un filtro de $\Lambda(\mathbb{Z})$.

Cada ideal I de \mathbb{Z} es, en particular, un \mathbb{Z} -módulo, por lo cual podemos considerar el \mathbb{Z} -módulo $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z})$. Además, dados ideales $I \leq J$ de \mathbb{Z} , tenemos un morfismo de \mathbb{Z} -módulos

$$\varphi_J^I : \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(J, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z})$$

dado por la restricción: $\varphi_J^I(f) = f|_I$.

Notemos que los morfismos $(\varphi_J^I \mid I \leq J \in \Lambda(\mathbb{Z}))$ satisfacen

- para todo I , tenemos $\varphi_I^I = \text{id}_{\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z})}$ y
- siempre que $I \leq J \leq K$, tenemos $\varphi_I^J \varphi_J^K = \varphi_I^K$. Esto es: $f|_J|_I = f|_I$.

En otras palabras: viendo al copo $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ como una categoría, tenemos un funtor

$$\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) : (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}}.$$

En general, dado un conjunto dirigido \mathcal{J} y una categoría \mathcal{C} , un sistema dirigido en \mathcal{C} indicado por \mathcal{J} es un funtor $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$. Como $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ es codirigido (ya que es cerrado bajo ínfimos), se sigue que $(\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\text{op}}$ es dirigido. Es decir: el funtor

$$\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) : (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$$

es un sistema dirigido en $\mathcal{C} = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$, indicado por $\mathcal{J} = (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\text{op}}$.

Sean \mathcal{J} un conjunto dirigido y $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un sistema dirigido. Denotemos como \sqsubseteq al orden en \mathcal{J} y, para cada morfismo $\alpha : i \rightarrow j$ en \mathcal{J} (es decir, $i \sqsubseteq j$) usaremos la notación $\varphi_i^j = F(\alpha) : F(i) \rightarrow F(j)$. El límite directo de F es un objeto \mathcal{C} , comúnmente denotado $\varinjlim F$ o $\varinjlim_{i \in \mathcal{J}} F(i)$, junto con una familia de morfismos $(\eta_i : F(i) \rightarrow \varinjlim F \mid i \in \mathcal{J})$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- Para cada $i \sqsubseteq j \in \mathcal{I}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{\varphi_i^j} & F(j) \\ & \searrow \eta_i \quad \swarrow \eta_j & \\ & \varinjlim F & \end{array}$$

Es decir, $\eta_j \varphi_i^j = \eta_i$.

- Dado un objeto X de \mathcal{C} y una familia de morfismos $(\mu_i : F(i) \rightarrow X \mid i \in \mathcal{I})$ tales que $\mu_j \varphi_i^j = \mu_i$ (siempre que $i \sqsubseteq j$), entonces existe un único morfismo $\mu : \varinjlim F \rightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{\varphi_i^j} & F(j) \\ & \searrow \eta_i \quad \swarrow \eta_j & \\ & \varinjlim F & \\ & \downarrow \mu & \\ & X & \end{array}$$

μ_i (curved arrow from $F(i)$ to X) μ (curved arrow from $F(j)$ to X)

(siempre que $i \sqsubseteq j \in \mathcal{I}$).

Se puede demostrar que, para la categoría $\mathcal{C} = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$, los límites directos siempre existen y están dados por

$$\varinjlim F = \left(\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} F(i) \right) / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia en $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} F(i)$ definida, para $f \in F(i)$ y $g \in F(j)$, como

$$f \sim g \quad \text{si, y solo si} \quad \exists k \geq i, j, \varphi_i^k(f) = \varphi_j^k(g)$$

y donde los morfismos $\eta_i : F(i) \rightarrow \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F(i)$ son las proyecciones $f \mapsto [f]$ de $f \in F(i)$ a su clase de equivalencia.

Ahora consideremos el conjunto dirigido $\mathcal{I} = (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\text{op}}$ y el sistema dirigido

$$\begin{aligned} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) : (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\text{op}} &\rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}} \\ I &\mapsto \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Para cada ideal $\langle n \rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$, definamos el morfismo $\mu_n : \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}$ dado por $\mu_n(f) = f(n)/n$.

Entonces, si $\langle n \rangle \sqsubseteq \langle m \rangle$ (es decir, $\langle m \rangle \leq \langle n \rangle$), el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi_n^m} & \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle m \rangle, \mathbb{Z}) \\ & \searrow \mu_n \quad \swarrow \mu_m & \\ & \mathbb{Q} & \end{array}$$

es conmutativo.

Ejercicio 10. *Mostrar que el morfismo inducido en el límite directo*

$$\mu : \varinjlim_{\langle n \rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$[f] \mapsto \frac{f(n)}{n}$$

es un isomorfismo.

Solución. Primero veamos que μ está bien definida. Tomemos morfismos relacionados $f \sim g \in \varinjlim_{\langle n \rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z})$. Es decir, $f : \langle m \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ y $g : \langle n \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfacen

$$f|_{\langle k \rangle} = g|_{\langle k \rangle}$$

para alguna $k \in \mathbb{Z}$ con $m \mid k$, $n \mid k$. Es decir, $k = rm$, $k = sn$ para algunos $r, s \in \mathbb{Z}$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \mu([g]) &= \frac{g(n)}{n} = \frac{sg(n)}{sn} = \frac{g(sn)}{sn} = \frac{g(k)}{k} \\ &= \frac{f(k)}{k} = \frac{f(rm)}{rm} = \frac{rf(m)}{rm} = \frac{f(m)}{m} = \mu([f]). \end{aligned}$$

Se sigue que μ está bien definida en las clases de equivalencia; es decir: no depende del representante.

Ahora, dado $r/m \in \mathbb{Q}$, consideremos la función $f : \langle m \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $am \mapsto ar$. En efecto, f respeta sumas y productos por enteros, así que podemos considerar $[f]$.

Queremos ver que la asignación $r/m \mapsto [f]$ no depende de r y de m , sino solo del cociente r/m .

Para esto, tomamos $s/n = r/m$ y debemos mostrar que $g : \langle n \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ dada como $an \mapsto as$ cumple $[f] = [g]$. Como $s/n = r/m$, entonces $sm = rn$, así que mn cumple

$$f|_{\langle mn \rangle}(amn) = f(amn) = arn = asm = g(anm) = g|_{\langle mn \rangle}(amn),$$

por lo cual $f|_{\langle mn \rangle} = g|_{\langle mn \rangle}$ y $[f] = [g]$.

Luego, la asignación $r/m \mapsto [(am \mapsto ar)]$ es una función

$$\xi : \mathbb{Q} \rightarrow \varinjlim_{\langle n \rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z}).$$

Notemos que ξ es \mathbb{Z} -lineal, ya que

$$\begin{aligned} \xi\left(a\frac{r}{m} + \frac{s}{n}\right) &= \xi\left(\frac{arn + ms}{mn}\right) \\ &= (xmn \mapsto x(arn + ms)) \\ &= (xmn \mapsto xarn + xms) \\ &= (xmn \mapsto xarn) + (xmn \mapsto xms) \\ &= a(xmn \mapsto xrn) + (xmn \mapsto xms) \\ &= a\xi\left(\frac{rn}{mn}\right) + \xi\left(\frac{ms}{mn}\right) \\ &= a\xi\left(\frac{r}{m}\right) + \xi\left(\frac{s}{n}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned}
 \xi(\mu(r/m)) &= \xi(am \mapsto ar) \\
 &= \frac{(am \mapsto ar)(m)}{m} \\
 &= \frac{r}{m} \\
 \mu(\xi([f])) &= \mu\left(\frac{f(n)}{n}\right) \\
 &= [an \mapsto af(n)] \\
 &= [an \mapsto f(an)] \\
 &= [f].
 \end{aligned}$$

Esto muestra que ξ es la inversa de μ , así que tenemos un isomorfismo

$$\mathbb{Q} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu} \\ \xleftarrow{\xi} \end{array} \lim_{\langle n \rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z}),$$

Esto es lo que se quería. ■

Ahora, ¿qué tiene que ver esto con núcleos?

Filtros de Gabriel Recordemos que $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ es un filtro de $\Lambda(\mathbb{Z})$. De hecho, tiene otras propiedades interesantes: Dado cualquier ideal $I \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$, tenemos

$$(n : I) = \{k \in \mathbb{Z} \mid nk \in I\} \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además, si $J \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$, entonces

$$(\forall n \in J, (n : I) \in \Lambda^*(\mathbb{Z})) \implies I \in \Lambda^*(\mathbb{Z}).$$

A un filtro con estas dos propiedades se le llama filtro de Gabriel.

Núcleos deferentes Se puede demostrar que el operador $j : \Lambda(\mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda(\mathbb{Z})$ dado como

$$j(I) = \{n \in \mathbb{Z} \mid (n : I) \in \Lambda^*(\mathbb{Z})\}$$

es un núcleo en $\Lambda(\mathbb{Z})$, en el sentido de que es monótono, infla, es idempotente y preserva ínfimos. Más aún, el conjunto $N(\Lambda(\mathbb{Z}))$ de los núcleos en \mathbb{Z} es un marco. Adicionalmente, el núcleo j satisface

$$j(n : I) = (n : j(I)).$$

A un núcleo con esta propiedad se le llama núcleo deferente.

En particular, tomando el núcleo j definido arriba, se puede demostrar que su conjunto de puntos fijos es

$$\Lambda(\mathbb{Z})_j = \{0 \leq \mathbb{Z}\},$$

el cual es isomorfo a la retícula $\Lambda(\mathbb{Q})$ de ideales de \mathbb{Q} .

En términos generales, hay una correspondencia (que no desarrollaremos aquí) entre los núcleos deferentes de $\Lambda(\mathbb{Z})$, los filtros de Gabriel en $\Lambda(\mathbb{Z})$, las teorías de torsión hereditaria de $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ y las localizaciones de $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}$.

Por ejemplo, al núcleo j le corresponden el filtro $\Lambda^*(\mathbb{Z})$, la teoría de torsión $(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$ y la localización $\text{Mod}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Q}}$.

Parte V

Apéndices

Capítulo 13

Teoría de categorías

13.1. Categorías

Una categoría \mathcal{C} consiste de

- una colección $\text{Ob}\mathcal{C}$, cuyos elementos son llamados los objetos de \mathcal{C} ;
- para cada par de objetos $A, B \in \text{Ob}\mathcal{C}$, una colección $\mathcal{C}(A, B)$, cuyos elementos se llaman *morfismos* (o *flechas*) de A en B , de modo que cada $\mathcal{C}(A, B)$ es disjunto de los demás; es decir; si $A \neq A'$ o si $B \neq B'$, entonces $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \emptyset$;
- para cualesquiera objetos $A, B, C \in \text{Ob}\mathcal{C}$, una función

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) &\rightarrow \mathcal{C}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \equiv fg \end{aligned}$$

denominada 'composición';

- para cada objeto $A \in \text{Ob}\mathcal{C}$, una flecha distinguida $\text{id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$ llamada *la flecha identidad* de A ;

sujetos a las condiciones:

- asociatividad: si $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, $h \in \mathcal{C}(C, D)$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- identidad: para todo $f \in \mathcal{C}(A, B)$, se cumple que $f \text{id}_A = f = \text{id}_B f$.

Observación 13.1. Dependiendo del autor, el conjunto de morfismos, que aquí denotamos como $\mathcal{C}(A, B)$, se puede escribir como $\text{Hom}(A, B)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, (A, B) , $[A, B]$, etc. Además, pueden exigir que cada $\mathcal{C}(A, B)$ sea un conjunto, pero para los propósitos de estas notas, esta clase puede no ser cardinable.

Ejemplo 13.2.

- \mathbb{Z} puede ser visto como categoría de, al menos, dos formas diferentes:

- Tomando $\text{Ob}(\mathbb{Z}) = \{\bullet\}$ y $\mathbb{Z}(\bullet, \bullet) = \{\bullet \xrightarrow{n} \bullet \mid n \in \mathbb{Z}\}$, tomando la composición como la multiplicación usual en \mathbb{Z} (nótese que aquí la composición es conmutativa), y la identidad es $1 \in \mathbb{Z}$ ($1m = m = m1$ se cumple trivialmente).
 - Pensemos a \mathbb{Z} con el orden dado por la divisibilidad, $(\mathbb{Z}, \leq_{\text{div}})$, donde $n \leq_{\text{div}} m$ si y sólo si $m = nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Para esta categoría, $\text{Ob}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}(n, m) = \{(n, m)\}$ si y sólo si $n \leq_{\text{div}} m$.
- En general, para cualquier conjunto parcialmente ordenado (A, \leq) se puede pensar la categoría \mathcal{C} dada por $\text{Ob}\mathcal{C} = A$ y

$$\mathcal{C}(a, b) = \begin{cases} \{(a, b)\}, & m \leq n \\ \emptyset, & m \not\leq n. \end{cases}$$

- Similarmente, cualquier monoide M se puede entender como una categoría con un solo objeto \bullet y definiendo $\mathcal{C}(\bullet, \bullet) = M$ y definiendo la composición como la operación del monoide.
- La categoría de conjuntos Set , donde $\text{Ob}(\text{Set})$ consta de todos los conjuntos, $\text{Set}(A, B)$ son las funciones de conjuntos $A \rightarrow B$ y utilizando la composición usual.
- Dado un campo k , se tiene la categoría Vect_k , cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre k , y las flechas son las transformaciones k -lineales.
- La categoría Top , tomando como objetos los espacios topológicos, y las flechas son las funciones continuas.
- La categoría de campos Fld , cuyos objetos son campos y sus morfismos son morfismos de anillos (preservan suma, multiplicación y mandan el 1 al 1).
- La categoría de extensiones de campos. Fld^\rightarrow . Los objetos de Fld^\rightarrow son las extensiones de campos, esto es, los morfismos de Fld . Dados $(k \xrightarrow{f} L), (k' \xrightarrow{g} L') \in \text{Ob}(\text{Fld}^\rightarrow)$, los morfismos de f a g en la categoría Fld^\rightarrow son morfismos de extensiones; esto es: pares de morfismos de campos que son compatibles con las extensiones:

$$\text{Fld}^\rightarrow(f, g) = \left\{ (u, v) \in \text{Fld}(k, k') \times \text{Fld}(L, L') \left| \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{v} & L' \\ \uparrow f & \cong & \uparrow g \\ k & \xrightarrow{u} & k' \end{array} \right. \right\}.$$

Dados $f, g, h \in \text{Ob}(\text{Fld}^\rightarrow)$, la composición se hereda de la composición en Fld :

$$\begin{aligned} \text{Fld}^\rightarrow(f, g) \times \text{Fld}^\rightarrow(g, h) &\rightarrow \text{Fld}^\rightarrow(f, h) \\ ((u, v), (x, y)) &\mapsto (x, y)(u, v) = (xu, yv). \end{aligned}$$

En un diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & yv & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 L & \xrightarrow{v} & L' & \xrightarrow{y} & L'' \\
 \uparrow f & \cong & \uparrow g & \cong & \uparrow h \\
 k & \xrightarrow{u} & k' & \xrightarrow{x} & k'' \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & xu & & &
 \end{array} .$$

La conmutatividad del rectángulo exterior se hereda de la conmutatividad de los dos cuadrados:

$$h x u = y g u = y v f.$$

La asociatividad de la composición se hereda de la asociatividad de la composición de morfismos de campos

$$\begin{array}{ccccccc}
 L & \xrightarrow{v} & L' & \xrightarrow{y} & L'' & \xrightarrow{b} & L''' \\
 \uparrow f & \cong & \uparrow g & \cong & \uparrow h & \cong & \uparrow j \\
 k & \xrightarrow{u} & k' & \xrightarrow{x} & k'' & \xrightarrow{a} & k'''
 \end{array} .$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
 ((a, b)(x, y))(u, v) &= (ax, by)(u, v) \\
 &= (axu, byv) \\
 &= (a, b)(xu, yv) \\
 &= (a, b)((x, y)(u, v))
 \end{aligned}$$

La identidad de la extensión $f : k \rightarrow L$ es $\text{id}_f = (\text{id}_k, \text{id}_L) : f \rightarrow f$. En efecto, dadas $(u, v) : f \rightarrow g$ y $(c, d) : h \rightarrow f$, tenemos

$$\begin{aligned}
 (u, v)(\text{id}_k, \text{id}_L) &= (u\text{id}_k, v\text{id}_L) = (u, v) \\
 (\text{id}_k, \text{id}_L)(c, d) &= (\text{id}_k c, \text{id}_L d) = (c, d).
 \end{aligned}$$

13.2. Funtores

Para comparar los objetos de una categoría, utilizamos las flechas de la categoría, y ahora, además, para comparar categorías, definimos el concepto de funtor. Por ejemplo, si tenemos una flecha entre espacios topológicos, esta flecha es una función continua, lo que significa que respeta la estructura, en el sentido de que la imagen de abiertos es abierta; un morfismo de grupos respeta la estructura del grupo; un morfismo de anillos respeta la estructura del anillo, etc. Con esto en mente, tenemos la definición de funtor:

Definición 13.3 (Funtor). Para dos categorías \mathcal{C}, \mathcal{D} , un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ actúa sobre los objetos y las flechas, de manera que consiste de lo siguiente:

Una asignación

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{C}) &\longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}) \\ A &\rightarrow F(A) \end{aligned}$$

Para cada $A, A' \in \mathcal{C}$, una asignación

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, A') &\longrightarrow \mathcal{D}(FA, FA') \\ f &\rightarrow F(f) \end{aligned}$$

Que además cumple que $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$.

Ejemplo 13.4.

Dada cualquier categoría \mathcal{C} , el functor identidad $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ manda todo objeto a sí mismo y todo morfismo a sí mismo.

En la categoría de grupos abelianos $\mathbb{Z}\text{-Mod}$, para un grupo abeliano G , definimos a TG como el grupo de torsión, que consta de todos los elementos de G de orden finito. Si $G = TG$ decimos que G es de torsión, y si $TG = 0$ decimos que G es libre de torsión.

Ejercicio 11. Mostrar que la construcción del grupo de torsión es un endo-functor $T : \mathbb{Z}\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$.

Solución. Primero, sean $a, b \in T_G$ arbitrarios, entonces, existen $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$a^n = e, \quad b^m = e, \quad e \in G \text{ el neutro de } G.$$

Si consideramos a $p := mn$, tenemos que

$$\begin{aligned} (ab)^p &= a^p b^p \\ &= (a^n)^m (b^m)^n \\ &= e^m e^n \\ &= e \cdot e = e \end{aligned}$$

con $p = mn \in \mathbb{Z}^+$. Ya que a, b son arbitrarios, se sigue que $ab \in T_G$ y en consecuencia T_G es cerrado bajo el producto de G .

Ahora, sea $c \in T_G$ arbitrario, entonces existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $c^k = e$. Ahora nótese que:

$$\begin{aligned} cc^{-1} &= e \\ (cc^{-1})^k &= e^k = e \\ \underbrace{c^k}_{=e} (c^{-1})^k &= e \\ (c^{-1})^k &= e, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Así, como c es arbitrario, obtenemos que $c^{-1} \in T_G$ y por ende T_G contiene a los inversos.

Con lo anterior, concluimos que T_G es un subgrupo de G y por lo tanto, ya que G es arbitrario, el functor T manda objetos de $\mathbb{Z} - \text{Mod}$ en objetos de $\mathbb{Z} - \text{Mod}$. Continuando, para una función $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathbb{Z} - \text{Mod}$, nótese que $(T_A \xrightarrow{Tf} T_B)$ se define cómo $Tf = f|_{T_A}$, la restricción de f en T_A . Ahora, para $a \in T_A$ arbitrario, se cumple que $a^n = e$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Luego:

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f(e) = e \\ f\left(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}\right) &= e \\ \text{Como } f \in \text{Ab}, \underbrace{f(a)f(a)\cdots f(a)}_{n \text{ veces}} &= e \\ (f(a))^n &= e \end{aligned}$$

Así, $(Tf)(a) = f(a) \in T_B$, y cómo a es arbitrario, se tiene que $Tf : T_A \rightarrow T_B$ está bien definido.

Luego, nótese que $(Tf)(e) = f(e) = e$, y se tiene que $e^1 = e$, por tanto, Tf preserva al neutro.

Con esto, Tf es un morfismo de Grupos Abelianos.

Finalmente, es claro que $T1_A = 1_{T_A}$, por lo tanto T preserva morfismos, y en conclusión, es un endo-functor de $\mathbb{Z} - \text{Mod}$. ■

Adicionalmente, los funtores deben respetar la composición de las categorías en una de dos maneras, que determinan la varianza del functor.

Definición 13.5 (Functor covariante y contravariante). *Dados dos objetos $A, B \in \mathcal{C}$, un functor F es covariante si*

$$F(A \xrightarrow{f} B) = FA \xrightarrow{Ff} FB$$

y es contravariante si

$$F(A \xrightarrow{f} B) = FA \xleftarrow{Ff} FB$$

para todo $f \in \mathcal{C}(A, B)$. Con esto, se tiene que, para cualesquiera dos flechas f, g compatibles (que se pueden componer), se tiene que un functor F cumple que:

$$F(gf) = F(g)F(f)$$

si es covariante, y

$$F(gf) = F(f)F(g)$$

si es contravariante.

Finalmente, introducimos unas propiedades adicionales de los funtores.

Definición 13.6 (Fidelidad). *Un functor F es fiel si, para cada $A, A' \in \mathcal{C}$ la función*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A, A') &\rightarrow \mathcal{D}(FA, FA') \\ f &\rightarrow F(f)\end{aligned}$$

es inyectiva.

Definición 13.7 (Plenitud). *Un functor F es pleno si, para cada $A, A' \in \mathcal{C}$ la función*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A, A') &\rightarrow \mathcal{D}(FA, FA') \\ f &\rightarrow F(f)\end{aligned}$$

es suprayectiva.

13.3. Transformaciones naturales

Ahora que podemos comparar categorías mediante los funtores, queremos herramientas que nos permitan comparar dos funtores entre dos categorías. Para cumplir esta idea, se creó el concepto de transformación natural.

Definición 13.8 (Transformación natural). *Dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, una transformación natural $\alpha : F \rightarrow G$ es una familia $(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A))_{A \in \mathcal{C}}$ de flechas de \mathcal{D} tal que, para toda flecha $(A \xrightarrow{f} A') \in \mathcal{C}$, se cumple que:*

$$G(f) \circ \alpha_A = \alpha_{A'} \circ F(f).$$

Aquí, los $(\alpha_A)_{A \in \mathcal{C}}$ se llaman los componentes de la transformación.

Y además, podemos componer transformaciones naturales:

Si $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ son funtores, y $\alpha : F \rightarrow G, \beta : G \rightarrow H$ son transformaciones naturales entre los funtores, entonces, la composición $\beta\alpha : F \rightarrow H$ es una transformación natural que va del functor F al functor H .

Estas transformaciones se llaman 'naturales' porque precisamente aparecen de forma 'natural' en el ámbito matemático.

También, se denota por $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ a la clase de todas las transformaciones naturales de \mathcal{C} en \mathcal{D} , y también se le suele llamar la 'exponenciación', y se denota $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Definición 13.9 (Isomorfismo natural). *Se dice que una transformación natural es un isomorfismo natural precisamente cuando es un isomorfismo en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.*

Ejercicio 12. (*) *Probar que la exponenciación es una categoría.*

Demostración. Consideramos la clase de los funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Para las categorías \mathcal{C}, \mathcal{D} fijas.

Consideramos las transformaciones naturales como morfismos.

Sean $F, G, H, I : C \rightarrow D$ funtores y $\alpha: F \rightarrow G$, $\beta: G \rightarrow H$ y $\gamma: H \rightarrow I$ transformaciones naturales. Tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) & \xrightarrow{\beta_A} & H(A) & \xrightarrow{\gamma_A} & I(A) \\ F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow & & H(f) \downarrow & & I(f) \downarrow \\ F(A') & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & G(A') & \xrightarrow{\beta_{A'}} & H(A') & \xrightarrow{\gamma_{A'}} & I(A') \end{array}$$

conmuta. Es decir, para cada $A \in C$,

$$\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A \quad \beta_{A'} \circ G(f) = H(f) \circ \beta_A \quad \gamma_{A'} \circ H(f) = I(f) \circ \gamma_A.$$

☉ *La composición es una transformación natural.*

Definimos $\beta\alpha: F \rightarrow H$ a la familia $(F(A) \xrightarrow{\beta_A \circ \alpha_A} H(A))$ de D .

Sea $(A \xrightarrow{f} A') \in C$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_{A'} \circ (\alpha_{A'} \circ F(f)) &= \beta_{A'} \circ (G(f) \circ \alpha_A) \\ &= (\beta_{A'} \circ G(f)) \circ \alpha_A \\ &= (H(f) \circ \beta_A) \circ \alpha_A. \end{aligned}$$

Por lo que $(\beta_{A'} \circ \alpha_{A'}) \circ F(f) = H(f) \circ (\beta_A \circ \alpha_A)$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\beta_A \circ \alpha_A} & H(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow H(f) \\ F(A') & \xrightarrow{\beta_{A'} \circ \alpha_{A'}} & H(A') \end{array}$$

conmuta.

☉ *La composición es asociativa.*

Sabemos que $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ ya que $\gamma_A \circ (\beta_A \circ \alpha_A) = (\gamma_A \circ \beta_A) \circ \alpha_A$ para cada $(A \xrightarrow{f} A') \in C$.

☉ *I_F es una transformación natural.*

Sea $F: C \rightarrow D$ un funtor. Definimos $I_F: F \rightarrow F$ como la familia $(F(A) \xrightarrow{I_A} F(A)) \in D$, donde I_A es el morfismo identidad de $F(A)$, para cada $A \in C$.

Sea $(A \xrightarrow{f} A') \in D$. Sabemos que $I_{A'} \circ F(f) = F(f) = F(f) \circ I_A$. Por lo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{I_A} & F(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ F(A') & \xrightarrow{I_{A'}} & F(A') \end{array}$$

conmuta. Es decir, I_F es una transformación natural.

☉ *Identidad.*

Sean $\alpha: F \rightarrow G$ y $\beta: H \rightarrow F$ transformaciones lineales, sabemos que $\alpha \circ I_F = \alpha$ y $I_F \circ \beta = \beta$, ya que $\alpha_A \circ I_A = \alpha_A$ y $I_A \circ \beta_A = \beta_A$, para cada $A \in C$.

□

Además, dados dos funtores $F, G \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, $F(A) \simeq G(A)$ es la naturalidad en A si F, G son naturalmente isomorfos.

Ahora un ejemplo: Sean $V \in \text{Vect}_k^{\leq \infty}$ de la categoría de k -espacios vectoriales de dimensión finita, y consideramos su espacio dual $V^* = \text{Hom}(V, k)$, esto es una transformación natural $(\cdot)^*: \text{Vect}_k^{\leq \infty} \rightarrow \text{Vect}_k^{\leq \infty}$, y además se tiene un iso-natural $V \xrightarrow{\alpha_V} V^{**}$, dado por la evaluación en $v, v \in V$:

$$\begin{aligned}\alpha_V(v) &\in V^{**} = \text{Hom}(V^*, k) \\ \alpha_V(v)(\varphi) &= \varphi(v)\end{aligned}$$

Esto determina una transformación natural $\alpha: \text{id} \rightarrow (\cdot)^{**}$, que además es un isomorfismo canónico (se llama así ya que esta dado de forma 'no-arbitraria').

Con estos conceptos, se puede construir la definición de categorías equivalentes.

La idea es como sigue: Queremos que $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$ signifique que existen dos funtores $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}$ tales que $GF \equiv 1_{\mathcal{C}}$ y $FG \equiv 1_{\mathcal{D}}$. Esto quiere decir que hay isomorfismos naturales $\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow Gf$ y $\varepsilon: FG \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.

Definición 13.10. Un functor $F \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es esencialmente suprayectivo en objetos si, para todo $D \in \mathcal{D}$, existe un $A \in \mathcal{C}$ tal que $F(A) \simeq D$.

Con esta definición, podemos observar que un functor es una equivalencia si y sólo si es pleno, fiel y esencialmente suprayectivo en objetos.

Ejercicio 13. (**) Probar que un functor es una equivalencia ssi es esencialmente suprayectivo y fielmente pleno.

Solución. Primero probaremos el siguiente lema.

Lema 13.11. Si $\alpha: F \rightarrow G$ es un isomorfismo natural entre dos funtores $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, cada componente $\alpha_A: FA \rightarrow GA$ de α es un isomorfismo en \mathcal{D} .

Demostración. Como $\alpha: F \rightarrow G$ es un isomorfismo, existe una transformación natural $\alpha^{-1}: G \rightarrow F$ tal que

$$\alpha\alpha^{-1} = \text{id}_G \qquad \alpha\alpha^{-1} = \text{id}_F$$

Esto significa que, al fijarnos en las componentes en cualquier objeto A de \mathcal{C} , tenemos

$$\begin{aligned}\alpha_A(\alpha^{-1})_A &= (\alpha\alpha^{-1})_A = (\text{id}_G)_A = \text{id}_{GA} \\ (\alpha^{-1})_A\alpha_A &= (\alpha^{-1}\alpha)_A = (\text{id}_F)_A = \text{id}_{FA}\end{aligned}$$

Luego, α_A es un isomorfismo con inverso $(\alpha_A)^{-1} = (\alpha^{-1})_A$. En particular, la notación α_A^{-1} no es ambigua. □

Ahora sí, continuamos con el ejercicio. Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una equivalencia. Entonces hay otro funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos

$$\epsilon : FG \simeq \text{id}_{\mathcal{D}} \qquad \eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \simeq GF.$$

- Primero probaremos que F es fiel. Supongamos que $f, g : A \rightarrow B$ son morfismos de \mathcal{C} tales que $Ff = Fg$. Aplicando G , obtenemos $GFf = GFg$. Luego, como η es transformación natural, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} GFA & \xleftarrow[\sim]{\eta_A} & A \\ GFf \downarrow & \cong & \downarrow f \\ GFB & \xleftarrow[\sim]{\eta_B} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} GFA & \xleftarrow[\sim]{\eta_A} & A \\ GFg \downarrow & \cong & \downarrow g \\ GFB & \xleftarrow[\sim]{\eta_B} & B \end{array},$$

donde η_A y η_B son isomorfismos, por el lema que probamos. Recordando que $GFf = GFg$, tenemos

$$\begin{aligned} f &= (\eta_B^{-1})(GFf)(\eta_A) \\ &= (\eta_B^{-1})(GFg)(\eta_A) \\ &= g, \end{aligned}$$

como se quería.

- Ahora veremos que F es pleno. Sea $g : FA \rightarrow FB$ un morfismo en \mathcal{D} . Queremos construir un morfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $Ff = g$. Como G es el inverso de F (salvo iso), el candidato natural sería Gg . El problema es que este es un morfismo de GFA en GFB . Podemos intentar arreglar esto recordando que los componentes de la transformación $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ son isomorfismos. Consideramos la composición $h = (\eta_B^{-1})(Gg)(\eta_A)$:

$$\begin{array}{ccc} GFA & \xleftarrow[\sim]{\eta_A} & A \\ Gg \downarrow & & \downarrow h \\ GFB & \xleftarrow[\sim]{\eta_B} & B \end{array}$$

Aplicando F , tenemos

$$\begin{array}{ccccc} FA & \xleftarrow[\sim]{\epsilon_{FA}} & FGFA & \xleftarrow[\sim]{F\eta_A} & FA \\ \downarrow g & & FGg \downarrow & & \downarrow Fh \\ FB & \xleftarrow[\sim]{\epsilon_{FB}} & FGFB & \xleftarrow[\sim]{F\eta_B} & FB \end{array},$$

lo cual nos dice que Fh y g difieren por un isomorfismo. Tendríamos $Fh = g$ si fuera el caso que $(\epsilon_{FA})(F\eta_A) = \text{id}_{FA}$ y que $(\epsilon_{FB})(F\eta_B) = \text{id}_{FB}$. Sin embargo, esto no es cierto, en general.

Para remediar esto, en lugar de tomar h , tomamos la composición f como

$$\begin{array}{ccccccc} GFA & \xleftarrow{GF\eta_A^{-1}} & GFGFA & \xleftarrow{G\epsilon_{FA}^{-1}} & GFA & \xleftarrow{\eta_A} & A \\ Gg \downarrow & & & & & & \vdots f \\ GFB & \xleftarrow{GF\eta_B^{-1}} & GFGFB & \xleftarrow{G\epsilon_{FB}^{-1}} & GFB & \xleftarrow{\eta_B} & B \end{array}$$

de modo que, al aplicar F , tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} FA & \xleftarrow{\epsilon_{FA}} & FGFA & \xleftarrow{FGF\eta_A^{-1}} & FGFGFA & \xleftarrow{FG\epsilon_{FA}^{-1}} & FGFA & \xleftarrow{F\eta_A} & FA \\ \downarrow g & & FGg \downarrow & & & & & & \vdots Ff \\ FB & \xleftarrow{\epsilon_{FB}} & FGFB & \xleftarrow{FGF\eta_B^{-1}} & FGFGFB & \xleftarrow{FG\epsilon_{FB}^{-1}} & FGFB & \xleftarrow{F\eta_B} & FB \end{array}$$

La situación puede parecer peor, pero la naturalidad nos salva. Agregando arriba y abajo los cuadrados conmutativos que nos da la condición de naturalidad, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} & & FA & \xleftarrow{F\eta_A^{-1}} & FGFA & \xleftarrow{\epsilon_{FA}^{-1}} & FA \\ & \nearrow \epsilon_{FA} & & & \nearrow \epsilon_{FGFA} & & \nearrow \epsilon_{FA} \\ FA & \xleftarrow{\epsilon_{FA}} & FGFA & \xleftarrow{FGF\eta_A^{-1}} & FGFGFA & \xleftarrow{FG\epsilon_{FA}^{-1}} & FGFA & \xleftarrow{F\eta_A} & FA \\ \downarrow g & & FGg \downarrow & & & & & & \vdots Ff \\ FB & \xleftarrow{\epsilon_{FB}} & FGFB & \xleftarrow{FGF\eta_B^{-1}} & FGFGFB & \xleftarrow{FG\epsilon_{FB}^{-1}} & FGFB & \xleftarrow{F\eta_B} & FB \\ & \searrow \epsilon_{FB} & & & \searrow \epsilon_{FGFB} & & \searrow \epsilon_{FB} \\ & & FB & \xleftarrow{F\eta_B^{-1}} & FGFB & \xleftarrow{\epsilon_{FB}^{-1}} & FB \end{array}$$

Siguiendo el camino exterior, obtenemos que

$$(F\eta_B^{-1})(\epsilon_{FB}^{-1})(\epsilon_{FB})(F\eta_B)Ff = g(F\eta_A^{-1})(\epsilon_{FA}^{-1})(\epsilon_{FA})(F\eta_A).$$

Es decir, $Ff = g$.

- Con el lema que probamos, es fácil ver que F es esencialmente suprayectivo. En efecto, para cualquier objeto B de \mathcal{D} , el componente $\epsilon_B : FGB \rightarrow B$ de $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo, así que B es isomorfo a un objeto en la imagen de F .

Ahora la otra implicación. Supongamos que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es fielmente pleno y esencialmente suprayectivo. Queremos definir un functor $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ que haga de inverso de F (salvo iso). Como F es esencialmente suprayectivo, el axioma de elección nos permite elegir, para cada objeto B de \mathcal{D} , un objeto GB de \mathcal{C} y un isomorfismo $\epsilon_B : FGB \xrightarrow{\sim} B$.

Falta definir la acción de G en morfismos. Dado $g : B_1 \rightarrow B_2$ en \mathcal{D} , definimos $f = (\epsilon_{B_2})^{-1}g(\epsilon_{B_1}) : FGB_1 \rightarrow FGB_2$, de tal modo que

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xleftarrow{\epsilon_{B_1}} & FGB_1 \\ g \downarrow & \cong & \downarrow f \\ B_2 & \xleftarrow{\epsilon_{B_2}} & FGB_2 \end{array} .$$

Como F es fielmente pleno, podemos definir a $Gg : GB_1 \rightarrow GB_2$ como el único morfismo que satisface $FGg = f : FGB_1 \rightarrow FGB_2$.

Veremos que G es un funtor. Si tomamos morfismos

$$\begin{array}{c} B_1 \\ g \downarrow \\ B_2 \\ h \downarrow \\ B_3 \end{array}$$

entonces, por definición, $G(hg)$, Gh y Gg son los únicos morfismos tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xleftarrow{\epsilon_{B_1}} & FGB_1 \\ g \downarrow & \cong & \downarrow FG(hg) \\ B_2 & & \\ h \downarrow & & \\ B_3 & \xleftarrow{\epsilon_{B_3}} & FGB_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B_1 & \xleftarrow{\epsilon_{B_1}} & FGB_1 \\ g \downarrow & \cong & \downarrow FGg \\ B_2 & \xleftarrow{\epsilon_{B_2}} & FGB_2 \\ h \downarrow & \cong & \downarrow FGh \\ B_3 & \xleftarrow{\epsilon_{B_3}} & FGB_2 \end{array} .$$

Se sigue que $FG(hg) = (FGh)(FGg)$. Por funtorialidad de F , esto es $FG(hg) = F((Gh)(Gg))$. Luego, como F es fiel, tenemos $G(hg) = (Gh)(Gg)$.

Por otro lado, tomando el morfismo identidad

$$\begin{array}{c} B \\ \text{id}_B \downarrow \\ B \end{array}$$

tenemos que $G\text{id}_B$ es el único morfismo $GB \rightarrow GB$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{\epsilon_B} & FGB \\ \text{id}_B \downarrow & \cong & \downarrow FG\text{id}_B \\ B & \xleftarrow{\epsilon_B} & FGB \end{array}$$

Por lo tanto, $FG\text{id}_B = \text{id}_{FGB} = F\text{id}_{GB}$. Como F es fiel, esto implica que $G\text{id}_B = \text{id}_{GB}$.

Por definición de la acción de G en morfismos, para cualquier morfismo $g : B_1 \rightarrow B_2$ en \mathcal{D} el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xleftarrow{\epsilon_{B_1}} & FGB_1 \\ g \downarrow & \cong & \downarrow FGg \\ B_2 & \xleftarrow{\epsilon_{B_2}} & FGB_2 \end{array}$$

es conmutativo. Esto significa que la familia de morfismos $(\epsilon_B : FGB \rightarrow B)_{B \in \text{Ob } \mathcal{D}}$ es una transformación natural

$$\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

Como cada ϵ_B es un isomorfismo y el diagrama anterior es conmutativo, se sigue que ϵ es un isomorfismo natural, cuya inversa $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{D}} \rightarrow FG$ tiene componentes dadas por

$$(\epsilon^{-1})_B = (\epsilon_B)^{-1} : B \rightarrow FGB$$

para cada objeto B de \mathcal{D} .

Resta construir un isomorfismo natural $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$. Sea A un objeto de \mathcal{C} . Como F es fielmente pleno y $\epsilon : FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo, podemos definir η_A como el único morfismo $\eta_A : A \rightarrow GFA$ tal que $F\eta_A = \epsilon_{FA}^{-1} : FA \rightarrow FGFA$.

Dado que $F\eta_A$ es un isomorfismo (con inverso ϵ_{FA}), se sigue que cada η_A es un isomorfismo, cuyo inverso η_A^{-1} es el único morfismo $\eta_A : A \rightarrow GFA$ tal que $F\eta_A^{-1} = \epsilon_{FA} : FGFA \rightarrow FA$. En efecto, si $f : GFA \rightarrow A$ es tal que $Ff = \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned} F(\eta_A f) &= (F\eta_A)(Ff) = \epsilon_{FA}^{-1} \epsilon_{FA} = \text{id}_{FGFA} = F\text{id}_{GFA} \\ F(f\eta_A) &= (Ff)(F\eta_A) = \epsilon_{FA} \epsilon_{FA}^{-1} = \text{id}_{FA} = F\text{id}_A \end{aligned}$$

así que $\eta_A f = \text{id}_{GFA}$ y $f\eta_A = \text{id}_A$, pues F es fiel, por lo cual $f = \eta_A^{-1}$.

Finalmente, observemos que η es una transformación natural. En efecto, para cualquier morfismo $f : A_1 \rightarrow A_2$ en \mathcal{C} , $Ff : FA_1 \rightarrow FA_2$ es un morfismo en \mathcal{D} , por lo cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc} FA_1 & \xleftarrow{\epsilon_{FA_1}} & FGFA_1 \\ Ff \downarrow & \cong & \downarrow FGFf \\ FA_2 & \xleftarrow{\epsilon_{FA_2}} & FGFA_2 \end{array}$$

es conmutativo. Como observamos antes, $F\eta_A^{-1} = \epsilon_A$ para cualquier A , así que esto es

$$\begin{array}{ccc} FA_1 & \xleftarrow{F\eta_{A_1}^{-1}} & FGFA_1 \\ Ff \downarrow & \cong & \downarrow FGFf \\ FA_2 & \xleftarrow{F\eta_{A_2}^{-1}} & FGFA_2 \end{array}$$

Es decir,

$$F(f\eta_{A_1}^{-1}) = (Ff)(F\eta_{A_1}^{-1}) = (F\eta_{A_2}^{-1})(FGFf) = F(\eta_{A_2}^{-1}GFf),$$

de modo que $f\eta_{A_1}^{-1} = \eta_{A_2}^{-1}GFf$, pues F es fiel. Luego, $\eta_{A_2}f = (GFf)\eta_{A_1}$. Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\eta_{A_1}} & GFA_1 \\ f \downarrow & \parallel & \downarrow GFf \\ A_2 & \xrightarrow{\eta_{A_2}} & GFA_2 \end{array}$$

es conmutativo. Esta es la condición de naturalidad. ■

13.4. Adjunciones

En general, dadas dos categorías y dos funtores entre ellas, es muy difícil saber a priori cuando estos funtores forman una equivalencia, por eso se buscó las condiciones mínimas que se pueden exigir para tratar a dichas categorías 'como si fueran equivalentes'. De esta idea surgió el concepto de adjunción.

Definición 13.12. Dadas dos categorías \mathcal{C}, \mathcal{D} y dos funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, diremos que F es el adjunto izquierdo de G , y que G es el adjunto derecho de F , denotado $F \dashv G$, si $\mathcal{D}(F(A), B) \simeq \mathcal{C}(A, G(B))$, y esto es natural en A y en B . Es decir, para cualesquiera morfismos $f : A' \rightarrow A$ en \mathcal{C} y $g : B \rightarrow B'$ en \mathcal{D} , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(FA, B) & \xrightleftharpoons{\sim} & \mathcal{C}(A, GB) \\ g \circ - \circ Ff \downarrow & & \downarrow Gg \circ - \circ f \\ \mathcal{D}(FA', B') & \xrightleftharpoons{\sim} & \mathcal{C}(A', GB') \end{array}$$

La definición anterior quiere decir que hay un iso natural entre los funtores:

Si $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre las flechas $FA \rightarrow B$ y $A \rightarrow GB$. Es decir, a cualesquiera morfismos $(FA \xrightarrow{p} B) \in \mathcal{D}$ y $(A \xrightarrow{q} GB) \in \mathcal{C}$ les corresponden unas únicas flechas $(A \xrightarrow{\bar{p}} GB)$ y $(FA \xrightarrow{\bar{q}} B)$, respectivamente, tales que $\bar{\bar{p}} = p$ y $\bar{\bar{q}} = q$. Esto nos lleva al axioma de naturalidad, el cual es equivalente a la conmutatividad del diagrama de arriba.

Axioma (De naturalidad).

1. Poniendo $A = A'$ y $f = \text{id}_A : A \rightarrow A$ en el diagrama, obtenemos la condición de que, para cualquier morfismo $p : FA \rightarrow B$, se tenga $(Gg)\bar{p} = \overline{gp}$:

$$(GB' \xleftarrow{Gg} GB \xleftarrow{\bar{p}} A) = \overline{(B' \xleftarrow{g} B \xleftarrow{p} FA)}.$$

2. Poniendo $B = B'$ y $g = \text{id}_B : B \rightarrow B$ en el diagrama, obtenemos la condición de que, para cualquier morfismo $q : A \rightarrow GB$, se tenga $\bar{q}(Ff) = \overline{qf}$:

$$\left(B \xleftarrow{\bar{q}} FA \xleftarrow{Ff} FA' \right) = \overline{\left(GB \xleftarrow{q} A \xleftarrow{f} A' \right)}.$$

Ejemplo 13.13. ■ En álgebra surge mucho el ejemplo *free* \dashv *forget*. Tomando las categorías Vect_k y Set , tenemos el functor de olvidar $u : \text{Vect}_k \rightarrow \text{Set}$, definido por $u((V, +, \cdot)) = V$ (olvida la estructura del espacio y lo considera como conjunto), y el functor libre $F : \text{Set} \rightarrow \text{Vect}_k$, definido como $F(U)$ es el espacio libre generado por U , y estos funtores forman una adjunción.

Para mostrar esto, tomamos $S \in \text{Set}$, $V \in \text{Vect}_k$, y la flecha $g : F(S) \rightarrow V$. Definamos $\bar{g} : S \rightarrow u(V) = V$, como $\bar{g}(s) = g(s)$ para cada $s \in S$, lo que implica que tenemos la flecha $\text{Vect}_k(FS, V) \rightarrow \text{Set}(S, uV)$ que manda cada g a \bar{g} . Ahora sea $f \in \text{Set}(S, uV)$. Entonces definimos \bar{f} :

$$\begin{aligned} \bar{f} : FS &\rightarrow V \\ \bar{f}\left(\sum_{s \in S} \lambda_s s\right) &= \sum_{s \in S} \lambda_s f(s) \end{aligned}$$

- Un caso similar se da con grupos ('mismo' functor de olvidar, y el functor que asigna el grupo libre del conjunto).
- El functor del espacio vectorial libre es el adjunto izquierdo del de olvidar. Tenemos el functor olvidadizo $\text{Vect}_k \rightarrow \text{Set}$ que para cada espacio vectorial V "olvida" su estructura y le asocia el conjunto subyacente. A cada conjunto X se puede asociar el espacio vectorial $k\langle X \rangle$ generado por X ; es decir, el espacio cuya base corresponde a los elementos de X . En este caso toda aplicación lineal $f : k\langle X \rangle \rightarrow V$ se define de manera única por los imágenes de los elementos de la base.

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & k\langle X \rangle \\ f \downarrow & \nearrow \exists! & \\ V & & \end{array}$$

Esto nos da una biyección natural

$$\text{Vect}_k(k\langle X \rangle, V) \cong \text{Set}(X, V)$$

Luego, el functor $k\langle - \rangle$ es adjunto izquierdo del functor olvidar $\text{Vect}_k \rightarrow \text{Set}$.

- Tomando los grupos abelianos $\mathbb{Z} - \text{Mod}$, existe una adjunción con Grp , $F \dashv u$, donde u es el functor de inclusión (olvida que es abeliano), y F asigna a cada grupo G su respectiva 'abelianización', dada por $G/[G, G]$, donde $[G, G] = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$ es el subgrupo conmutador.

- Sean $A, B, C \in \text{Set}$, y consideremos $f \in \text{Set}(A \times B, C)$, entonces

$$\begin{aligned} f &: A \times B \rightarrow C \\ (a, b) &\rightarrow f(a, b) \end{aligned}$$

Si fijamos a , consideramos la función:

$$\begin{aligned} f_A &: A \rightarrow \text{Set}(B, C) \\ a &\rightarrow f_A(a) : B \rightarrow C \\ &= f(a, -)(b) = f(a, b) \in C \end{aligned}$$

Es decir, podemos definir una función de conjuntos

$$\begin{aligned} \text{Set}(A \times B, C) &\xrightarrow{\overline{(-)}} \text{Set}(A, \text{Set}(B, C)) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

y recíprocamente, tomamos una función $f : A \rightarrow \text{Set}(B, C)$, entonces queremos definir una función

$$\begin{aligned} \bar{f} &: A \times B \rightarrow C \\ \bar{f}(a, b) &= f(a)(b) \end{aligned}$$

Así, definimos la función

$$\text{Set}(A, \text{Set}(B, C)) \xrightarrow{\overline{(-)}} \text{Set}(A \times B, C)$$

y notemos que $\overline{(-)}$ y $\widehat{(-)}$ son inversas una de la otra, por tanto son una biyección, y tenemos una adjunción dada por

$$\text{Set}(A \times B, C) \simeq \text{Set}(A, \text{Set}(B, C))$$

donde $\text{Set}(C, B) =: C^B$ se le llama la exponenciación de C en B , y los funtores son

$$- \times B : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$$

y el otro functor es 'exponenciar':

$$(-)^B : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$$

Recordemos que cuando dos categorías tiene una adjunción:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} & \\ F \swarrow & \lrcorner & \searrow G \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

Se cumple que $\mathcal{B}(FA, B) \simeq \mathcal{A}(A, GB)$, y supongamos que tenemos la configuración:

$$FA \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'$$

entonces, la composición qg le corresponde una única flecha:

$$\overline{qg} : A \longrightarrow GB'$$

o también podemos considerar solamente la única flecha de g :

$$\bar{g} : A \longrightarrow GB$$

y luego componerla con $G(q) : GB \rightarrow GB'$ para obtener una nueva flecha

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{g}} & GB \\ & \searrow G(q) \circ \bar{g} & \downarrow G(q) \\ & & GB' \end{array}$$

y la compatibilidad dice que deberíamos obtener la misma flecha, es decir $\overline{qg} = G(q) \circ \bar{g}$. Ahora, nótese que para cualquier $A \in \mathcal{A}$, se tiene una flecha:

$$A \xrightarrow[\eta_A]{} GFA$$

y por lo anterior, esta flecha es la que le corresponde a la identidad, $\eta_A = \overline{1_{FA}}$, y tenemos el caso para cada $B \in \mathcal{B}$, es decir

$$\begin{aligned} \left(A \xrightarrow[\eta_A]{} GFA \right) &= \overline{\left(F(A) \xrightarrow{1_{FA}} F(A) \right)} \\ \left(FGB \xrightarrow[\varepsilon_B]{} B \right) &= \overline{\left(G(B) \xrightarrow{1_{GB}} G(B) \right)} \end{aligned}$$

entonces, esto define las transformaciones naturales en cada componente:

$$\begin{aligned} \eta_{\bullet} : 1_{\mathcal{A}} &\longrightarrow GF \\ \varepsilon_{\bullet} : FG &\longrightarrow 1_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

que son, respectivamente, la **unidad** y la **co-unidad** de adjunción.

Por ejemplo, tomemos la adjunción:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Vect}_k & \\ u \swarrow & \curvearrowright & \searrow F \\ & \vdash & \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \text{Set} & \end{array}$$

del functor que olvida u y el functor de la realización libre F . Aquí, la unidad y la co-unidad son:

$$\eta_S : S \longrightarrow uF(S) = \langle \sum \lambda_s s \mid s \in S \rangle$$

$$\varepsilon_V : Fu(V) \longrightarrow V.$$

Ahora, consideremos una adjunción $F \dashv G$ entre categorías, con su unidad y co-unidad η, ε , entonces los diagramas

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow 1_F & \downarrow \varepsilon F \\ & & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & \searrow 1_G & \downarrow G\varepsilon \\ & & G \end{array}$$

tienen que conmutar, pues si evaluamos la unidad en cada objeto $(A \xrightarrow{\eta_A} GFA) \in \mathcal{A}$ y le aplicamos F , tenemos $FA \xrightarrow{F\eta_A} FGFA$. Por otro lado, buscando al transpuesto de $GFA \xrightarrow{1_{GFA}} GFA$, obtenemos

$$\overline{1_{GFA}} : FGFA \rightarrow FA$$

pero esto es precisamente la co-unidad η_{FA} , y al componerlo con $F\eta_A$

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F\eta_A} & FGFA \\ & \searrow & \downarrow \varepsilon_{FA} \\ & & FA \end{array}$$

Entonces, por definición de transposiciones, obtenemos que $\overline{\eta_A} = \overline{\overline{1_{FA}}} = 1_{FA}$, y la conmutatividad del otro diagrama se prueba de manera análoga.

Esto nos dice que, para cualquier adjunción

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} & \\ F \uparrow & \dashv & \downarrow G \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

con unidad η y co-unidad ε , se cumple que la transposición es inducida por η como $\bar{g} = G(g)\eta_A$, para cualquier $g \in \mathcal{B}(FA, B)$, y dualmente por ε como $\bar{f} = \varepsilon_B F(f)$, para cualquier $f \in \mathcal{A}(A, GB)$.

Ejercicio 14. Las transposiciones inducidas por la unidad y co-unidad coinciden con las transposiciones originales.

Demostración. Recordemos que, por compatibilidad:

$$\begin{aligned} \left(\overline{F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'} \right) &= \left(A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B') \right) \\ \left(\overline{A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)} \right) &= \left(F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B \right), \end{aligned}$$

es decir, $\overline{qg} = G(q)\bar{g}$ y $\overline{fp} = \bar{f}F(p)$.

Debemos demostrar que $\bar{g} = G(g)\eta_A$ y $\bar{f} = \epsilon_B F(f)$ para $g: F(A) \rightarrow B$ y $f: A \rightarrow G(B)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} G(g)\eta_A &= G(g)\overline{\text{id}_{F(A)}} \\ &= \overline{g \circ \text{id}_{F(A)}} \\ &= \bar{g}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \epsilon_B F(f) &= \overline{\text{id}_{G(B)} F(f)} \\ &= \overline{\text{id}_{F(A)} \circ f} \\ &= \bar{f}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 14

Ordinales

Definición 14.1 (Conjuntos linealmente ordenados).

- Un conjunto parcialmente ordenado (A, \leq) es linealmente ordenado si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene $a \leq b$ o $b \leq a$.
- Para un conjunto linealmente ordenado (A, \leq) , su opuesto es el mismo conjunto A junto con el orden \leq^{op} definido como

$$a \leq^{op} b \iff b \leq a$$

El opuesto de A es llamado simplemente A^* .

- (A, \leq) es bien ordenado si todo subconjunto de A tiene por lo menos un primer elemento. Nótese que cualquier conjunto linealmente ordenado finito es bien ordenado.

Ejercicio 15. Sea A un conjunto linealmente ordenado. A es bien ordenado si y sólo si $A^* = A \cup \{\star\}$, donde \star es un elemento genérico, también lo es.

Solución. \Rightarrow

Sea (A, \leq') bien ordenado y considérese la relación $\leq \subset A^* \times A^*$ definida como $\leq' \cup \{(\star, a) : a \in A\} \cup \{(\star, \star)\}$.

1. Claramente, \leq es una relación de orden.
2. Sean $x, y \in A^*$. Si $x, y \neq \star$, como A es totalmente ordenado, $x \leq y$ o $y \leq x$. Si $x \neq \star, y = \star$, entonces $y \leq x$, si $x, y = \star$, entonces $x \leq y$ y $y \leq x$.
3. Sea $B \subset A$. Si $\star \in B$, $\star \leq b \forall b \in B$, y por como está definida \leq , no existe ningún $b \in B$ tal que $b \leq \star$, por lo que \star es el menor elemento de B . Si $\star \notin B$, entonces $B \subset A$, y como \leq es equivalente a \leq' sobre A , entonces B tiene un menor elemento en $B \subset A \subset A^*$.

Por lo anterior, A^* es bien ordenado.

\Leftarrow

Si (A^*, \leq) es bien ordenado, defínase el orden $\leq' \subset A \times A$ como

$$\leq' = \leq \setminus (\{(\star, a) : a \in A\} \cup \{(a, \star) : a \in A\}).$$

1. Claramente, \leq' es una relación de orden total.
2. Sea $B \subset A$. Como $A \subset A^*$, entonces $B \subset A^*$, por lo que $\exists b \in B$ que es el menor elemento de B .

Por lo anterior, A es bien ordenado. ■

Definición 14.2 (Isomorfismo de conjuntos linealmente ordenados). *Un morfismo $f : A \rightarrow B$ entre conjuntos linealmente ordenados es una biyección monótona.*

Definición 14.3 (Tipo de orden). *Para un conjunto linealmente ordenado A , el tipo de orden $\iota(A)$ es la clase de equivalencia de A bajo la relación de equivalencia \simeq definida como*

$$A \simeq B \iff \exists f : A \rightarrow B \text{ tal que } f \text{ es isomorfismo}$$

Si $\alpha = \iota(A)$, entonces $\alpha^* = \iota(A^*)$.

Ejemplo 14.4 (Construcción Von Neumann de \mathbb{N}). \mathbb{N} es un conjunto bien ordenado, pensado como la siguiente construcción:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = \{\{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\}$$

$$3 = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} = 2 \cup \{2\}$$

$$\vdots$$

$$n + 1 = n \cup \{n\}$$

$$\vdots$$

Así, $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ es un conjunto bien ordenado con el orden \leq definido como

$$a \leq b \iff a \subset b$$

Y esta construcción también cumple con los axiomas de Peano.

Ejemplo 14.5 (Algunos tipos de orden). \mathbb{N} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} son conjuntos linealmente ordenados, y sus tipos de orden son

$$\blacksquare \omega = \iota(\mathbb{N})$$

$$\blacksquare \eta = \iota(\mathbb{Q})$$

$$\blacksquare \zeta = \iota(\mathbb{R})$$

Definición 14.6 (Sucesor). Para (A, \leq) con $\alpha = \iota(A)$, por el ejercicio 15 $A^+ = A \cup \{A\}$ es también linealmente ordenado. A^+ es llamado sucesor de A , y $\alpha^+ = \iota(A^+) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Claramente la construcción de Von Neumann de \mathbb{N} es compatible con esta definición de sucesor, y cualquier $n \in \mathbb{N}$ tiene la forma $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Por lo tanto, se puede pensar en el tipo de orden de \mathbb{N} como

$$\omega = \bigcup \{n : n \in \mathbb{N}\}$$

Y a través de la operación sucesor se pueden obtener los ordinales

$$\begin{aligned} \omega + 1 &= \omega^+ = \omega \cup \{\omega\} \\ \omega + 2 &= (\omega + 1)^+ = \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega + 1\} \\ &\vdots \\ \omega \cdot 2 &= \omega + \omega = \bigcup \{\omega + n : n < \omega\} \\ &\vdots \\ \omega^2 &= \omega \cdot \omega = \bigcup \{\omega^n : n < \omega\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definición 14.7 (Ordinal). Un ordinal es el tipo de orden de un conjunto bien ordenado.

Definición 14.8 (Operaciones con conjuntos linealmente ordenados). Sean A, B conjuntos linealmente ordenados, con tipos de orden α y β respectivamente.

- La unión ajena de A y B es $A \dot{\cup} B = (B \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$.
- La suma de A y B es el conjunto linealmente ordenado $B + A = (B \dot{\cup} A)$ junto con la relación \leq definida como

$$(x, i) \leq (y, j) \iff \begin{cases} i < j \\ 0 \\ i = j \text{ y } x \leq y \end{cases}$$

Nótese que si A y B son bien ordenados, $B + A$ también lo es. Más aún, si $A \simeq A'$ y $B \simeq B'$, entonces $B + A \simeq B' + A'$. Por lo tanto, se puede definir el ordinal

$$\alpha + \beta = \iota(B + A)$$

Ya que se ha definido la suma de ordinales, vale la pena hacer algunas observaciones con los ordinales conocidos.

Ejemplo 14.9 (Algunas propiedades de la suma de ordinales).

- Si A y B son conjuntos finitos, la suma de los ordinales α y β funciona como la suma usual de números naturales.

- $1 + \omega = \omega$
- $\omega + 1 \neq \omega$
- $\eta + 1 \neq \eta \neq 1 + \eta$
- $\eta + \eta = \eta$
- $\zeta + \zeta \neq \zeta$

También, para cualesquiera α, β, γ ordinales, se cumple que

$$(\gamma + \beta) + \alpha = \gamma + \beta + \alpha$$

Definición 14.10 (Producto y potencias de ordinales). *Es fácil ver que para dos conjuntos bien ordenados A y B con tipos de orden α y β respectivamente, el conjunto $B \times A$ es bien ordenado con un orden que compara los elementos de $B \times A$ entrada por entrada. Así, se puede definir el producto de ordinales*

$$\beta\alpha = \iota(B \times A)$$

Es fácil ver que el producto de ordinales es asociativo, distributivo y además que

$$(\beta\alpha)^* = \beta^*\alpha^*$$

Tomando en cuenta esta definición del producto, se pueden definir las potencias de un ordinal β como

$$\begin{aligned}\beta^0 &= 1 \\ \beta^{a+1} &= \beta^a\beta\end{aligned}$$

para cualquier $a \in \mathbb{N}$.

Nótese que bajo esta definición de potencia, se cumple que

$$\omega^a + \omega^b = \omega^b$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$. La clase de ordinales $\mathbb{O}rd$ es una clase no cardinale, y es bien ordenada.

Definición 14.11 (Encaje bien ordenado). *Un encaje bien ordenado entre dos conjuntos bien ordenados A y B es una función $f : A \rightarrow B$ si es monótona, inyectiva y se $f(A) \simeq A$ es una sección inferior de B . Si existe un encaje bien ordenado $f : A \rightarrow B$, se dice que A es un sub-orden de B , o $A \trianglelefteq B$. Es fácil ver que si $A \trianglelefteq B$ y también $B \trianglelefteq A$, entonces $A \simeq B$, con un isomorfismo único.*

Ejercicio 16. Sean A, B conjuntos bien ordenados, y $f, g : A \rightarrow B$ dos encajes. Entonces $f = g$.

Demostración. Sea $a_0 \in A$. Como B es bien ordenado, los elementos $f(a_0)$ y $g(a_0)$ son comparables. Sin perder generalidad, supongamos que $f(a_0) \leq g(a_0)$. Entonces $f(a_0) = g(a_1) \leq g(a_0)$ para algún $a_1 \in A$ ya que $g[A]$ es sección inferior. Además $a_1 \leq a_0$ ya que, en caso contrario, se tiene que $g(a_1) > g(a_0)$, lo cual es una contradicción.

Notemos que $f(a_1) \in g[A]$ ya que $f(a_1) \leq f(a_0)$, es decir, existe un $a_2 \in A$ tal que $f(a_1) = g(a_2)$. Repitiendo este proceso obtenemos las siguientes cadenas:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & g(a_0) \\
 & & & & | \\
 a_0 & & f(a_0) & \equiv & g(a_1) \\
 | & & | & & | \\
 a_1 & & f(a_1) & \equiv & g(a_2) \\
 | & & | & & | \\
 a_2 & & f(a_2) & \equiv & g(a_3) \\
 | & & | & & | \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 | & & | & & | \\
 a_{n-2} & & f(a_{n-2}) & \equiv & g(a_{n-1}) \\
 | & & | & & | \\
 a_{n-1} & & f(a_{n-1}) & \equiv & g(a_n) \\
 | & & | & & | \\
 a_n & & f(a_n) & \equiv & g(a_{n+1}) \\
 | & & | & & | \\
 a_{n+1} & & f(a_{n+1}) & \equiv & g(a_{n+2}) \\
 | & & | & & | \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Como A es bien ordenado, la cadena de la izquierda tiene un mínimo. Si a_n es el mínimo de esta cadena, entonces $a_n = a_{n+1}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} = a_n &\Rightarrow f(a_n) = g(a_{n+1}) = g(a_n) = f(a_{n-1}) \\
 \Rightarrow a_n = a_{n-1}, &\text{ por inyectividad de } f \Rightarrow f(a_{n-1}) = g(a_n) = g(a_{n-1}) = f(a_{n-2}) \\
 \Rightarrow a_{n-1} = a_{n-2}, &\text{ por inyectividad de } f \Rightarrow f(a_{n-2}) = g(a_{n-1}) = g(a_{n-2}) = f(a_{n-3}) \\
 &\vdots \\
 \Rightarrow a_2 = a_1, &\text{ por inyectividad de } f \Rightarrow f(a_1) = g(a_2) = g(a_1) = f(a_0) \\
 \Rightarrow a_1 = a_0 &\Rightarrow g(a_0) = g(a_1) = f(a_0)
 \end{aligned}$$

Como el elemento $a_0 \in A$ es arbitrario, concluimos que f y g tienen la misma regla de correspondencia, es decir, $f = g$. \square