Introducción a la teoría de marcos

Curso impartido por: Luis Ángel Zaldívar Corichi
Notas de sus alumnos

20 de enero de 2023

Introducción

La idea de la teoría de marcos no es nueva. A fines de la década de 1950, en un seminario de Ehresmann, en París [1], Bénabou presentó la idea de estudiar un espacio topológico a partir de las propiedades de su topología, vista como un conjunto ordenado. Más adelante, Dowker y Papert Strauss escribieron un famoso artículo [2] en el que retoman la idea de Bénabou, introducen el término "marco" y desarrollan muchas ideas modernas. Posteriormente, Isbell publica un artículo [3] donde introduce la categoría de locales como la categoría opuesta a la de marcos. Observa que muchas nociones topológicas se pueden entender a través de las propiedades del marco asociado, y estudia la adjunción entre la categoría de locales y la categoría de espacios topológicos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[d, shift right, "\mathcal{O}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}} \arrow[u, shift right, "\mathrm{pt}"'] \end{tikzcd}$$

la cual no es una equivalencia, aunque sí induce una equivalencia (dual) entre las subcategorías $\mathrm{Sp} \hookrightarrow \mathrm{Frm}$ y $\mathrm{Sob} \hookrightarrow \mathrm{Top}$, donde los objetos de Sob y Sp son los llamados espacios sobrios y marcos espaciales, respectivamente. Esta equivalencia constituye una generalización de la dualidad de Stone clásica.

También veremos que la categoría de marcos incluye, como subcategoría plena, a la categoría cBool de álgebras booleanas completas y morfismos completos y, sin embargo, cBool no es reflexiva en Frm. Un problema interesante es determinar qué marcos tienen reflexión booleana.

El estudio de los marcos también se relaciona con la teoría de toposes y el estudio de retículas más generales que se encuentran al estudiar anillos y sus categorías de módulos.

Otro atractivo de la teoría de marcos es que se puede hablar de propiedades topológicas en términos puramente reticulares y, en este caso, se comportan de manera un poco distinta: Peter Johnstone demostró, en 1982, que el teorema de Tychonoff para marcos no requiere el uso del axioma de elección, en contraste con el caso de espacios topológicos. Más adelante, Johnstone publicó su monografía Stone spaces, donde expuso de manera sistemática todo lo que se sabía en ese momento al respecto del tema.

Finalmente, mencionaremos que una herramienta central en la teoría es el concepto de núcleo en un marco, cuyo estudio sistemático fue introducido por Harold Simmons y su estudiante Macnab.

Existen, principalmente, dos libros que tratan este tema. El libro Stone spaces, de Johnstone, y el libro Frames and locales, de Picado y Pultr. En teoría iba a haber un tercer libro, escrito por Harold Simmons, aunque este proyecto no se pudo completar, debido a su lamentable fallecimiento en 2018. Parte de estas notas se basan en el libro inconcluso de Simmons.

Índice general

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Aspectos básicos

El objetivo de este capítulo es introducir varias categorías y las relaciones entre estas.

1.1. Copos

Sean A, B dos conjuntos parcialmente ordenados (copos, para abreviar). Un morfismo de copos $f : A \to B$ es una función monótona (creciente). siempre que $a \leq b \in A$, se tiene que $f(a) \leq f(b)$. Viendo a A y a B como categorías, entonces un morfismo $f : A \to B$ es un lo mismo que un funtor.

Si A es un copo y $X \subseteq A$ es cualquier subconjunto, un elemento $a \in A$ es una cota superior de X si $x \leq a$ para todo $x \in X$. Similarmente, si $a \leq x$ para todo $x \in X$, entonces decimos que a es una cota inferior de X.
Si $x \in A$ es una cota inferior de X y, además, $x \in X$, entonces a es único con esta propiedad y decimos que es el menor elemento de X. Similarmente, $x \in X$ es el mayor elemento de X si es una cota superior de X.
Si el conjunto de cotas superiores de X tiene un menor elemento, este elemento se llama supremo de X y lo denotamos como $\bigvee X$. Similarmente, si el conjunto de cotas inferiores de X tiene un mayor elemento, este elemento se llama ínfimo de X y lo denotamos $\bigwedge X$. Nótese que, si X tiene un menor o un mayor elemento, entonces este es el ínfimo o el supremo de X, respectivamente.

Dado que los morfismos de copos (funciones monótonas) son cerrados bajo composición y la función identidad de cualquier copo es un morfismo, éstos forman una categoría, a la cual denotamos Pos.

1.2. Semiretículas

Decimos que un copo es una semiretícula superior (o $\vee$-semiretícula) si todos sus subconjuntos finito tienen supremo. Equivalentemente, un copo A es una $\vee$-semiretícula si todo par de elementos a, b tiene supremo $a \vee b$ y A tiene un menor elemento $0 \in A$ (que es el supremo del cojunto vacío).

Como $0 \leq a$ para todo $a \in A$, entonces $a \vee 0 = a$. Además, $a \vee b = b \vee a$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ y $a \vee a = a$ para cualesquiera $a, b, c \in A$. Por lo tanto, el conjunto A equipado con el supremo, pensado como operación binaria en A, es un monoide conmutativo donde todo elemento es idempotente (el elemento neutro es el $0 \in A$).

Recíprocamente, si $(A, \vee, 0)$ es un monoide conmutativo en el cual todo elemento es idempotente, entonces la relación definida como

$$a \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad a \vee b = b$$

es un orden parcial en A tal que el supremo es $\vee$.

Demostración. En efecto, esto es un orden parcial:

- (Refl). Como a es idempotente, tenemos $a \vee a = a$. Luego, $a \leq a$.
- (Antisim). Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$. Es decir, $a \vee b = b$ y $b \vee a = a$. Como $\vee$ es conmutativo, tenemos

  $$b = a \vee b = b \vee a = a.$$

- (Trans). Supongamos que $a \leq b$ y que $b \leq c$. Es decir, $a \vee b = b$ y $b \vee c = c$. Como $\vee$ es asociativo, tenemos

  $$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c.$$

  Esto es, $a \leq c$.

Ahora mostraremos que $\vee$ es el supremo de este orden. Por inducción, basta mostrarlo en el vacío y en pares de elementos. Como $0 \vee a = a$, entonces $0 \leq a$ para todo $a \in A$. Ahora sean $a, b \in A$, y supongamos que $c \in A$ es tal que $a, b \leq c$. Esto es, $a \vee c = c$ y $b \vee c = c$. Luego,

$$(a \vee b) \vee c = (a \vee c) \vee (b \vee c) = c \vee c = c.$$

Por lo tanto, $a \vee b \leq c$. □

Si A, B son $\vee$-semiretículas, decimos que una función $f : A \to B$ es un $\vee$-morfismo (o un morfismo de $\vee$-semiretículas) si $f(0) = 0$ y si $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. De nuevo, las $\vee$-semiretículas con sus morfismos forman una categoría, a la cual denotamos como $\mathrm{Pos}^{\vee}$.

Dado que $a \leq b$ si, y solo si, $a \vee b = a$, entonces cualquier morfismo de retículas es una función monótona, pues $a \vee b = a$ implica $f(a) \vee f(b) = f(a)$. Así, tenemos un funtor $\mathrm{Pos}^{\vee} \to \mathrm{Pos}$. Sin embargo, este funtor no es pleno, pues existen funciones monótonas que no preservan el supremo.

Las definiciones y observaciones de esta sección se pueden hacer de manera análoga usando ínfimos en vez de supremos, obteniendo la noción de semiretículas inferiores, $\wedge$-morfismos, la categoría $\mathrm{Pos}^{\wedge}$ y un funtor $\mathrm{Pos}^{\wedge} \to \mathrm{Pos}$.

1.3. Retículas

Decimos que un copo A es una retícula si cualquier subconjunto finito $X \subseteq A$ tiene supremo e ínfimo. Equivalentemente, un copo A es una retícula si, y solo si:

1. cualquier par de elementos $a, b \in A$ tiene supremo $a \vee b = \bigvee\{a, b\} \in A$ e ínfimo $a \wedge b = \bigwedge\{a, b\} \in A$,

2. A tiene un menor elemento 0 y un mayor elemento 1. Éstos son el supremo y el ínfimo del subconjunto vacío $\varnothing \subseteq A$, respectivamente.

Algunos autores denominan retículas a los copos que cumplen el punto 1 aunque no cumplan el punto 2. Con esa convención, lo que nosotros llamamos retícula se llama retícula acotada. Nótese también que un subconjunto arbitrario de una retícula A puede no tener supremo o ínfimo.

Ahora definimos la categoría de retículas Lat. Sus objetos son las retículas y sus morfismos son funciones que preservan el 1, el 0, el ínfimo y el supremo: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. De este modo, tenemos funtores fieles

$$\mathrm{Pos}^{\wedge} \leftarrow \mathrm{Lat} \rightarrow \mathrm{Pos}^{\vee} \tag{1.1}$$

Sin embargo, estos no son plenos, ya que una función entre retículas puede preservar supremos sin preservar ínfimos o viceversa.

Distributividad

Sean a, b, c elementos de una retícula A. Por definición del supremo, siempre tenemos $a \leq a \vee b$ y $a \leq a \vee c$. Es decir, a es cota inferior de $\{(a \vee b), (a \vee c)\}$. Así, $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Además,

$$\begin{aligned} b \wedge c &\leq b \leq a \vee b \\ b \wedge c &\leq c \leq a \vee c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \wedge c$ también es cota inferior de $\{(a \vee b), (a \vee c)\}$, por lo cual $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Esto muestra que $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ es cota superior de $\{a, (b \wedge c)\}$. Se sigue que

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Un argumento similar muestra que

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Sin embargo, estas desigualdades no siempre son igualdades. Un retícula es distributiva si las ecuaciones

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

son válidas para cualesquiera $a, b, c \in A$. La primera igualdad es la distributividad del supremo sobre el ínfimo y la segunda es la distributividad del ínfimo sobre el supremo. De hecho, basta pedir una de las dos igualdades: si en una retícula A se cumple una de las ecuaciones para cualesquiera $a, b, c \in A$, entonces la otra también se cumple.

Demostración. Sean $a, b, c \in A$.

1. Supongamos que el supremo distribuye sobre el ínfimo, entonces tenemos la primera y tercera igualdad en

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c)\\ &= a \wedge ((a \wedge b) \vee c)\\ &= a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)\\ &= a \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

2. Por otro lado, si el ínfimo distribuye sobre el supremo, entonces

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c)\\ &= a \vee ((a \vee b) \wedge c)\\ &= a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\\ &= a \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

□

La categoría dLat se define como la subcategoría plena de Lat cuyos objetos son las retículas distributivas. Es decir, los morfismos en dLat son simplemente morfismos de retículas. Así, tenemos una inclusión $\mathrm{dLat} \hookrightarrow \mathrm{Lat}$. En un diagrama, esto es

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Pos} & \\ \mathrm{Pos}^{\wedge} \arrow[ur] & \mathrm{Lat} \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{Pos}^{\vee} \arrow[ul] \\ & \mathrm{dLat} \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

donde todos los funtores son fieles y la flecha con gancho ($\hookrightarrow$) indica un funtor fielmente pleno.

En las secciones siguientes nos dedicaremos a describir varias categorías que tienen funtores “de olvido” a la categoría de retículas distributivas. Es decir, todos sus objetos son retículas distributivas, pero tienen estructura o propiedades extra.

1.4. Álgebras booleanas

Definición 1.1 (Álgebras booleanas)**.** *Un álgebra booleana A es una retícula distributiva donde, para todo elemento $a \in A$ existe un elemento $b \in B$ tal que*

$$a \wedge b = 0, \qquad a \vee b = 1. \tag{1.2}$$

Este elemento b es el único con esta propiedad, se llama el complemento de a y se denota como a' o $\neg a$.

Dado un elemento a de una retícula cualquiera (no necesariamente distributiva), si un elemento b cumple las relaciones 1.2, decimos que es *un complemento* de a. Sin embargo, si la retícula A no es distributiva, entonces un mismo elemento puede tener más de un complemento: por ejemplo, si A es la retícula de subespacios vectoriales de un espacio vectorial (digamos, V) entonces un complemento de un subespacio $U \in A$ es cualquier otro subespacio $W \in A$ tal que $U \oplus W = V$.

La unicidad de los complementos en un álgebra booleana se debe a la distributividad. En efecto, si $a \in A$ es un elemento con complementos b_1, b_2, entonces tenemos

$$\begin{aligned} a \wedge b_1 &= 0 & \qquad a \vee b_1 &= 1 \\ a \wedge b_2 &= 0 & \qquad a \vee b_2 &= 1. \end{aligned}$$

Por distributividad, tenemos

$$b_1 = b_1 \vee 0 = b_1 \vee (a \wedge b_2) = (b_1 \vee a) \wedge (b_1 \vee b_2) = 1 \wedge (b_1 \vee b_2) = b_1 \vee b_2$$

por lo cual $b_2 \leq b_1$. Similarmente,

$$b_2 = b_2 \vee 0 = b_2 \vee (a \wedge b_1) = (b_2 \vee a) \wedge (b_2 \vee b_1) = 1 \wedge (b_2 \vee b_1) = b_2 \vee b_1$$

por lo cual $b_1 \leq b_2$. Así, $b_1 = b_2$.

Ejemplo 1.2 (Conjunto potencia)**.** Dado cualquier conjunto S, el conjunto potencia $\mathcal{P}S$ es un álgebra booleana. El complemento de un subconjunto $X \subseteq S$ es el complemento en el sentido usual:

$$X' = \{s \in S \mid s \notin X\}.$$

■

Observación 1.3. *La definición obvia (y correcta) de un morfismo de álgebras booleanas es un morfismo de retículas que preserva complementos. Sin embargo, cualquier morfismo de retículas entre álgebras booleanas cumple esto.*

De hecho, si A es una retícula y B es una retícula distributiva, entonces cualquier morfismo morfismo de retículas $f : A \to B$ preserva todos los complementos que existan en A, ya que, si $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(0) = 0, \\ f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) = f(1) = 1. \end{aligned}$$

En particular, si A y B son álgebras booleanas, tenemos $f(a') = f(a)'$. De este modo, hay una igualdad *entre los conjuntos de morfismos:*

$$\mathrm{Bool}(A, B) = \mathrm{dLat}(A, B) = \mathrm{Lat}(A, B),$$

por lo cual tenemos inclusiones de subcategorías plenas:

$$\mathrm{Bool} \hookrightarrow \mathrm{dLat} \hookrightarrow \mathrm{Lat}. \tag{1.3}$$

1.5. Álgebras de Heyting

Definición 1.4 (Álgebra de Heyting)**.** *Un álgebra de Heyting es una retícula distributiva equipada con una operación binaria $(- \succ -)$ (llamada implicación) que cumple*

$$a \wedge b \leq c \iff a \leq (b \succ c) \tag{1.4}$$

para cualesquiera $a, b, c \in A$.

Un morfismo de álgebras de Heyting es un morfismo de retículas que preserva la implicación.

En realidad, no es necesario pedir la distributividad: cualquier retícula A equipada con una implicación $(- \succ -)$ que cumple (1.4) es distributiva y, por lo tanto, un álgebra de Heyting.

Demostración. Notemos que $a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y de igual manera $a \wedge c \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Por la definición de implicación, estas desigualdades equivalen a las siguientes:

$$b \leq (a \succ ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))) \text{ y } c \leq (a \succ ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)))$$

Entonces $b \vee c \leq (a \succ ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)))$ y de nuevo por la definición de implicación resulta $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Además, para cualquier retícula se cumple que $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, es decir, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, pero esto pasa si y sólo si $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. □

Ahora veremos la relación entre álgebras booleanas y álgebras de Heyting:

Lema 1.5. *Toda álgebra booleana es un álgebra de Heyting y, de hecho, todo morfismo de álgebras booleanas es un morfismo de álgebras de Heyting. Esto nos da un funtor fiel* $\mathrm{Bool} \to \mathrm{Heyt}$.

Más aún, este funtor también es pleno: todo morfismo de álgebras de Heyting entre álgebras booleanas también preserva los complementos.

La primera parte es consecuencia del lema siguiente, el cual es un poco más general:

Lema 1.6 (Caballo de batalla)**.** *Sea A una retícula distributiva y $a \in A$ un elemento con complemento $\neg a$. Entonces*

$$a \wedge x \leq y \quad \textit{si, y solo si} \quad x \leq \neg a \vee y$$

para cualesquiera $x, y \in A$.

Demostración. Por un lado, supongamos que $a \wedge x \leq y$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= x \wedge 1 \\ &= x \wedge (a \vee \neg a) \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge \neg a) \\ &\leq y \vee (x \wedge \neg a) \\ &\leq y \vee \neg a. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $x \leq \neg a \vee y$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} a \wedge x &\leq a \wedge (\neg a \vee y) \\ &= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge y) \\ &= 0 \vee (a \wedge y) \\ &= a \wedge y \\ &\leq y, \end{aligned}$$

como se quería. □

Nuestro "caballo de batalla" muestra que toda álgebra booleana tiene implicación dada como $(x > y) = \neg x \vee y$. De aquí también es inmediato que todo morfismo de álgebras booleanas preserva la implicación, pues ya preserva complementos y supremos. Poniendo $y = 0$, obtenemos que $(x > 0) = \neg x$. Se sigue que, si $f : A \to B$ es un morfismo de Heyting entre álgebras booleanas, entonces también preserva complementos, pues f ya preserva implicaciones y el cero, así que f es un morfismo booleano.

Por definición, toda álgebra de Heyting es distributiva y todo morfismo de álgebras de Heyting es un morfismo de retículas (distributivas). Por lo tanto, tenemos un funtor fiel $\mathrm{Heyt} \to \mathrm{dLat}$. Sin embargo, a diferencia del caso de álgebras booleanas (c.f. con la observación 1.3), no todo morfismo de retículas entre álgebras de Heyting preserva la implicación.

En resumen, tenemos el siguiente triángulo de funtores fieles:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bool} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{dLat} \\ & \mathrm{Heyt} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

($\hookrightarrow$ indica un funtor fielmente pleno).

1.6. Completez

Ahora veremos que el triángulo (1.5) tiene un análogo con categorías de retículas completas:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{cBool} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Frm} \\ & \mathrm{cHeyt}^{\vee} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

pero antes daremos las definiciones básicas.

Definición 1.7. *Decimos que un copo A es superiormente completo si cualquier subconjunto $X \subseteq A$ tiene supremo $\bigvee X$. En este caso, también decimos que A es una $\bigvee$-semiretícula. Un $\bigvee$-morfismo es una función que preserva supremos arbitrarios; es decir: $f(\bigvee X) = \bigvee\{f(x) \mid x \in X\}$ para todo subconjunto $X \subseteq A$. En particular, un $\bigvee$-morfismo es una función monótona.*

Las $\bigvee$-semiretículas, junto con sus morfismos, forman una categoría $\mathrm{cPos}^{\vee}$.

Notemos que una $\bigvee$-semiretícula es, en particular, una $\vee$-semiretícula y que todo morfismo de $\bigvee$-semiretículas es un morfismo de $\vee$-semiretículas (aunque no al revés). Así, tenemos un funtor $\mathrm{cPos}^{\vee} \to \mathrm{Pos}^{\vee}$.

De manera completamente análoga, decimos que un copo es inferiormente completo (o es una $\bigwedge$-semiretícula) si todo subconjunto $X \subseteq A$ tiene ínfimo $\bigwedge X$; tenemos morfismos de $\bigwedge$-semiretículas y un funtor $\mathrm{cPos}^{\wedge} \to \mathrm{Pos}^{\wedge}$.

Definición 1.8. *Una retícula completa (o copo completo) es un copo A donde todo subconjunto $X \subseteq A$ tiene ínfimo $\bigwedge X$ y supremo $\bigvee X$.*

Un morfismo completo entre retículas completas es una función que preserva supremos arbitrarios e ínfimos arbitrarios. Así, las retículas completas y los morfismos completos forman una categoría cLat.

De la definición, una retícula completa es una $\bigvee$-semiretícula y una $\bigwedge$-semiretícula, mientras que todo morfismo completo es un $\bigvee$-morfismo y un $\bigwedge$-morfismo. Así, tenemos funtores fieles

$$\mathrm{cPos}^{\vee} \leftarrow \mathrm{cLat} \to \mathrm{cPos}^{\wedge}. \tag{1.7}$$

Sin embargo, estos funtores no son plenos, ya que hay morfismos entre retículas completas que preservan supremos pero no preservan ínfimos y viceversa.

Ahora, el siguiente teorema nos dice que las categorías $\mathrm{cPos}^{\wedge}$, $\mathrm{cPos}^{\vee}$ y cLat tienen exactamente los mismos objetos. Esto puede causar confusión, pero hay que recordar que los morfismos son distintos en cada caso, ya que las contenciones

$$\mathrm{cPos}^{\wedge}(A,B) \supseteq \mathrm{cLat}(A,B) \subseteq \mathrm{cPos}^{\vee}(A,B)$$

son propias.

Teorema 1.9. *Un copo A es superiormente completo si, y solo si, es inferiormente completo.*

Demostración. Si A es superiormente completo, entonces dado un subconjunto $X \subseteq A$ podemos considerar el conjunto $\mathrm{cotInf} X$ de cotas inferiores de X.

$$\mathrm{cotInf} X = \{c \in A \mid \forall x \in X, c \leq x\}.$$

Notemos que, todo $x \in X$ es una cota superior de $\mathrm{cotInf} X$, ya que tenemos $y \leq x$ para todo $y \in \mathrm{cotInf} X$. Así, $\bigvee \mathrm{cotInf} X \leq x$, por lo cual $\bigvee \mathrm{cotInf} X \in \mathrm{cotInf} X$. Esto significa que $\bigvee \mathrm{cotInf} X$ es el ínfimo de X:

$$\bigvee \mathrm{cotInf} X = \bigwedge X.$$

Como $X \subseteq A$ era cualquier subconjunto, esto muestra que, si A es superiormente completo, entonces también es inferiormente completo. Análogamente, si A es inferiormente completo, entonces también es superiormente completo. □

1.7. Marcos

La definición de un marco surge al estudiar las propiedades algebraicas de las topologías: si S es un espacio topológico, la topología $\mathcal{O}S$ es un subcopo del conjunto potencia $\mathcal{P}S$ que, por definición, es cerrado bajo ínfimos finitos y supremos arbitrarios. Es decir, $\mathcal{O}S$ es una sub-$\wedge$-semiretícula y una sub-$\bigvee$-semiretícula de $\mathcal{P}S$. Además, como en $\mathcal{P}S$ se cumple la ley distributiva

$$U \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{U \cap V \mid V \in \mathcal{F}\}, \tag{1.8}$$

entonces la misma ley se satisface en $\mathcal{O}S$. Estas son las propiedades de una topología que abstrae un marco.

Definición 1.10. *Un marco A es una retícula completa que satisface la siguiente ley distributiva:*

$$y \wedge \bigvee X = \bigvee \{y \wedge x \mid x \in X\}.$$

En particular, un marco es una retícula distributiva. Un morfismo de marcos es un morfismo de copos que respeta supremos arbitrarios e ínfimos finitos. Los morfismos de marcos son cerrados bajo composición, así que obtenemos una categoría Frm.

Ejemplo 1.11.

1. Dado un conjunto S cualquiera, el conjunto potencia $\mathcal{P}S$ es un marco.

2. Dados dos conjuntos S, T y una función $f : S \to T$, la preimagen $f^{-1} : \mathcal{P}T \to \mathcal{P}S$ preserva ínfimos y supremos arbitrarios, así que, en particular, es un morfismo de marcos.

3. Dado cualquier espacio topológico S, la topología $\mathcal{O}S$ es un marco y la inclusión $\mathcal{O}S \to \mathcal{P}S$ es un morfismo de marcos.

4. Dados dos espacios topológicos S, T y una función continua $f : S \to T$, la preimagen $f^{-1} : \mathcal{P}T \to \mathcal{P}S$ manda abiertos en abiertos, así que se restringe a una función $\mathcal{O}T \to \mathcal{O}S$ que denotamos como $\mathcal{O}f$. En la parte III de este texto, veremos que esta asignación es, de hecho, un funtor contravariante que forma parte de una adjunción entre Top y Frm.

■

Notemos que los morfismos de marcos pueden no preservar ínfimos arbitrarios. Además, en general, los supremos finitos no distribuyen sobre ínfimos arbitrarios.

1.8. Álgebras booleanas completas

Recordemos que un álgebra booleana es una retícula distributiva donde todo elemento tiene un complemento, el cual es único por la distributividad. (Ver 1.4). Un álgebra booleana completa es un álgebra booleana que es completa como retícula. (Ver 1.6).

La categoría cBool de las álgebras booleanas completas se define estipulando que los morfismos entre dos álgebras booleanas completas A, B son los morfismos completos:

$$\mathrm{cBool}(A, B) = \mathrm{cLat}(A, B),$$

de modo que tenemos un funtor de fielmente pleno $\mathrm{cBool} \hookrightarrow \mathrm{cLat}$.

Además, tenemos un funtor fiel $\mathrm{cBool} \to \mathrm{Bool}$, ya que un morfismo completo entre álgebras booleanas completas preserva ínfimos y supremos finitos (y, por lo tanto, preserva complementos). Sin embargo, este funtor no es pleno, ya que no todo morfismo booleano es completo. La situación se ve así:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bool} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{dLat} \\
& \mathrm{Heyt} \arrow[ur] & \\
\mathrm{cBool} \arrow[uu] & & \mathrm{Frm} \arrow[uu]
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

El primer objetivo de esta sección es probar que este cuadrado se cierra con un funtor fiel $\mathrm{cBool} \to \mathrm{Frm}$. Es suficiente mostrar que toda álgebra booleana completa es un marco, pues los morfismos completos son morfismos de marcos automáticamente.

Lema 1.12. *Toda álgebra booleana completa es un marco. Es decir, en un álgebra booleana completa A se satisface la ley de distributividad de marcos*

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

para cualesquiera $a \in A$ y $X \subseteq A$.

Demostración. Por un lado, para todo $x \in X$ tenemos que $x \leq \bigvee X$, así que $a \wedge x \leq a \wedge \bigvee X$. Luego,

$$\bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\} \leq a \wedge \bigvee X,$$

así que solo resta demostrar la otra comparación:

$$a \wedge \bigvee X \leq \bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\}.$$

Por nuestro caballo de batalla (lema 1.6), esto es equivalente a

$$\bigvee X \leq \neg a \vee \bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\},$$

lo cual es más fácil de demostrar: en efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
\neg a \vee \bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\} &= \bigvee\{\neg a \vee (a \wedge x) \mid x \in X\} \\
&= \bigvee\{(\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee x) \mid x \in X\} \\
&= \bigvee\{1 \wedge (\neg a \vee x) \mid x \in X\} \\
&= \bigvee\{\neg a \vee x \mid x \in X\} \\
&\geq \bigvee\{x \mid x \in X\} \\
&= \bigvee X,
\end{aligned}$$

ya que $\neg a \vee x \geq x$ para todo $x \in X$. Esto es lo que se quería. □

Así, dadas dos álgebras booleanas completas A, B, éstas son automáticamente marcos y, además, todo morfismo completo entre ellas es un morfismo de marcos, por lo cual tenemos una inclusión entre los conjuntos de morfismos

$$\mathrm{cBool}(A, B) \subseteq \mathrm{Frm}(A, B).$$

Como mencionamos antes, esto cierra el cuadrado del diagrama (1.9) con un funtor fiel $\mathrm{cBool} \to \mathrm{Frm}$. El segundo objetivo de la sección es mostrar que este funtor es, de hecho, fielmente pleno. En otras palabras, mostraremos que todo morfismo de marcos entre álgebras booleanas completas es un morfismo completo. Con este objetivo, demostraremos siguiente resultado.

Lema 1.13 (Ley de DeMorgan)**.** *Sea A un álgebra booleana completa y $X \subseteq A$. Entonces*

$$\neg \bigwedge X = \bigvee\{\neg x \mid x \in X\}.$$

Demostración. Mostraremos que $\bigwedge X$ y $\bigvee\{\neg x \mid x \in X\}$ son complementarios; es decir: que su ínfimo es 0 y su supremo es 1. Por un lado, cualquier $x \in X$ cumple $\bigwedge X \leq x$, así que

$$\bigwedge X \wedge \neg x \leq x \wedge \neg x = 0.$$

Luego, por la ley distributiva de marcos, tenemos

$$\begin{aligned}
\bigwedge X \wedge \bigvee\{\neg X \mid x \in X\} &= \bigvee\{\bigwedge X \wedge \neg x \mid x \in X\} \\
&= \bigvee\{0\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $x \in X$ tenemos $\neg x \le \bigvee\{\neg x \mid x \in X\}$. Usando dos veces nuestro caballo de batalla (lema 1.6), vemos que esto equivale a $\neg \bigvee\{\neg x \mid x \in X\} \le x$. Como $x \in X$ era arbitraria, tenemos que

$$\neg \bigvee\{\neg x \mid x \in X\} \le \bigwedge X.$$

Usando el caballo de batalla una vez más, obtenemos

$$1 \le \bigvee\{\neg x \mid x \in X\} \vee \bigwedge X.$$

Esto concluye la demostración. □

Con esto podemos probar lo que queríamos: todo morfismo de marcos entre álgebras booleanas completas es un morfismo completo. De hecho, tan solo es necesario que A sea un álgebra booleana completa.

Lema 1.14. *Cualquier morfismo de marcos $f : A \to B$, donde A es un álgebra booleana completa, también respeta los ínfimos arbitrarios.*

Demostración. Por un lado, la desigualdad

$$f(\bigwedge X) \le \bigwedge\{f(x) \mid x \in X\}$$

viene de la monotonía de f. Por otro lado, como $\bigwedge X$ y $\bigvee\{\neg x \mid x \in X\}$ son complementarios en A (por DeMorgan) y f preserva los complementos (pues respeta ínfimos y supremos finitos), entonces $f(\bigwedge X)$ y $\bigvee\{f(\neg x) \mid x \in X\}$ son complementarios en B. Luego, la desigualdad faltante

$$\bigwedge\{f(x) \mid x \in X\} \le f(\bigwedge X)$$

es equivalente, por nuestro caballo de batalla, a la desigualdad

$$\bigwedge\{f(x) \mid x \in X\} \wedge \bigvee\{f(\neg x) \mid x \in X\} = 0,$$

la cual es sencilla de comprobar: para todo $y \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} \bigwedge\{f(x) \mid x \in X\} \wedge f(\neg y) &\le f(y) \wedge f(\neg y) \\ &\le f(y \wedge \neg y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

así que la distributividad de marcos implica

$$\begin{aligned} \bigwedge\{f(x) \mid x \in X\} \wedge \bigvee\{f(\neg x) \mid x \in X\} &= \bigvee\left\{ \bigwedge\{f(x) \mid x \in X\} \wedge f(\neg y) \;\middle|\; y \in X\right\} \\ &= \bigvee\{0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Esto muestra lo que queríamos: el funtor $\mathrm{cBool} \to \mathrm{Frm}$ es fielmente pleno.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bool} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{dLat} \\
& \mathrm{Heyt} \arrow[ur] & \\
\mathrm{cBool} \arrow[uu] \arrow[rr, hook] & & \mathrm{Frm} \arrow[uu]
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Para completar la analogía con el triángulo superior, introduciremos una categoría más: la categoría de álgebras de Heyting superiormente completas.

1.9. Álgebras de Heyting completas

Definición 1.15. *Un álgebra de Heyting completa es un álgebra de Heyting que es completa como retícula. La categoría* $\mathrm{cHeyt}^{\vee}$ *de álgebras de Heyting (superiormente) completas tiene como objetos a las álgebras de Heyting completas. Sus morfismos son morfismos de Heyting (es decir, morfismos de retículas que respetan la implicación) que, además, preservan* supremos arbitrarios.

Notemos que tenemos un funtor fiel $\mathrm{cBool} \to \mathrm{cHeyt}^{\vee}$, pues toda álgebra booleana completa es de Heyting completa y todo morfismo en cBool preserva la implicación, pues ésta tiene la descripción $(x > y) = \neg x \vee y$. Más aún, este funtor es pleno: cualquier morfismo de Heyting entre álgebras booleanas también preserva los complementos, pues tenemos $\neg x = (x > 0)$.

Así, nuestro diagrama crece como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bool} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{dLat} \\
& \mathrm{Heyt} \arrow[ur] & \\
\mathrm{cBool} \arrow[uu] \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Frm} \arrow[uu] \\
& \mathrm{cHeyt}^{\vee} \arrow[uu, crossing over] &
\end{tikzcd} \tag{1.11}$$

Este diagrama *quiere* que lo completemos con una flecha $\mathrm{cHeyt}^{\vee} \to \mathrm{Frm}$. En efecto, toda álgebra de Heyting completa es un marco: basta probar que satisface la ley distributiva de marcos. De hecho, el siguiente resultado nos da también el recíproco: todo marco es, también, un álgebra de Heyting (completa).

Teorema 1.16. *Una retícula completa A es un marco si, y solo si, A tiene implicación.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que A es un marco y sean $a, b \in A$. Consideremos el elemento

$$y = \bigvee\{c \in A \mid a \wedge c \leq b\}$$

Por un lado, para todo $x \in A$ se tiene $a \wedge x \leq b \implies x \leq y$, pues es consecuencia directa de la definición de y. Ahora, si $x \leq y$, tenemos que

$$\begin{aligned} a \wedge x &\leq a \wedge y \\ &= a \wedge \bigvee\{x \in A \mid a \wedge x \leq b\} \\ &= \bigvee\{a \wedge x \mid a \wedge x \leq b\} \leq b \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq y$, así que $y = (a \succ b)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que A tiene implicación. Sean $a \in A$ y $X \subseteq A$. Basta probar que A cumple la LDM. Como $a \wedge x \leq a \wedge \bigvee X$, tenemos que $\bigvee\{x \wedge a \mid x \in X\} \leq a \wedge \bigvee X$. Solo falta demostrar la otra desigualdad. Consideremos $y = \bigvee\{x \wedge a \mid x \in X\}$, entonces $a \wedge x \leq y$ para toda $x \in X$, es decir, $x \leq (a \succ y)$ para toda $x \in X$. Entonces $\bigvee X \leq (a \succ y) \Leftrightarrow a \wedge \bigvee X \leq y = \bigvee\{x \wedge a \mid x \in X\}$. Por lo tanto se cumple la LDM. $\square$

En particular, obtenemos el funtor $\mathrm{cHeyt}^{\vee} \to \mathrm{Frm}$ deseado. Notemos que, aunque un marco es lo mismo que un álgebra de Heyting completa, las categorías $\mathrm{cHeyt}^{\vee}$ y Frm son distintas, pues dados dos marcos A, B, la contención entre los conjuntos de morfismos

$$\mathrm{cHeyt}^{\vee}(A, B) \subseteq \mathrm{Frm}(A, B) \tag{1.12}$$

es propia: hay morfismos de marcos que no preservan la implicación.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bool} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{dLat} \\
& \mathrm{Heyt} \arrow[ur] & \\
\mathrm{cBool} \arrow[uu] \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Frm} \arrow[uu] \\
& \mathrm{cHeyt}^{\vee} \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{1.13}$$

Ejemplo 1.17. Sea S un espacio topológico. Por el teorema anterior, dados $u, v \in \mathcal{O}S$ existe la implicación $v \succ u \in \mathcal{O}S$. Para todo $w \in \mathcal{O}S$, tenemos

$$\begin{aligned} w \leq (v \succ u) &\iff w \cap v \leq u \\ &\iff w \leq v' \cup u \\ &\iff w \leq (v' \cup u)^{\circ}. \end{aligned}$$

Se sigue que $v \succ u = (u \cup v')^{\circ}$. $\blacksquare$

Finalmente, nuestro diagrama se ve así:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Pos} & & & \\
 & \mathrm{Pos}^{\wedge} \arrow[urr] & & \mathrm{Lat} \arrow[ll] \arrow[rr] & & \mathrm{Pos}^{\vee} \arrow[ull] & \\
 & & & \mathrm{dLat} \arrow[u, hook] & & & \\
\mathrm{cPos}^{\wedge} \arrow[uur] & & \mathrm{Heyt} \arrow[ur] & & & \mathrm{Frm} \arrow[ull] \arrow[r] & \mathrm{cPos}^{\vee} \arrow[uul] \\
 & \mathrm{Bool} \arrow[uurr, hook, bend left] \arrow[ur, hook] & & & \mathrm{cHeyt}^{\vee} \arrow[ull] \arrow[ur] & & \\
 & & & \mathrm{cBool} \arrow[ull] \arrow[ur, hook] \arrow[uurr, hook, bend right] \arrow[d, hook] & & & \\
 & & & \mathrm{cLat} \arrow[uuulll, bend left] \arrow[uuurrr, bend right] & & &
\end{tikzcd}$$

La parte central del dibujo es el diagrama (1.13), pero aquí aparece aplastado porque era más fácil dibujarlo así.

Lema 1.18. *Sean A un marco, $a \in A$ y $X \subseteq A$. Entonces*

$$(\bigvee X) \succ a = \bigwedge \{(x \succ a) \mid x \in X\}.$$

En particular, tomando $X = \{x, y\}$, tenemos

$$(x \vee y) \succ a = (x \succ a) \wedge (y \succ a).$$

Demostración. Para todo $y \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
y \le (\bigvee X) \succ a &\iff y \wedge \bigvee X \le a \\
&\iff \bigvee \{y \wedge x \mid x \in X\} \le a \\
&\iff (\forall x \in X,\ y \wedge x \le a) \\
&\iff (\forall x \in X,\ y \le (x \succ a)) \\
&\iff y \le \bigvee \{(x \succ a) \mid x \in X\}.
\end{aligned}$$

□

1.10. Apartado técnico

En esta sección veremos que los conceptos de negación e implicación se pueden trabajar en contextos más generales.

1.10.1. Negaciones

En 1.5 vimos que toda álgebra booleana tiene una implicación dada por $(x \succ y) = \neg x \succ y$. Este es nuestro caballo de batalla. También vimos que el complemento de un elemento se puede recuperar de la implicación como $\neg x = (x \succ 0)$. De hecho esta última operación se puede hacer en cualquier álgebra de Heyting A. En este caso, $b = (x \succ 0)$ no es, necesariamente, un complemento de A, pero sí tiene la propiedad de ser el mayor b que cumple $x \wedge b = 0$.

La siguiente definición nos permite trabajar con esta noción en una retícula que puede ni siquiera ser álgebra de Heyting.

Definición 1.19 (Negaciones). *Si A es una retícula y $a \in A$, entonces una negación de a es un elemento $b \in A$ tal que*

$$x \leq a \quad \textit{si, y solo si} \quad x \wedge b = 0$$

para todo $x \in A$.

Así, b, b' son negaciones de a, entonces $b \wedge a = b' \wedge a = 0$ (porque $b \leq b$ y $b' \leq b'$). Así, $b \leq b'$ y $b' \leq b$, por lo cual $b = b$. Es decir, las negaciones son únicas en caso de existir, así que, si un elemento $a \in A$ tiene negación, ésta se denota como $\neg a$. Nótese que, en este caso, para demostrar la unicidad no se requirió que A fuera distributiva.

Sin embargo, si A es distributiva y $a \in A$ tiene complemento a' (único, por distributividad), entonces a' también es la negación de a, es decir, $\neg a = a'$. En efecto, es claro que $x \leq a' \implies x \wedge a = 0$; mientras que, si $x \wedge a = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a' \vee a) \\ &= (x \wedge a') \vee (x \wedge a) \\ &= x \wedge a', \end{aligned}$$

por lo cual $x \leq a'$.

Juntando estas observaciones, obtenemos el siguiente resultado:

Lema 1.20. *Si A es una retícula distributiva, un elemento $a \in A$ con negación tiene complemento a' si, y solo si, $\neg a \vee a = 1$ y, en este caso, $a' = \neg a$.*

En particular, en un álgebra booleana A, todo elemento $a \in A$ tiene negación dada por el complemento: $\neg a = a'$.

De la definición de la negación, tenemos que $x \leq \neg\neg a$ si, y solo si, $x \wedge \neg a = 0$. Dado que $a \wedge \neg a = 0$, podemos deducir que $a \leq \neg\neg a$. Aunque en un álgebra booleana se tiene la otra comparación (es decir, $\neg\neg a = a$), esto no es cierto en general:

Ejemplo 1.21. Sea S un espacio topológico y consideremos el marco $\mathcal{O}S$. Todo abierto $u \in \mathcal{O}S$ tiene negación $\neg u$ en $\mathcal{O}S$. En efecto, para todo abierto $v \in \mathcal{O}S$ tenemos

$$\begin{aligned} u \cap v = \varnothing &\iff v \subseteq u' \\ &\iff v \subseteq (u')^\circ \in \mathcal{O}S. \end{aligned}$$

Por lo tanto, u tiene negación dada como $\neg u = (u')^\circ = \overline{u}'$.

En particular, el abierto $u = (-1,0) \cup (0,1) \in \mathcal{O}\mathbb{R}$ tiene cerradura $\overline{u} = [-1,1]$, así que

$$\begin{aligned} \neg\neg u &= \neg(\overline{u}') \\ &= \neg([-1,1]') \\ &= ([-1,1]'')^\circ \\ &= [-1,1]^\circ \\ &= (-1,1) \\ &\neq u. \end{aligned}$$

∎

Es decir, aunque $\neg a$ tenga negación, en general solo tenemos la comparación $a \leq \neg\neg a$. Sin embargo, si $\neg\neg a$ tiene negación, entonces sí se cumple que $\neg\neg\neg a = \neg a$. En efecto, dado que

$$a \leq \neg\neg a,$$

al hacer ínfimo con $\neg\neg a$ obtenemos

$$\begin{aligned} \neg\neg\neg a \wedge a &\leq \neg\neg\neg a \wedge \neg\neg a \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual, por definición de la negación, es equivalente a $\neg\neg\neg a \leq \neg\neg a$, mientras que la otra comparación $\neg a \leq \neg\neg\neg a$ ya la teníamos.

En el ejemplo 1.21 encontramos una retícula distributiva donde todo elemento tiene negación. Ahora consideraremos ese tipo de retículas.

Por el lema 1.20, sabemos que a es tiene complemento a' ssi $a \vee \neg a = 1$. Esto justifica el primer punto de la siguiente definición.

Definición 1.22. *Sea A una retícula distributiva donde todo elemento tiene negación y tomemos un elemento $a \in A$. Decimos que*

- *a es complementado si $a \vee \neg a = 1$,*
- *a es regular si $\neg\neg a = a$,*
- *a es denso si $\neg a = 0$.*

Nótese que $\neg a$ es regular para todo a, ya que $\neg\neg\neg a = \neg a$.

Ejemplo 1.23. Consideremos un espacio topológico S y un abierto $u \in \mathcal{O}S$. Por el ejemplo 1.21, sabemos que u tiene negación dada como $\neg u = \overline{u}' = (u')^\circ$. Por lo tanto

1. u es complementado en el sentido de retículas ($u \vee \neg u = 1$) si, y solo si, su complemento es abierto.

2. el abierto u es regular en el sentido de retículas ($\neg\neg u = u$) si, y solo si, es regular en el sentido topológico ($(\overline{u})^\circ = u$).

3. Similarmente, u es denso como elemento de la retículas ($\neg u = 0$) si, y solo si, es denso en el sentido topológico ($\overline{u} = S$).

■

Proposición 1.24. *Un elemento a de una retícula A es denso ($\neg a = 0$) si, y solo si $\neg\neg a = 1$.*

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \neg a = 0 &\iff \neg a \leq 0 \\ &\iff 1 \wedge \neg a \leq 0 \\ &\iff 1 \leq \neg\neg a \\ &\iff 1 = \neg\neg a. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.25. *Si A es una retícula distributiva y $a, b \in A$ tienen negación, entonces $a \vee b$ también tiene negación y tenemos*

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$$

Demostración. Para cualquier $x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} x \wedge (a \vee b) \leq 0 &\iff (x \wedge a) \vee (x \wedge b) \leq 0 \\ &\iff (x \wedge a) \leq 0,\ (x \wedge b) \leq 0 \\ &\iff x \leq \neg a,\ x \leq \neg b \\ &\iff x \leq (\neg a \wedge \neg b). \end{aligned}$$

Así, $\neg a \wedge \neg b$ es la negación de $a \vee b$, como se quería. □

Ahora, si en una retícula distrubutiva A todos los elementos tienen negación, entonces

$$\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = 0,$$

por lo cual $a \vee \neg a$ siempre es denso. Además

$$\begin{aligned} \neg\neg a \wedge (a \vee \neg a) &= (\neg\neg a \wedge a) \vee (\neg\neg a \wedge \neg a) \\ &= a \wedge 0 \\ &= a, \end{aligned}$$

así que todo elemento $a \in A$ se puede expresar como el ínfimo de un elemento denso y un elemento regular.

Lema 1.26. *Sea A una retícula distributiva donde todos los elementos tienen negación. Entonces A es un álgebra booleana (todo elemento es complementado) si, y solo si, todo elemento es regular.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que A es booleana, entonces todo $a \in A$ cumple $a \vee \neg a = 1$. Luego $\neg a \vee \neg\neg a = 1$, es decir, $\neg\neg a$ es complementado. Como el complemento de $\neg a$ es único, se tiene que $\neg\neg a = a$.
$\Leftarrow$) Supongamos que todos los elementos de A son regulares y sea $a \in A$. Como a y $a \vee \neg a$ son regulares, tenemos $a \vee \neg a = \neg\neg(a \vee \neg a) = \neg(\neg a \wedge \neg\neg a) = \neg 0 = 1$. Por lo tanto, $a \vee \neg a = 1$, es decir, a es complementado. Con ello A es un álgebra booleana. □

1.10.2. Implicaciones

Una implicación en una semiretícula inferior A es una operación $(- \succ -) : A \to A$ tal que, para cualesquiera $a, x, y \in A$ se tiene

$$x \wedge y \leq a \quad \text{si, y solo si} \quad x \leq (y \succ a).$$

Ejemplo 1.27. En un álgebra booleana, nuestro caballo de batalla nos dice que

$$x \wedge y \leq a \quad \text{si, y solo si} \quad x \leq \neg y \vee a.$$

Por lo tanto, toda álgebra booleana tiene implicación dada como $(y \succ a) = \neg y \vee a$. ■

Ahora vienen dos lemas técnicos.

Lema 1.28. *Sea A una $\wedge$-semiretícula con implicación. Entonces*

1. $(x \succ -)$ *infla.*
2. $x \wedge (x \succ a) = x \wedge a$
3. $(- \succ a)$ *es antítona.*

Demostración. 1. Como $a \wedge x \leq a$, tenemos $a \leq (x \succ a)$.

2. Consideremos $a, x \in A$. Para cada z tenemos que

$$\begin{aligned} z \leq x \wedge (x \succ a) &\iff z \leq x \text{ y } z \leq (x \succ a) \\ &\iff z \leq x \text{ y } z \wedge x \leq a \\ &\iff z \leq x \text{ y } z \leq a \\ &\iff z \leq a \wedge x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \wedge (x \succ a) = x \wedge a$.

3. Supongamos que $x \leq y$. Consideremos $z = (y \succ a)$, entonces $x \wedge z \leq y \wedge z$ y por los incisos anteriores de este lema, $y \wedge z \leq a$. Así, $x \wedge z \leq a$ y por la definición de implicación obtenemos que $(y \succ a) \leq (x \succ a)$.

□

Lema 1.29. *Sea A una $\wedge$-semiretícula con implicación. Para cualquier elemento $a \in A$, la función $((- \succ a) \succ a) : A \to A$ tiene las siguientes propiedades.*

1. $((- \succ a) \succ a)$ *infla. (Inmediado del punto 2 del lema anterior).*
2. $((- \succ a) \succ a)$ *es monótona. (Inmediato del punto 3 del lema anterior).*
3. $((- \succ a) \succ a)$ *es idempotente.*

Demostración. Solo falta probar el punto 3. Por el punto 1, tenemos

$$(x \succ a) \leq (((x \succ a) \succ a) \succ a),$$

así que resta probar

$$(((x \succ a) \succ a) \succ a) \leq (x \succ a),$$

que, por definición de la implicación, equivale a

$$(((x \succ a) \succ a) \succ a) \wedge x \leq a.$$

Recordemos que $x \leq ((x \succ a) \succ a)$, porque $((- \succ a) \succ a)$ infla, y que $(y \succ a) \wedge y = y \wedge a$ para todo $y \in A$. En particular, para $y = ((x \succ a) \succ a)$, tenemos

$$\begin{aligned}(((x \succ a) \succ a) \succ a) \wedge x &\leq (((x \succ a) \succ a) \succ a) \wedge ((x \succ a) \succ a)\\ &= (y \succ a) \wedge y\\ &= y \wedge a\\ &\leq a,\end{aligned}$$

como se quería. $\square$

En el capítulo 3 definiremos los operadores cerradura como funciones $A \to A$ que cumplen estas tres propiedades (definición 3.8). Allí veremos que estos operadores juegan un papel importante en el contexto de $\bigvee$-semirretículas.

Así, el resultado anterior dice que, si A es una $\wedge$-semiretícula con implicación, entonces $((- \succ a) \succ a)$ es un operador cerradura. Además, el operador $((- \succ a) \succ a)$ tiene otra propiedad: preserva ínfimos.

Lema 1.30. *Si A es una $\wedge$-semirretícula con implicación, entonces*

$$(((x \wedge y) \succ a) \succ a) = ((x \succ a) \succ a) \wedge ((y \succ a) \succ a).$$

Demostración. Por un lado, como $((- \succ a) \succ a)$ es monótono, tenemos

$$\begin{aligned}(((x \wedge y) \succ a) \succ a) &\leq ((x \succ a) \succ a)\\ (((x \wedge y) \succ a) \succ a) &\leq ((y \succ a) \succ a)\end{aligned}$$

así que $(((x \wedge y) \succ a) \succ a)$ es cota inferior de $((x \succ a) \succ a)$ y $((y \succ a) \succ a)$.

Ahora, dada cualquier cota inferior z de estos dos elementos, queremos probar que $z \leq (((x \wedge y) \succ a) \succ a)$, lo cual equivale a $z \wedge ((x \wedge y) \succ a) \leq a$. Como z es cota inferior, tenemos

$$z \leq ((x \succ a) \succ a) \qquad\qquad z \leq ((y \succ a) \succ a)$$

lo cual, por definición de la implicación, es

$$z \wedge (x \succ a) \leq a \qquad\qquad z \wedge (y \succ a) \leq a.$$

Ahora sea $w = ((x \wedge y) \succ a)$, de modo que

$$\begin{aligned} z \wedge w \wedge x \wedge y &= z \wedge ((x \wedge y) \succ a) \wedge (x \wedge y) \\ &\leq z \wedge a \\ &\leq a \end{aligned}$$

por definición de la implicación, esto nos da

$$z \wedge w \wedge x \leq (y \succ a).$$

Al hacer ínfimo con z obtenemos

$$z \wedge w \wedge x \leq z \wedge (y \succ a) \leq a$$

aplicando de nuevo la definición de la implicación,

$$z \wedge w \leq (x \succ a)$$

y haciendo ínfimo con z,

$$z \wedge w \leq z \wedge (x \succ a) \leq a$$

Luego, $z \leq (w \succ a) = (((x \wedge y) \succ a) \succ a)$, como se quería. □

También en el capítulo 3, veremos que los operadores cerradura con esta propiedad, llamados núcleos (definición 3.18) tienen gran relevancia en el contexto de marcos.

Capítulo 2

Aspectos categóricos

2.1. Morfismos adjuntos de copos

Recordemos que, cuando vemos a A y a B como categorías, un morfismo de copos $f : A \to B$ es lo mismo que un funtor, así que podemos aplicar el concepto de adjunción entre funtores. En este caso, dos morfismos de copos $f : A \to B$, $g : B \to A$ cumplen $(f \dashv g)$ (es decir, g es adjunto derecho de f y f es adjunto izquierdo de g) si

$$B(fa, b) \simeq A(a, gb);$$

esto es:

$$fa \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad a \leq gb.$$

Ejemplo 2.1. Sea A un álgebra de Heyting (por ejemplo, un marco). Para todo $a \in A$ a implicación $(a \succ -)$ es el adjunto derecho del ínfimo $- \wedge a$, pues

$$y \wedge a \leq b \quad \text{si, y solo si} \quad y \leq (a \succ b).$$

■

Ejemplo 2.2. Sea $\varphi : S \to T$ una función entre conjuntos. Entonces la imagen directa $\varphi_! : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T$ y la imagen inversa $\varphi^{-1} : \mathcal{P}T \to \mathcal{P}S$, definidas para cualesquiera $U \subseteq S$ y $V \subseteq T$ como

$$\begin{aligned} \varphi_!(U) &= \{\varphi(x) \mid x \in U\} = \{y \in Y \mid \exists x \in U, y = \varphi(x)\} \\ \varphi^{-1}(V) &= \{x \in X \mid \varphi(x) \in V\} \end{aligned}$$

son morfismos de copos que satisfacen

$$\begin{aligned} \varphi_!(U) \subseteq V &\iff \forall x \in U, \varphi(x) \in V \\ &\iff \forall x \in U, x \in \varphi^{-1}(V) \\ &\iff U \subseteq \varphi^{-1}(V), \end{aligned}$$

así que $\varphi_! \dashv \varphi^{-1}$.

Más aún, φ^{-1} también tiene adjunto derecho. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(V) \subseteq U &\iff U' \subseteq \varphi^{-1}(V)' \\ &\iff U' \subseteq \varphi^{-1}(V') \\ &\iff \varphi_!(U') \subseteq V' \\ &\iff V \subseteq \varphi_!(U')'.\end{aligned}$$

Así, definiendo $\varphi_? : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T$ por la fórmula $\varphi_?(U) = \varphi_!(U')'$, tenemos $\varphi^{-1} \dashv \varphi_?$. Explícitamente,

$$\begin{aligned}\varphi_?(U) &= \{y \in T \mid x \notin \varphi_!(U')\} \\ &= \{y \in T \mid \forall x \in U', y \neq \varphi(x)\}.\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.3. Si $\varphi : S \to T$ es una función continua entre espacios topológicos, el morfismo de marcos $\varphi^* = \mathcal{O}\varphi : \mathcal{O}T \to \mathcal{O}S$, definido como $\varphi^*(v) = \varphi^{-1}(v)$ para cada $v \in \mathcal{O}T$, tiene adjunto derecho. Si $\varphi_? : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T$ es el adjunto derecho de la preimagen $\varphi^{-1} : \mathcal{P}T \to \mathcal{P}S$ (ver ejemplo 2.2), tenemos

$$\begin{aligned}\varphi^*(v) \leq u &\iff \varphi^{-1}(v) \leq u \\ &\iff v \leq \varphi_?(u) \\ &\iff v \leq \varphi_?(u)^\circ,\end{aligned}$$

ya que $\varphi_?(u)^\circ$ es el abierto más grande contenido en $\varphi_?(u)$. Por lo tanto, el adjunto derecho $\varphi_* : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ de φ^* se calcula como

$$\varphi_*(u) = \varphi_?(u)^\circ = (\varphi_!(u')')^\circ = \overline{\varphi_!(u')}',$$

donde $\varphi_! : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T$ es la imagen directa. ■

Lema 2.4. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de $\bigvee$-semiretículas (por ejemplo, un morfismo de marcos). Entonces la función $f_* : B \to A$ dada como*

$$f_*(b) = \bigvee\{x \in A \mid f(x) \leq b\}$$

es un morfismo de copos y es adjunto derecho de f. Más aún, f_* es morfismo de $\bigwedge$-semiretículas.

Demostración. Sea $X = \{x \in A \mid f(x) \leq b\}$. Si $a \in A$ es tal que $f(a) \leq b$, entonces $a \in X$, por lo cual

$$a \leq \bigvee X = f_*(b).$$

Recíprocamente, si $a \leq f_*(b) = \bigvee X$, entonces

$$\begin{aligned}f(a) &\leq f(\bigvee X) \\ &= \bigvee\{f(x) \mid f(x) \leq b\} \\ &\leq b,\end{aligned}$$

ya que f preserva supremos.

La monotonía de f_* se sigue de que preserva ínfimos (lo cual probaremos abajo) pero de todos modos es fácil verlo, así que lo haremos por separado. Si tenemos $b \leq c \in B$, entonces

$$\{x \in X \mid f(x) \leq b\} \subseteq \{x \in X \mid f(x) \leq c\}.$$

Aplicando supremos, obtenemos $f_*(b) \leq f_*(c)$.

Finalmente, veamos que f_* preserva ínfimos. Si $Y \subseteq B$ es cualquier subconjunto, entonces todo $a \in A$ cumple

$$\begin{aligned} a \leq f_*(\bigwedge Y) &\iff f(a) \leq \bigwedge Y \\ &\iff (\forall y \in Y,\ f(a) \leq y) \\ &\iff (\forall y \in Y,\ a \leq f_*(y)) \\ &\iff a \leq \bigwedge\{f_*(y) \mid y \in Y\}. \end{aligned}$$

Se sigue que $f_*(\wedge Y) = \wedge\{f_*(y) \mid y \in Y\}$. □

Sin embargo, nótese que, aunque $f : A \to B$ sea un morfismo de marcos, su adjunto derecho $f_* : B \to A$ puede no preservar supremos finitos.

2.2. Monomorfismos y epimorfismos

Recordemos que, dada una categoría $\mathcal{C}$, un morfismo es

- un monomorfismo si es cancelable por la izquierda,
- un epimorfismo si es cancelable por la derecha y
- un bimorfismo si es monomorfismo y epimorfismo.

Ejercicio 1 (Para el lector). *Muéstrese que, en la categoría* Top *de los espacios topológicos, un morfismo es*

- *suprayectivo si, y solo si, es un epimorfismo,*
- *inyectivo si, y solo si, es un monomorfismo.*

Este también es el caso las categorías de conjuntos, grupos y espacios vectoriales, pero no en la categoría de anillos. En efecto, aunque un morfismo de anillos es

$$\begin{aligned} \text{inyectivo} &\iff \text{monomorfismo y} \\ \text{suprayectivo} &\implies \text{epimorfismo,} \end{aligned}$$

la inclusión

$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$$

es un ejemplo de un epimorfismo de anillos que no es suprayectivo.

Veremos que, en este aspecto, la categoría de marcos se comporta parecido a la categoría de anillos, pues aunque en Frm es cierto que

$$\begin{aligned}\text{inyectivo} &\iff \text{monomorfismo y}\\ \text{suprayectivo} &\implies \text{epimorfismo},\end{aligned}$$

también existen epimorfismos no suprayectivos.

Lema 2.5. *Todo monomorfismo de marcos es inyectivo, así que, en* Frm*, un morfismo es*

$$\textit{inyectivo} \iff \textit{monomorfismo.}$$

Demostración. Vamos a usar el marco

$$3 \quad = \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \star \\ | \\ 0. \end{array}$$

Sea $m : A \to B$ un monomorfismo y $a, b \in A$ tales que $m(a) = m(b)$. Como las funciones $f_a, f_b : 3 \to A$ dadas por $f_a(\star) = a$ y $f_b(\star) = b$ son morfismos de marcos que cumplen $m(f_a(\star)) = m(a) = m(b) = m(f_b(\star))$, se sigue que $mf_a = mf_b$. Como m es monomorfismo, se sigue que $f_a = f_b$, así que $a = f_a(\star) = f_b(\star) = b$. $\square$

Del truco del marco 3 que usamos en la demostración anterior, se puede deducir que las asignaciones

$$\begin{aligned} B &\leftrightarrows \mathrm{Frm}(3, B)\\ a &\mapsto f_a\\ f(\star) &\leftarrow\!\shortmid f\end{aligned}$$

forman un isomorfismo de marcos, donde $\mathrm{Frm}(3, B)$ tiene el orden puntual.

Ahora queremos construir un epimorfismo de marcos que no es suprayectivo.

Lema 2.6. *Si S es un espacio topológico T_1, entonces la inclusión $i : \mathcal{O}S \to \mathcal{P}S$ es un epimorfismo.*

Demostración. Sean

$$A \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} \mathcal{P}S \xleftarrow{\;i\;} \mathcal{O}S$$

morfismos en Frm con $fi = gi$.

Dado $p \in S$, consideremos $X_p = \{p\}, U_p = \{p\}' \in \mathcal{P}S$. Como X_p y U_p son complementarios en $\mathcal{P}S$, sus imágenes en A (bajo f y bajo g) son complementarias.

Ahora, como S es T_1, entonces X_p es cerrado, así que U_p es abierto. Como $fi = gi$, esto implica que

$$\begin{aligned} f(U_p) &= f(i(U_p)) \\ &= g(i(U_p)) \\ &= g(U_p). \end{aligned}$$

Luego, la unicidad de los complementos nos da

$$\begin{aligned} f(X_p) &= \neg f(U_p) \\ &= \neg g(U_p) \\ &= g(X_p). \end{aligned}$$

Ahora, para cualquier $E \in \mathcal{P}S$ tenemos $E = \bigvee\{X_p \mid p \in E\}$. Como f y g son morfismos de marcos,

$$\begin{aligned} f(E) &= \bigvee\{f(X_p) \mid p \in E\} \\ &= \bigvee\{g(X_p) \mid p \in E\} \\ &= g(E), \end{aligned}$$

por lo cual $f = g$. Se sigue que i es un epimorfismo. □

En particular, si S es un espacio topológico T_1 no discreto (es decir, $\mathcal{O}S \neq \mathcal{P}S$), entonces la inclusión $i : \mathcal{O}S \to \mathcal{P}S$ es un ejemplo de epimorfismo de marcos que no es suprayectivo.

2.3. Reflexiones

2.3.1. La completación de secciones inferiores

Si A es una $\wedge$-semiretícula, nos gustaría encontrar un marco $\hat{A}$ que complete a A “de la mejor manera posible”.

¿Qué tal el conjunto potencia $\mathcal{P}A$? Es un álgebra booleana completa, tiene leyes distributivas fuertes; quizá demasiado fuertes. Además, la retícula que buscamos debería tener a A como una subretícula, mientras que la función obvia $A \to \mathcal{P}A$ dada por $a \mapsto \{a\}$ no preserva el orden, así que no es una inclusión de retículas. Vamos a refinar esta situación.

Si A es un copo, una sección inferior de A es un subconjunto $L \subseteq A$ que .ªbsorbe hacia abajo”. Es decir, si $a \leq b \in L$, entonces $a \in L$.

Denotemos como $\mathcal{L}A$ al conjunto de todas las secciones inferiores en A. Nótese que, por vacuidad, el conjunto vacío $\varnothing \subseteq A$ es una sección inferior de A. Además, la intersección de dos secciones inferiores vuelve a ser una sección inferior, mientras que la unión arbitraria de secciones inferiores también lo es. En otras palabras, $\mathcal{L}A$ es un submarco de $\mathcal{P}A$.

Así, $\mathcal{L}A$ es una topología en A, que podríamos llamar la topología de coespecialización. (La topología de especialización en un copo A es el conjunto de secciones superiores). Las topologías de especialización y coespecialización tienen la propiedad interesante de que una función entre dos copos es monótona ssi es continua en la topología de especialización ssi es continua en la topología de coespecialización. Sin embargo, ahora nos enfocaremos más en el aspecto reticular de $\mathcal{L}A$ que en sus propiedades como topología de A.

Para cada subconjunto $F \subseteq A$, el conjunto

$$\downarrow F = \{a \in A \mid \exists c \in F, a \leq c\} \subseteq A$$

es una sección inferior. De hecho, es la sección inferior más pequeña que contiene a F. Decimos que $\downarrow F$ es la sección inferior generada por F. La asignación $F \mapsto \downarrow F$ nos da una función

$$\downarrow : \mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$$

cuyo conjunto de sus puntos fijos (es decir, los $F \in \mathcal{P}A$ con $F = \downarrow F$) es $\mathcal{L}A$. Además, $\downarrow$ es una función monótona, idempotente, infla (es decir, $F \subseteq \downarrow F$) y cumple $\downarrow(F \cup G) = \downarrow F \cup \downarrow G$. En general, la igualdad $\downarrow(F \cap G) = \downarrow F \cap \downarrow G$ no se cumple. Sin embargo, si A es una semiretícula inferior, entonces tenemos una identidad similar. Definiendo $F \wedge G := \{x \wedge y \mid x \in F, y \in G\}$, tenemos $\downarrow(F \wedge G) = \downarrow F \cap \downarrow G$, ya que

$$\begin{aligned} a \in \downarrow(F \wedge G) &\iff \exists(c \in F \wedge G).(a \leq c) \\ &\iff \exists(f \in F, g \in G).(a \leq f \wedge g) \\ &\iff \exists(f \in F, g \in G).(a \leq f, a \leq g) \\ &\iff a \in \downarrow F, a \in \downarrow G \\ &\iff a \in \downarrow F \cap \downarrow G. \end{aligned}$$

En particular, si A es una $\wedge$-semiretícula, entonces la función

$$\begin{aligned} \downarrow : A &\to \mathcal{L}A \\ a &\mapsto \downarrow a := \downarrow\{a\} \end{aligned}$$

es un morfismo de $\wedge$-semiretículas. Así, A se puede ver como una sub-$\wedge$-semiretícula del marco $\mathcal{L}A$. En este sentido, $\mathcal{L}A$ "le da" a A los supremos que le faltan para ser un marco. Además, es de esperarse que existan otros marcos B y morfismos de $\wedge$-semiretículas $A \to B$. Sin embargo, afirmamos que $\downarrow : A \to \mathcal{L}A$ es el mejor de estos morfismos, en el sentido de que $\downarrow : A \to LA$ exhibe a $\mathcal{L}A$ como el marco libre sobre la $\wedge$-semiretícula A.

Solución. Consideremos el funtor de olvido $U : \mathrm{Frm} \to \mathrm{Pos}^{\wedge}$. Precomponer con $\downarrow$ nos da una flecha

$$\mathrm{Frm}(\mathcal{L}A, -) \to \mathrm{Pos}^{\wedge}(A, U-),$$

Resta ver que esta flecha es una biyección. Es decir, dado un morfismo $f : A \to B$ de $\wedge$-semiretículas, debemos probar que existe un único morfismo de marcos $f^\sharp : \mathcal{L}A \to B$ que factoriza a f a través de $\downarrow$:

$$f^\sharp \downarrow = f.$$

Es decir, $f^\sharp(\downarrow a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Esta condición determina completamente a $f^\sharp$. En efecto, para toda sección inferior $F \in \mathcal{L}A$ tenemos $F = \bigcup\{\downarrow a \mid a \in F\}$ y, como también queremos que $f^\sharp$ respete supremos, se debe cumplir

$$\begin{aligned} f^\sharp(F) &= \bigvee\{f^\sharp(\downarrow a) \mid a \in F\} \\ &= \bigvee\{f(a) \mid a \in F\}. \end{aligned}$$

Tomando esta ecuación como la definición de $f^\sharp$, es claro que $f^\sharp(\downarrow a) = f(a)$. Por lo tanto, si $f^\sharp : \mathcal{L}A \to B$ es un morfismo de marcos, es el único con esta propiedad. Verificamos las propiedades directamente.

- En efecto, si $F \subseteq G \in LA$, entonces

  $$\{f(a) \mid a \in F\} \subseteq \{f(a) \mid a \in G\}.$$

  Tomando supremos, obtenemos $f^\sharp(F) \leq f^\sharp(G)$, así que $f^\sharp$ es monótona.

- Dadas $F, G \in \mathcal{L}A$, hay que mostrar que $f^\sharp(F \cap G) = f^\sharp(F) \wedge f^\sharp(G)$. La comparación $\leq$ se sigue de la monotonía de $f^\sharp$. Por otro lado, observemos que

  $$\{a \wedge b \mid a \in F, b \in G\} \subseteq F \cap G, \qquad (*)$$

  pues F y G son secciones inferiores. Luego,

  $$\begin{aligned} f^\sharp(F) \wedge f^\sharp(G) &= \bigvee\{f(a) \wedge f(b) \mid a \in F, b \in G\} && \text{ley dist. de marcos} \\ &= \bigvee\{f(a \wedge b) \mid a \in F, b \in G\} \\ &\leq \bigvee\{f(c) \mid c \in F \cap G\} && \text{por } (*) \\ &= f^\sharp(F \cap G), \end{aligned}$$

  como se quería.

- Dado $X \subseteq \mathcal{L}A$, hay que mostrar que $f^\sharp(\bigcup X) = \bigvee\{f^\sharp(F) \mid F \in X\}$. Como $f^\sharp$ es monótona, $f^\sharp(\bigcup X)$ es cota superior de $\{f^\sharp(F) \mid F \in X\}$. Para ver que es la mínima, sea $b \in B$ tal que $f^\sharp(F) \leq b$ para todo $F \in X$. Por definición de $f^\sharp$, esto significa que $f(a) \leq b$ para cualesquiera $a \in F, F \in X$. Luego,

  $$\begin{aligned} f^\sharp(\bigcup X) &= f^\sharp(\{a \in A \mid a \in F \text{ para algún } F \in X\}) \\ &= \bigvee\{f(a) \in A \mid a \in F \text{ para algún } F \in X\}) \\ &\leq b, \end{aligned}$$

  como se deseaba.

Por lo tanto, $f^\sharp$ es morfismo de marcos. Así, tenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Frm}(\mathcal{L}A, -) \xrightarrow{-\circ\downarrow} \mathrm{Pos}^\wedge(A, U-)$$

y, así, $\mathcal{L}A$ es el marco libre en A.

Observemos que esto es válido para cualquier semiretícula A. Más aún, dado un morfismo de $\wedge$-semiretículas $g : A \to A'$, la composición

$$\mathcal{L}A' \xleftarrow{\downarrow} A' \xleftarrow{g} A$$

es un morfismo de $\wedge$-semiretículas y $\mathcal{L}A'$ es un marco, así que existe un único morfismo de marcos $g^\sharp : \mathcal{L}A \to \mathcal{L}A'$ que factoriza a $\downarrow g$ a través de $\downarrow : A \to \mathcal{L}A$. Si definimos $\mathcal{L}g = g^\sharp : \mathcal{L}A \to \mathcal{L}A'$, obtenemos una función

$$\mathrm{Pos}^\wedge(A, A') \to \mathrm{Frm}(\mathcal{L}A, \mathcal{L}A').$$

Más aún, las propiedades de unicidad de $\mathcal{L}g = g^\sharp$ aseguran que $\mathcal{L}$ es un funtor $\mathcal{L} : \mathrm{Pos}^\wedge \to \mathrm{Frm}$. Luego, tenemos una adjunción $\mathcal{L} \dashv U$ (ver 16.4). ■

Ejercicio 2 (Para el lector)**.** *Dado un copo A, ¿Quién será la negación y la implicación en $\mathcal{L}A$?*

Capítulo 3

Cocientes

En este capítulo estudiaremos los cocientes de un marco.

Si A es un conjunto, grupo, anillo, módulo (o alguna estructura algebraica similar) un cociente de A está dado por una relación de equivalencia $(\sim) \subseteq A \times A$ que respeta las operaciones. Esto resulta ser equivalente a que $A/{\sim}$ tiene una estructura del mismo tipo que A (grupo, anillo, etc) tal que la proyección $\pi : A \to A/{\sim}$ es un homomorfismo. Estas relaciones de equivalencia se llaman congruencias. En el caso de conjuntos, donde no hay estructura adicional, cualquier relación de equivalencia es una congruencia.

Las congruencias de A, siendo subconjuntos de $A \times A$, suelen ser difíciles de manejar directamente. En los casos de grupos, anillos y módulos, la situación se puede mejorar, pues las congruencias quedan codificadas en algunos subconjuntos distinguidos de A: grupos normales, ideales bilaterales y submódulos, respectivamente. En cada caso, el subconjunto distinguido es el "núcleo" (en el sentido adecuado) del morfismo proyección $\pi : A \to A/{\sim}$.

La situación para marcos es aún mejor. Las congruencias de un marco A corresponden a algunos subconjuntos de A (llamados subconjuntos implicativos), pero hay otra correspondencia más conveniente: tanto las congruencias como los subconjuntos implicativos están codificados en ciertos operadores $A \to A$ que llamamos núcleos.

Además, como en otras categorías, los cocientes de marcos satisfacen el llamado "teorema del cociente": si un morfismo f respeta una congruencia $\sim$:

$$a \sim b \implies fa = fb, \tag{3.1}$$

entonces f se factoriza a través del cociente $\pi : A \to A/{\sim}$. Más aún, cualquier morfismo $f : A \to B$ induce una congruencia $(\sim)$ en A con la fórmula

$$a \sim_f b \iff fa = fb. \tag{3.2}$$

En particular, f respeta la congruencia $(\sim_f)$, así que se factoriza a través de $\pi : A \to A/{\sim_f}$, donde el marco cociente $A/{\sim_f}$ eses isomorfo a la imagen de f.

3.1. Cocientes de conjuntos

Cualquier función de conjuntos $\varphi : A \to B$ induce una relación de equivalencia en A como sigue:

$$a \sim b \quad \text{si, y solo si} \quad \varphi(a) = \varphi(b).$$

Como es usual, denotamos al bloque de un elemento $x \in A$ como

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\} \tag{3.3}$$

y al conjunto de bloques como

$$A/{\sim} = \{[x] \mid x \in A\}. \tag{3.4}$$

Entonces tenemos la función $\eta : A \to A/{\sim}$ que manda un elemento $a \in A$ a su bloque correspondiente:

$$\begin{aligned} \eta : A &\to A/{\sim} \\ a &\mapsto [a] \end{aligned}$$

En particular, se tiene que

$$\eta(x) = \eta(y) \quad \text{si, y solo si} \quad x \sim y.$$

Una consecuencia es que tenemos una función $\varphi^\sharp : A/{\sim} \to B$ que cierra el triángulo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & B \\ & A/{\sim} \arrow[ur, "\varphi^\sharp"'] & \end{tikzcd}$$

dada como $\varphi^\sharp([a]) = \varphi(a)$. El hecho de que $\varphi^\sharp$ esté bien definida como función se debe, precisamente, a la definición de la relación de equivalencia: si $[a] = [b]$, entonces $a \sim b$, por lo cual $\varphi(a) = \varphi(b)$, i.e., $\varphi^\sharp([a]) = \varphi^\sharp([b])$. Más aún, tenemos $A/{\sim} \simeq \operatorname{im}\varphi$. En particular, si φ es suprayectiva, entonces $A/{\sim} \simeq B$.

También aquí sucede que η es universal con respecto a esta propiedad: si $\psi : A \to B'$ es una función tal que $\varphi(a) = \varphi(b) \implies \psi(a) = \psi(b)$, entonces existe una única $\psi^\sharp : A/{\sim} \to B'$ que factoriza a ψ a través de η. Nos gustaría decir que el "núcleo" de φ es la relación de equivalencia $\sim$ inducida por φ.

3.2. Cocientes en $\mathrm{cPos}^\vee$

Antes de estudiar los cocientes de marcos, veremos que es más fácil comenzar estudiando los cocientes de $\bigvee$-semiretículas. (Recordemos que tenemos un funtor fiel $\mathrm{Frm} \to \mathrm{cPos}^\vee$).

Primero veremos que todo morfismo induce una congruencia. Luego, veremos que toda congruencia produce un morfismo cociente y que este morfismo induce la congruencia original.

En la categoría de conjuntos, todo morfismo $\varphi : A \to B$ induce una relación de equivalencia $\sim$ en A y, recíprocamente, toda relación de equivalencia $\sim$ en A está inducida por un morfismo (porque podemos formar el cociente $A/\sim$). Queremos obtener un resultado análogo en $\mathrm{cPos}^{\vee}$.

Un $\bigvee$-morfismo $f : A \to B$ es, en particular, una función, así que induce una relación de equivalencia en A. Sin embargo, no todas las relaciones de equivalencia son interesantes. Nos enfocaremos en las relaciones de equivalencia que respeten la estructura de $\bigvee$-semiretícula, las cuales llamaremos $\bigvee$-congruencias.

Supongamos que tenemos una relación de equivalencia $\sim$ en una $\bigvee$-semirretícula A. Si $X, Y \subseteq A$ son dos subconjuntos indicados por un conjunto I

$$X = \{x_i \mid i \in I\} \qquad\qquad Y = \{y_i \mid i \in I\}$$

tales que para cada índice $i \in I$ se tiene $x_i \sim y_i$, entonces usaremos la notación $X \sim Y$.

Decimos que una relación de equivalencia $\sim \subseteq A \times A$ es una $\bigvee$-congruencia si, para todo par de subconjuntos $X, Y \subseteq A$ con $X \sim Y$, se tiene $\bigvee X \sim \bigvee Y$.

El primer resultado es

Lema 3.1 (Todo morfismo induce una congruencia). *Sea $\varphi : A \to B$ un $\bigvee$-morfismo. Entonces la relación de equivalencia en A inducida por φ:*

$$a \sim b \quad \text{si, y solo si} \quad \varphi(a) = \varphi(b)$$

es una $\bigvee$-congruencia.

Demostración. Tomemos subconjuntos $X \sim Y \subseteq A$ indicados por I. Esto es, para todo $i \in I$ tenemos $x_i \sim y_i$, por lo cual $\varphi(x_i) = \varphi(y_i)$. Luego,

$$\begin{aligned}\varphi(\bigvee X) &= \bigvee\{\varphi(x_i) \mid i \in I\}\\ &= \bigvee\{\varphi(y_i) \mid i \in I\}\\ &= \varphi(\bigvee Y).\end{aligned}$$

Luego, $\bigvee X \sim \bigvee Y$, por lo cual $\sim$ es una $\bigvee$-congruencia. □

Lema 3.2 (Toda congruencia produce un cociente). *Dada una $\bigvee$-semiretícula A y una $\bigvee$-congruencia $\sim$ sobre A, la estructura de semirretícula superior en $A/\sim$ inducida por $\eta : A \to A/\sim$ es el único orden que convierte a $A/\sim$ en una $\bigvee$-semirretícula y a $\eta : A \to A/\sim$ en un $\bigvee$-morfismo.*

Demostración. Sean $[a], [b] \in A/\sim$. Como $\sim$ es una $\bigvee$-congruencia, el bloque de $[a \vee b]$ no depende de los representantes, ya que $a \sim a'$ y $b \sim b'$ implica que $a \vee b \sim a' \sim b'$. Luego, podemos definir una operación en $A/\sim$ como

$$\begin{aligned}[a] \vee [b] &= \bigvee\{[a], [b]\}\\ &= \bigvee \eta(\{a, b\})\\ &= \eta(a \vee b)\\ &= [a \vee b].\end{aligned}$$

para cualesquiera $[a],[b] \in A/\sim$. Como A es un monoide conmutativo idempotente, entonces esta operación en $A/\sim$ también lo convierte en uno, por lo cual la relación

$$[a] \leq [b] \quad \text{si, y solo si} \quad [a \vee b] = [b]$$

es un orden parcial en $A/\sim$ cuyo supremo (binario) es $\vee$. (Ver 1.2). Más aún, la igualdad $[a] \vee [b] = [a \vee b]$ nos dice que η es un morfismo de semirretículas superiores y, de hecho, esta es la única estructura de semirretícula superior en $A/\sim$ que lo logra, ya que si $\vee'$ es otra estructura en $A/\sim$ compatible con η, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
[a] \vee' [b] &= \eta(a) \vee' \eta(b) \\
&= \eta(a \vee b) \\
&= [a \vee b] \\
&= [a] \vee [b].
\end{aligned}$$

Ahora nos falta ver que $A/\sim$ es superiormente completo y que η preserva los supremos arbitrarios. Notemos que cualquier subconjunto $Y \subseteq A/\sim$ es de la forma $Y = \eta(X)$ para algún $X \subseteq A$: por ejemplo, $Y = \eta(\eta^{-1}(Y))$.

Si probamos que el supremo de $\eta(X)$ es $\eta(\bigvee X)$, esto mostrará, al mismo tiempo, que $A/\sim$ tiene supremos arbitrarios y que la función $\eta : A \to A/\sim$ es un $\bigvee$-morfismo.

Tomemos $\eta(X) \subseteq A/\sim$. Como η preserva supremos binarios, se sigue que η es monótona. Luego, $\eta(\bigvee X)$ es cota superior de $\eta(X)$. Ahora sea $[a] \in A/\sim$ una cota superior de $\eta(X)$; esto es: $[x] \leq [a]$ (o bien, $[x \vee a] = [a]$, o bien, $x \vee a \sim a$) para todo $x \in X$. Luego, poniendo

$$Y = \{x \vee a \mid x \in X\} \qquad\qquad Z = \{a \mid x \in X\},$$

(los cuales son conjuntos indicados por X) tenemos $Y \sim Z$. Como $\sim$ es una $\bigvee$-congruencia, tenemos $\bigvee Y \sim \bigvee Z$, pero esto es

$$\bigvee X \vee a \sim a.$$

Se sigue que $[\bigvee X \vee a] = [a]$. Es decir, $[\bigvee X] \vee [a] = [a]$ o, equivalentemente $[\bigvee X] \leq [a]$. Así,

$$\eta(\bigvee X) \leq [a].$$

Esto muestra que $\eta(\bigvee X)$ es el supremo de $\eta(X)$ en $A/\sim$:

$$\eta(\bigvee X) = \bigvee \eta(X).$$

Así, $A/\sim$ es superiormente completa y η es un $\bigvee$-morfismo. □

El resultado anterior nos dice que en la categoría de $\bigvee$-semirretículas también existe la noción de cociente, al igual que en las categorías más familiares de anillos, grupos, etc. Una $\bigvee$-semirretícula B es cociente de A si es de la forma $A/\sim$ para alguna $\bigvee$-congruencia $\sim$ en A. Más formalmente, hacemos la siguiente definición:

Definición 3.3. *Decimos que un morfismo $f : A \to B$ es un morfismo cociente de A, o que exhibe a B como cociente de A, si hay una congruencia $\sim$ en A y un isomorfismo $A/{\sim} \simeq B$ de forma que el triángulo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & B \\ A/{\sim} \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. En este caso, decimos que B es el cociente de A por $\sim$.

Con esta definición se entiende el título del lema anterior: "toda congruencia produce un cociente".

Observación 3.4 (Correspondencia entre congruencias y cocientes)**.**

- *Toda $\bigvee$-congruencia $\sim$ es la $\bigvee$-congruencia inducida por su morfismo cociente $\eta : A \to A/{\sim}$.*
- *Todo morfismo cociente $f : A \to B$ es el cociente de A por la congruencia $\sim$ inducida por f.*

Así, los morfismos cociente son exactamente los morfismos suprayectivos.

Proposición 3.5 (Teorema del factor, versión 1)**.** *Sea A una $\bigvee$-semirretícula y $\sim$ una $\bigvee$-congruencia en A. Si $f : A \to B$ un $\bigvee$-morfismo que respeta a $\sim$, entonces f se factoriza de manera única a través de $\eta : A \to A/{\sim}$.*

Demostración. Como f respeta a $\sim$ como relación de equivalencia, entonces se factoriza de manera única a través de $A/{\sim}$ en la categoría de conjuntos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & B \\ & A/{\sim} \arrow[ur, "f^\sharp"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos que tanto f como η son $\bigvee$-morfismos, así que basta ver que $f^\sharp$ también es un $\bigvee$-morfismo, pero esto es fácil: cualquier subconjunto de $A/{\sim}$ tiene la forma $\eta(X)$ para algún $X \subseteq A$, así que

$$\begin{aligned} f^\sharp(\bigvee \eta(X)) &= f^\sharp(\eta(\bigvee X)) \\ &= f(\bigvee X) \\ &= \bigvee f(X) \\ &= \bigvee f^\sharp(\eta(X)). \end{aligned}$$

□

Además, si $\sim$ es la congruencia inducida por f, entonces f se factoriza como $f = f^\sharp\eta$, con $f^\sharp$ inyectivo y η suprayectivo.

3.2.1. Operadores cerradura

El apartado anterior vimos que las $\bigvee$-semirretículas tienen muchos paralelismos con los grupos, anillos, módulos, etc. Sin embargo, en éstas últimos casos, las congruencias tienen representaciones alternativas: las congruencias de un grupo están en correspondencia con sus subgrupos normales, las congruencias de un módulo están en correspondencia con sus submódulos, las congruencias de un anillo están en correspondencia con sus ideales bilaterales, etc.

En vista de esto, queremos encontrar una representación alternativa de las congruencias de una $\bigvee$-semirretícula. De hecho, encontraremos no una, sino dos de estas representaciones: los operadores cerradura y los subconjuntos $\bigwedge$-cerrados.

Dada una $\bigvee$-congruencia $\sim$ en A, sabemos construir la $\bigvee$-semirretícula cociente $A/\sim$. Sin embargo, los elementos de $A/\sim$ son los bloques $[x]$ de A con respecto a $\sim$ y a veces es molesto trabajar con clases de equivalencia. En otro tipo de estructuras como espacios vectoriales y anillos, podríamos pensar en tomar un representante de cada bloque y trabajar con ellos en vez de trabajar con los bloques, pero no hay una eleccción canónica de representantes. Sin embargo, en el caso de las $\bigvee$-semirretículas cada bloque tiene un representante natural: su supremo. Para que esta idea funcione bien, lo primero que hay que verificar es que el supremo de cada bloque sigue estando en el bloque:

Lema 3.6. *Si $\sim$ es una $\bigvee$-congruencia en A, entonces cada bloque de $\sim$ tiene un mayor elemento. Es decir, para cada $[a] \in A/\sim$, tenemos $\bigvee[a] \in [a]$.*

Demostración. Tomemos $[a] \in A/\sim$ y definamos nuestro conjunto de índices como $I = [a]$. Sean

$$X = \{x_i \mid i \in I\}$$
$$Y = \{y_i \mid i \in I\}$$

donde $x_i = i$ y $y_i = a$ para cada $i \in I = [a]$. Por construcción, tenemos $x_i \sim y_i$ para cada $i \in I$: esto es, $X \sim Y$. Luego, como $\sim$ es una $\bigvee$-congruencia, se sigue que $\bigvee X \sim \bigvee Y$. Esto es,

$$\bigvee[a] = \bigvee X \sim \bigvee Y = a.$$

Por lo tanto, $\bigvee[a] \in [a]$. □

Este resultado dice que, si tomamos un bloque $[a] \in A/\sim$, nos fijamos en su supremo y luego volvemos a bajar con $\eta : A \to A/\sim$, caemos en el bloque en el que empezamos. Es decir:

$$\eta(\bigvee[a]) = [a].$$

Ahora consideramos la otra composición:

Definición 3.7. *Sea $\sim$ una $\bigvee$-congruencia en A. El* selector *de $\sim$ es la función $j : A \to A$ dada por*

$$j(a) = \bigvee \eta(a) = \bigvee[a] = \bigvee\{x \in A \mid x \sim a\}.$$

El selector tiene algunas propiedades interesantes.

- Si $x \sim a$, entonces $x \leq j(a)$. En particular, $a \leq j(a)$, ya que $a \sim a$. Decimos que j infla.

- Supongamos que $a \leq b$. Dado que $a \sim j(a)$ y $b \sim j(b)$, entonces

$$b = a \vee b \sim j(a) \vee j(b)$$

  porque $\sim$ es $\bigvee$-congruencia. Luego, $j(a) \vee j(b) \leq j(b)$. Entonces

$$j(a) \leq j(a) \vee j(b) \leq j(b).$$

  Es decir, j es monótona.

- Ahora tomemos $a \in A$. Sabemos que $a \sim j(a)$ y que $j(a) \sim j(j(a))$, por lo cual $a \sim j(j(a))$. Luego, $j(j(a)) \leq j(a)$. Por otro lado, también tenemos $j(a) \leq j(j(a))$ (porque j infla) así que $j(a) = j(j(a))$. En otras palabras, j es idempotente.

Definición 3.8 (Operador cerradura)**.** *Si A es un copo, un operador cerradura en A es una función $j : A \to A$ tal que*

- *Infla: $a \leq j(a)$ para todo $a \in A$*

- *Es monótona: $a \leq b$ implica que $j(a) \leq j(b)$.*

- *Es idempotente: $j(j(a)) = a$.*

Así, lo que acabamos de mostrar es que, si j es el selector de una $\bigvee$-congruencia $\sim$, entonces j es un operador cerradura. Ahora queremos ver el camino de regreso: dado un operador cerradura j en A, ¿podemos obtener una $\bigvee$-congruencia de manera natural? La respuesta es sí y, de hecho, estas construcciones son inversas una de la otra.

Lema 3.9. *Sea A una $\bigvee$-retícula. Los selectores de A son precisamente los operadores cerradura. Además cada operador cerradura es selector para una única $\bigvee$-congruencia. Es decir, hay una relación biyectiva entre $\bigvee$-congruencias y operadores cerradura en A.*

Demostración. Ya sabemos que el selector de una $\bigvee$-congruencia es un operador cerradura.

Ahora tomemos un operador cerradura $j : A \to A$. Como j es una función, sabemos que la relación

$$x \sim y \quad \text{si, y solo si} \quad j(x) = j(y)$$

es de equivalencia. Veamos que es una $\bigvee$-congruencia. Supongamos que $X, Y \subseteq A$ son subconjuntos indicados por un conjunto I y que $X \sim Y$. Entonces para cualquier $y_i \in Y$ tenemos $y_i \sim x_i$ con $x_i \in X$. Como j infla y es monótono, tenemos

$$y_i \leq j(y_i) = j(x_i) \leq j(\bigvee X)$$

Así, $\bigvee Y \leq j(\bigvee X)$. Aplicando j obtenemos $j(\bigvee Y) \leq j(\bigvee X)$, pues j es idempotente. Análogamente, tenemos $j(\bigvee X) \leq j(\bigvee Y)$, por lo cual $j(\bigvee X) = j(\bigvee Y)$ y así $\bigvee X \sim \bigvee Y$, así que $\sim$ es una $\bigvee$-congruencia.

Ahora veamos que estas correspondencias son inversas una de la otra.

Sea j un operador cerradura y $\sim$ su $\bigvee$-congruencia asociada. Para ver que j es el selector de $\sim$, basta ver que $j(y)$ es el supremo del bloque de y con respecto a $\sim$. Notemos que, si $x \sim y$, entonces $x \leq j(x) = j(y)$ porque j infla, así que $j(y)$ es cota superior del bloque de y. Además, tenemos $y \sim j(y)$, ya que $j(y) = j(j(y))$. Por lo tanto, si z es una cota superior del bloque de y, entonces en particular $j(y) \leq z$.

Ahora sea $\sim$ una $\bigvee$-congruencia y j su selector. Debemos ver que $\sim$ es la congruencia de j. Es decir, mostraremos que

$$x \sim y \quad \text{si, y solo si} \quad j(x) = j(y).$$

Por un lado $x \sim y$ significa que $[x] = [y]$, por lo cual sus supremos $j(x)$ y $j(y)$ son iguales. Por otro lado, dado que $x \sim j(x)$ para todo $x \in A$, si $j(x) = j(y)$ entonces tenemos $x \sim j(x) = j(y) \sim y$, con lo cual terminamos. □

Conjuntos $\bigwedge$-cerrados

Vimos que, en una $\bigvee$-semirretícula, hay una correspondencia entre operadores cerradura y $\bigvee$-congruencias. De hecho, ahora veremos que la correspondencia es triple: los operadores cerradura también están en correspondencia con los subconjuntos de A que son cerrados bajo ínfimos arbitrarios.

Definición 3.10. *Si A es una $\bigvee$-semirretícula, un subconjunto $F \subseteq A$ se dice que es $\bigwedge$-cerrado si, para todo subconjunto $X \subseteq F$, se tiene $\bigvee X \in F$.*

Ahora mostraremos que hay una correspondencia entre operadores cerradura y conjuntos $\bigwedge$-cerrados.

Lema 3.11.

1. *Dado un operador cerradura j en A, el conjunto de sus puntos fijos*

$$A_j = \{x \in A \mid j(x) = x\}$$

es $\bigwedge$-cerrado.

2. *Dado un conjunto $\bigwedge$-cerrado $F \subseteq A$, la función $j_F : A \to A$ dada por*

$$j_F(a) = \bigwedge\{x \in F \mid a \leq x\}$$

es un operador cerradura.

3. *Las construcciones $F \mapsto j_F$ y $j \mapsto A_j$ son inversas una de la otra y, por lo tanto, establecen una biyección entre operadores cerradura en A y los conjuntos $\bigwedge$-cerrados de A, que, además, están en biyección con las $\bigvee$-congruencias de A.*

Demostración. 1. Tomemos un subconjunto $X \subseteq A_j$. Para cualquier $x \in X$ tenemos $\bigwedge X \leq x$, por lo cual

$$j(\bigwedge X) \leq j(x) = x$$

ya que j es monótona y $x \in A_j$. Esto significa que $j(\bigwedge X)$ es cota inferior de X, por lo cual

$$j(\bigwedge X) \leq \bigwedge X$$

y, además, la otra desigualdad $\bigwedge X \leq j(\bigwedge X)$ se da porque j infla. Luego, $j(\bigwedge X) = \bigwedge X$, pero esto es $\bigwedge X \in A_j$.

2. En efecto, dado que cualquier $a \in A$ es cota inferior de $\{x \in F \mid a \leq x\}$, se sigue que $a \leq j_F(a)$.

   Ahora, dados $a \leq b \in A$, tenemos

   $$\{x \in F \mid a \leq x\} \supseteq \{x \in F \mid b \leq x\}$$

   lo cual, tomando ínfimos, nos da $j_F(a) \leq j_F(b)$.

   Finalmente, como F es $\bigwedge$-cerrado, para cualquier $a \in A$ tenemos $j_F(a) \in F$ (por definición de j_F), de modo que $j_F(a) \in \{x \in F \mid j_F(a) \leq x\}$. Una vez más, por la definición de j_F se sigue que $j_F(j_F(a)) \leq j_F(a)$ y la otra desigualdad $j_f(a) \leq j_F(j_F(a))$ es porque j_F infla.

3. Sea $F \subseteq A$ un conjunto $\bigwedge$-cerrado. Entonces

   $$\begin{aligned} j_F(a) &= \bigwedge\{x \in F \mid a \leq x\} \\ A_{j_F} &= \{a \in A \mid j_F(a) = a\}. \end{aligned}$$

   Observemos que $F \subseteq A_{j_F}$, ya que $a = \bigwedge\{x \in F \mid a \leq x\}$ para todo $a \in F$. Por otro lado, como F es $\bigwedge$-cerrado, tenemos $j_F[A] \subseteq F$. Luego, $A_{j_F} = j_F[A_{j_F}] \subseteq F$ y, así, $F = A_{j_F}$.

   Recíprocamente, sea $j : A \to A$ un operador cerradura. Entonces

   $$\begin{aligned} A_j &= \{a \in A \mid j(a) = a\} \\ j_{A_j}(a) &= \bigwedge\{x \in A_j \mid a \leq x\}. \end{aligned}$$

   Como j infla y es idempotente, todo $a \in A$ satisface

   $$j(a) \in \{x \in A_j \mid a \leq x\}.$$

   Además, $j(a)$ es una cota inferior del conjunto, pues para todo $x \in A_j$ con $a \leq x$ tenemos $j(a) \leq j(x) = x$. Por lo tanto,

   $$j(a) = \bigwedge\{x \in A_j \mid a \leq x\} = j_{A_j}(a).$$

   Esto muestra que $j = j_{A_j}$. Luego, las construcciones $F \mapsto j_F$ y $j \mapsto A_j$ son inversas, lo cual establece la biyección deseada.

□

La correspondencia entre operadores cerradura y cocientes

Al principio de esta sección, vimos que todo $\bigvee$-morfismo $f : A \to B$ induce una $\bigvee$-congruencia en A. Por lo tanto, también induce un operador cerradura $k : A \to A$

Definición 3.12. *Para cada $\bigvee$-morfismo $f : A \to B$, el núcleo de φ es el operador cerradura $k : A \to A$ que le corresponde a la $\bigvee$-congruencia inducida por f. Es decir k está determinado por la condición*

$$k(x) = k(y) \quad \text{si, y solo si} \quad f(x) = f(y).$$

También vimos que toda $\bigvee$-congruencia en A produce un cociente de A. Por lo tanto, todo operador cerradura $k : A \to A$ produce un cociente de A.

Como estas correspondencias son biyecciones, cualquier cociente $f : A \to B$ es el cociente producido por su núcleo, mientras que todo operador cerradura es el núcleo del cociente que produce.

Ahora veremos que estas correspondencias tienen descripciones más directas.

Si $f : A \to B$ es un $\bigvee$-morfismo, entonces preserva supremos, por lo cual tiene un adjunto derecho $f_* : B \to A$. (Ver 2.1). Es decir, f_* es un morfismo de copos determinado por la condición

$$a \leq f_*(b) \quad \text{si, y solo si} \quad f(a) \leq b$$

y está dado por la fórmula

$$f_*(b) = \bigvee\{x \in A \mid f(x) \leq b\}.$$

Proposición 3.13 (El operador cerradura de un morfismo)**.** *Si $f : A \to B$ es un $\bigvee$-morfismo y $f_* : B \to A$ es su adjunto derecho, entonces la función $k = f_* f : A \to A$ es un operador cerradura y, de hecho es el núcleo de f.*

Demostración. Primero veremos que $k = f_* f$ es un operador cerradura.

- k es monótona porque f y f_* lo son.
- Usando la fórmula para f_*, tenemos

$$k(a) = f_* f(a) = \bigvee\{x \in A \mid f(x) \leq f(a)\} \geq a,$$

  pues $a \in \{x \in A \mid f(x) \leq f(a)\}$. Así, k infla.

- Para ver la idempotencia de k, calculemos $f f_* f : A \to B$.

$$\begin{aligned} f f_* f(a) &= f(k(a)) \\ &= f(\bigvee\{x \in A \mid f(x) \leq f(a)\}) \\ &= \bigvee\{f(x) \mid f(x) \leq f(b)\} \\ &= f(a) \end{aligned}$$

  Es decir, $f f_* f = f$. Por lo tanto, $k^2 = f_* f f_* f = f_* f = k$, como se quería

Ahora veamos que $k = f_*f$ cumple la propiedad de ser el núcleo de f; es decir:

$$k(x) = k(y) \quad \text{si, y solo si} \quad f(x) = f(y).$$

Tomemos $x, y \in A$ tales que $k(x) = k(y)$, esto es, $f_*f(x) = f_*f(y)$, o bien

$$f_*f(x) \leq f_*f(y) \qquad\qquad f_*f(y) \leq f_*f(x).$$

Como f_* es adjunto derecho de f, esto sucede si, y solo si,

$$ff_*f(x) \leq f(y) \qquad\qquad ff_*f(y) \leq f(x).$$

Recordando que $ff_*f = f$ (de la demostración de idempotencia), esto es equivalente a

$$f(x) \leq f(y) \qquad\qquad f(y) \leq f(x),$$

es decir, $f(x) = f(y)$. Esto prueba que $k = f_*f$ es el núcleo de f, como se quería. □

Esto nos permite probar otra caracterización del nucleo de un $\bigvee$-morfismo:

Corolario 3.14. *Dado un $\bigvee$-morfismo $f : A \to B$, el núcleo de f es el operador cerradura $k : A \to A$ determinado por la condición*

$$x \leq k(a) \quad \textit{si, y solo si} \quad f(x) \leq f(a).$$

Demostración. Recordemos que la adjunción nos da la equivalencia

$$x \leq f_*(y) \quad \text{si, y solo si} \quad f(x) \leq y.$$

Tomando $y = f(a)$, tenemos la equivalencia deseada. □

Ahora veamos el regreso. Dado un operador cerradura j, podemos obtener una descripción sencilla del morfismo cociente asociado. Sabemos que el conjunto de puntos fijos A_j de j es $\bigwedge$-cerrado y, por lo tanto, es una retícula completa con el orden inducido de A, aunque los supremos, en general, no coinciden con lo supremos en A.

Por otro lado, notemos que la función $j^* : A \to A_j$ definida como $j^*(a) = j(a)$ es suprayectiva e induce en A la relación de equivalencia

$$a \sim b \quad \text{si, y solo si} \quad j(a) = j(b),$$

que es, precisamente, la congruencia en A inducida por j. Por lo tanto, se sigue que el orden en A_j inducido por j^* es el únco orden que hace que j^* sea un $\bigvee$-morfismo.

Lema 3.15. *Sean $j : A \to A$ un operador cerradura y $j^* : A \to A_j$ la restricción de j a su imagen. Entonces el orden en A_j heredado de A, que convierte a A_j en una $\bigvee$-semirretícula, concide con el orden inducido por j^* que convierte a j^* en un $\bigvee$-morfismo.*

Demostración. Gracias al lema 3.2, basta ver que el orden en A_j heredado de A convierte a j^* en un morfismo de semirretículas superiores. Es decir, denotando como $\vee_j$ al supremo calculado en A_j con el orden inducido de A, basta ver que, para cualesquiera $a, b \in A_j$, tenemos $a \vee_j b = j(a \vee b)$.

Por un lado, como j infla, tenemos $a, b \leq a \vee b \leq j(a \vee b)$. Así, $j(a \vee b) \in A_j$ es cota superior de a y b. Además, si $z \in A_j$ está por encima de a y b, tenemos $a \vee b \leq z$, por lo cual $j(a \vee b) \leq j(z) = z$. Se sigue que $j(a \vee b)$ es el supremo de a y b en A_j. □

Corolario 3.16. *Para cualquier subconjunto $Y \subseteq A_j$, se tiene*

$$\bigvee_j Y = j(\bigvee Y),$$

donde $\bigvee_j$ denota como al supremo calculado en A_j.

Demostración. Considerando a Y como subconjunto de A, tenemos

$$j(\bigvee Y) = \bigvee_j j(Y) = \bigvee_j Y$$

porque j^* es $\bigvee$-morfismo y $j(Y) = Y$. □

Con toda la información que tenemos, podemos probar el teorema del factor en la categoría de $\bigvee$-semiretículas.

Teorema 3.17 (Teorema del factor en $\mathrm{cPos}^{\vee}$)**.** *Sea A una $\bigvee$-semiretícula y k un operador cerradura en A. Si $f : A \to B$ es un morfismo cuyo núcleo k satisface $j \leq k$, entonces existe un único morfismo $f^\sharp : A_j \to B$ tal que el siguiente triángulo conmuta.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j^*"'] & & B \\ & A_j \arrow[ur, "f^\sharp"'] & \end{tikzcd}.$$

3.3. Cocientes en Frm: núcleos

En el caso de $\bigvee$-semiretículas, teníamos la correspondencia entre operadores cerradura, conjuntos $\bigwedge$-cerrados y $\bigvee$-congruencias. Cuando trabajamos en un marco, esta correspondencia se puede refinar más.

Definición 3.18 (Núcleo en un marco)**.** *Un núcleo en un marco A es un operador cerradura $j : A \to A$ que cumple con $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$ $\forall\ a, b \in A$. Al conjunto de núcleos de A lo denotamos como NA.*

Nótese que, para un morfismo de marcos $f : A \to B$, el operador cerradura k inducido por f (el núcleo de f, visto como morfismo de $\bigvee$-retículas) también es un núcleo de marcos, ya que

$$\begin{aligned} x \le k(a \wedge b) &\iff f(x) \le f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \\ &\iff f(x) \le f(a), f(x) \le f(b) \\ &\iff x \le k(a), x \le k(b) \\ &\iff x \le k(a) \wedge k(b) \end{aligned}$$

Siendo k un operador cerradura, el conjunto de puntos fijos A_k es un conjunto $\bigwedge$-cerrado, así que es una retícula completa. Sin embargo, como k es un núcleo (de marcos), entonces A_k tiene una propiedad extra: se comporta bien con respecto a la implicación. Esto queda capturado en la siguiente definición y el lema que la acompaña.

Definición 3.19 (Conjunto implicativo)**.** *Decimos que un subconjunto F de un marco A es un conjunto implicativo si es $\bigwedge$-cerrado y $a \in F \implies \forall x \in A,\ (x \succ a) \in F$.*

Lema 3.20. *Sea A un marco. Entonces un operador cerradura $k : A \to A$ preserva ínfimos (es un núcleo de marcos) si, y sólo si, su conjunto de puntos fijos A_k es implicativo.*

Demostración. Sea $k : A \to A$ un operador cerradura.

($\Leftarrow$). Supongamos que A_k es implicativo. Sean $x, y \in A$. Por un lado, $k(x \wedge y) \le k(x) \wedge k(y)$ por la monotonía de k: Para ver la otra comparación, sea $a = k(x \wedge y) \in A_k$. Entonces

$$\begin{aligned} x \wedge y \le a &\iff y \le (x \succ a) \in A_k \\ &\iff k(y) \le (x \succ a) \\ &\iff k(y) \wedge x \le a \\ &\iff x \le (k(y) \succ a) \\ &\iff k(x) \le (k(y) \succ a) \in A_k \\ &\iff k(x) \wedge k(y) \le a. \end{aligned}$$

Esto es $k(x \wedge y) = k(x) \wedge k(y)$. Así, $k \in NA$.

($\Rightarrow$). Supongamos que k es un núcleo. Tomemos $a \in A_k$ y $x \in A$. Por un lado, $(x \succ a) \le k(x \succ a)$. Para ver la otra comparación, sea $y = (x \succ a)$. Así, $x \wedge y \le a$, y se cumple que

$$x \wedge k(y) \le k(x) \wedge k(y) = k(x \wedge y) \le k(a) = a$$

lo cual implica que $k(y) \le (x \succ a) = y$. Por lo tanto, $k(y) = y$ y $y \in A_k$. □

Recordemos que, si $j \in CA$, entonces A_j es una $\bigvee$-semiretícula y $j^* : A \to A_j$ dada como $j^*(a) = j(a)$ es un morfismo de $\bigvee$-semiretículas; esto es:

$$j(\bigvee X) = \bigvee_j X$$

para cualesquiera $j \in NA, X \subset A_j$, donde $\bigvee_j$ denota al supremo en A_j. Nótese que, si $j \in NA$, entonces A_j es una retícula completa que, por el lema anterior, tiene implicación, así que A_j es un marco y j es un morfismo de marcos, ya que j preserva ínfimos. Poniendo juntas estas observaciones, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.21. *Sea $j \in CA$. Entonces $j \in NA$ si, y solo si, A_j es un marco (con el orden heredado de A) y $j^* : A \to A_j$ es un morfismo de marcos suprayectivo.*

Definición 3.22. *Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo suprayectivo $f : A \to B$.*

Ejercicio 3. *Para cualquier marco A, existe una biyección entre el conjunto de cocientes de A y NA.*

Solución. Defínase $\mathcal{C} = \{\text{Cocientes de } A\}$. Sea $f : A \to B \in \mathcal{C}$. Así, $F = f_* \circ f \in NA$, y si $g : A \to B \in \mathcal{C}$ es tal que $G = g_* \circ g = f_* \circ f = F$, entonces $A_F = A_G$, y $F^* = G^*$, donde $F^* : A \to A_F$ se define como $F^*(a) = F(a)$. Sabemos entonces que existe un único morfismo $f^\sharp : A_F \to B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "F^*"'] & & B \\ & A_j \arrow[ur, "f^\sharp"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, así como $g^\sharp$ que cumple lo mismo para g y A_G. Sin embargo, como $G = F$, $A_F = A_G$ y $F^* = G^*$, entonces $f = F^\sharp \circ F^* = G^\sharp \circ G^* = G$, y por lo tanto la función $\varphi : \mathcal{C} \to NA$ definida como $\varphi(f) = F = f_* \circ f$ es inyectiva. También, si $j \in NA$, claramente $j^* : A \to A_j$ es un cociente de A, con $j_* \circ j = j$. Por lo tanto, φ es una biyección entre $\mathcal{C}$ y NA. ∎

Teorema 3.23 (Teorema del factor). *Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$, y considérese $f : A \to B$ morfismo de marcos con núcleo $k \geq j$. Entonces existe un único morfismo $f^\sharp : A_j \to B$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j^*"'] & & B \\ & A_j \arrow[ur, "f^\sharp"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Dado que j es núcleo, A_j es un marco, con $A_j = j(A)$, y j^* es un morfismo de marcos suprayectivo. Tomando en cuenta lo anterior, defínase $f^\sharp : A_j \to B$ como

$$f^\sharp(j(a)) = f(a)$$

Como A_j es un marco, es cerrado bajo supremos e ínfimos arbitrarios, por lo que

- Sean $a, b \in A$ tales que $j(a) = j(b)$. Nótese que como $j \in NA$, entonces $a \leq j(a)$ y $b \leq j(b)$, por lo que a su vez $f(a) \leq f(j(a))$ y $f(b) \leq f(j(b))$. También, dado que $k \geq j$, se tiene que

$$\begin{aligned} j(a) = j(b) \leq k(b) &\text{ de donde, por la definición de } k \\ j(a) \leq k(b) &\iff f(j(a)) \leq f(b) \text{ y} \\ j(b) \leq k(a) &\iff f(j(b)) \leq f(a) \end{aligned}$$

  Por lo anterior, se cumplen las desigualdades $f(a) \leq f(b)$ y $f(b) \leq f(a)$, por lo que $f(a) = f(b)$ y $f^\sharp$ está bien definida.

- Para $j(a), j(b) \in A_j$ cualesquiera,

$$\begin{aligned} f^\sharp(j(a) \wedge j(b)) &= f^\sharp(j^*(a \wedge b)) \\ &= f(a \wedge b) \\ &= f(a) \wedge f(b) \\ &= f^\sharp(j^*(a)) \wedge f^\sharp(j^*(b)) \end{aligned}$$

- Sea $X \subset A_j$. Así,

$$\begin{aligned} f^\sharp(\bigvee X) &= f^\sharp(\bigvee j^*(X')) \\ &= f^\sharp(j^*(\bigvee X')) \\ &= f(\bigvee X') \\ &= \bigvee f(X') \\ &= \bigvee f^\sharp(X) \end{aligned}$$

  Por lo anterior, $f^\sharp$ es morfismo de marcos. Claramente, $f^\sharp \circ j^* = f$, y si $g : A_j \to B$ es tal que $g \circ j^* = f$, entonces $g(j(a)) = f(a)\ \forall j(a) \in A_J$, por lo que $g = f^\sharp$. Así, $f^\sharp$ es único.

$\square$

Esto termina de establecer las correspondencias que queríamos.

3.3.1. Algunos núcleos particulares

En cualquier marco A, es fácil encontrar núcleos. Por ejemplo, los lemas 1.29 y 1.30 implican que, para cualquier elemento $a \in A$ de un marco A, la función $((- \succ a) \succ a) : A \to A$ es un núcleo. Además hay, al menos, otras dos maneras de obtener núcleos a partir de a.

Definición 3.24 (Núcleos cerrado, abierto y regular). *Sea $a \in A$ fijo, y considérense los operadores siguientes.*

- $\mathbf{u}_a : A \to A$, *definido como* $\mathbf{u}_a(x) = a \vee x$.
- $\mathbf{v}_a : A \to A$, *definido como* $\mathbf{v}_a(x) = (a \succ x)$.

- $\mathbf{w}_a : A \to A$, *definido como* $\mathbf{w}_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$.

Los operadores $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{v}_a$ *y* $\mathbf{w}_a$ *son llamados los núcleos cerrado, abierto y regular de* a, *respectivamente.*

Proposición 3.25. *Los operadores* $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{v}_a$ *y* $\mathbf{w}_a$ *son núcleos, para cualquier* $a \in A$.

Demostración. En efecto, $\mathbf{u}_a$ infla, es idempotente y monótono. Además, la afirmación de que preserva ínfimos es precisamente la ley distributiva.

terminar

Para $\mathbf{v}_a$,...

Finalmente, la demostración para $\mathbf{w}_a$ está dada por los lemas 1.29 y 1.30. □

Ejemplo 3.26. Encontremos todos los núcleos del marco

$$A \quad = \quad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ a \arrow[dr, dash] & & b \arrow[dl, dash] \\ & 0 & \end{tikzcd} \; .$$

Dado que todos los núcleos mandan el 1 al 1 y también preservan ínfimos, cada núcleo está determinado por sus valores en a y en b, pues $0 = a \wedge b$. Como los núcleos inflan, cada núcleo solo puede mandar a a sí misma o al 1, y b a sí misma o al 1, así que hay, a lo más, 4 núcleos. Los núcleos cerrados, abiertos y regulares asociados a a y a b son

$\mathbf{u}_a$ $a \mapsto a \vee a = a$ $b \mapsto a \vee b = 1$	$\mathbf{v}_a$ $a \mapsto (a \succ a) = 1$ $b \mapsto (a \succ b) = b$	$\mathbf{w}_a$ $a \mapsto ((a \succ a) \succ a) = (1 \succ a) = a$ $b \mapsto ((b \succ a) \succ a) = (a \succ a) = 1$
$\mathbf{u}_b$ $a \mapsto b \vee a = 1$ $b \mapsto b \vee b = b$	$\mathbf{v}_b$ $a \mapsto (b \succ a) = a$ $b \mapsto (b \succ b) = 1$	$\mathbf{w}_b$ $a \mapsto ((a \succ b) \succ b) = (b \succ b) = 1$ $b \mapsto ((b \succ b) \succ b) = (1 \succ b) = b$

así,

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{v}_b = \mathbf{w}_a$$
$$\mathbf{u}_b = \mathbf{v}_a = \mathbf{w}_b$$

son dos núcleos diferentes, mientras que los otros dos núcleos son la identidad $\mathrm{id} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_1$ y la función constante 1, denotada como tp. Notemos que $\mathrm{tp} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_0$. Para ver la estructura ordenada de NA, notemos que $\mathbf{u}_a$ y $\mathbf{u}_b$ no son comparables, por lo cual

$$NA \quad = \quad \begin{tikzcd} & \mathrm{tp} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathbf{u}_a \arrow[dr, dash] & & \mathbf{u}_b \arrow[dl, dash] \\ & \mathrm{id} & \end{tikzcd} \quad \simeq \quad A.$$

■

Ejemplo 3.27. Sea S un espacio topológico y considemos el marco $\mathcal{O}S$. Para cualesquiera abiertos $A, X \in \mathcal{O}S$, tenemos

- $\mathbf{u}_A(X) = A \cup X$
- $\mathbf{v}_A(X) = (A \succ X) = (A' \cup X)^\circ$
- $\mathbf{w}_A(X) = ((X \succ A) \succ A) = (((X' \cup A)^\circ)' \cup A)^\circ = (\overline{X \cap A'} \cup A)^\circ$

■

La razón de la nomenclatura para los núcleos cerrado y abierto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.28. Sea S un espacio topológico y $U \in \mathcal{O}S$ un abierto. Observemos que

$$V \in (\mathcal{O}S_{\mathbf{u}_U}) \iff U \cup V = V \iff U \subset V.$$

Luego,

$$(\mathcal{O}S)_{\mathbf{u}_U} = \{V \in \mathcal{O}S \mid U \subset V\}.$$

Es decir, los puntos fijos de $\mathbf{u}_U$ son los abiertos que contienen a U. Ahora consideremos el cerrado U^c de S y su topología como subespacio:

$$\mathcal{O}U^c = \{W \cap U^c \mid W \in \mathcal{O}S\}.$$

Las funciones $\mathcal{O}U^c \rightleftarrows (\mathcal{O}S)_{\mathbf{u}_U}$ dadas como

$$\begin{aligned} V \cap U^c &\mapsto (V \cap U^c) \cup U = V \cup U \\ W \cap U^c &\leftarrow\!\shortmid W \end{aligned}$$

constituyen un isomorfismo de marcos. En efecto, para cualesquiera $V \cap U^c \in \mathcal{O}U^c$ y $W \in (\mathcal{O}S)_{\mathbf{u}_U}$, tenemos

$$\begin{aligned} ((V \cap U^c) \cup U) \cap U^c &= (V \cup U) \cap U^c \\ &= V \cap U^c, \\ (W \cap U^c) \cup U &= W \cup U \\ &= W. \end{aligned}$$

Como estas funciones son monótonas, son un isomorfismo de copos y, por lo tanto, un isomorfismo de marcos.

Similarmente, $\mathbf{v}_U$ se relaciona con la topología de subespacio de U:

$$\mathcal{O}U = \{V \in \mathcal{O}S : V \subseteq U\}.$$

Las funciones dadas por $\mathcal{O}U \rightleftarrows (\mathcal{O}S)_{\mathbf{v}_U}$

$$\begin{aligned} V &\mapsto (U \succ V) \\ W \cap U &\leftarrow\!\shortmid W. \end{aligned}$$

son un isomorfismo de marcos. En efecto, para cualesquiera $V \in \mathcal{O}U$ y $W \in (\mathcal{O}S)_{\mathbf{v}_U}$, tenemos

$$\begin{aligned}(U \succ V) \cap U &= U \cap V \\ &= V \\ (U \succ (W \cap U)) &= (U \succ W) \cap (U \succ U) \\ &= U \succ W \\ &= W\end{aligned}$$

Como estas funciones son monótonas, son un isomorfismo de copos y, por lo tanto, un isomorfismo de marcos. ■

Ejemplo 3.29. En general, dado un marco A y un elemento $a \in A$, los mismos argumentos del ejemplo anterior demuestran que

$$\begin{aligned}A_{\mathbf{u}_a} &= \{x \in A \mid a \leq x\} = [a, 1] \\ A_{\mathbf{v}_a} &\simeq \{x \in A \mid x \leq a\} = [0, a],\end{aligned}$$

donde el último isomorfismo está dado como $y \mapsto y \wedge a$ y $(a \succ x) \leftarrow x$. ■

Por otro lado, los $\mathbf{w}_a$ se llaman núcleos regulares por el caso $a = 0$ de un núcleo espacial:

Ejemplo 3.30. Considerando $\mathbf{w}_\varnothing : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$, definido como

$$\mathbf{w}_\varnothing(U) = ((U \succ \varnothing) \succ \varnothing) = (\overline{U})^\circ$$

se tiene que los puntos fijos son

$$(\mathcal{O}S)_{\mathbf{w}_\varnothing} = \{U \in \mathcal{O}S : (\overline{U})^\circ = U\} = \{\text{Abiertos regulares de } S\}.$$

■

Ahora estudiaremos más sobre los núcleos regulares de un marco. El ejemplo anterior nos mostró que, en un espacio topológico S, los puntos fijos $(\mathcal{O}S)_{\mathbf{w}_\varnothing}$ son el marco de abiertos regulares de S. Del siguiente lema se sigue, en particular, que $(\mathcal{O}S)_{\mathbf{w}_\varnothing}$ es un álgebra booleana completa.

Lema 3.31. *Si* $a \in A \in \mathrm{Frm}$, *entonces* $A_{\mathbf{w}_a} \in \mathrm{cBool}$.

Demostración.

$$\mathbf{w}_a(0) = ((0 \succ a) \succ a) = (1 \succ a) = a$$

por lo tanto, $a \in A_{\mathbf{w}_a}$ es el menor elemento de $A_{\mathbf{w}_a}$. Mostraremos que todo $x \in A_{\mathbf{w}_a}$ es complementado. Dado $x \in A_{\mathbf{w}_a}$, considérese $y = (x \succ a)$. Por un lado,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_a(y) &= \mathbf{w}_a(x \succ a) \\ &= (\mathbf{w}_a(x) \succ a) \\ &= (x \succ a) \\ &= y\end{aligned}$$

por lo que $y \in A_{\mathbf{w}_a}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x \wedge (x \succ a) \\ &= x \wedge a \\ &= a \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_a(x \vee y) &= ((x \vee y) \succ a) \succ a) \\ &= (((x \succ a) \wedge (y \succ a)) \succ a) \\ &= ((y \wedge (y \succ a)) \succ a) \\ &= ((y \wedge a) \succ a) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Luego, y es el complemento de x en $A_{\mathbf{w}_a}$. Se sigue que $A_{\mathbf{w}_a} \in \mathrm{cBool}$. □

Un caso particular del resultado anterior es cuando $a = 0$. En este caso, el álgebra booleana completa $A_{\mathbf{w}_0}$ se denota como $A_{\neg\neg}$. Como se mencionó antes del lema, en el caso espacial, esto nos dice que los abiertos regulares de un espacio topológico forman un álgebra booleana completa.

Lema 3.32. *Para cualquier núcleo $j \in NA$ se tiene la equivalencia*

$$j(0) = 0 \quad \textit{si, y solo si} \quad j \leq \mathbf{w}_0.$$

(C.f. con el lema 5.5). Si un núcleo $j \in NA$ cumple $j \leq \mathbf{w}_0$, decimos que j es un núcleo denso. Así, $\mathbf{w}_0$ es el mayor núcleo denso en A.

Demostración. Supongamos que $j \leq \mathbf{w}_0$. Entonces $0 \leq j(0) \leq \mathbf{w}_0(0) = ((0 \succ 0) \succ 0) = 0$. Así, $j(0) = 0$.

Supongamos ahora que $j(0) = 0$. Dado cualquier $x \in A$, queremos mostrar que $j(x) \leq \mathbf{w}_0 x = ((x \succ 0) \succ 0)$ o, equivalentemente, que $j(x) \wedge (x \succ 0) \leq 0$. Como j infla, tenemos

$$\begin{aligned} j(x) \wedge (x \succ 0) &\leq j(x) \wedge j(x \succ 0) \\ &= j(x \wedge (x \succ 0)) \\ &= j(x \wedge 0) \\ &= j(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

que es lo que se quería. □

El lema 3.31 nos dice que los núcleos regulares producen cocientes booleanos. Ahora tenemos el recíproco.

Teorema 3.33. *Sean A un marco y $j \in NA$. Si el cociente A_j es booleano, entonces $j = \mathbf{w}_a$, donde $a = j(0)$. Así, los cocientes booleanos de A están dados, precisamente, por los núcleos regulares $\mathbf{w}_a$.*

Demostración. Sea $x \in A$. Como B es booleano, $f(x)$ es complementado. Basta mostrar que $f(x \succ a)$ es el complemento $\neg f(x)$ de $f(x)$, ya que, en este caso, tenemos

$$\begin{aligned} y \leq j(x) &\iff f(y) \leq f(x) \\ &\iff f(y) \wedge f(x \succ a) \leq 0 && \text{caballo de batalla} \\ &\iff f(y \wedge (x \succ a)) \leq 0 = f(0) \\ &\iff y \wedge (x \succ a) \leq j(0) = a \\ &\iff y \leq ((x \succ a) \succ a) = \mathbf{w}_a(x) \end{aligned}$$

y, así, $j(x) = \mathbf{w}_a(x)$.

Ahora bien, como $a = j(0) = f_*(f(0))$, se sigue que $f(a) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) \wedge f(x \succ a) &= f(x \wedge (x \succ a)) \\ &= f(x \wedge a) \\ &\leq f(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, como f es suprayectiva, podemos tomar $\tilde{x} \in A$ con $f(\tilde{x}) = \neg f(x)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x \wedge \tilde{x}) &= f(x) \wedge \neg f(x) \\ &= 0 \\ &= f(0), \end{aligned}$$

lo cual sucede si, y solo si, $x \wedge \tilde{x} \leq j(0) = a$. Esto es, $\tilde{x} \leq (x \succ a)$, así que $f(\tilde{x}) \leq f(x \succ a)$. Aplicando supremo con $f(x)$, tenemos

$$1 \leq f(x) \vee f(x \succ a).$$

Concluimos que $f(x \succ a) = \neg f(x)$, lo cual finaliza la prueba. □

Teorema 3.34. *Sea A un marco. Si A es un álgebra booleana completa y $j \in NA$, entonces $j = \mathbf{u}_a$, donde $a = j(0)$.*

Dado que A es booleano, entonces A_j también lo es, así que el resultado anterior también nos da $j = \mathbf{w}_a$.

Demostración. Dado $x \in A$, debemos mostrar que $j(x) = \mathbf{u}_a(x) = x \vee a$. Por un lado, tenemos $0 \leq x$, así que $a = j(0) \leq j(x)$. Como $x \leq j(x)$, se sigue que $x \vee a \leq j(x)$. Por nuestro caballo de batalla, la otra desigualdad ($j(x) \leq x \vee a$) es equivalente a $j(x) \wedge \neg x \leq a$ (ya que x es complementado), pero esto es sencillo:

$$\begin{aligned} j(x) \wedge \neg x &\leq j(x) \wedge j(\neg x) \\ &= j(x \wedge \neg x) \\ &= j(0) \\ &= a. \end{aligned}$$

□

3.3.2. Núcleos espacialmente inducidos en una topología

Sea $\varphi : T \to S$ un morfismo de espacios topológicos. El morfismo de marcos $\varphi^* = \mathcal{O}\varphi : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ tiene adjunto derecho dado por

$$\varphi_*(W) = \bigcup\{U \in \mathcal{O}S \mid \varphi^*(U) \leq W\}.$$

En el ejemplo 2.3, vimos que $\varphi_* : \mathcal{O}T \to \mathcal{O}S$ se puede calcular como

$$\varphi_*(W) = \overline{\varphi[W']}' = (\varphi[W']')^\circ.$$

De todos modos, aquí repetimos una demostración alternativa.

Demostración. Recordemos que tenemos la adjunción $\varphi[-] \dashv \varphi^{-1}$ entre la imagen directa $\varphi[-] : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T$ y la imagen inversa $\varphi^{-1} : \mathcal{P}T \to \mathcal{P}S$. Sea $U \in \mathcal{O}S$. Dado que $\varphi^* : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ es la restricción de $\varphi^{-1} : \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T$, para todo $W \in \mathcal{O}T$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi^*(U) \leq W &\iff \varphi^{-1}(U) \leq W \\
&\iff W' \leq \varphi^{-1}(U)' \\
&\iff W' \leq \varphi^{-1}(U') \\
&\iff \varphi[W'] \leq U' \\
&\iff U \leq \varphi[W']' \\
&\iff U \leq (\varphi[W']')^\circ = \overline{\varphi[W']}',
\end{aligned}$$

como se quería. □

Teorema 3.35. *Si $\varphi : T \to S$ es un morfismo de espacios topológicos, el núcleo $k : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ del morfismo de marcos $\varphi^* : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ tiene la descripción*

$$k(U) = (\varphi[T]' \cup U)^\circ.$$

Demostración. Sabemos que $k = \varphi_*\varphi^*$. Observando que $\varphi[\varphi^*(U)] = U \cap \varphi[T]$, tenemos

$$\begin{aligned}
U \leq k(V) &\iff U \leq \varphi_*(\varphi^*(V)) \\
&\iff \varphi^*(U) \leq \varphi^*(V) \\
&\iff \varphi[\varphi^*(U)] \leq V \\
&\iff U \cap \varphi[T] \leq V \\
&\iff U \leq \varphi[T]' \cup V && \text{caballo de batalla en } \mathcal{P}S \\
&\iff U \leq (\varphi[T]' \cup V)^\circ.
\end{aligned}$$

Luego, $k(V) = (\varphi[T]' \cup V)^\circ$. □

Sea S un espacio topológico. Para cualquier subconjunto $E \subset S$, definimos el operador $[E] : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ como $[E](U) = (E \cup U)^\circ$. Nótese que, si $U \in \mathcal{O}S$, entonces $[U] = \mathbf{u}_U$ y $[U'] = \mathbf{v}_U$. Además, dada una función continua $\varphi : T \to S$, el teorema anterior dice que el núcleo $k : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ de $\varphi^* : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ es $k = [\varphi[T]']$. En general, $[E]$ siempre es un núcleo.

Proposición 3.36. *Si S es un espacio topológico y $E \subseteq S$ un subconjunto, entonces $[E] : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ es un núcleo.*

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{O}S$. Primero, $[E]$ es inflacionario, pues

$$\begin{aligned}[E](U) &= (E \cup U)^\circ \\ &\geq (U)^\circ \\ &= U.\end{aligned}$$

Además, es idempotente: por un lado, por el punto anterior tenemos $[E](U) \leq [E]([E](U))$, mientras que

$$\begin{aligned}[E]([E](U)) &= (E \cup (E \cup U)^\circ)\circ \\ &\leq (E \cup E \cup U)^\circ \\ &= (E \cup U)^\circ \\ &= [E](U).\end{aligned}$$

Además, preserva ínfimos binarios, pues

$$\begin{aligned}[E](U \cap V) &= (E \cup (U \cap V))^\circ \\ &= ((E \cup U) \cap (E \cap V))^\circ \\ &= ((E \cup U)^\circ \cap (E \cap V))^\circ \\ &= [E](U) \cap [E](V).\end{aligned}$$

Finalmente, $[E]$ es monótono, ya que, si $U \leq V$, entonces

$$\begin{aligned}[E](U) &= (E \cup U)^\circ \\ &\leq (E \cup V)^\circ \\ &= [E](V).\end{aligned}$$

□

Definición 3.37. *Sea S un espacio topológico. Un núcleo $j \in N\mathcal{O}S$ es* espacialmente inducido *si es de la forma $j = [E]$ para algún $E \subseteq S$.*

Parte II

El ensamble

Capítulo 4

Operadores en un marco

En el capítulo anterior definimos los núcleos de un marco y vimos éstos están en correspondencia con los cocientes del marco. Ahora veremos que los núcleos de un marco tienen una importancia central en la estructura del marco base. El teorema principal es que el conjunto NA de los núcleos de un marco A es, de nuevo, un marco, llamado el ensamble de A y, de hecho A es un submarco de NA.

Además de los núcleos, arriba definimos los operadores cerradura y vimos que los núcleos son algunos operadores cerradura. En nuestro estudio sistemático del ensamble, usaremos otras familias de operadores monótonos.

4.1. Familias de derivadas

Definición 4.1 (Derivadas)**.** *Una inflación o derivada en A es una función $f : A \to A$ que es monótona e infla. Es decir:*

- $a \le b$ *implica* $f(a) \le f(b)$.
- $a \le f(a)$.

Usaremos la notación DA para el conjunto de todas las derivadas en A.

Notemos que un operador cerradura (definición 3.8) es una derivada idempotente, y recordemos que usamos la notación CA para el conjunto de los operadores cerradura en A.

Definición 4.2 (Derivadas estables)**.** *Una derivada $f \in DA$ es* estable *si*

$$f(x) \wedge y \le f(x \wedge y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Denotamos como SA al conjunto de derivadas estables en A.

Definición 4.3 (Prenúcleos)**.** *Un prenúcleo sobre A es una derivada $f \in DA$ tal que*

$$f(x) \wedge f(y) \le f(x \wedge y).$$

Notemos que la otra desigualdad se cumple para cualquier función monótona, de modo que los prenúcleos separan ínfimos binarios. Usaremos la notación PA para referirnos al conjunto de prenúcleos de A. Además, cualquier prenúcleo es estable, ya que $y \leq f(y)$ implica

$$\begin{aligned} f(x) \wedge y &\leq f(x) \wedge f(y) \\ &\leq f(x \wedge y) && \textit{pues } f \in PA \end{aligned}$$

En resumen tenemos las contenciones

$$\begin{aligned} NA \subseteq PA \subseteq SA &\subseteq DA \\ NA \subseteq CA &\subseteq DA. \end{aligned}$$

También es claro que $NA = PA \cap CA$. Es decir, un núcleo es exactamente un prenúcleo idempotente. De hecho, tenemos $NA = SA \cap CA$. Estos conjuntos son, en sí mismos, conjuntos parcialmente ordenados, donde el orden está dado puntualmente. Esto es, dadas dos funciones $f, g : A \to A$, decimos que $f \leq g$ si, y solo si,

$$\forall x \in A,\ f(x) \leq g(x).$$

Notemos que las derivadas DA, las estables SA y los prenúcleos PA son cerrados bajo composición. Es decir:

- si $f, g \in DA$, entonces $fg, gf \in DA$,
- si $f, g \in SA$, entonces $fg, gf \in SA$,
- si $f, g \in PA$, entonces $fg, gf \in PA$.

Por otro lado, las cerraduras CA y los núcleos NA no lo son, en general.

Veremos que cada uno de estos conjuntos tiene más estructura que la de conjunto parcialmente ordenado.

Ínfimos

Sea $J \subseteq DA$. Definimos la función $\bigwedge J : A \to A$ como

$$(\bigwedge J)(a) = \bigwedge\{f(a) \mid f \in J\}.$$

Afirmamos que $\bigwedge J$ es una derivada y, de hecho, es el ínfimo de J en DA:

- Si $a \leq b \in A$, entonces $f(a) \leq f(b)$ para cada $f \in J$. Luego, cada elemento de $\{f(b) \mid f \in J\}$ está acotado inferiormente por un elemento de $\{f(a) \mid f \in J\}$, por lo cual
$$\bigwedge\{f(a) \mid f \in J\} \leq \bigwedge\{f(b) \mid f \in J\}.$$
- Similarmente $\bigwedge J$ infla.

- Si $h \in DA$ es una derivada que está por debajo de cada elemento $f \in J$. Esto es, para cualesquiera $a \in A$ y $f \in J$ se tiene $h(a) \leq f(a)$. Luego, $h(a)$ es cota inferior de $\{f(a) \mid f \in J\}$, por lo cual $h(a) \leq (\bigwedge J)(a)$.

De hecho, se puede probar lo siguiente:

Lema 4.4.

1. *si $J \subseteq SA$, entonces $\bigwedge J \in SA$,*
2. *si $J \subseteq PA$, entonces $\bigwedge J \in PA$,*
3. *si $J \subseteq CA$, entonces $\bigwedge J \in CA$,*
4. *si $J \subseteq NA$, entonces $\bigwedge J \in NA$.*

Demostración. 1. Sean $x, y \in A$. Así,

$$\begin{aligned}\bigwedge J(x) \wedge y &= \bigwedge\{j(x) : j \in J\} \wedge y \\ &\leq j(x) \wedge y \\ &\leq j(x \wedge y)\ \forall j \in J\end{aligned}$$

Por lo que $\bigwedge J(x) \wedge y$ es una cota inferior del conjunto $\{j(x \wedge y) : j \in J\}$. Así, como $\bigwedge J(x \wedge y)$ es el ínfimo de $\{j(x \wedge y) : j \in J\}$, se cumple que $\bigwedge J(x) \wedge y \leq \bigwedge J(x \wedge y)$, y $\wedge J \in SA$.

2. Sean $x, y \in A$.

$$\begin{aligned}\bigwedge J(x) \wedge \bigwedge J(y) &= \bigwedge\{j(x) : j \in J\} \wedge \bigwedge\{j(y) : j \in J\} \\ &\leq j(x) \wedge j(y) \\ &\leq j(x \wedge y)\ \forall j \in J\end{aligned}$$

por lo que $J(x) \wedge \bigwedge J(y)$ es una cota inferior del conjunto $\{j(x \wedge y) : j \in J\}$. Así, se cumple que $\bigwedge J(x) \wedge \bigwedge J(y) \leq \bigwedge J(x \wedge y)$, y entonces $\bigwedge J \in PA$.

3. Nótese que si $j \in J$, j infla, y se cumple que

$$f(x) \leq j(f(x))\ \forall j, f \in J$$

Por lo tanto,

$$\bigwedge J(x) \leq f(\bigwedge J(x))\ \forall x \in A, f \in J$$

y $\bigwedge J$ es cota inferior del conjunto $\{f(\bigwedge J(x)) : f \in J\}$.
Ahora bien, sea $f \in DA$ tal que $f(x) \leq j(\bigwedge J(x))\ \forall x \in A, j \in J$. Entonces, como $j(j(x)) = j(x)\ \forall j \in J$, ocurre que

$$f(x) \leq j(x)\ \forall j \in J$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \bigwedge J(x)' \forall x \in A$$

Por lo anterior, $\bigwedge J(\bigwedge J(x)) = \bigwedge J(x)$, y $\bigwedge J \in CA$.

4. sean $x, y \in A$. Así,

$$\begin{aligned}\bigwedge J(x \wedge y) &= \bigwedge\{j(x \wedge y) : j \in J\}\\ &= \bigwedge\{j(x) \wedge j(y) : j \in J\}\\ &= \big(\bigwedge\{j(x) : j \in J\}\big) \wedge \big(\bigwedge\{j(y) : j \in J\}\big)\\ &= \bigwedge J(x) \wedge J(y)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigwedge J \in NA$

$\square$

Supremos de derivadas (DA)

Definición 4.5. *Si $J \subseteq DA$ es un conjunto de derivadas, definimos el supremo puntual $\dot{\bigvee} J : A \to A$ de J como la función dada por*

$$(\dot{\bigvee} J)(a) = \bigvee\{f(a) \mid f \in J\}$$

para todo $a \in A$.

Notemos que, si $J = \varnothing \subseteq DA$, entonces

$$\begin{aligned}(\dot{\bigvee}\varnothing)(a) &= \bigvee\{f(a) \mid f \in \varnothing\}\\ &= \bigvee \varnothing\\ &= 0 \in A\end{aligned}$$

lo cual ya no es una derivada (a menos que A sea trivial). Sin embargo, si $J \neq \varnothing$ es una familia de derivadas, entonces $\dot{\bigvee} J$ es una derivada y es el supremo de J en DA. Es decir, los supremos (no vacíos) en DA se calculan puntualmente.

Observemos que, en DA, el menor elemento es la identidad $\mathrm{id} : A \to A$ y el mayor elemento es $\mathrm{tp} : A \to A$ dada como $\mathrm{tp}(a) = 1$.

Supremos de estables (SA)

Supongamos que J es un conjunto no vacío de derivadas estables ($\varnothing \neq J \subseteq SA$). Entonces, para cualesquiera $a, b \in A$, la derivada $\dot{\bigvee} J$ satisface

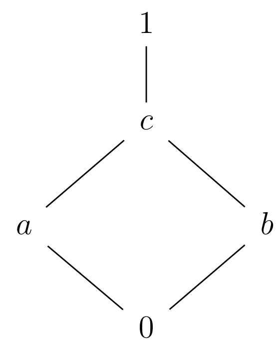
$$\begin{aligned}(\dot{\bigvee} J)(a) \wedge b &= \bigvee\{f(a) \mid f \in J\} \wedge b\\ &= \bigvee\{f(a) \wedge b \mid f \in J\} && \text{por la ley distributiva de marcos}\\ &\leq \bigvee\{f(a \wedge b) \mid f \in J\} && \text{cada } f \in SA\\ &= (\dot{\bigvee} J)(a \wedge b),\end{aligned}$$

de modo que $\dot{\bigvee} J \in SA$. Es decir, los supremos (no vacíos) en SA se calculan puntualmente.

Supremos de prenúcleos (PA)

En contraste con lo que sucede con derivadas y estables, el supremo de una familia de prenúcleos no se calcula puntualmente, en general.

Ejemplo 4.6. Tomemos el marco A dado como



Después de algunos cálculos obtenemos la siguiente tabla de los valores de los núcleos abiertos, cerrados y regulares. Nótese que, como todo núcleo j fija al 1 y preserva ínfimos, es suficiente conocer los valores de j en a, c y b (ya que $0 = a \wedge b$).

j	$j(a)$	$j(c)$	$j(b)$
$\mathbf{v}_a = \mathbf{w}_b$	1	1	b
$\mathbf{v}_b = \mathbf{w}_a$	a	1	1
$\mathbf{v}_c$	a	1	b
$\mathbf{u}_a$	a	c	c
$\mathbf{u}_b$	c	c	b
$\mathbf{u}_c = \mathbf{w}_c$	c	c	c

En particular, todos estos son prenúcleos. Sin embargo, afirmamos que $\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b$ no es prenúcleo. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(a \wedge b) &= (\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(0) \\
&= \mathbf{v}_a(0) \vee \mathbf{v}_b(0) \\
&= b \vee a \\
&= c, \\
(\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(a) \wedge (\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b)(b) &= (\mathbf{v}_a(a) \vee \mathbf{v}_b(a)) \wedge (\mathbf{v}_a(b) \vee \mathbf{v}_b(b)) \\
&= (1 \vee a) \wedge (b \vee 1) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

así que $\mathbf{v}_a \dot{\vee} \mathbf{v}_b$ no es un prenúcleo. ■

Sin embargo, hasta cierto punto, esto se puede enmendar: si $J \subseteq PA$ es dirigido (en particular, no vacío), el supremo puntual $\dot{\bigvee} J$ sí es un prenúcleo, ya que

$$\begin{aligned}
(\dot{\bigvee} J)(a) \wedge (\dot{\bigvee} J)(b) &= \bigvee\{f(a) \wedge g(b) \mid f, g \in J\} && \text{ley distributiva de marcos}\\
&= \bigvee\{h(a) \wedge h(b) \mid h \in J\} && J \text{ es dirigido}\\
&\leq \bigvee\{h(a \wedge b) \mid h \in J\} && \text{cada } h \in J \text{ es prenúcleo}\\
&= (\dot{\bigvee} J)(a \wedge b),
\end{aligned}$$

por lo cual $\dot{\bigvee} J$ es el supremo de J en PA.

4.2. El teorema fundamental de la teoría de marcos

Las derivadas estables forman un marco

Ya vimos que, en DA y en SA, todos los ínfimos y los supremos no vacíos se calculan puntualmente, mientras que $\bigvee \varnothing = \mathrm{id}$.

Ahora veremos cómo interactúan los ínfimos finitos y los supremos en SA. Tomemos un subconjunto $J \subseteq SA$. Si $J = \varnothing$, entonces la igualdad

$$f \wedge \bigvee J = \bigvee\{f \wedge g \mid g \in J\}$$

se cumple, pues ambos lados son $\mathrm{id} : A \to A$. Por otro lado, si $J \neq \varnothing$, entonces para todo $x \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}
(f \wedge \dot{\bigvee} J)(x) &= f(x) \wedge (\dot{\bigvee} J)(x)\\
&= f(x) \wedge \bigvee\{g(x) \mid g \in J\}\\
&= \bigvee\{f(x) \wedge g(x) \mid g \in J\} && \text{ley distributiva de marcos}\\
&= \bigvee\{(f \wedge g)(x) \mid g \in J\}\\
&= (\dot{\bigvee}\{f \wedge g \mid g \in J\})(x).
\end{aligned}$$

de modo que $f \wedge \bigvee J = \bigvee\{f \wedge g \mid g \in J\}$. Esto muestra que SA es un marco. En particular, SA tiene una implicación.

Los núcleos forman un marco

La afirmación es que NA es un subconjunto implicativo de SA. Es decir: NA es cerrado bajo ínfimo (lo cual ya sabemos) y, para cualquier estable $f \in SA$ y cualquier núcleo $k \in NA$, la derivada estable $(f \succ k)$ es un núcleo. Como toda derivada estable e idempotente es núcleo, basta demostrar que $(f \succ k)$ es idempotente.

Sea $G = \{g \in SA \mid f \wedge g \leq k\}$. Como G no es vacío (por ejemplo, $\mathrm{id} \in G$), tenemos

$$(f \succ k) = \dot{\bigvee}\{g \in SA \mid f \wedge g \leq k\}.$$

Primero mostraremos que G es cerrado bajo composiciones. Observemos que, para cualesquiera $g, h \in G$ y $x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
(f \wedge gh)(x) &= f(x) \wedge g(h(x)) \\
&= f(x) \wedge f(x) \wedge g(h(x)) \\
&\leq f(x) \wedge g(f(x) \wedge h(x)) && g \in SA \\
&\leq f(x) \wedge g(k(x)) && f \wedge h \leq k, \text{ pues } h \in G \\
&\leq f(k(x)) \wedge g(k(x)) \\
&\leq k(k(x)) && f \wedge g \leq k, \text{ pues } g \in G \\
&= k(x).
\end{aligned}$$

Esto prueba que $f \wedge gh \leq k$ y, así, $gh \in G$, como se quería.

Ahora mostraremos que $j = (f \succ k) \in G$. En efecto, para todo $x \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}
(f \wedge j)(x) &= f(x) \wedge (\dot{\bigvee} G)(x) \\
&= f(x) \wedge \bigvee \{g(x) \mid g \in G\} \\
&= \bigvee \{f(x) \wedge g(x) \mid g \in G\} \\
&= k(x),
\end{aligned}$$

como se quería. Luego, $j^2 = jj \in G$, así que $j^2 \leq \dot{\bigvee} G = j$. Concluimos que $j^2 = j$. Como j es una derivada estable e idempotente, se sigue que es un núcleo.

Esto muestra lo que queríamos probar: que NA es un subconjunto implicativo de SA. Una consecuencia inmediata es

Teorema 4.7 (Isbell-Simmons-Johnstone)**.** *Para cada marco A, el ensamble NA es un marco.*

Demostración. NA es $\bigwedge$-cerrado y, $(j \in k) \in NA$ para cualesquiera $k \in SA$, $k \in NA$. Es decir, NA es un subconjunto implicativo del marco SA, por lo cual es un marco. $\square$

Sin embargo, el hecho de que NA sea un subconjunto implicativo de SA nos dice aún más. Todo subconjunto implicativo de un marco es un cociente de éste, así que NA es de la forma $NA = (SA)_j$ para algún núcleo $j : SA \to SA$. La pregunta es, ¿qué núcleo?

4.3. Iteración transfinita

Iteraciones en DA.

Denotaremos como Ord a la clase de ordinales y, para cada ordinal, definimos

$$\begin{aligned}
f^0 &= \mathrm{id} \\
f^{\alpha+1} &= f f^\alpha \\
f^\lambda &= \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\} && \text{si } \lambda \text{ es límite.}
\end{aligned}$$

De este modo, obtenemos una cadena de derivadas

$$f^0 \leq f^1 \leq f^2 \leq \cdots \leq f^\alpha \leq f^{\alpha+1} \leq \ldots.$$

Como Ord no es cardinable, la cadena $(f^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord})$ se detiene, por fuerza, en algún ordinal γ, es decir: $f^{\gamma+1} = f^\gamma$. Además, dado que la clase de ordinales es bien ordenada, existe un primer ordinal $\infty \in \mathrm{Ord}$ tal que $f^\infty = f^{\infty+1}$. Dado que $f^{\infty+1} = f^\infty$, se sigue que $f^\alpha f^\infty = f^\infty$ para todo $\alpha \in \mathrm{Ord}$, por inducción en α. En particular, f^∞ es idempotente, así que es un operador cerradura en A. Más aún, f^∞ es el menor operador cerradura en A que está por encima de f. Para ver esto, mostraremos que, si k es un operador cerradura que está por encima de f, entonces también está por encima de toda la cadena de iteraciones de f. Tomemos $k \in CA$ con $f \leq k$ y hagamos inducción.

- Para $\alpha = 0$, tenemos $f^0 = \mathrm{id} \leq k$.
- Supongamos que $f^\alpha \leq k$. Entonces
$$\begin{aligned} f^{\alpha+1} &= f f^\alpha \\ &\leq kk \\ &= k. \end{aligned}$$
- Finalmente, si λ es un ordinal límite, supongamos que $f^\alpha \leq k$ para todo $\alpha < \lambda$. Entonces $f^\lambda = \bigvee\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\} \leq k$.

Como esto es válido para todo ordinal, en particular tenemos $f^\infty \leq k$. Luego, f^∞ es el menor operador cerradura que está por arriba de f.

CA como un conjunto fijo

Luego, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.8. *La construcción $(-)^\infty$ es un operador cerradura en DA cuyos puntos fijos son los operadores cerradura en A:*

$$\begin{aligned} (-)^\infty &\in CDA \\ (DA)_\infty &= CA. \end{aligned}$$

Demostración. Claramente, $f \leq f^\infty$, así que $(-)^\infty$ infla. Como f^∞ es idempotente, tenemos $(f^\infty)^\alpha = f^\infty$ para todo ordinal α. En particular, $(f^\infty)^\infty = f^\infty$, así que $(-)^\infty$ es idempotente. Finalmente, si $f \leq g$ son derivadas, veamos que $f^\alpha \leq g^\alpha$ para todo ordinal α.

- El caso $\alpha = 0$ es obvio.
- Supongamos que $f^\alpha \leq g^\alpha$. Entonces
$$\begin{aligned} f^{\alpha+1} &= f f^\alpha \\ &\leq g g^\alpha \\ &= g^{\alpha+1} \end{aligned}$$

- Supongamos que λ es un ordinal límite y que $f^\alpha \leq g^\alpha$ para todo $\alpha < \lambda$. Entonces

$$\begin{aligned} f^\lambda(x) &= \bigvee\{f^\alpha(x) \mid \alpha < \lambda\} \\ &\leq \bigvee\{g^\alpha(x) \mid \alpha < \lambda\} \\ &= g^\lambda(x) \end{aligned}$$

  para todo $x \in A$, así que $f^\lambda \leq g^\alpha$.

En particular, $f^\infty \leq g^\infty$, así que $(-)^\infty$ es monótono. Finalmente, la igualdad $(DA)_\infty = CA$ se obtiene al observar que todo operador cerradura es un punto fijo de $(-)^\infty$. □

Iteraciones en SA.

Lema 4.9. *Si f es un prenúcleo en A, entonces cada iteración f^α es un prenúcleo, f^∞ es un núcleo y, más aún, f^∞ es el menor núcleo por encima de A.*

Demostración. Sea $f \in PA$. Mostraremos, usando inducción, que $f^\alpha \in PA$ para cada ordinal α.

- Si $\alpha = 0$, entonces $f^0 = \mathrm{id} \in PA$.
- Supongamos que f^α es prenúcleo. Como los prenúcleos son cerrados bajo composición, $f^{\alpha+1} = ff^\alpha$ es prenúcleo.
- Si λ es un ordinal límite, supongamos que $f^\alpha \in PA$ para cada ordinal $\alpha < \lambda$. Recordemos que $f^\lambda = \dot{\bigvee}\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Hay que probar que f^λ es prenúcleo. Para cada $x, y \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} &f^\lambda(x) \wedge f^\lambda(y) \\ &\qquad = \bigvee\{f^\alpha(x) \wedge f^\beta(y) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && \text{ley distributiva para marcos} \\ &\qquad = \bigvee\{f^\gamma(x) \wedge f^\gamma(y) \mid \gamma < \lambda\} \\ &\qquad \leq \bigvee\{f^\gamma(x \wedge y) \mid \gamma < \lambda\} && f^\gamma \in PA \text{ por hipótesis} \\ &\qquad = f^\lambda(x \wedge y). \end{aligned}$$

En particular, f^∞ es un prenúcleo y, como también es idempotente, se sigue que f^∞ es un núcleo.

Finalmente, recordemos que f^∞ es el menor operador cerradura por encima de f. Luego, para cualquier núcleo $j \in NA$ que esté por encima de f, se tiene $f^\infty \leq j$, así que f^∞ es el menor núcleo por encima del prenúcleo f. □

Este resultado se puede refinar un poco más:

Lema 4.10. *Si $f \in SA$ es cualquier estable, entonces f^α es estable para todo ordinal α. Más aún, f^λ es un prenúcleo, para cada ordinal límite λ y, finalmente, f^∞ es el menor núcleo por encima de f.*

Demostración. Sea f una derivada estable. Por inducción, probamos que f^α es estable para cada ordinal α. El caso $\alpha = 0$ y el paso inductivo de α a $\alpha + 1$ es exactamente igual a la demostración anterior (porque SA es cerrado bajo composición). Ahora, si λ es un ordinal límite, tenemos $f^\lambda = \dot{\bigvee}\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, de modo que, para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} f^\lambda(x) \wedge y &= \bigvee\{f^\alpha(x) \mid \alpha < \lambda\} \wedge y \\ &= \bigvee\{f^\alpha(x) \wedge y \mid \alpha < \lambda\} && \text{ley distributiva para marcos} \\ &\leq \bigvee\{f^\alpha(x \wedge y) \mid \alpha < \lambda\} \\ &= f^\lambda(x \wedge y), \end{aligned}$$

como se quería.

Más aún, debemos probar que f^λ es prenúcleo, siempre que λ es un ordinal límite. Para cualesquiera $x, y \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} & f^\lambda(x) \wedge f^\lambda(y) \\ &= \bigvee\{f^\alpha(x) \wedge f^\beta(y) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && \text{ley distributiva de marcos} \\ &\leq \bigvee\{f^\alpha(x \wedge f^\beta(y)) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && f^\alpha \in SA \\ &\leq \bigvee\{f^\alpha(f^\beta(x \wedge y)) \mid \alpha, \beta < \lambda\} && f^\beta \in SA \\ &\leq \bigvee\{f^\gamma(x \wedge y) \mid \gamma < \lambda\} && (?) \\ &= f^\lambda(x \wedge y), \end{aligned}$$

como se quería. □

NA como un conjunto fijo

Con estas observaciones, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.11. *Para cada marco A, el operador cerradura $(-)^\infty : SA \to SA$ es un núcleo cuyo conjunto de puntos fijos es el ensamble de A:*

$$(SA)_\infty = NA.$$

Demostración. Como $(-)^\infty : SA \to SA$ es un operador cerradura, solo queda demostrar que $(-)^\infty$ es prenúcleo. Es decir, que la desigualdad

$$f^\infty \wedge g^\infty \leq (f \wedge g)^\infty$$

se cumple para cualesquiera estables $f, g \in SA$.

Sea $l = (f \wedge g)^\infty$. Por inducción, mostraremos que $f^\alpha \wedge g \leq l$ para todo ordinal α.

- Para $\alpha = 0$, tenemos $f^0 \wedge g = \mathrm{id} \leq l$.

- Supongamos que $f^\alpha \wedge g \leq l$. Entonces, para todo $x \in A$ tenemos

$$
\begin{aligned}
(f^{\alpha+1} \wedge g)(x) &= f(f^\alpha(x)) \wedge g(x) \\
&= f(f^\alpha(x)) \wedge g(x) \wedge g(x) \\
&\leq f(f^\alpha(x)) \wedge g(f^\alpha(x)) \wedge g(x) && \text{pues } x \leq f^\alpha(x) \\
&\leq l(f^\alpha(x)) \wedge g(x) && f \wedge g \leq (f \wedge g)^\infty = l \\
&\leq l(f^\alpha(x) \wedge g(x)) && l \in SA \\
&\leq l(l(x)) && f^\alpha \wedge g \leq l \\
&= l(x) && l \in CA.
\end{aligned}
$$

- Si λ es límite, supongamos que $f^\alpha \wedge g \leq l$ para todo ordinal $\alpha < \lambda$. Entonces, para todo $x \in A$, tenemos

$$
\begin{aligned}
(f^\lambda \wedge g)(x) &= f^\lambda(x) \wedge g(x) \\
&= \bigvee\{f^\alpha(x) \mid \alpha < \lambda\} \wedge g(x) \\
&= \bigvee\{f^\alpha(x) \wedge g(x) \mid \alpha < \lambda\} \\
&\leq l(x) && \text{pues } f^\alpha \wedge g \leq l.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que $f^\infty \wedge g \leq l$. De manera similar, podemos probar que $f^\infty \wedge g^\alpha \leq l$ para todo α. Luego, $f^\infty \wedge g^\infty \leq l$, como se quería.

Como f^∞ es un núcleo para cada $f \in SA$, la igualdad $(SA)_\infty = NA$ se obtiene de observar que todo núcleo k es un punto fijo de $(-)^\infty : SA \to SA$. $\square$

Capítulo 5

Cálculos con núcleos

Supremos de núcleos (NA).

Ya probamos que los supremos no vacíos en DA y en SA se calculan puntualmente, y que los supremos dirigidos en PA también. Sin embargo, aún queda encontrar una descripción para, al menos, algunos supremos en NA. Comenzaremos con una observación sencilla.

Observación 5.1 (Sobre conjuntos dirigidos)**.** *Dadas dos derivadas f y g en A, para todo $a \in A$ tenemos $a \leq g(a)$ y, aplicando f, se sigue que $f(a) \leq f(g(a))$. Como f también infla, tenemos $g(a) \leq f(g(a))$. Así, $f, g \leq fg$. En particular, si una familia no vacía de derivadas J es cerrada bajo composición, entonces J es un conjunto dirigido.*

Similarmente, podemos mostrar que $f, g \leq gf$, así que $f, g \leq fg \wedge gf$. Luego,

$$f \dot{\vee} g \leq fg \wedge gf.$$

Sea $J \subseteq NA$ un conjunto no vacío de núcleos. Como $J \subseteq SA$, entonces $\dot{\bigvee} J$ es el supremo de J en SA. Además, como la familia J° de composiciones finitas de elementos de J

$$J^\circ = \{j_1 \cdots j_m \mid j_i \in J \text{ para } 1 \leq i \leq m\}$$

es cerrada bajo composiciones, por la observación anterior, J° es una familia dirigida de prenúcleos, así que $\dot{\bigvee} J^\circ$ es el supremo de J° en PA.

Lema 5.2. *Si $J \subseteq NA$ es una familia no vacía de núcleos sobre un marco A, entonces el núcleo*

$$\left(\dot{\bigvee} J\right)^\infty = \left(\dot{\bigvee} J^\circ\right)^\infty$$

es el supremo de J en NA.

Demostración. Sean

$$j = \left(\dot{\bigvee} J\right)^\infty \qquad\qquad k = \left(\dot{\bigvee} J^\circ\right)^\infty.$$

Es claro que j y k son núcleos que acotan superiormente a J. Si $l \in NA$ es un núcleo que acota superiormente a J, entonces también acota superiormente a J°, ya que

$$j_1 \cdots j_m \leq l^m = l$$

para cualquier $j_1 \cdots j_m \in J$. Luego, $\dot{\bigvee} J \leq l$ y $\dot{\bigvee} J^\circ \leq l$, pues $\dot{\bigvee} J, \dot{\bigvee} J^\circ \in SA$ son los supremos de J y J° (respectivamente) en SA y $l \in SA$. Se sigue que $j, k \leq l$, pues j y k son el menor núcleo por encima de $\dot{\bigvee} J$ y $\dot{\bigvee} J^\circ$, respectivamente. □

Uno de los pasos de la demostración anterior nos permite mostrar un resultado bastante útil.

Corolario 5.3. *Sea J una familia de núcleos. Si $j \in J^\circ$ es una cota superior de J y es idempotente, entonces $j = \bigvee J$ en NA.*

En particular, esto sucede cuando J es finito y todos los elementos de J aparecen en $j = j_1 \cdots j_n \in J^\circ$.

Demostración. Nótese que $j = j_1 \cdots j_n \in J^\circ$ es un prenúcleo porque es composición de prenúcleos. Como también es idempotente, se sigue que $j \in NA$. Ahora, para cualquier núcleo $k \in NA$ que acote a J por arriba, tenemos

$$j = j_1 \cdots j_n \leq k^n = k.$$

Luego, $j = \bigvee J$ en NA. □

Los núcleos abiertos y cerrados son complementarios

Recordemos que cualquier elemento a de un marco A tiene asociados los núcleos $\mathbf{u}_a$ y $\mathbf{v}_a$ dados por

$$\mathbf{u}_a(x) = a \vee x \qquad\qquad \mathbf{v}_a(x) = (a \succ x).$$

No es difícil ver que

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{tp} = \mathbf{v}_0$$
$$\mathbf{u}_0 = \mathrm{id} = \mathbf{v}_1.$$

Esto se puede generalizar para cualquier elemento $a \in A$.

Lema 5.4. *Sea A un marco. Para cualquier $a \in A$ se tiene*

$$\mathbf{v}_a \wedge \mathbf{u}_a = \mathrm{id} \qquad\qquad \mathbf{v}_a \vee \mathbf{u}_a = \mathrm{tp}$$

en NA. Es decir, $\mathbf{u}_a$ y $\mathbf{v}_a$ son complementos uno del otro.

Demostración. Sabemos que $\mathbf{u}_a \vee \mathbf{v}_a = (\mathbf{v}_a \circ \mathbf{u}_a)^\infty$, pero $(\mathbf{v}_a \circ \mathbf{u}_a)(x) = (a \succ (a \vee x)) = 1$, para toda $x \in A$. Entonces $\mathbf{v}_a \vee \mathbf{u}_a = (\mathbf{v}_a \circ \mathbf{u}_a)^\infty = \mathrm{tp}$.
Además, $(\mathbf{v}_a \wedge \mathbf{u}_a)(x) = \mathbf{v}_a(x) \wedge \mathbf{u}_a(x) = (a \succ x) \wedge (a \vee x) = x \vee (a \wedge x) = x$. Es decir, $\mathbf{v}_a \wedge \mathbf{u}_a = \mathrm{id}$.
Por lo tanto $\mathbf{u}_a$ y $\mathbf{v}_a$ son complementados. □

Lema 5.5 (Equivalencias). *Sea A un marco. Entonces*

$$\mathbf{u}_a \leq j \iff a \leq j(0), \qquad \mathbf{v}_a \leq j \iff 1 = j(a), \qquad j \leq \mathbf{w}_a \iff j(a) = a.$$

(Nótese que el lema 3.32 es la tercera equivalencia para el caso $a = 0$). Además,

$$j \leq \mathbf{v}_a \iff a \leq \iota(j), \tag{5.1}$$

donde $\iota(j) = \bigwedge\{(j(x) \succ x) \mid x \in A\}$.

Demostración. Si $\mathbf{u}_a \leq j$, entonces $a = \mathbf{u}_a(0) \leq j(0)$. Por otro lado, si $a \leq j(0)$, entonces para todo $x \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a(x) &= a \vee x \\ &\leq j(0) \vee x \\ &\leq j(0) \vee j(x) \\ &= j(x). \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{u}_a \leq j$.

Supongamos que $\mathbf{v}_a \leq j$. Evaluando en a, obtenemos $1 = (a \succ a) \leq j(a)$, así que $1 = j(a)$. Por otro lado, supongamos que $1 = j(a)$. Para todo $x \in A$, tenemos $\mathbf{v}_a(x) = a \succ x$, por lo cual $\mathbf{v}_a(x) \wedge a \leq x$. Aplicando j, obtenemos

$$\begin{aligned} j(x) &\geq j(\mathbf{v}_a(x) \wedge a) \\ &= j(\mathbf{v}_a(x)) \wedge j(a) \\ &= j(\mathbf{v}_a(x)) \wedge 1 \\ &\geq j(\mathbf{v}_a(x)) \\ &\geq \mathbf{v}_a(x). \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{v}_a \leq j$.

Ahora supongamos que $j \leq \mathbf{w}_a$. Evaluando en a, obtenemos $j(a) \leq a$. Como j infla, esto es equivalente a $j(a) = a$. Por otro lado, supongamos que $j(a) = a$. Debemos mostrar que $j \leq \mathbf{w}_a$; esto es: que $j(x) \leq ((x \succ a) \succ a)$ para todo $x \in A$. Recordando que siempre tenemos $x \wedge (x \succ a) = x \wedge a$, se sigue que

$$\begin{aligned} j(x) \wedge (x \succ a) &\leq j(x) \wedge j(x \succ a) \\ &= j(x \wedge (x \succ a)) \\ &= j(a) \\ &= a. \end{aligned}$$

Luego, $j(x) \leq ((x \succ a) \succ a) = \mathbf{w}_a(x)$.

Finalmente, notemos que

$$
\begin{aligned}
j \leq \mathbf{v}_a &\iff j \leq \neg \mathbf{u}_a && (5.2)\\
&\iff \mathbf{u}_a \wedge j = 0_{NA} = \mathrm{id} && (5.3)\\
&\iff \forall x \in A, j(x) \wedge (a \vee x) = x && (5.4)\\
&\iff \forall x \in A, (j(x) \wedge a) \vee x = x && (5.5)\\
&\iff \forall x \in A, j(x) \wedge a \leq x && (5.6)\\
&\iff \forall x \in A, a \leq (j(x) \succ x) && (5.7)\\
&\iff a \leq \bigwedge\{(j(x) \succ x) \mid x \in A\} && (5.8)\\
&\iff a \leq \iota(j), && (5.9)
\end{aligned}
$$

□

Corolario 5.6 (El mayor cerrado por debajo y el mayor abierto por arriba)**.** *De la primera y la última equivalencias del lema anterior*

$$\mathbf{u}_a \leq j \iff a \leq j(0), \qquad\qquad j \leq \mathbf{v}_a \iff a \leq \iota(j) \qquad (5.10)$$

se sigue que $\mathbf{u}_{j(0)}$ es el mayor núcleo cerrado que está debajo de j y que $\mathbf{v}_{\iota(j)}$ es el menor núcleo abierto que está encima de j.

Lema 5.7. *Sea A un marco y $j, k \in NA$ núcleos. Si $jk \leq kj$, entonces $k \vee j = kj$.*

Demostración. Supongamos que $jk \leq kj$. Sea $g = kj$. Entonces

$$
\begin{aligned}
g^2 &= kjkj\\
&\leq kkjj\\
&= k^2 j^2\\
&= kj\\
&= g.
\end{aligned}
$$

Es decir, g es un prenúcleo idempotente, y así $g \in NA$ es un núcleo por encima de k y de j.

Ahora, si $h \in NA$ es cualquier núcleo con $j \leq h$ y $k \leq h$, entonces $g = kj \leq h^2 = h$. Se sigue que $g = k \vee j$. □

Lema 5.8 (Supremos con núcleos abiertos y cerrados)**.** *Sea A un marco. Dado cualquier núcleo $j \in NA$ y elementos $a, b \in A$, tenemos*

1. $j \vee \mathbf{u}_a = j\mathbf{u}_a$,

2. $\mathbf{v}_b \vee j = \mathbf{v}_b j$.

En consecuencia

$$\mathbf{v}_b \vee j \vee \mathbf{u}_a = \mathbf{v}_b j \mathbf{u}_a. \qquad (5.11)$$

Demostración. 1. Por el lema anterior (5.7), basta probar $\mathbf{u}_a j \leq j\mathbf{u}_a$. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a j(x) &= a \vee j(x) && (5.12)\\ &\leq j(a) \vee j(x) && (5.13)\\ &\leq j(a \vee x) && (5.14)\\ &= j\mathbf{u}_a(x). && (5.15) \end{aligned}$$

2. Por el lema anterior (5.7), basta probar $j\mathbf{v}_b \leq \mathbf{v}_b j$. Es decir, hay que probar que $j(b \succ x) \leq (b \succ j(x))$ para todo $x \in A$. Para esto, observemos que

$$\begin{aligned} j(b \succ x) \wedge b &\leq j(b \succ x) \wedge j(b)\\ &= j((b \succ x) \wedge b)\\ &= j(b \wedge x)\\ &\leq j(x). \end{aligned}$$

Usando la definición de la implicación, esto nos da $j(b \succ x) \leq (b \succ j(x))$, que es lo que queríamos. □

Lema 5.9. *Sean A un marco y $a \in A$. Si $j \in NA$ es un núcleo tal que $\mathbf{w}_a \leq j$, entonces*

$$j = \mathbf{w}_a \vee \mathbf{u}_b = \mathbf{w}_b,$$

donde $b = j(0)$. En particular, este resultado implica que los núcleos regulares forman una sección superior.

También nótese que, por el lema 5.8, tenemos $\mathbf{w}_a \vee \mathbf{u}_b = \mathbf{w}_a\mathbf{u}_b$.

Demostración. Como $b \leq j(0)$, tenemos $\mathbf{u}_b \leq j$ (lema 5.5). Luego,

$$\mathbf{w}_a \vee \mathbf{u}_b \leq j.$$

Notemos, además, que $j(b) = j(j(0)) = j(0) = b$, lo cual sucede si, y solo si,

$$j \leq \mathbf{w}_b,$$

(lema 5.5). Finalmente, resta probar que $\mathbf{w}_b \leq \mathbf{w}_a \vee \mathbf{u}_b$. Por nuestro caballo de batalla, esto es equivalente a $\mathbf{w}_b \wedge \mathbf{v}_b \leq \mathbf{w}_a$ lo cual sucede si, y solo si, $(\mathbf{w}_b \wedge \mathbf{v}_b)(a) = a$. Dado que $\mathbf{w}_a \leq j$, tenemos $a = \mathbf{w}_a(0) \leq j(0) = b$. Luego, $(a \succ b) = 1$, por lo cual

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_b \wedge \mathbf{v}_b)(a) &= \mathbf{w}_b(a) \wedge \mathbf{v}_b(a)\\ &= ((a \succ b) \succ b) \wedge (b \succ a)\\ &= (1 \succ b) \wedge (b \succ a)\\ &= b \wedge (b \succ a)\\ &= b \wedge a\\ &= a. \end{aligned}$$

Esto es lo que se quería mostrar. □

Lema 5.10. *Sean $d \in DA$ y $j \in CA$. Entonces*

$$dj = j \quad \textit{si, y solo si} \quad d \leq j \quad \textit{si, y solo si} \quad jd = j.$$

Demostración. Probaremos la primera equivalencia, pues la segunda es completamente análoga. Supongamos que $jd = j$. Como $x \leq j(x)$, tenemos que $d(x) \leq d(j(x)) = j(x)$. Luego, $d \leq j$. Por otro lado, si $d \leq j$, entonces tenemos $dj \leq jj = j$. La otra desigualdad ($j \leq dj$) se sigue porque d infla. □

Teorema 5.11. *Sean A un marco y $a \in A$. Si $k \in NA$ es un núcleo tal que $\mathbf{u}_a \leq k \leq \mathbf{w}_a$, entonces, para todo $j \in NA$ se tiene*

$$\mathbf{w}_a \vee j = \mathbf{w}_a jk = \mathbf{w}_b,$$

donde $b = \mathbf{w}_a(j(a))$.

Demostración. Para la primera igualdad, basta ver que el prenúcleo $h = \mathbf{w}_a jk$ es idempotente y, por lo tanto, un núcleo. (En efecto, una vez probado esto, tendremos que cualquier núcleo l que esté sobre $\mathbf{w}_a$ y j queda por debajo de h, pues $h = \mathbf{w}_a jk \leq \mathbf{w}_a j \mathbf{w}_a \leq l^3 = l$).

Ahora, para probar la idempotencia de h, basta ver que $jh = h$ pues, por el resultado anterior, $k \leq \mathbf{w}_a$ implica $k\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_a$, lo cual nos da

$$\begin{aligned} h^2 &= \mathbf{w}_a jk \mathbf{w}_a jk \\ &= \mathbf{w}_a j \mathbf{w}_a jk && (k\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_a) \\ &= \mathbf{w}_a \mathbf{w}_a jk && (jh = h) \\ &= \mathbf{w}_a jk \\ &= h. \end{aligned}$$

Probemos, pues, que $jh = h$. Sea $x \in A$ y definamos $y = jk(x)$, de modo que $jh(x) = h(x)$ es lo mismo que $j(\mathbf{w}_a(y)) = \mathbf{w}_a(y)$. Una desigualdad es porque j infla, así que queda probar la otra desigualdad: $j(\mathbf{w}_a(y)) \leq \mathbf{w}_a(y)$, la cual equivale a $j(\mathbf{w}_a(y)) \wedge (y \succ a) \leq a$. Como $\mathbf{u}_a \leq k$, tenemos $a \leq k(0)$, así que

$$\begin{aligned} j\mathbf{w}_a(y) \wedge (y \succ a) &\leq j\mathbf{w}_a(y) \wedge j(y \succ a) \\ &= j(\mathbf{w}_a(y) \wedge (y \succ a)) \\ &= j(((y \succ a) \succ a) \wedge (y \succ a)) \\ &= j((y \succ a) \wedge a) \\ &= j(a) \\ &\leq j(k(0)) && (a \leq k(0)) \\ &\leq j(k(x)) \\ &= y. \end{aligned}$$

Haciendo ínfimo con $(y \succ a)$, obtenemos

$$\begin{aligned} j(\mathbf{w}_a(y)) \wedge (y \succ a) &\leq y \wedge (y \succ a) \\ &= y \wedge a \\ &\leq a, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos.

Ahora veamos la otra igualdad. Evaluando las desigualdades $\mathbf{w}_a \leq k \leq \mathbf{w}_a$ en 0, obtenemos $k(0) = a$. Como $h = \mathbf{w}_a jk$ está por encima de $\mathbf{w}_a$, hace dos lemas vimos que $h = \mathbf{w}_b$, donde

$$\begin{aligned} b &= h(0) \\ &= \mathbf{w}_a jk(0) \\ &= \mathbf{w}_a j(a), \end{aligned}$$

como se quería. $\square$

Corolario 5.12. *Tomando $a = 0$ en el resultado anterior, vemos que todo $j \in NA$ satisface*

$$j \vee \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_{\neg\neg j(0)}.$$

Ejemplo 5.13. Consideremos el marco

$$9 \quad = \quad \begin{tikzcd} & & 1 & & \\ & p \arrow[ur, dash] & & q \arrow[ul, dash] & \\ l \arrow[ur, dash] & & m \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & r \arrow[ul, dash] \\ & a \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & b \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \\ & & 0 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd}$$

Como los núcleos preservan los ínfimos y el 1, un núcleo en 9 está determinado por su acción sobre $\{l, p, q, r\}$. Los núcleos regulares son

$\mathbf{w}_x$	$\mathbf{w}_x(l)$	$\mathbf{w}_x(p)$	$\mathbf{w}_x(q)$	$\mathbf{w}_x(r)$
$\mathbf{w}_1 = \mathrm{tp}$	1	1	1	1
$\mathbf{w}_p$	p	p	1	1
$\mathbf{w}_q$	1	1	q	q
$\mathbf{w}_l$	l	1	1	1
$\mathbf{w}_m$	p	p	q	q
$\mathbf{w}_r$	1	1	1	r
$\mathbf{w}_a$	l	1	q	q
$\mathbf{w}_b$	p	p	1	r
$\mathbf{w}_0$	l	1	1	r

y los núcleos abiertos son

$\mathbf{v}_x$	$\mathbf{v}_x(l)$	$\mathbf{v}_x(p)$	$\mathbf{v}_x(q)$	$\mathbf{v}_x(r)$
$\mathbf{v}_1 = \mathrm{id}$	l	p	q	r
$\mathbf{v}_p$	l	1	q	r
$\mathbf{v}_q$	l	p	1	r
$\mathbf{v}_l$	1	1	q	r
$\mathbf{v}_m$	l	1	1	r
$\mathbf{v}_r$	l	p	1	1
$\mathbf{v}_a$	1	1	1	1
$\mathbf{v}_b$	1	1	1	1
$\mathbf{v}_0 = \mathrm{tp}$	1	1	1	1

■

5.1. Descomposiciones de núcleos

Teorema 5.14 (La representación en núcleos abiertos y cerrados)**.** *Sea A un marco y j un núcleo en A. Entonces*

$$j = \bigvee\{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}$$

en NA.

Demostración. Sea $k = \bigvee\{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}$. Para cualesquiera $a, x \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j(a)}(x) &= j(a) \vee x \\ &\leq j(a \vee x) \\ &= j\mathbf{u}_a(x). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j(a)} &\leq j\mathbf{u}_a \\ &= j \vee \mathbf{u}_a && \text{por el lema anterior 5.8} \\ &= \neg\mathbf{v}_a \vee j && \text{pues } \neg\mathbf{v}_a = \mathbf{u}_a \\ &= (\mathbf{v}_a \succ j), \end{aligned}$$

es decir, $\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \leq j$. Así $k \leq j$. Para la otra desigualdad, tomemos $a \in A$. Entonces $(\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a)(a) = j(a) \wedge (a \succ a) = j(a) \wedge 1 = j(a)$; es decir: $j(a) = (\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a)(a) \leq k(a)$, por lo cual $j \leq k$. □

Corolario 5.15. *Si A es un marco finito, entonces su ensamble NA es un álgebra booleana completa.*

Demostración. Por el teorema anterior cualquier $j \in NA$ tiene complemento, pues j se puede expresar como un supremo finito de elementos complementados. Por lo tanto NA es un álgebra booleana completa. □

La descomposición de un núcleo generado por una derivada

Ya probamos que todo núcleo $j \in NA$ se puede representar como

$$j = \bigvee \{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}.$$

Si existe una derivada $f \in DA$ tal que $j = f^\infty$, esta construcción se puede mejorar. En esta sección, fijamos una derivada $f \in DA$ y suponemos que $j = f^\infty \in NA$. Usando la cadena de iteraciones de f, construiremos una cadena en A, y luego una cadena en NA.

- Para cada $a \in A$ y cada ordinal α, definimos $a(\alpha) = f^\alpha(a)$. Esto nos da una cadena en A
$$(a(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Ord})$$
la cual, por cardinalidad, se estaciona en algún ordinal. En particular, por la definición de $a(\alpha)$, se tiene $a(\infty + 1) = a(\infty)$ (recordemos que la cadena de los f^α se estaciona en el ordinal ∞).

- Usando la cadena anterior, construimos una nueva cadena en NA.
$$\begin{aligned} j_{a,0} &= \mathrm{id}_A \\ j_{a,\alpha+1} &= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \\ j_{a,\lambda} &= \bigvee \{j_{a,\alpha} \mid \alpha < \lambda\} && \text{(si } \lambda \text{ es límite).} \end{aligned}$$
Dado que los $a(\alpha)$ se estacionan, los $j_{a,\alpha}$ también. En efecto, si $a(\alpha) = a(\alpha + 1)$, entonces
$$\begin{aligned} j_{a,\alpha+1} &= (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \\ &= \mathrm{id}_A \vee j_{a,\alpha} \\ &= j_{a,\alpha}. \end{aligned}$$
Sea j_a el mayor de los $j_{a,\alpha}$. Es decir,
$$\begin{aligned} j_a &= \bigvee \{j_{a,\alpha} \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\} \\ &= \bigvee \{(\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\} \\ &= \bigvee \{\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\} \end{aligned}$$
En particular, observemos que $j_a = j_{a,\infty}$.

El siguiente resultado nos dice que los núcleos $j_{a,\alpha}$ tienen una descripción más simple.

Lema 5.16. *Para cada ordinal α, el núcleo $j_{a,\alpha}$ se puede expresar como*

$$j_{a,\alpha} = \mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a.$$

En particular, para $\alpha = \infty$, tenemos

$$j_a = j_{a,\infty} = \mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a.$$

Una consecuencia inmediata es que

$$f^\infty = \bigvee\{j_a \mid a \in A\},$$

pues $f^\infty = \bigvee\{\mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}$.

Demostración. Probamos la afirmación por inducción

- Para $\alpha = 0$, tenemos $j_{a,0} = \mathrm{id}$, mientras que $\mathbf{u}_{a(0)} \wedge \mathbf{v}_a = \mathbf{u}_a \wedge \mathbf{v}_a = \mathrm{id}$.
- Supongamos que $j_{a,\alpha} = \mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a$. Entonces

$$\begin{aligned}
j_{a,\alpha+1} &= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \\
&= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)}) \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a) \\
&= (\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a)) \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a)) \\
&= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee (\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a)) \\
&= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee \mathbf{u}_{a(\alpha)}) \wedge (\mathbf{v}_{a(\alpha)} \vee \mathbf{v}_a) \\
&= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathrm{tp} \wedge \mathbf{v}_a \\
&= \mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_a,
\end{aligned}$$

  como se quería.

- Si λ es un ordinal límite, supongamos que $j_{a,\alpha} = \mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a$ para todo ordinal $\alpha < \lambda$. Entonces

$$\begin{aligned}
j_{a,\lambda} &= \bigvee\{j_{a,\alpha} \mid \alpha < \lambda\} \\
&= \bigvee\{\mathbf{u}_{a(\alpha)} \wedge \mathbf{v}_a \mid \alpha < \lambda\} \\
&= \bigvee\{\mathbf{u}_{a(\alpha)} \mid \alpha < \lambda\} \wedge \mathbf{v}_a \\
&= \mathbf{u}_{\bigvee\{a(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}} \wedge \mathbf{v}_a \\
&= \mathbf{u}_{a(\lambda)} \wedge \mathbf{v}_a,
\end{aligned}$$

  como se deseaba.

□

Con este resultado, podemos probar que el núcleo $j = f^\infty$ tiene una descripción más simple que la canónica.

Lema 5.17. *Si $f \in DA$ es una derivada tal que f^∞ es un núcleo, entonces*

$$f^\infty = \bigvee\{\mathbf{u}_{f(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}.$$

Demostración. Dado que

$$\mathbf{u}_{f(a)} \wedge \mathbf{v}_a \leq \mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a$$

para todo $a \in A$, se sigue que

$$\bigvee\{\mathbf{u}_{f(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\} \leq \bigvee\{\mathbf{u}_{f^\infty(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\} = f^\infty.$$

Por otro lado, para cada $a \in A$ y cada ordinal α, tenemos

$$a(\alpha+1) = f^{\alpha+1}(a) = f(f^{\alpha}(a)) = f(\alpha(a)),$$

por lo cual

$$\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \in \{\mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A\}$$

(poniendo $b = a(\alpha)$). Se sigue que

$$\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \leq \bigvee\{\mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A\}.$$

Como esto es válido para todos los ordinales, tenemos

$$j_a \leq \bigvee\{\mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A\},$$

pues $j_a = \bigvee\{\mathbf{u}_{a(\alpha+1)} \wedge \mathbf{v}_{a(\alpha)} \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\}$. De nuevo, como esto es válido para cualquier $a \in A$, concluimos que

$$f^{\infty} \leq \bigvee\{\mathbf{u}_{f(b)} \wedge \mathbf{v}_b \mid b \in A\},$$

pues $f^{\infty} = \bigvee\{j_a \mid a \in A\}$ (aquí es donde usamos el lema anterior). □

Recordemos que los núcleos regulares de un marco (esto es, los de la forma $\mathbf{w}_a$) son exactamente los que corresponden a sus cocientes booleanos. Ahora probaremos que todo núcleo se puede descomponer en núcleos regulares.

Teorema 5.18 (La descomposición en núcleos regulares)**.** *Sea A un marco y $j : A \to A$ un núcleo. Entonces*

$$j = \bigwedge\{\mathbf{w}_{j(a)} \mid a \in A\} = \bigwedge\{\mathbf{w}_a \mid a \in A_j\}.$$

Como $\{\mathbf{w}_{j(a)} \mid a \in A\} = \{\mathbf{w}_a \mid a \in A_j\}$, basta probar la primera igualdad.

Demostración. Sea $l = \bigwedge\{\mathbf{w}_{j(a)} \mid a \in A\}$. En 5 probamos que

$$j \leq \mathbf{w}_a \quad \text{si, y solo si} \quad j(a) = a,$$

por lo cual $j \leq \mathbf{w}_{j(a)}$ para todo $a \in A$. Luego, $j \leq l$. Para la otra desigualdad, observemos que siempre tenemos $l \leq \mathbf{w}_{j(a)}$. Luego,

$$\begin{aligned} l(a) &\leq l(j(a)) \\ &\leq \mathbf{w}_{j(a)}(j(a)) \\ &= j(a), \end{aligned}$$

así que $l \leq j$, como se quería. □

Capítulo 6

El encaje de un marco en su ensamble

Teorema 6.1. *Si A es un marco, la función $\eta_A : A \to NA$, dada como*

$$\eta_A(a) = \mathbf{u}_a,$$

es un epimorfismo inyectivo de marcos. (Sin embargo, η_A no es suprayectivo, en general. Véase el teorema 6.7).

Demostración. Para ver que η_A es un morfismo de marcos primero notemos que $\eta_A(0) = \mathbf{u}_0 = \mathrm{id}$ y $\eta_A(1) = \mathbf{u}_1 = \mathrm{tp}$. También es una función monótona pues $a \leq b$ implica $\mathbf{u}_a \leq \mathbf{u}_b$. Además,

$$(\mathbf{u}_a \wedge \mathbf{u}_b)(x) = \mathbf{u}_a(x) \wedge \mathbf{u}_b(x) = (a \vee x) \wedge (b \vee x) = (a \wedge b) \vee x = \mathbf{u}_{a \wedge b}(x).$$

Así, $\eta_A(a) \wedge \eta_A(b) = \eta_A(a \wedge b)$.
Ahora consideremos $X \subseteq A$, queremos ver que $\bigvee \eta_A(X) = \eta_A(\bigvee X)$. Como η_A es monótona, se cumple que $\eta_A(x) \leq \eta_A(\bigvee X)$ para todo $x \in A$, es decir, $\bigvee \eta_A(X) \leq \eta_A(\bigvee X)$. Resta ver la otra desigualdad.
Consideremos $c = \bigvee X$ y $j = \bigvee \eta_A(X) = \bigvee\{\mathbf{u}_x \mid x \in X\}$. Queremos ver que $\mathbf{u}_c \leq j$. Sea $a \in A$, entonces

$$\mathbf{u}_c(a) = c \vee a = \bigvee X \vee a = \bigvee\{x \vee a \mid x \in X\} = \left(\dot{\bigvee}\{\mathbf{u}_x \mid x \in X\}\right)(a) \leq j(a)$$

pues el supremo puntual es menor que el supremo en NA.
Veamos ahora que η_A es inyectiva. Consideremos $a, b \in A$ tales que $\eta_A(a) = \eta_A(b)$, entonces $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_b$. Evaluando en $x = 0$, obtenemos que $a = a \vee 0 = b \vee 0 = b$.
Por último veamos que η_A es un epimorfismo. Para ello consideremos dos morfismos

$$NA \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B,$$

donde B es un marco y $f \circ \eta_A = g \circ \eta_A$,es decir, $f(\mathbf{u}_a) = g(\mathbf{u}_a)$ para todo $a \in A$. Por el teorema anterior tenemos que

$$f(j) = f\left(\bigvee\{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}\right) = \bigvee\{f(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge f(\mathbf{v}_a) \mid a \in A\} \qquad \text{y}$$
$$g(j) = g\left(\bigvee\{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \mathbf{v}_a \mid a \in A\}\right) = \bigvee\{g(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge g(\mathbf{v}_a) \mid a \in A\}$$

Ahora usemos que $f(\mathbf{u}_{j(a)}) = g(\mathbf{u}_{j(a)})$ y, tomando complementos, $f(\mathbf{v}_a) = g(\mathbf{v}_a)$, pues $\mathbf{v}_a$ y $\mathbf{u}_a$ son complementarios en A y los morfismos de marcos f, g preservan complementos. Por lo tanto, para todo $j \in NA$, tenemos $f(j) = g(j)$. Así, η_A es un epimorfismo. □

El ensamble como solución a un problema universal

Observación 6.2 (Adjunción del ensamble). *Si A es un marco, entonces la primera de las equivalencias en 5.5*

$$\mathbf{u}_a \leq j \quad \textit{si, y solo si} \quad a \leq j(0)$$

nos dice que el adjunto derecho del morfismo $\eta_A : A \to NA$ es $\perp : NA \to A$, $\perp(j) = j(0)$. Es decir, tenemos $\eta_A \dashv \perp$.

Definición 6.3. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos. Diremos que f resuelve el problema de complementación para A si, para todo $a \in A$, $f(a) \in B$ es complementado en B.*

Ejemplo 6.4. Para todo $a \in A$, el núcleo $\mathbf{u}_a$ es complementado en NA (su complemento es $\mathbf{v}_a$). Es decir, $\eta_A : A \to NA$ resuelve el problema de complementación para A. ■

Teorema 6.5. *Sea A un marco. El morfismo $\eta_A : A \to NA$ resuelve el problema de complementación de manera universal. Es decir, para cualquier morfismo $f : A \to B$ que resuelve el problema de complementación, existe un único morfismo $f^\sharp : NA \to B$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & & B \\ & NA \arrow[ur, dotted, "f^\sharp"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Más aún, si $f_* : B \to A$ es el adjunto derecho de $f = f^* : A \to B$, el adjunto derecho $f_\flat : B \to NA$ de $f^\sharp : NA \to B$ se calcula como

$$f_\flat(b) = f_* \mathbf{u}_b f^* \in NA.$$

Demostración. Para empezar, como η_A es epi, la factorización de f a través de η_A es única, en caso de existir. Es decir, si $f^\sharp, f^! : NA \to B$ son tales que $f^\sharp \eta_A = f = f^! \eta_A$, entonces $f^\sharp = f^!$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & & B \\ & NA \arrow[ur, shift left, "f^\sharp"] \arrow[ur, shift right, "f^!"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, basta con mostrar la existencia de $f^\sharp$.

Recordemos que queremos definir $f^\sharp : NA \to B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & & B \\
& NA \arrow[ur, dotted, "f^\sharp"'] &
\end{tikzcd}$$

conmute. Es decir, tal que $f^\sharp(\mathbf{u}_a) = f(a)$. Recordemos que cada núcleo $j \in NA$ se puede representar como

$$j = \bigvee\{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \neg\mathbf{u}_a \mid a \in A\},$$

pues $\neg\mathbf{u}_a = \mathbf{v}_a$. Dado que los morfismos de marcos respetan complementos, si existiese un morfismo $f^\sharp : NA \to B$ con las propiedades deseadas, necesariamente debería cumplirse que

$$\begin{aligned}
f^\sharp(j) &= f^\sharp\left(\bigvee\{\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \neg\mathbf{u}_a \mid a \in A\}\right) \\
&= \bigvee\{f^\sharp(\mathbf{u}_{j(a)} \wedge \neg\mathbf{u}_a) \mid a \in A\} \\
&= \bigvee\{f^\sharp(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge f^\sharp(\neg\mathbf{u}_a) \mid a \in A\} \\
&= \bigvee\{f^\sharp(\mathbf{u}_{j(a)}) \wedge \neg f^\sharp(\mathbf{u}_a) \mid a \in A\} \\
&= \bigvee\{f(j(a)) \wedge \neg f(a) \mid a \in A\}.
\end{aligned}$$

Con esta motivación, definimos $f^\sharp$ como

$$f^\sharp(j) = \bigvee\{f(j(a)) \wedge \neg f(a) \mid a \in A\}.$$

Hay que probar que esta definición nos da un morfismo de marcos con las propiedades deseadas. Verificamos la monotonía. Si $k \le j$ son núcleos en A, entonces $k(x) \le j(x)$ para todo $x \in A$. Aplicando f tenemos $f(k(x)) \le f(j(x))$, y así $f(k(x)) \wedge f(x) \le f(j(x)) \wedge f(x)$. Esto nos dice que $f^\sharp$ es monótono.

Por otro lado $f_\flat : B \to NA$ también es monótona, pues si $b \le c \in B$, entonces $\mathbf{u}_b \le \mathbf{u}_c \in NB$. Luego, $f_*\mathbf{u}_b f^* \le f_*\mathbf{u}_c f^*$, pero esto es $f_\flat(b) \le f_\flat(c)$.

Ahora veamos que $f^\sharp \dashv f_\flat$. Dados $j \in NA$ y $b \in B$ arbitrarios, debemos mostrar la equivalencia

$$f^\sharp(j) \le b \quad \text{si, y solo si} \quad j \le f_\flat(b).$$

Por definición $f^\sharp(j) = \bigvee\{f^*(j(x)) \wedge \neg f^*(x) \mid x \in A\}$. Luego, tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned}
f^\sharp(j) \le b &\iff \forall(x \in A)\ f^*(j(x)) \wedge \neg f^*(x) \le b \\
&\iff \forall(x \in A)\ f^*(j(x)) \le (\neg f^*(x) \succ b) \\
&\iff \forall(x \in A)\ f^*(j(x)) \le f^*(x) \vee b && \text{caballo de batalla} \\
&\iff \forall(x \in A)\ j(x) \le f_*(b \vee f^*(x)) && \text{adjunción } f^* \dashv f_* \\
&\iff \forall(x \in A)\ j(x) \le f_*(\mathbf{u}_b(f^*(x))) \\
&\iff j \le f_*\mathbf{u}_b f^* = f_\flat(b).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $f^\sharp \dashv f_*$. En particular, $f^\sharp$ preserva supremos arbitrarios. Ahora hay que ver que $f^\sharp$ preserva ínfimos finitos. Como $f^\sharp$ es monótona, tenemos $f^\sharp(j \wedge k) \leq f^\sharp(j) \wedge f^\sharp(k)$, así que falta probar la otra comparación. Tenemos

$$\begin{aligned}
f^\sharp(j) \wedge f^\sharp(k) &= \bigvee \left\{[f(j(x)) \wedge \neg f(x)] \wedge [f(k(y)) \wedge \neg f(y)] \mid x, y \in A\right\} \\
&= \bigvee \left\{f(j(x) \wedge k(y)) \wedge \neg f(x \vee y) \mid x, y \in A\right\} \\
&\leq \bigvee \left\{f(j(x \vee y) \wedge k(x \vee y)) \wedge \neg f(x \vee y) \mid x, y \in A\right\} \\
&= \bigvee \left\{f(j(z) \wedge k(z)) \wedge \neg f(z) \mid z \in A\right\} \\
&= \bigvee \left\{f((j \wedge k)(z)) \wedge \neg f(z) \mid z \in A\right\} \\
&= f^\sharp(j \wedge k).
\end{aligned}$$

Finalmente, hay que ver que $f = f^\sharp \eta_A$. En efecto: para cualquier $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
f^\sharp(\eta_A(a)) &= f^\sharp(\mathbf{u}_a) \\
&= \bigvee \{f(\mathbf{u}_a(x)) \wedge \neg f(x) \mid x \in A\} \\
&= \bigvee \{f(a \vee x) \wedge \neg f(x) \mid x \in A\} \\
&= \bigvee \{(f(a) \vee f(x)) \wedge \neg f(x) \mid x \in A\} \\
&= \bigvee \{f(a) \wedge \neg f(x) \mid x \in A\} \\
&= f(a) \wedge \bigvee \{\neg f(x) \mid x \in A\} \\
&= f(a) \wedge 1 \\
&= f(a),
\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

Funtorialidad

Si $f : A \to B$ es un morfismo de marcos, entonces $\eta_B f : A \to NB$ resuelve el problema de complementación, así que el teorema anterior nos dice que el morfismo de marcos

$$\begin{aligned}
Nf = (\eta_B f)^\sharp : NA &\to NB && (6.1)\\
j &\mapsto \bigvee \{\eta_B f(j(a)) \wedge \neg \eta_B f(a) \mid a \in A\} && (6.2)\\
&= \bigvee \{\mathbf{u}_{f(j(a))} \wedge \mathbf{v}_{f(a)} \mid a \in A\} && (6.3)
\end{aligned}$$

es el único que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \arrow[d, "\eta_B"] \\
NA \arrow[r, "Nf"'] & NB,
\end{tikzcd} \qquad (6.4)$$

es decir, el único tal que

$$Nf(\mathbf{u}_a) = \mathbf{u}_{f(a)}. \tag{6.5}$$

Por lo tanto, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.6 (Funtorialidad del ensamble). *El ensamble es un funtor $N : \mathrm{Frm} \to \mathrm{Frm}$, donde $Nf : NA \to NB$ está dado por*

$$Nf(j) = \bigvee\{\mathbf{u}_{f(j(a))} \wedge \mathbf{v}_{f(a)} \mid a \in A\} \tag{6.6}$$

para cualquier $f : A \to B$.

Además, $\eta = (\eta_A : A \to NA \mid A \in \mathrm{Frm})$ es una transformación natural

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathrm{Frm}} \to N. \tag{6.7}$$

En particular, $Nf(\mathbf{u}_a) = \mathbf{u}_{f(a)}$.

Más aún, para cualquier $f : A \to B$, el adjunto derecho $(Nf)_* : NB \to NA$ de $Nf : NA \to NB$ es $(\eta_B f)_\flat$, que se calcula, para cualquier $j \in NA$, como

$$(Nf)_*(j) = (\eta_B f)_* \mathbf{u}_j \eta_B f \tag{6.8}$$

o, en cualquier $a \in A$:

$$\begin{aligned}(Nf)_*(j)(a) &= f_*(\bot(j \vee \eta_B(f(a)))) &(6.9)\\ &= f_*((j\mathbf{u}_{f(a)})(0)) &(6.10)\\ &= f_*(j(f(a))). &(6.11)\end{aligned}$$

I.e, $(Nf)_*(j) = f_* j f$ para todo $j \in NB$.

Teorema 6.7 (El ensamble como indicador de booleanidad). *Sea A un marco. Entonces el encaje $\eta_A : A \to NA$ es suprayectivo (y, por lo tanto, un isomorfismo) si, y solo si, A es un álgebra booleana completa.*

Demostración. Supongamos que η_A es suprayectiva. Entonces, para todo elemento $a \in A$, $\eta_A(a) = \mathbf{u}_a$ tiene complemento $\mathbf{v}_a$ en NA. Como η_A es isomorfismo, entonces a tiene complemento en A. Luego, A es booleana.

Por otro lado, supongamos que A es booleana. Dado $j \in NA$, mostraremos que $\eta_A(a) = j$, donde $a = j(0)$. Como $a \le j(0)$, tenemos que $\mathbf{u}_a \le j$ (por la adjunción $\eta_A \dashv \bot$). Queda demostrar la comparación $j \le \mathbf{u}_a$; esto es: $j(x) \le x \vee a$ para todo $x \in A$. Como A es booleana, podemos usar nuestro caballo de batalla, que nos dice que esto es equivalente a mostrar que $j(x) \wedge \neg x \le a$ para todo $x \in A$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} j(x) \wedge \neg x &\le j(x) \wedge j(\neg x)\\ &= j(x \wedge \neg x)\\ &= j(0)\\ &= a.\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbf{u}_a = j$, así que η_A es suprayectiva y, por lo tanto, un isomorfismo. □

Parte III

El espacio de puntos

Capítulo 7

La adjunción entre Frm y Top

La asignación que manda cada espacio topológico S a su marco de abiertos $\mathcal{O}S$ es un funtor contravariante $\mathcal{O} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Frm}$.

Queremos ver que hay un funtor de regreso $\mathrm{pt} : \mathrm{Frm} \to \mathrm{Top}$, que a cada marco A le asigna un espacio topológico cuyos elementos se verán como los puntos del marco. Veremos que $\mathcal{O}$ y pt forman una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[d, shift right=1.5ex, "\mathcal{O}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}} \arrow[u, shift right=1.5ex, "\mathrm{pt}"'] \end{tikzcd}$$

Dado un espacio con un punto $\{*\}$, el conjunto de puntos de S está en biyección con las funciones continuas $\{*\} \to S$:

$$S \simeq \mathrm{Top}(\{*\}, S)$$

donde cada punto $s \in S$ está asociado a la función $* \mapsto s$. Así, si 2 es el marco de dos elementos $2 = \{0 < 1\}$, cada de estas funciones $s : \{*\} \to S$ induce un morfismo de marcos $\chi_s : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}\{*\} \simeq 2$ dado como

$$\chi_s(u) = \begin{cases} 1 & s \in u \\ 0 & s \notin u \end{cases}.$$

Así, para cada marco A, tiene sentido definir los puntos de A como morfismos $\mathrm{Frm}(A, 2)$. En efecto, más adelante consideraremos esta construcción. Sin embargo, primero consideraremos otra construcción equivalente: representaremos cada morfismo $\chi : A \to 2$ con un elemento de A de manera canónica: el elemento

$$p = \bigvee \{x \in A \mid \chi(x) = 0\}$$

es el único elemento de A que cumple

$$x \leq p \quad \text{si, y solo si} \quad \chi(x) = 0.$$

En particular, dado que $\chi(1) = 1$, tenemos $p \neq 1$. Por otro lado, para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \wedge y \leq p$, tenemos

$$\chi(x) \wedge \chi(y) = \chi(x \wedge y) = 0,$$

así que $\chi(x) = 0$ o bien $\chi(x) = 0$, pues χ toma valores en el marco 2. es decir: $x \leq p$ o bien $y \leq p$.

Definición 7.1. *Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Un punto o elemento $\wedge$-irreducible de A es un elemento $p \in A$ con $p \neq 1$ tal que si $x \wedge y \leq p$, entonces $x \leq p$ ó $y \leq p$. Denotamos por $\mathrm{pt}A$ al conjunto de todos los puntos de A.*

Lema 7.2. *Sea $A \in \mathrm{Frm}$.*

- *Cada máximo de A es $\wedge$-irreducible.*
- *Si A es booleano, entonces todo elemento $\wedge$–irreducible de A es máximo.*
- *Si A es una cadena, entonces cada elemento propio de A es $\wedge$–irreducible.*

Demostración.

- Sea $p \in A$ máximo, entonces $p < 1$. Si $x \wedge y \leq p$ y suponiendo que $x \nleq p$, entonces $p < x \vee p$ y, por la maximalidad de p, tenemos que $p \vee x = 1$. Similarmente, $y \nleq p$ implica $p \vee y = 1$. Si $x \nleq p$ y $y \nleq p$, se tiene que

  $$p = p \vee (x \wedge y) = (p \vee x) \wedge (p \vee y) = 1.$$

  Esto es una contradicción ya que $p < 1$.

- Supongamos que A es booleano. Sean $p \in \mathrm{pt}A$ y $x, y \in A$ con $p < x$ y $y = \neg x$. Tenemos que $x \wedge y = 0 \leq p$, entonces $x \leq p$ ó $y \leq p$ ya que p es $\wedge$–irreducible. Además $y \leq p < x$ puesto que $p < x$. En consecuencia, $x \vee y = 1 = x$, así, p es máximo.

- Supongamos que A es una cadena. Para cualesquiera $x, y \in A$, tenemos que $x \leq y$ ó $y \leq x$, es decir, $x \wedge y \leq x$ ó $x \wedge y \leq y$. Sea $p \in A$ con $p < 1$. Si $x \wedge y \leq p$, entonces $x \leq p$ ó $y \leq p$.

$\square$

7.1. La reflexión espacial de un marco

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $a \in A$. Decimos que un punto $p \in \mathrm{pt}A$ está en $U_A(a) \subseteq \mathrm{pt}A$ si, y sólo si $a \nleq p$.

Ejercicio 4. *Demostrar el siguiente lema:*

Lema 7.3. *Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $a, b \in A$.*

- $U_A(1) = \mathrm{pt}A$.
- $U_A(0) = \varnothing$.
- $U_A(a \wedge b) = U_A(a) \cap U_A(b)$.
- $U_A(\bigvee X) = \bigcup\{U_A(x) | x \in X\}$, $\forall X \subseteq A$.

Demostración. Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $a, b \in A$.

- Por definición $U_A(1) \subseteq \mathrm{pt}A$. Sea $p \in \mathrm{pt}A$, entonces $p \neq 1$. Además $1 \nleq p$, por lo que $p \in U_A(1)$. Así, $U_A(1) = \mathrm{pt}A$.
- Supongamos que $U_A(0) \neq \varnothing$. Sea $p \in U_A(0)$. Por definición, $0 \nleq p$ pero $0 \leq a, \forall a \in A$. Por lo tanto, $U_A(0) = \varnothing$.
- Sea $p \in \mathrm{pt}A$. Tenemos que

$$\begin{aligned} p \in U_A(a \wedge b) &\iff a \wedge b \nleq p \\ &\iff a \nleq p \quad y \quad b \nleq p \\ &\iff p \in U_A(a) \quad y \quad p \in U_A(b) \\ &\iff p \in U_A(a) \cap U_A(b). \end{aligned}$$

  Por lo que $U_A(a \wedge b) = U_A(a) \cap U_A(b)$.

- Sea $X \subseteq A$ y notemos que si $X = \varnothing$, entonces ocurre el segundo punto. En caso contrario,

$$\begin{aligned} p \in U_A(\bigvee X) &\Rightarrow \bigvee X \nleq p \\ &\Rightarrow \textit{existe } x \in X \textit{ tal que } x \nleq p \\ &\Rightarrow p \in U_A(x) \\ &\Rightarrow p \in \bigcup\{U_A(x) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

  Además,

$$\begin{aligned} p \in \bigcup\{U_A(x) \mid x \in X\} &\Rightarrow p \in U_A(x) \textit{ para algún } x \in X \\ &\Rightarrow x \nleq p \\ &\Rightarrow \bigvee X \nleq p \\ &\Rightarrow p \in U_A(\bigvee X). \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $U_A(\bigvee x) = \bigcup\{U_A(x) | x \in X\}$, $\forall X \subseteq A$.

□

Por el lema anterior, $U_A(A) = \{U_A(a) \mid a \in A\}$ es una topología en $\mathrm{pt}A$ y $U_A : A \to \mathcal{O}\mathrm{pt}A$ es un morfismo suprayectivo de marcos.
Al espacio topológico $(\mathrm{pt}A, U_A(A))$ lo llamamos el *espacio de puntos* de A, mientras que al morfismo $U_A : A \to \mathcal{O}\mathrm{pt}A$ lo llamamos la *reflexión espacial* de A.

Además, si U_A es un isomorfismo (basta con que sea inyectivo), decimos que el marco A es *espacial*.

Observemos que, como U_A es suprayectivo, existe un núcleo $S \in NA$ tal que $A_S \cong \mathcal{O}\mathrm{pt}A$.

Sabemos que S está caracterizado como $x \leq S(a) \iff U(x) \subseteq U(a)$. Probaremos que $S(a) = \bigwedge\{p \in \mathrm{pt}A | a \leq p\}$.

$$\begin{aligned} x \leq S(a) &\iff U(x) \subseteq U(a) \\ &\iff (\forall p \in \mathrm{pt}A)[x \nleq p \Rightarrow a \nleq p] \\ &\iff (\forall p \in \mathrm{pt}A)[a \leq p \Rightarrow x \leq p] \\ &\iff x \leq \bigwedge\{p \in \mathrm{pt}A | a \leq p\} \end{aligned}$$

7.2. El orden de especialización

Ejercicio 5 (Para el lector)**.** *Sean $S \in Top$ y $p, q \in S$. Probar que la relación*

$$q \sqsubseteq p \iff \overline{q} \subseteq \overline{p}$$

es un preorden. Si el espacio es T_0, entonces es un orden parcial.

A la relación del ejercicio 5 le llamamos el *orden de especialización*.

Sean $p, q \in \mathrm{pt}A$. Notemos que

$$\begin{aligned} q \sqsubseteq p &\iff \overline{q} \subseteq \overline{p} \\ &\iff (\forall x \in A)[q \in U(x) \Rightarrow p \in U(x)] \\ &\iff (\forall x \in A)[x \leq p \Rightarrow x \leq q] \\ &\iff p \leq q. \end{aligned}$$

Es decir, el orden de especialización del espacio de puntos es el orden opuesto del marco original.

$$(\mathrm{pt}A, \sqsubseteq) = (\mathrm{pt}A, \leq)^{\mathrm{op}}.$$

En particular, esto prueba que el espacio de puntos, $\mathrm{pt}A$, es T_0.

7.3. El espacio de puntos del marco de abiertos

Tomemos un espacio topológico $S \in \mathrm{Top}$. ¿Cómo se relacionan los puntos $s \in S$ con los puntos $p \in \mathcal{O}S$? Dado $s \in S$ y $u \in \mathcal{O}S$ con $u \subseteq \overline{s}'$. Tenemos que

$$u \subseteq \overline{s}' \iff \overline{s} \subseteq u' \iff s \in u' \iff s \notin u.$$

Primero, observemos que $\overline{s}' \neq S$ ya que, de otro modo, tendríamos $s \in \overline{s} = \varnothing$.

Además, si $u, v \in \mathcal{O}S$ son tales que $u \cap v \subseteq \overline{s}'$, entonces $s \notin u \cap v$. Esto implica que $s \notin u$ ó $s \notin v$, es decir, $u \subseteq \overline{s}'$ ó $v \subseteq \overline{s}'$. Esto nos dice que $\overline{s}'$ es un punto de

$\mathcal{O}S$. Por lo tanto, tenemos una función $\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ dada como $\Phi_S(s) = \overline{s}'$. Además, si consideramos a $\mathrm{pt}\mathcal{O}S$ con la topología $U_{\mathcal{O}S}(\mathcal{O}S)$, tenemos que

$$\begin{aligned} s \in (\Phi_S)^{-1}(U_{\mathcal{O}S}(u)) &\iff \Phi_S(s) \in U_{\mathcal{O}S}(u) \\ &\iff u \notin \Phi_{\mathcal{O}S}(s) \\ &\iff u \notin \overline{s}' \\ &\iff s \in u. \end{aligned}$$

Es decir, $(\Phi_S)^{-1}$ manda abiertos de $\mathrm{pt}\mathcal{O}S$ en abiertos de S, así que $\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ es continua.

7.4. La funtorialidad del espacio de puntos

Queremos ver que la asignación $A \mapsto \mathrm{pt}A$ es un funtor. Además comprobaremos que, si varía A, la reflexión espacial es una transformación natural

$$U_\bullet : \mathrm{id}_{\mathrm{Frm}} \to \mathcal{O}\mathrm{pt}(\_).$$

Notemos que, para un morfismo de marcos $f\colon A \to B$ y un punto $p \in \mathrm{pt}B$, $z \le f_*(p) \iff f(z) \le p$, donde f_* es adjunto derecho de f. En particular, si $1 \le f_*(p) \iff f(1) = 1 \le p$. Esto es imposible ya que $p \in \mathrm{pt}B$. Por lo que $f_*(p) \neq 1$.
Sean $x, y \in A$ tales que $x \wedge y \le f_*(b)$. Esto pasa si, y sólo si $f(x) \wedge f(y) \le p$, en consecuencia, $f(x) \le p$ ó $f(y) \le p$, i.e., $x \le f_*(p)$ ó $y \le f_*(p)$. Por lo que $f_*(p) \in \mathrm{pt}A$.

En resumen, dado un morfismo de marcos $f\colon A \to B$, obtenemos una función $\mathrm{pt}f\colon \mathrm{pt}B \to \mathrm{pt}A$ dada por la restricción de $f_* : B \to A$.

Observemos que, para todo $p \in \mathrm{pt}B$, tenemos

$$\begin{aligned} p \in (\mathrm{pt}f)^{-1}\left(U_A(a)\right) &\iff f_*(p) \in U_A(a) \\ &\iff a \nleq f_*(p) \\ &\iff f(a) \nleq p \\ &\iff p \in U_B\left(f(a)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathrm{pt}f\colon \mathrm{pt}B \to \mathrm{pt}A$ es continua. Es fácil ver que, dados morfismos $k : C \to B$ y $h : B \to A$, se satisface $(hk)_* = k_* h_*$. Además, el adjunto derecho de $\mathrm{id} : A \to A$ también es la identidad de A. De estas observaciones se sigue que la asignación pt es un funtor (contravariante) $\mathrm{pt} : \mathrm{Frm} \to \mathrm{Top}$.

Además, en el párrafo anterior probamos que

$$\mathcal{O}(\mathrm{pt}f)(U_A(a)) = U_B(f(a))$$

para todo $a \in A$. Es decir: el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "U_A"'] & B \arrow[d, "U_B"] \\ \mathcal{O}\mathrm{pt}A \arrow[r, "\mathcal{O}\mathrm{pt}f"'] & \mathcal{O}\mathrm{pt}B \end{tikzcd}$$

es conmutativo, así que $U_\bullet = (U_A \mid A \in \mathrm{Frm})$ es una transformación natural $U_\bullet : \mathrm{id}_{\mathrm{Frm}} \to \mathcal{O}\mathrm{pt}$.

Por último, hagamos la siguiente observación. Dada una función continua $\psi : S \to T$, las funciones $\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Phi_S"'] & T \arrow[d, "\Phi_T"] \\ \mathrm{pt}\mathcal{O}S \arrow[r, "\mathrm{pt}\mathcal{O}\psi"'] & \mathrm{pt}\mathcal{O}T \end{tikzcd}$$

En efecto, para todo $v \in \mathcal{O}T$, tenemos

$$\begin{aligned} v \subseteq (\mathrm{pt}\mathcal{O}\psi)(\Phi_S(s)) &\iff v \subseteq (\mathcal{O}\psi)_*(\Phi_S(s)) \\ &\iff (\mathcal{O}\psi)(v) \subseteq \Phi_S(s) \\ &\iff \psi^{-1}(v) \subseteq \overline{s}' \\ &\iff s \notin \psi^{-1}(v) \\ &\iff \psi(s) \notin v \\ &\iff v \subseteq \overline{\psi(s)}' \\ &\iff v \subseteq \Phi_T(\psi(s)), \end{aligned}$$

por lo cual $(\mathrm{pt}\mathcal{O}\psi)(\Phi_S(s)) = \Phi_T(\psi(s))$. Luego, la familia de funciones

$$\Phi_\bullet = (\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S \mid S \in \mathrm{Top})$$

es una transformación natural

$$\Phi_\bullet : \mathrm{id}_{\mathrm{Top}} \to \mathrm{pt}\mathcal{O}.$$

7.5. La adjunción

En la primera parte, vimos que todo morfismo de marcos $f : A \to B$ induce una función continua $\mathrm{pt}f : \mathrm{pt}B \to \mathrm{pt}A$ dada como la restricción del adjunto derecho $f_* : B \to A$ de f y probamos que esta asignación es un funtor $\mathrm{pt} : \mathrm{Frm} \to \mathrm{Top}$. Ahora veremos que pt y el funtor de abiertos $\mathcal{O} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Frm}$ son las mitades de una adjunción contravariante entre Top y Frm; es decir: que existe un isomorfismo

$$\mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) \simeq \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A) \tag{7.1}$$

natural en A y en S.

Cuando aprendimos sobre adjunciones, vimos el caso covariante, en el cual el isomorfismo de adjunción es equivalente a la existencia de dos transformaciones naturales que satisfacen las identidades triangulares.

Ahora veremos que, en el caso contravariante, tenemos el resultado análogo: las identidades triangulares adecuadas implican el isomorfismo natural (7.1).

Recordemos que las transformaciones naturales $U_\bullet : \mathrm{id}_{\mathrm{Frm}} \to \mathcal{O}\mathrm{pt}$ y $\Phi_\bullet : \mathrm{id}_{\mathrm{Top}} \to \mathrm{pt}\mathcal{O}$ tienen componentes dadas como

$$\begin{aligned} U_A &: A \to \mathcal{O}\mathrm{pt}A \\ &\quad a \mapsto U_A(a) = \{p \in \mathrm{pt}A \mid a \nleq p\}, \\ \Phi_S &: S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S \\ &\quad s \mapsto \Phi_S(s) = \overline{s}'. \end{aligned}$$

Primero veremos que se cumplen las identidades triangulares

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}S \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}S}"'] \arrow[d, "U_{\mathcal{O}S}"] \\ \mathcal{O}S & \mathcal{O}\mathrm{pt}\mathcal{O}S \arrow[l, "\mathcal{O}\Phi_S"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{pt}A \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathrm{pt}A}"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathrm{pt}A}"] \\ \mathrm{pt}A & \mathrm{pt}\mathcal{O}\mathrm{pt}A \arrow[l, "\mathrm{pt}U_A"] \end{tikzcd}$$

En efecto, usando las equivalencias

$$\begin{aligned} u \subseteq \Phi_S(s) &\quad \text{si, y solo si} \quad s \notin u, \\ x \in U_A(a) &\quad \text{si, y solo si} \quad a \nleq x, \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} x \in (\mathcal{O}\Phi_S)(U_{\mathcal{O}S}(u)) &\iff \Phi_S(x) \in U_{\mathcal{O}S}(u) \\ &\iff u \nleq \Phi_S(x) \\ &\iff x \in u, \\ a \leq (\mathrm{pt}U_A)(\Phi_{\mathrm{pt}A}(x)) &\iff U_A(a) \leq \Phi_{\mathrm{pt}A}(x) \\ &\iff x \notin U_A(a) \\ &\iff a \leq x. \end{aligned}$$

Es decir, $(\mathcal{O}\Phi_S)(U_{\mathcal{O}S}(u)) = u$ y $(\mathrm{pt}U_A)(\Phi_{\mathrm{pt}A}(x)) = x$, como se quería.

Ahora, afirmamos que las funciones

$$\begin{aligned} &\mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) \to \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A) \\ &\qquad\qquad f \mapsto \bar{f} = (\mathrm{pt}f)\Phi_S, \\ &\mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) \leftarrow \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A) \\ &(\mathcal{O}\varphi)U_A = \bar{\varphi} \hookleftarrow \varphi. \end{aligned}$$

conforman una biyección. En efecto, la naturalidad de $\Phi_\bullet$, $U_\bullet$ y las identidades triangulares implican la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}S \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}S}"'] \arrow[d, "U_{\mathcal{O}S}"] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "U_A"] \\ \mathcal{O}S & \mathcal{O}\mathrm{pt}\mathcal{O}S \arrow[l, "\mathcal{O}\Phi_S"] & \mathcal{O}\mathrm{pt}A \arrow[l, "\mathcal{O}\mathrm{pt}f"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{pt}A \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathrm{pt}A}"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathrm{pt}A}"] & S \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\Phi_S"] \\ \mathrm{pt}A & \mathrm{pt}\mathcal{O}\mathrm{pt}A \arrow[l, "\mathrm{pt}U_A"] & \mathrm{pt}\mathcal{O}S \arrow[l, "\mathrm{pt}\mathcal{O}\varphi"] \end{tikzcd}$$

por lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}} &= \overline{(\mathrm{pt} f)\Phi_S} & \bar{\bar{\varphi}} &= \overline{(\mathcal{O}\varphi)U_A} \\ &= \mathcal{O}((\mathrm{pt} f)\Phi_S)U_A & &= \mathrm{pt}((\mathcal{O}\varphi)U_A)\Phi_S \\ &= (\mathcal{O}\Phi_S)(\mathcal{O}\mathrm{pt} f)U_A & &= (\mathrm{pt}U_A)(\mathrm{pt}\mathcal{O}\varphi)\Phi_S \\ &= f, & &= \varphi. \end{aligned}$$

Esto nos da la biyección (7.1). De manera explícita, la biyección está dada como $\mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) \ni f \leftrightarrow \varphi \in \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A)$, donde

$$s \in f(a) \quad \text{si, y solo si} \quad a \nleq \varphi(s)$$

para cualesquiera $s \in S$, $a \in A$, puesto que

$$\begin{aligned} s \in f(a) &\iff f(a) \nleq \Phi_S(s) \\ &\iff a \nleq (\mathrm{pt} f)(\Phi_S(s)) = \bar{f}(s), \\ a \nleq \varphi(s) &\iff \varphi(s) \in U_A(a) \\ &\iff s \in (\mathcal{O}\varphi)(U_A(a)) = \bar{\varphi}(a). \end{aligned}$$

La naturalidad de la biyección se deja como ejercicio:

Ejercicio 6. *Verifica que la biyección (7.1) es natural en A y en S.*

Solución. Dado un morfismo de marcos $g : A \to B$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Frm}(B, \mathcal{O}S) \arrow[r, "f \mapsto \bar{f}"'] \arrow[d, "- \circ g"'] & \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}B) \arrow[d, "\mathrm{pt}g \circ -"] \\ \mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) \arrow[r, "h \mapsto \bar{h}"'] & \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A) \end{tikzcd}$$

es conmutativo:

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= \mathrm{pt}(fg)\Phi_S \\ &= (\mathrm{pt}g)(\mathrm{pt}f)\Phi_S \\ &= (\mathrm{pt}g)\bar{f}. \end{aligned}$$

Similarmente, dada una función continua $\psi : S \to T$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}T) \arrow[d, "\mathcal{O}\psi \circ -"'] & \mathrm{Top}(T, \mathrm{pt}A) \arrow[l, "\bar{\varphi} \leftarrow\!\shortmid \varphi"'] \arrow[d, "- \circ \psi"] \\ \mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) & \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A) \arrow[l, "\bar{\xi} \leftarrow\!\shortmid \xi"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi\psi} &= \mathcal{O}(\varphi\psi)U_A \\ &= (\mathcal{O}\psi)(\mathcal{O}\varphi)U_A \\ &= (\mathcal{O}\psi)\bar{\varphi}. \end{aligned}$$

∎

El ejercicio anterior concluye la demostración.

7.6. La propiedad universal de las reflexiones

La biyección

$$\begin{aligned}\mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) &\simeq \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A)\\ f &\mapsto \bar{f} = (\mathrm{pt}f)\Phi_S\\ (\mathcal{O}\varphi)U_A = \bar{\varphi} &\leftarrow\!\shortmid \varphi.\end{aligned}$$

se puede leer como sigue: dado un morfismo $f : A \to \mathcal{O}S$, existe una única función continua $\varphi : S \to \mathrm{pt}A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "U_A"'] & \mathcal{O}S \\ \mathcal{O}\mathrm{pt}A \arrow[ur, "\mathcal{O}\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Similarmente, dada una función continua $\varphi : S \to \mathrm{pt}A$, existe un único morfismo $f : A \to \mathcal{O}S$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi_S"'] & \mathrm{pt}A \\ \mathrm{pt}\mathcal{O}S \arrow[ur, "\mathrm{pt}f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Capítulo 8

Espacios sobrios y marcos espaciales

Recordemos que, por definición, un marco A es espacial si su reflexión espacial $U_A : A \to \mathcal{O}\mathrm{pt}A$ es un isomorfismo (o, equivalentemente, si U_A es inyectiva). Los marcos espaciales, junto con los morfismos de marcos, forman la subcategoría Sp de Top.

Ahora nuestro objetivo es ver que Top tiene una subcategoría dual a Sp, de tal modo que la dualidad está dada por la restricción de la adjunción. La categoría que queremos es la de los espacios sobrios, a la cual denotaremos como Sob. También veremos que, análogamente a lo que pasa con los marcos espaciales, un espacio topológico S es sobrio si, y solo si, $\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ es un isomorfimso.

8.1. Espacios sobrios

Comenzaremos por definir los espacios topológicos sobrios.

Recordemos que, dado un espacio topológico S, $\mathrm{pt}\mathcal{O}S$ es el conjunto de elementos $\wedge$-irreducibles del marco $\mathcal{O}S$. Además, $\mathrm{pt}\mathcal{O}S$ tiene una topología canónica, donde los abiertos son los conjuntos de la forma

$$U_{\mathcal{O}S}(u) = \{p \in \mathrm{pt}\mathcal{O}S \mid u \nleq p\}.$$

También recordemos que, dotando a $\mathrm{pt}A$ con esta topología, la función $\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ dada como

$$\Phi_S(x) = \overline{x}' = S - \overline{\{x\}}.$$

es continua. A $\Phi_S(x) : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ le llamamos la reflexión sobria de S, debido a la siguiente definición.

Definición 8.1. *Decimos que un espacio topológico S es sobrio si cada abierto $\wedge$-irreducibles es de la forma $\Phi_S(x)$ para un único punto $x \in S$. En otras palabras, un espacio S es sobrio si su reflexión sobria $\Phi_S : S \to \mathcal{O}S$ es biyectiva.*

Puede parecer extraño definir la sobriedad en términos de la biyectividad de Φ_S, en lugar de pedir que Φ_S sea un homeomorfismo. Más adelante, veremos que estas condiciones son equivalentes.

Denotamos como Sob *a la categoría formada por los espacios topológicos sobrios y sus funciones continuas.*

Lema 8.2. *Sea S un espacio topológico. Si S es de Hausdorff, entonces S es sobrio. Si S es sobrio, entonces es de Kolmogorov. Esto es*

$$T_2 \implies \textit{sobrio} \implies T_0.$$

Demostración. Supongamos que S es Hausdorff y sea $u \in \mathrm{pt}\mathcal{O}S$. Es decir, u es un elemento $\wedge$-irreducible de $\mathcal{O}S$. Queremos ver que $u = \overline{x}'$ (i.e.: $u' = \overline{x}$) para un único punto $x \in S$. Como S es Hausdorff, esto sucede si, y solo si, $u' = \{x\}$ para algún $x \in S$. Por definición, $u \neq S$, así que existe, al menos, un punto en u'. Supongamos que hay dos puntos $x, y \in u'$ distintos. Como S es Hausdorff, existen abiertos $v_1, v_2 \in \mathcal{O}S$ con $x \in v_1$, $y \in v_2$ y $v_1 \wedge v_2 = \varnothing$. Luego,

$$\begin{aligned} u &= u \vee (v_1 \wedge v_2) \\ &= (u \vee v_1) \wedge (u \vee v_2). \end{aligned}$$

Como u es $\wedge$-irreducible, esto implica que $v_1 \leq u$ o que $v_2 \leq v$, pero esto implicaría que $x \in u$ o que $y \in u$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $u' = \{x\}$, que es lo que se quería demostrar.

Ahora supongamos que S es sobrio. Si $x, y \in S$ son puntos distintos, entonces Dados $x, y \in S$, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_S(x) = \Phi_S(y) &\iff \overline{x}' = \overline{y}' \\ &\iff \overline{x} = \overline{y} \\ &\iff \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{U}(x)$ y $\mathcal{U}(y)$ son los filtros de vecindades abiertas de x y y, respectivamente. Como Φ_S es inyectiva, dados $x, y \in S$ distintos, tenemos

$$\mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y),$$

así que existe una vecindad abierta de x que no contiene a y o una vecindad abierta de y que no contiene a x. Esto es, S es T_0. □

Reformulando un poco la definición de sobriedad, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 8.3. *Un espacio S es sobrio si, y solo si, todo cerrado irreducible de S (esto es, todo elemento $\vee$-irreducible de $\mathcal{C}S$) tiene un único punto genérico.*

Demostración. Los cerrados $\vee$-irreducibles son exactamente los de la forma $c = u'$ para u un abierto $\wedge$-irreducible. Tomando complementos, vemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Todo abierto $\wedge$-irreducible es de la forma $u = \overline{x}'$ para un único $x \in S$.

- Todo cerrado $\vee$-irreducible es de la forma $c = \overline{x}$ para un único $x \in S$.

La primera afirmación es la sobriedad de S, mientras que la segunda dice que todo cerrado irreducible de S tiene un único punto genérico. □

Ejemplo 8.4. Dado un anillo conmutativo R, el espectro primo $\mathrm{Spec}R$ es un espacio sobrio.

Por ejemplo, los cerrados irreducibles de $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ son de la forma $c = \{p\}$ (para un primo $p \in \mathbb{Z}$) o $c = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. En el primer caso, el punto genérico es p. De otro modo, tenemos $\overline{\{0\}} = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. ■

8.2. La topología de Skula

Recordemos que, dado un marco A, el ensamble NA viene equipado con un morfismo $\eta_A : A \to NA$ que resuelve el problema de complementación (de hecho, η_A es la solución universal).

Ahora queremos explorar una situación parecida, para una topología $\mathcal{O}S$, aunque solo consideraremos topologías en el conjunto S.

Definición 8.5. *Sea S un espacio topológico y $\mathcal{O}S$ su topología. Definimos $\mathcal{O}^f S$ como la topología más pequeña en S tal que todo $u \in \mathcal{O}S$ es abierto y cerrado. Es decir, $\mathcal{O}^f S$ es la topología generada por la subbase*

$$\mathcal{O}S \cup \{u' \mid u \in \mathcal{O}S\}.$$

En otras palabras, $\mathcal{O}^f S$ es la topología más pequeña sobre S tal que la inclusión $\mathcal{O}S \to \mathcal{O}^f S$ resuelve el problema de complementación. $\mathcal{O}^f S$ se llama la topología de Skula *de S, y al conjunto S equipado con $\mathcal{O}^f S$ lo denotamos ${}^f S$.*

Ejemplo 8.6. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Consideraremos los espacios topológicos Además, sean ${}^l\mathbb{R}$, ${}_m\mathbb{R}$ y ${}^r\mathbb{R}$ los espacios topológicos dados por $\mathbb{R}$ equipado con la topologías generadas por

$$\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\},$$
$$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

respectivamente. Nótese que $\mathcal{O}_m\mathbb{R}$ es la topología estandar. Además, tenemos

$$\mathcal{O}^l\mathbb{R} \subseteq \mathcal{O}_m\mathbb{R} \subseteq \mathcal{O}^r\mathbb{R}.$$

No es difícil ver que ${}^l\mathbb{R}$ es T_0, aunque no es T_0.

Entonces $\mathcal{O}^r\mathbb{R}$ es la topología de Skula en $\mathcal{O}^l\mathbb{R}$:

$$\mathcal{O}^f({}^l\mathbb{R}) = \mathcal{O}^r\mathbb{R}.$$

■

Dado que la inclusión $\iota : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}^f S$ es un morfismo de marcos que resuelve el problema de complementación, se factoriza de manera única a través de $\eta_{\mathcal{O}S}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{O}S}"'] & \mathcal{O}^f S \\
N\mathcal{O}S \arrow[ur, "\iota^!"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la adjunción entre $\mathcal{O}$ y pt, el morfismo $\iota^! : N\mathcal{O}S \to \mathcal{O}^f S$ corresponde a un único morfismo $\varphi : {}^f S \to \mathrm{pt}N\mathcal{O}S$. Reemplazando a $\mathcal{O}S$ por un marco arbitrario A y a S por $\mathrm{pt}A$, se puede demostrar que φ es un isomorfismo.

8.3. Las distintas encarnaciones del espacio de puntos

Recordemos que definimos el espacio de puntos de un marco como el conjunto de sus elementos $\wedge$-irreducibles. Ahora veremos otras dos construcciones equivalentes.

Definición 8.7. *Sea A es una retícula. Un subconjunto $F \subseteq A$ es un filtro si*

- *es sección superior (absorbe hacia arriba),*
- *es no vacío y*
- *es cerrado bajo ínfimos de dos elementos.*

Además, un filtro F es propio si $0 \notin F$. Nótese que

$$0 \in F \quad \text{si, y solo si} \quad F = A.$$

Decimos que un filtro $F \subseteq A$ es primo si,

- *es propio y*
- *siempre que $a \vee b \in F$, entonces $a \in F$ o $b \in F$.*

Si A es una retícula completa (por ejemplo, un marco), entonces decimos que un filtro $F \subseteq A$ es completamente primo si,

- *es propio y*
- *siempre que $\bigvee X \in F$, entonces existe $x \in X \cap F$.*

Ejemplo 8.8. Sean S un espacio topológico y $x \in S$. Entonces el conjunto de vecindades abiertas de x

$$\mathcal{U}(x) = \{u \in \mathcal{O}S \mid x \in u\}$$

es un filtro completamente primo.

En efecto, $\mathcal{U}(x)$ es un filtro:

- si $x \in u \leq v$, entonces $x \in v$;
- $x \in S$;
- si $x \in u$ y $x \in v$, entonces $x \in u \wedge v$.

Además, $\mathcal{U}(x)$ es propio, ya que $\varnothing \notin \mathcal{U}(x)$. Finalmente, si $X \subseteq \mathcal{O}S$ es tal que $x \in \bigvee X$, entonces existe $u \in X$ tal que $x \in u$. ∎

Definición 8.9. *Un caracter en un marco A es un morfismo*

$$\chi : A \to 2.$$

Teorema 8.10. *Las funciones*

$$\begin{aligned}(\mathrm{pt}A, \sqsubseteq) = (\mathrm{pt}A, \leq)^{\mathrm{op}} &\rightleftarrows \mathrm{Cp}(A) \\ p &\mapsto F_p = \{a \in A \mid a \nleq p\} \\ \bigvee\{a \in A \mid a \notin F\} = p_F &\leftarrow F\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathrm{Cp}(A) &\rightleftarrows \mathrm{Frm}(A, 2) \\ F &\mapsto \chi_F \\ \chi^{-1}(1) = F_\chi &\leftarrow \chi\end{aligned}$$

son isomorfismos de copos.

Demostración. **Primera parte.** Veamos que las funciones

$$\begin{aligned}\mathrm{pt}A &\rightleftarrows \mathrm{Cp}(A) \\ p &\mapsto F_p = \{a \in A \mid a \nleq p\} \\ \bigvee\{a \in A \mid a \notin F\} = p_F &\leftarrow F\end{aligned}$$

están bien definidas.

- Dado un $p \in \mathrm{pt}A$, sea $F_p = \{a \in A \mid a \nleq p\}$. Como $p \neq 1$, tenemos $1 \nleq p$, por lo cual $1 \in F_p$. Además, F_p es cerrado hacia arriba: Si $a \geq b$, entonces $a \leq p \implies b \leq p$, o bien $b \nleq p \implies a \nleq p$; es decir: $b \in F_p$ implica que $a \in F_p$. Si $a, b \in A$, la irreducibilidad de p implica que $a \wedge b \leq p \implies a \leq p$ o $b \leq p$. Tomando contrapuesta, tenemos $a, b \in F_p \implies a \wedge b \in F_p$. Luego, F_p es un ideal.

  Notemos que F_p es propio, pues $0 \leq p$ implica $0 \notin F_p$. Finalmente, si $X \subseteq A$ tenemos
  $$(\forall x \in X,\ x \leq p) \implies \bigvee X \leq p$$
  o, tomando contrapuesta:
  $$\bigvee X \nleq p \implies \exists x \in X,\ x \nleq p.$$
  Luego, F_p es completamente primo.

- Dado un filtro completamente primo F, consideremos $p_F = \bigvee\{x \in A \mid x \notin F\}$. Como F es completamente primo, tenemos $p_F \notin F$. Además, todo $x \leq p$

cumple $x \notin F$ (de otro modo, tendríamos $p \in F$, pues F es sección superior). Es decir:

$$x \notin F \iff x \le p_F.$$

Notemos que $p_F \neq 1$, pues $1 \in F$. Como F es filtro, tenemos que $a, b \in F \implies a \wedge b \in F$. Tomando contrapuesta, obtenemos $a \wedge b \le p \implies a \le p_F$ o $b \le p_F$. Ahora sean $a, b \in A$ tales que $a \nleq p_F$, $b \nleq p_F$. Como F es sección superior, se sigue que $a \in F$, por lo cual $a \nleq p_F$. Es decir, p_F es $\wedge$-irreducible, o bien $p_F \in \mathrm{pt}A$.

Ahora veamos que estas funciones son inversas mutuas. Dado $p \in \mathrm{pt}A$, tenemos $F_p = \{x \in A \mid x \nleq p\}$. Entonces para todo $y \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} p_{F_p} \le y &\iff \bigvee\{x \in A \mid x \notin F_p\} \le y \\ &\iff (\forall x \in A,\ x \notin F_p \implies x \le y) \\ &\iff (\forall x \in A,\ x \le p \implies x \le y) \\ &\iff p \le y. \end{aligned}$$

Se sigue que $p_{F_p} = p$. Ahora sea $F \in \mathrm{Cp}(A)$ y consideremos $p_F = \bigvee\{x \in A \mid x \notin F\}$. Arriba ya mostramos que, para todo $x \in A$, tenemos

$$x \le p \iff x \notin F_p,$$

de modo que $F_{p_F} = \{x \in A \mid x \nleq p\} = F$. Luego, las funciones forman una biyección.

Finalmente, notemos que, dados $p, q \in \mathrm{pt}A$, tenemos

$$p \le q \implies F_q = \{x \in A \mid x \nleq q\} \subseteq \{x \in A \mid x \nleq p\} = F_p,$$

por lo cual obtenemos un isomorfismo de copos

$$(\mathrm{pt}A, \sqsubseteq) = (\mathrm{pt}A, \le)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Cp}(A).$$

Segunda parte. Veamos que las otras dos funciones

$$\begin{aligned} \mathrm{Cp}(A) &\rightleftarrows \mathrm{Frm}(A, 2) \\ F &\mapsto \chi_F \\ \chi^{-1}(1) = F_\chi &\leftarrow\!\shortmid \chi \end{aligned}$$

están bien definidas.

- Si F es un filtro completamente primo de un marco A, entonces la función característica $\chi_F : A \to 2$ de F, dada como

  $$\chi_F(a) = \begin{cases} 1 & a \in F \\ 0 & a \notin F, \end{cases}$$

  es un morfismo de marcos y, por lo tanto, es un caracter de A.

En efecto, dados $x, y \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} \chi_F(x \wedge y) = 1 &\iff x \wedge y \in F \\ &\iff x \in F, y \in F && \text{ya que } F \text{ es filtro} \\ &\iff \chi_F(x) = 1, \chi_F(y) = 1 \\ &\iff \chi_F(x) \wedge \chi_F(y) = 1. \end{aligned}$$

Como χ_F toma valores en 2, esto muestra que χ_F preserva ínfimos de dos elementos. Además, $1 \in F$, por lo cual $\chi_F(1) = 1$.

Más aún, dado $X \subseteq A$, tenemos

$$\begin{aligned} \chi_F(\bigvee X) = 1 &\iff \bigvee X \in F \\ &\iff \exists x \in X, x \in F && \text{ya que } F \text{ es comp. primo} \\ &\iff \exists x \in X, \chi_F(x) = 1 \\ &\iff \bigvee\{\chi_F(x) \mid x \in X\} = 1 && \text{ya que } \chi_F \text{ es 2-valuado.} \end{aligned}$$

Luego, χ_F preserva supremos. Esto prueba que $\chi_F \in \mathrm{Frm}(A, 2)$.

- Tomemos $\chi \in \mathrm{Frm}(A, 2)$ y sea $F_\chi = \chi^{-1}(1)$. F_χ es no vacío, pues $1 \in F_\chi$. F_χ es cerrado hacia arriba: si $a \geq b \in F_\chi$, entonces $\chi(a) \geq \chi(b) = 1$, por lo cual $a \in F_\chi$. Ahora, dados $a, b \in F_\chi$ tenemos $\chi(a \wedge b) = \chi(a) \wedge \chi(b) = 1 \wedge 1 = 1$, así que $a \wedge b \in F_\chi$. Se sigue que F_χ es un ideal.

  Además F_χ es propio, pues $0 \notin F_\chi$. Finalmente, si $X \subseteq A$ es tal que $\bigvee X \in F_\chi$, tenemos $1 = \chi(\bigvee X) = \bigvee\{\chi(x) \mid x \in X\}$, lo cual solo puede suceder si hay $x \in X$ con $\chi(x) = 1$, así que $x \in X \cap F_\chi$. Por lo tanto, F_χ es completamente primo.

Ahora veamos que estas funciones son inversas mutuas. Si $\chi : A \to 2$, consideremos $F_\chi = \chi^{-1}(1)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \chi_{F_\chi}(x) = 1 &\iff x \in F_\chi \\ &\iff \chi(x), \end{aligned}$$

por lo cual $\chi_{F_\chi} = \chi$. Dado un filtro completamente primo F, consideremos χ_F. Entonces

$$\begin{aligned} F_{\chi_F} &= \chi_F^{-1}(1) \\ &= \{x \in A \mid \chi_F(x) = 1\} \\ &= \{x \in A \mid x \in F\} \\ &= F. \end{aligned}$$

Luego, las funciones son inversas mutuas. Además, si $\chi \leq \xi$ son caracteres de A, tenemos que

$$\begin{aligned} F_\chi &= \{x \in A \mid \chi(x) = 1\} \\ &\subseteq \{x \in A \mid \xi(x) = 1\} \\ &= F_\xi, \end{aligned}$$

de modo que tenemos un isomorfismo de copos

$$\mathrm{Cp}(A) \simeq \mathrm{Frm}(A, 2).$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Recordemos que los elementos de la topología en $\mathrm{pt}A$ se definen como los de la forma

$$U_A(a) = \{p \in \mathrm{pt}A \mid a \nleq p\}.$$

El teorema anterior nos dice que, en vez de tomar al espacio de puntos $\mathrm{pt}A$ formado por los elementos $\wedge$-irreducibles de A, a un marco le podemos asignar su espacio de puntos formado por sus filtros completamente primos

$$\mathrm{pt}^{\mathcal{F}}A = \mathrm{Cp}A$$

o su espacio de puntos formado por sus caracteres

$$\mathrm{pt}^{\chi}A = \mathrm{Frm}(A, 2).$$

cuyas topologías están dadas por la imagen de $\mathcal{O}\mathrm{pt}A$ bajo las biyecciones. Explícitamente, las topologías en $\mathrm{pt}^{\mathcal{F}}A$ y en $\mathrm{pt}^{\chi}A$ están dadas por los conjuntos de la forma

$$U_A^{\mathcal{F}}(a) = \{F \in \mathrm{Cp}(A) \mid a \in F\}$$

y

$$U_A^{\chi}(a) = \{\chi \in \mathrm{Frm}(A, 2) \mid \chi(a) = 1\},$$

respectivamente.

En particular, dado un espacio topológico S, podemos formar los tres espacios homeomorfos $\mathrm{pt}\mathcal{O}S$, $\mathrm{pt}^{\mathcal{F}}\mathcal{O}S$ y $\mathrm{pt}^{\chi}\mathcal{O}S$, y cada uno viene equipado con las reflexiones sobrias que se obtienen al componer con los homeomorfismos. Explícitamente, tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_S : S &\to \mathrm{pt}\mathcal{O}S \\
x &\mapsto \overline{x}' \\
\Phi_S^{\mathcal{F}} : S &\to \mathrm{pt}^{\mathcal{F}}\mathcal{O}S \\
x &\mapsto \{u \in \mathcal{O}S \mid x \in u\} = \mathcal{U}(x) \\
\Phi_S^{\chi} : S &\to \mathrm{pt}^{\chi}\mathcal{O}S \\
x &\mapsto \chi_{\mathcal{U}(x)}.
\end{aligned}$$

Dado que estas tres funciones tienen las mismas propiedades, podemos ver que un espacio S es sobrio si, y solo si, todo filtro completamente primo de $\mathcal{O}S$ es de la forma $\mathcal{U}(x)$ para un único $x \in X$, lo cual sucede si, y solo si, todo morfismo de marcos $\mathcal{O}S \to 2$ es de la forma $\chi_{\mathcal{U}(x)}$ para un único $x \in S$.

8.4. La dualidad entre Sob y Sp

Recordemos que un marco A es espacial si su reflexión espacial

$$U_A : A \to \mathcal{O}\mathrm{pt}A$$

es un isomorfismo, y que un espacio topológico S es sobrio si su reflexión sobria

$$\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$$

es biyectiva (después veremos que este es equivalente a que Φ_S sea un homeomorfismo).

Lema 8.11.

- *Para todo espacio S, el marco $\mathcal{O}S$ es espacial.*
- *Para todo marco A, el espacio $\mathrm{pt}A$ es sobrio.*

En otras palabras, los funtores $\mathcal{O} : \mathrm{Top} \to \mathrm{Frm}$ y $\mathrm{pt} : \mathrm{Frm} \to \mathrm{Top}$ se factorizan a través de Sp y Sob, respectivamente:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[rr, "\mathcal{O}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Frm} \\ & \mathrm{Sp} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Frm} \arrow[rr, "\mathrm{pt}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Top} \\ & \mathrm{Sob} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Demostración. En 7.5 probamos que las identidades triangulares

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}S \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathcal{O}S}"'] \arrow[d, "U_{\mathcal{O}S}"] \\ \mathcal{O}S & \mathcal{O}\mathrm{pt}\mathcal{O}S \arrow[l, "\mathcal{O}\Phi_S"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{pt}A \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathrm{pt}A}"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathrm{pt}A}"] \\ \mathrm{pt}A & \mathrm{pt}\mathcal{O}\mathrm{pt}A \arrow[l, "\mathrm{pt}U_A"] \end{tikzcd}$$

siempre se satisfacen. Como queremos probar que $U_{\mathcal{O}S}$ es un isomorfismo y que $\Phi_{\mathrm{pt}A}$ es biyectiva, basta probar que las otras composiciones también son las identidades en $\mathcal{O}S$ y en $\mathrm{pt}A$, respectivamente. Esto es:

$$(U_{\mathcal{O}S})(\mathcal{O}\Phi_S) = \mathrm{id}_{\mathcal{O}S}$$
$$(\Phi_{\mathrm{pt}A})(\mathrm{pt}U_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{pt}A}.$$

Lo primero es fácil: todo abierto $U \in \mathcal{O}\mathrm{pt}\mathcal{O}S$ es de la forma $U = U_{\mathcal{O}S}(u)$ para algún $u \in \mathcal{O}S$. Luego,

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{O}S}(\mathcal{O}\Phi_S(U)) &= U_{\mathcal{O}S}(\mathcal{O}\Phi_S(U_{\mathcal{O}S}(u))) \\ &= U_{\mathcal{O}S}(u) \\ &= U. \end{aligned}$$

Por otro lado, todo punto $z \in \mathrm{pt}\mathcal{O}\mathrm{pt}A$, es elemento de $\mathcal{O}\mathrm{pt}A$ y, por lo tanto, es de la forma $z = U_A(x)$ para algún $x \in A$. Poniendo $y = (\mathrm{pt}U_A)(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} y &= (\mathrm{pt}U_A)(z) \\ &= (U_A)_*(z) \\ &= \bigvee\{a \in A \mid U_A(a) \leq z\} \\ &= \bigvee\{a \in A \mid U_A(a) \leq U_A(x)\}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} U_A(y) &= \bigvee\{U_A(a) \in A \mid U_A(a) \leq U_A(x)\} \\ &= U_A(x) \\ &= z. \end{aligned}$$

Luego, para todo $p \in \mathrm{pt}A$ tenemos

$$\begin{aligned} p \in \Phi_{\mathrm{pt}A}((\mathrm{pt}U_A)(z)) &\iff p \in \Phi_{\mathrm{pt}A}(y) \\ &\iff p \in \overline{y}' \\ &\iff y \nleq p \\ &\iff p \in U_A(y) = z. \end{aligned}$$

□

Esta prueba también muestra que, si $\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ es biyectiva, entonces es un homeomorfismo, pues $\mathcal{O}\Phi_S : \mathcal{O}\mathrm{pt}\mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ siempre es un isomorfismo de marcos. Luego, un espacio S es sobrio si, y solo si, $\Phi_S : S \to \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ es un isomorfismo.

Una consecuencia inmediata es que las composiciones

$$\mathrm{Sob} \to \mathrm{Frm} \to \mathrm{Sp}$$
$$\mathrm{Sp} \to \mathrm{Top} \to \mathrm{Sob}$$

son esencialmente suprayectivas. En efecto: para cualquier marco espacial A tenemos $A \simeq \mathcal{O}\mathrm{pt}A$ con $\mathrm{pt}A$ sobrio, mientras que, para cualquier espacio sobrio S, tenemos $S \simeq \mathrm{pt}\mathcal{O}S$ con $\mathcal{O}S$ espacial.

Además, estos funtores son fielmente plenos, pues dados marcos espaciales A, B y espacios S, T sobrios, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(A, B) &= \mathrm{Frm}(A, B) \\ &\simeq \mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}\mathrm{pt}B) \\ &\simeq \mathrm{Frm}(\mathrm{pt}B, \mathrm{pt}A) \\ &\simeq \mathrm{Sob}(\mathrm{pt}B, \mathrm{pt}A), \\ \mathrm{Sob}(S, T) &= \mathrm{Top}(S, T) \\ &\simeq \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}\mathcal{O}T) \\ &\simeq \mathrm{Frm}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}S) \\ &\simeq \mathrm{Sp}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}S). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el resultado

Teorema 8.12. *La adjunción contravariante*

$$\mathrm{Frm} \underset{\mathrm{pt}}{\overset{\mathcal{O}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Top}$$

se restringe a una equivalencia dual entre Sp *y* Sob. *Esto es:*

$$\mathrm{Sp}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Sob}.$$

8.5. Sp y Sob son reflexivas.

Ahora veremos que las subcategorías Sp de Frm y Sob de Top son reflexivas. Esto es: los funtores de inclusión

$$\mathrm{Sp} \to \mathrm{Frm}$$
$$\mathrm{Sob} \to \mathrm{Top}$$

tienen adjuntos izquierdos. De hecho, veremos que los adjuntos son (las restricciones de) $\mathcal{O}\mathrm{pt}$ y $\mathrm{pt}\mathcal{O}$, respectivamente. En realidad la demostración es bastante fácil. Usaremos la adjunción

$$\mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}S) \simeq \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}A).$$

Denotemos, por un momento, como $i : \mathrm{Sp} \to \mathrm{Frm}$ al funtor de inclusión. Entonces, para todo marco A y todo marco espacial B, tenemos $\mathrm{pt}\mathcal{O}\mathrm{pt}A \simeq \mathrm{pt}A$ y $\mathcal{O}\mathrm{pt}B \simeq B$, por lo cual tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Frm}(A, iB) &= \mathrm{Frm}(A, B) \\
&\simeq \mathrm{Frm}(A, \mathcal{O}\mathrm{pt}B) \\
&\simeq \mathrm{Top}(\mathrm{pt}B, \mathrm{pt}A) \\
&\simeq \mathrm{Top}(\mathrm{pt}B, \mathrm{pt}\mathcal{O}\mathrm{pt}A) \\
&\simeq \mathrm{Frm}(\mathcal{O}\mathrm{pt}A, \mathcal{O}\mathrm{pt}B) \\
&\simeq \mathrm{Frm}(\mathcal{O}\mathrm{pt}A, B) \\
&\simeq \mathrm{Sp}(\mathcal{O}\mathrm{pt}A, B)
\end{aligned}$$

naturales en A y en B. Se sigue que $\mathcal{O}\mathrm{pt} \dashv i$.

Ahora denotemos como $i : \mathrm{Sob} \to \mathrm{Top}$ al funtor de inclusión. Para todo espacio S y todo espacio sobrio T, tenemos $\mathcal{O}\mathrm{pt}\mathcal{O}S \simeq \mathcal{O}S$ y $\mathrm{pt}\mathcal{O}T \simeq T$, por lo cual tenemos isomorfismos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Top}(S, iT) &= \mathrm{Top}(S, T) \\
&\simeq \mathrm{Top}(S, \mathrm{pt}\mathcal{O}T) \\
&\simeq \mathrm{Frm}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}S) \\
&\simeq \mathrm{Frm}(\mathcal{O}T, \mathcal{O}\mathrm{pt}\mathcal{O}S) \\
&\simeq \mathrm{Top}(\mathrm{pt}\mathcal{O}S, \mathrm{pt}\mathcal{O}T) \\
&\simeq \mathrm{Top}(\mathrm{pt}\mathcal{O}S, T) \\
&\simeq \mathrm{Sob}(\mathrm{pt}\mathcal{O}S, T)
\end{aligned}$$

naturales en S y en T. Se sigue que $\mathrm{pt}\mathcal{O} \dashv i$.

8.6. Dualidad de Stone

Definición 8.13. *Sea A una retícula completa. Decimos que un elemento $a \in A$ es compacto si, para todo $S \subseteq A$ tal que $a \leq \bigvee S$, existe un subconjunto finito $T \subseteq S$ tal que $a \leq \bigvee T$.*

Al conjunto de elementos compactos de A lo denotamos como $\mathcal{K}A$.

Nótese que $\mathcal{K}A$ es cerrado bajo supremos finitos. En efecto, sean $a, b \in \mathcal{K}A$. Si $X \subseteq A$ es tal que $a \vee b \leq \bigvee X$, entonces $a \leq \bigvee X$ y $b \leq \bigvee X$, por lo cual existen subconjuntos finitos $S, T \subseteq X$ tales que $a \leq \bigvee S$ y $b \leq \bigvee T$. Luego, $a \vee b \leq \bigvee\{S \cup T\}$ con $S \cup T \subseteq X$ finito. Claramente, $0 \in \mathcal{K}A$.

Definición 8.14. *Decimos que un marco A es coherente si*

- *Todo elemento de A es supremo de elementos en $\mathcal{K}A$.*
- *$\mathcal{K}A$ es cerrado bajo ínfimos finitos y $1 \in \mathcal{K}A$. Es decir, $\mathcal{K}A$ es una subretícula de A.*

En particular, dado un marco coherente A, la retícula $\mathcal{K}A$ es distributiva.

Definición 8.15. *Sea D una retícula distributiva. Un ideal de D es un subconjunto $I \subseteq D$ tal que*

- *Absorbe hacia abajo (esto es, $I \in \mathcal{L}A$).*
- *Es no vacío.*
- *Es cerrado bajo supremos finitos.*

Al conjunto de ideales de D lo denotamos como $\mathcal{I}D$.

Lema 8.16. *Sea D una retícula distributiva. El conjunto $\mathcal{I}D$ de ideales de D es un marco, con el orden de contención (el heredado de $\mathcal{P}D$).*

Nótese que $\mathcal{I}D$ no es un submarco de $\mathcal{P}D$ ni de $\mathcal{L}D$, pues $\varnothing \notin \mathcal{I}D$.

Demostración. Nótese que D y $\{0\}$ son el mayor y menor elemento de $\mathcal{I}D$, respectivamente.

Sea $X \subseteq \mathcal{I}D$ y notemos que $\bigcap X$ es una sección inferior no vacía. Además, dados $a, b \in \bigcap X$, tenemos $a, b \in I$ para todo $I \in X$. Como cada I es ideal, se sigue que $a \wedge b \in I$ para todo $I \in X$; esto es: $a \wedge b \in \bigcap X$. Luego, $\bigcap X$ es ideal de D y, por lo tanto, es el ínfimo de X en $\mathcal{I}D$

$$\bigwedge X = \bigcap X,$$

Es decir, $\mathcal{I}D$ es una sub-$\bigwedge$-semiretícula de $\mathcal{P}D$ (y de $\mathcal{L}D$). En particular, $\mathcal{I}D$ es una retícula completa. Sin embargo, los supremos en $\mathcal{I}D$ no se calculan como en $\mathcal{P}D$.

Como $\mathcal{I}D$ es un conjunto $\bigwedge$-cerrado de $\mathcal{P}D$, le corresponde un operador cerradura $j : \mathcal{P}D \to \mathcal{P}D$. Afirmamos que j está dado como

$$j(S) = \{\bigvee T \mid T \subseteq {\downarrow}S \text{ finito}\},$$

donde $\downarrow : \mathcal{P}D \to \mathcal{P}D$ es la sección inferior generada por S (el operador cerradura que le corresponde a $\mathcal{L}D$). En efecto, si I es un ideal que contiene a S, entonces ${\downarrow}S \subseteq I$ (porque I es sección inferior) así que, para todo $T \subseteq {\downarrow}S$ finito tenemos $\bigvee T \in I$. Además, $\{\bigvee T \mid T \subseteq {\downarrow}S \text{ finito}\}$ es ideal, ya que D es distributiva. En particular, para un ideal I y una sección inferior L, tenemos

$$\begin{aligned}
I \cap j(L) &= I \cap \{\bigvee T \mid T \subseteq {\downarrow}L \text{ finito}\} \\
&= I \cap \{\bigvee T \mid T \subseteq L \text{ finito}\} \\
&= \{\bigvee T \mid \bigvee T \in I, T \subseteq L \text{ finito}\} \\
&= \{\bigvee T \mid T \subseteq I, T \subseteq L \text{ finito}\} && (\bigvee T \in I \iff T \subseteq I) \\
&= \{\bigvee T \mid T \subseteq (I \cap L) \text{ finito}\} \\
&= j(I \cap L).
\end{aligned}$$

Ahora recordemos que los supremos en $\mathcal{I}D$ se calculan como

$$\bigvee X = j(\bigcup X)$$

para $X \subseteq \mathcal{I}D$. Luego, dado $I \in \mathcal{I}D$, tenemos

$$\begin{aligned}
I \wedge \bigvee X &= I \cap j(\bigcup X) \\
&= j(I \cap \bigcup X) && \text{pues } \bigcup X \text{ es sección inferior} \\
&= j(\bigcup\{I \cap J \mid J \in X\}) \\
&= \bigvee\{I \wedge J \mid J \in X\}.
\end{aligned}$$

Se sigue que $\mathcal{I}D$ es marco. □

Teorema 8.17.

- *Si A es un marco coherente, entonces*

$$A \simeq \mathcal{I}\mathcal{K}A.$$

  (Recordemos que $\mathcal{K}A$ es una retícula distributiva).

- *Si D es una retícula distributiva, entonces*

$$D \simeq \mathcal{K}\mathcal{I}D,$$

  donde $\mathcal{I}D$ es un marco coherente.

Nótese: este teorema implica que los marcos coherentes son exactamente los marcos de ideales de las retículas distributivas.

Demostración.

- Sea A un marco coherente. Entonces la función $\iota_A : A \to \mathcal{IK}A$ dada como
$$\iota_A(a) = \{c \in \mathcal{K}A \mid c \leq a\} = {\downarrow}a \cap \mathcal{K}A$$
es monótona y, para cualesquiera $a \in A, I \in \mathcal{IK}A$, tenemos
$$\begin{aligned} \bigvee \iota_A(a) &= \bigvee\{c \in \mathcal{K}A \mid c \leq a\} \\ &= a && \text{porque } A \text{ es coherente} \\ \iota_A(\bigvee I) &= \{c \in \mathcal{K}A \mid c \leq \bigvee I\} \\ &= I. \end{aligned}$$
Se sigue que $\iota_A : A \to \mathcal{IK}A$ tiene inversa dada por
$$\iota_A^{-1}(I) = \bigvee I.$$

- Ahora sea D una retícula distributiva. Por un lado, notemos que toda sección inferior principal ${\downarrow}d$ es un ideal. Afirmamos que ${\downarrow}d$ es compacto:

  Supongamos que X es una familia de ideales de D con ${\downarrow}d \leq \bigvee X$; es decir: $d \in j(\bigcup X)$, de modo que tenemos $d = \bigvee\{d_1, \ldots, d_n\}$, donde $d_i \in I_i \in X$ para $i = 1, \ldots, n$. Luego, $d \in j(\bigcup_{i=1}^{n} I_i)$, por lo cual ${\downarrow}d \leq \bigvee\{I_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Esto muestra la compacidad de ${\downarrow}d$.

  Recíprocamente, todo ideal compacto I es principal:

  Observemos que $I \leq \bigvee\{{\downarrow}d \mid d \in I\}$, lo cual implica que existen $d_1, \ldots, d_n \in I$ tales que $I \leq \bigvee\{{\downarrow}d_1, \ldots, {\downarrow}d_n\}$, pero
$$I \leq \bigvee\{{\downarrow}d_1, \ldots, {\downarrow}d_n\} = {\downarrow}(d_1 \vee \cdots \vee d_n),$$
  con $d_1 \vee \ldots \vee d_n \in I$, pues I es ideal. Luego, $I = {\downarrow}(d_1 \vee \cdots \vee d_n)$, de modo que I es principal.

  Luego, la función $\kappa_D : D \to \mathcal{KI}D$ dada como
$$\kappa_D(d) = {\downarrow}d$$
  es un isomorfismo. Nótese que, como todo ideal compacto I es principal, el elemento $d \in D$ que lo genera es su mayor elemento, por lo cual I tiene supremo $\bigvee I = d$.

  Solo falta verificar que $\mathcal{I}D$ es coherente, pero esto es sencillo: Primero, todo ideal $I \in \mathcal{I}D$ es supremo de ideales coherentes:
$$I = \bigvee\{{\downarrow}d \mid d \in I\}.$$
  Además, el ideal total
$$1_{\mathcal{I}D} = D = {\downarrow}1_D$$
  es compacto y, dados ideales compactos ${\downarrow}d, {\downarrow}e \in \mathcal{KI}D$, tenemos que su ínfimo ${\downarrow}d \wedge {\downarrow}e = {\downarrow}(d \wedge e)$ es compacto.

□

Definición 8.18. *Sean A y B marcos coherentes. Decimos que un morfismo de marcos $f : A \to B$ es coherente si $f(\mathcal{K}A) \subseteq \mathcal{K}B$.*

Los marcos coherentes, junto con los morfismos coherentes, forman una categoría, a la cual denotamos como CohFrm. *Nótese que tenemos un funtor de inclusión* $\mathrm{CohFrm} \to \mathrm{Frm}$.

Por definición, un morfismo de marcos coherentes $f : A \to B$ se restringe a un morfismo de retículas (distributivas) $\mathcal{K}f : \mathcal{K}A \to \mathcal{K}B$. Además, dado un morfismo de retículas distributivas $g : D \to E$, definimos $\mathcal{I}g : \mathcal{I}D \to \mathcal{I}E$ como

$$\mathcal{I}g(I) = \bigvee\{\downarrow g(d) \mid d \in I\},$$

lo cual respeta supremos (ya que $I = \bigvee\{\downarrow d \mid d \in I\}$) y respeta ínfimos, pues

$$\begin{aligned}\mathcal{I}g(I) \wedge \mathcal{I}g(J) &= \bigvee\{\downarrow g(d) \mid d \in I\} \wedge \bigvee\{\downarrow g(e) \mid e \in J\}\\ &= \bigvee\{\downarrow g(d \wedge e) \mid d \in I, e \in J\}\\ &\leq \bigvee\{\downarrow g(x) \mid x \in I \cap J\}.\end{aligned}$$

(La otra comparación se sigue de la monotonía).

También es claro que las asignaciones $f \mapsto \mathcal{K}f$ y $g \mapsto \mathcal{I}g$ respetan la identidad y la composición de morfismos, por lo cual obtenemos funtores $\mathcal{I} : \mathrm{dLat} \to \mathrm{CohFrm}$ y $\mathcal{K} : \mathrm{CohFrm} \to \mathrm{dLat}$.

Teorema 8.19. *Los funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dLat} \arrow[r, shift left, "\mathcal{I}"] & \mathrm{CohFrm} \arrow[l, shift left, "\mathcal{K}"] \end{tikzcd}$$

constituyen una equivalencia.

Demostración. Dado que, para toda retícula distributiva D y todo marco coherente A, κ_D y ι_A son isomorfismos, basta demostrar que las familias de morfismos

$$\begin{aligned}\kappa_\bullet &= (\kappa_D \mid D \in \mathrm{dLat})\\ \iota_\bullet &= (\iota_A \mid A \in \mathrm{CohFrm})\end{aligned}$$

son transformaciones naturales

$$\begin{aligned}\kappa_\bullet &: \mathrm{id}_{\mathrm{dLat}} \to \mathcal{K}\mathcal{I}\\ \iota_\bullet &: \mathrm{id}_{\mathrm{CohFrm}} \to \mathcal{I}\mathcal{K}.\end{aligned}$$

Dado un morfismo de retículas distributivas $g : D \to E$, debemos verificar la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}\mathcal{I}D \arrow[d, "\mathcal{K}\mathcal{I}g"'] & D \arrow[l, "\kappa_D"'] \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{K}\mathcal{I}E & E \arrow[l, "\kappa_E"] \end{tikzcd}$$

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mathcal{I}g(\kappa_D(d)) &= \mathcal{I}g(\downarrow d)\\ &= \bigvee\{\downarrow g(x) \mid x \in \downarrow d\}\\ &= \bigvee\{\downarrow g(x) \mid x \leq d\}\\ &= \downarrow g(d)\\ &= \kappa_E(g(d)).\end{aligned}$$

Esto muestra la naturalidad de $\kappa_\bullet$.

Por otro lado, dado un morfismo de marcos coherentes $f : A \to B$ debemos verificar la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}\mathcal{K}A & A \arrow[l, "\iota_A"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{I}\mathcal{K}B \arrow[from=u, "\mathcal{I}\mathcal{K}f"'] & B \arrow[l, "\iota_B"] \end{tikzcd}$$

Primero notemos que, para $c \in A$ compacto, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(c)) &= \bigvee\{\downarrow f(x) \cap \mathcal{K}B \mid x \in \iota_A(c)\}\\ &= \bigvee\{\downarrow f(x) \cap \mathcal{K}B \mid x \leq c, x \in \mathcal{K}A\}\\ &= \downarrow f(c) \cap \mathcal{K}B\\ &= \iota_B(f(c)).\end{aligned}$$

Como todo elemento de A es supremo de compactos, podemos tomar $a \in A$ y encontrar $X \subseteq A$ con $a = \bigvee X$. Luego, como $\mathcal{I}\mathcal{K}f$, ι_A, ι_B y f son morfismos de marcos, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(a)) &= \mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(\bigvee X))\\ &= \bigvee\{\mathcal{I}\mathcal{K}f(\iota_A(c)) \mid c \in X\}\\ &= \bigvee\{\iota_B(f(c)) \mid c \in X\}\\ &= \iota_B(f(\bigvee X))\\ &= \iota_B(f(a)).\end{aligned}$$

Esto muestra la naturalidad de $\iota_\bullet$. □

El siguiente lema, junto con el lema de Zorn, nos servirán para mostrar que todo marco coherente es espacial.

Lema 8.20. *Sean A un marco y $d \in A$. Denotemos como $Z(d)$ al conjunto de los ideales de A que no contienen a d. Entonces*

1. *el copo $Z(d)$ es cerrado bajo uniones de familias dirigidas,*
2. *cada elemento máximo de $Z(d)$ es un ideal primo de A y,*
3. *si d es compacto, entonces cada máximo de $Z(d)$ es principal.*

Demostración. 1. Basta observar que $\mathcal{I}A$ es cerrado bajo uniones dirigidas.

2. Sea M un elemento máximo de $Z(d)$. Notemos que $M \neq A$, pues $d \notin M$. Para mostrar que es primo, veremos que $x, y \notin M$ implica $x \wedge y \notin M$. En efecto, si $x, y \notin M$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} M &< M \vee {\downarrow} x = j(M \cup \{x\}), \\ M &< M \vee {\downarrow} y = j(M \cup \{y\}), \end{aligned}$$

donde $j(S)$ es el ideal de A generado por $S \subseteq A$. Por la maximalidad de M, tenemos que $d \in j(M \cup \{x\})$ y $d \in j(M \cup \{y\})$. Luego, $d \leq m_1 \vee x$ y $d \leq m_2 \vee y$, para algunos $m_1, m_2 \in M$, por la construcción de j. Poniendo $m = m_1 \vee m_2$, tenemos $m \in M$, por lo cual

$$\begin{aligned} d &\leq (m_1 \vee x) \wedge (m_2 \vee y) \\ &\leq (m \vee x) \wedge (m \vee y) \\ &= m \vee (x \wedge y) \in j(M \cup \{x \wedge y\}) = M \vee {\downarrow}(x \wedge y). \end{aligned}$$

Luego, $x \wedge y \notin M$ pues, de otro modo, tendríamos $d \in M \vee {\downarrow}(x \wedge y) = M$, lo cual no sucede porque $M \in Z(d)$.

3. Supongamos que $d \in A$ es compacto y sea M un elemento máximo de $Z(d)$. Si $p = \bigvee M$, entonces tenemos $M \subseteq {\downarrow} p$, por lo cual basta mostrar que $p \in M$. Si fuera el caso que $p \notin M$, entonces M estaría propiamente contenido en el ideal ${\downarrow} p$. Por la maximalidad de M, tendríamos $d \leq p = \bigvee M$ y la compacidad de d implicaría que $d \in M$.

□

Nótese que, si $d \in A$ es un elemento compacto, entonces por el lema de Zorn y el punto 1, todo elemento de $Z(d)$ está contenido en un elemento máximo de $Z(d)$, el cual es un ideal primo principal de A, por los puntos 2 y 3.

Lema 8.21. *Todo marco coherente es espacial.*

Demostración. Sea A un marco coherente. Debemos ver que $U_A : A \to \mathcal{O}\mathrm{pt}A$ es inyectiva. Tomemos elementos $a, b \in A$ distintos (digamos $a \nleq b$). Entonces mostraremos que $U_A(a) \neq U_A(b)$ probando que existe $p \in U_A(a)$ con $p \notin U_A(b)$; es decir: un elemento irreducible $p \in A$ tal que $a \nleq p$ y $b \leq p$.

Dado que A es coherente, existe un compacto $d \in \mathcal{K}A$ tal que $d \leq a$ y $d \nleq b$ (de otro modo, tendríamos $a \leq b$, por la coherencia de A). Por el lema anterior, podemos tomar un ideal primo $I = {\downarrow} p$ que es máximo en $Z(d)$ y contiene a ${\downarrow} b \in Z(d)$. Notemos que

- $p \in \mathrm{pt}A$, pues I es primo,
- $a \nleq p$ pues, de otro modo, tendríamos $d \leq a \leq p$,
- $b \leq p$, pues I contiene a ${\downarrow} b$.

Luego, p es el elemento primo que buscábamos. □

Definición 8.22. *Sea S un espacio sobrio. Decimos que S es coherente si $\mathcal{O}S$ es un marco coherente.*

Sea $f : S \to T$ una función continua entre espacios coherentes. Decimos que f es coherente si $\mathcal{O}f : \mathcal{O}T \to \mathcal{O}S$ es un morfismo coherente. Es decir, si todo abierto compacto de T tiene preimagen compacta en S.

Los espacios coherentes con sus funciones continuas coherentes forman una categoría llamada CohTop.

De la definición anterior, es claro que la equivalencia $\mathrm{Sob} \simeq (\mathrm{Sp})^{\mathrm{op}}$ se restringe a una equivalencia $\mathrm{CohTop} \simeq (\mathrm{CohFrm})^{\mathrm{op}}$. (Nota: en algunos lugares de la literatura, a los espacios coherentes se les llama espacios espectrales).

Teorema 8.23 (Dualidad de Stone generalizada)**.** *La categoría de espacios coherentes es dual a la categoría de retículas distributivas:*

$$\mathrm{CohTop} \simeq (\mathrm{dLat})^{\mathrm{op}}.$$

Demostración. Se sigue de lo anterior:

$$\mathrm{CohTop} \simeq (\mathrm{CohFrm})^{\mathrm{op}} \simeq (\mathrm{dLat})^{\mathrm{op}}.$$

□

Un caso especial del teorema anterior es la dualidad de Stone clásica.

Definición 8.24. *Decimos que un espacio topológico es cero dimensional si existe una base de la topología que consiste en conjuntos cerrados-abiertos.*

Un espacio cero dimensional, compacto y Hausdorff es llamado un espacio de Stone.

Los espacios de Stone y las funciones continuas forman una categoría que denotamos como Stone.

Se puede probar que un espacio topológico es de Stone si, y solo si, es Hausdorff y coherente, y que todas las funciones continuas entre espacios de Stone son coherentes, de modo que la dualidad anterior se restringe como sigue.

Teorema 8.25 (Dualidad de Stone)**.**

$$\mathrm{Stone} \simeq (\mathrm{Bool})^{\mathrm{op}}.$$

Capítulo 9

Ejemplos relevantes

Sea A un marco y $j \in NA$. Sea $p \in pt(A_j)$, visto como un morfismo $p : A_j \to 2$. Así, el morfismo $p_j = p \circ j$ representa un punto en A, esto es, que todo punto en A_j es un punto en A. Por lo anterior, $ptA_j = \{p \in ptA \mid j(p) = p\}$. Para cualquier retícula distributiva, sea spec$A$ el conjunto de ideales primos de un marco A, equivalente al conjunto de filtros primos de A. Nótese que spec$A$ siempre es no vacío por el lema de Zorn; sin embargo, el conjunto de puntos de un marco A sí puede ser vacío.

Ejemplo 9.1. Sea $S \in \mathrm{Top}$ sobrio y T_1, y considérese el marco $\mathcal{O}(S)_{\neg\neg}$ que es el marco de puntos fijos de la doble negación, o el álgebra Booleana completa formada por los abiertos regulares de S, $R\mathcal{O}S$. Sea $p \in R\mathcal{O}S$; así, $p = \overline{s}'$ para algún $s \in S = \{s\}'$, ya que S es T_1. Nótese que

$$\begin{aligned}
\{s\}' \in R\mathcal{O}S &\iff \neg\neg\{s\}' = \{s\}' \\
&\iff \overline{\{s\}'}^{\circ} = \{s\}' \\
&\iff \overline{\{s\}}^{\circ} = \{s\}
\end{aligned}$$

Ahora bien, sea $U = \{s\}^{\circ}$, y nótese que $U \neq \varnothing$ porque $\{s\} = \overline{U}$. Por ello, s es un punto aislado en S. Por lo tanto, $R\mathcal{O}S$ es un álgebra Booleana completa sin átomos, por lo que el espacio de puntos del marco $R\mathcal{O}S$ es vacío. ■

Un área activa de investigación procura caracterizar los núcleos de un marco A para los que a_j es espacial, así como los marcos para los que todo cociente es espacial.

Ejemplo 9.2. Considérense $\{G \in \mathbb{Z}-\mathrm{Mod} \mid t(G) = G\} = \mathscr{T}_t$ la clase de grupos de torsión, y $\{G \in \mathbb{Z}-\mathrm{Mod} \mid t(G) = 0\} = \mathscr{F}_t$, la clase de grupos libres de torsión.Nótese que $\mathbb{T}_t$ es cerrada bajo submódulos, cocientes, isomorfismos, extensiones y productos, por lo que es una clase de torsión hereditaria. Ahora bien, las clases de torsión en la categoría de $\mathbb{Z}-\mathrm{Mod}$ forman un conjunto, $\mathbb{Z}$–tors, que a la vez es un marco. Esto es cierto también en el caso de $\mathbb{R}$-módulos y $\mathbb{Q}$-módulos. Estos marcos no son la topología de ningún espacio. ■

Parte IV

Temas selectos

Capítulo 10

La derivada de Cantor-Bendixon

Ejercicio 7. *Muestre que la categoría* Top_0 *de espacios topológicos* T_0 *reflexiva en* Top. *Es decir, que el funtor de inclusión* $\mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Top}$ *tiene un adjunto izquierdo.*

Recordemos que, dada una derivada $f \in DA$, definimos ∞ como el menor ordinal donde la cadena

$$f^0 \leq f^1 \leq \cdots \leq f^\alpha \leq f^{\alpha+1} \leq \cdots$$

se detiene. Esta construcción nos permite obtener el menor operador cerradura f^∞ que está por encima de f.

Ahora veremos que hay derivadas $f \in DA$ tales que su ordinal de cerradura ∞ es arbitrariamente grande.

Dado un espacio topológico S, denotaremos como $\mathcal{C}S$ al conjunto de los cerrados de S. Es decir,

$$\mathcal{C}S = \{u' \mid u \in \mathcal{O}S\}.$$

Además, dado un subconjunto $X \subseteq S$, decimos que un punto $x \in S$ es un punto límite de X si, para toda vecindad abierta $u \in \mathcal{O}S$ de x, existe un punto $y \in u \cap X$, $y \neq x$. Al conjunto de puntos límite de X lo denotamos como $\mathrm{lím}\, X$.

No es difícil verificar las siguientes propiedades.

- si $X \in \mathcal{C}S$, entonces $\mathrm{lím}\, X \in \mathcal{C}S$,
- si $X \in \mathcal{C}S$, entonces $\mathrm{lím}\, X \subseteq X$,
- si $X, Y \in \mathcal{C}S$ y $X \subseteq Y$, entonces $\mathrm{lím}\, X \subseteq \mathrm{lím}\, Y$.
- si $x, Y \in \mathcal{C}S$, entonces $\mathrm{lím}(X \cup Y) = \mathrm{lím}\, X \cup \mathrm{lím}\, Y$.

Ahora, dado un abierto $u\mathcal{O}S$, definimos $\mathrm{cbd}\, u = \mathrm{lím}(u')'$. Debido a las cuatro propiedades de arriba, se sigue que cbd es una función $\mathrm{cbd} : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ monótona que, además, infla, y respeta ínfimos (intersección). En otras palabras, cbd es un prenúcleo en $\mathcal{O}S$, al cual llamamos la derivada de Cantor-Bendixon.

Notemos que, dado un punto $x \in S$, tenemos $\mathrm{lím}(\{x\}) = \varnothing$, de modo que $\mathrm{cbd}(\{x\}') = S$.

En topología, un conjunto perfecto es un subconjunto cerrado tal que todos sus puntos son puntos de acumulación (es decir, el conjunto carece de puntos aislados).

Un conjunto es booleano si para cualquier elemento dentro del conjunto, este tiene complemento dentro del conjunto.

- La derivada de Cantor-Bendixson es una herramienta que permite construir conjuntos perfectos.
- La derivada de Cantor-Bendixson mide que tan booleano es un conjunto

Definición 10.1. *Para un marco A y elementos $a \leq b$, el intervalo $[a, b]$ es booleano si, como marco, este es booleano.*

En otras palabras, si $x \in [a, b]$ existe un único elemento $y \in [a, b]$ tal que $x \wedge y = a$ y $x \vee y = b$. Cuando existe este elemento y es de la forma

$$y = (x \succ a) \wedge b \text{ (ó } x = (y \succ a) \wedge b).$$

Por ejemplo, al sustituir a x obtenemos lo siguiente:

- $x \wedge y = ((y \succ a) \wedge b) \wedge y = y \wedge a \wedge b = a$
- $x \vee y = ((y \succ a) \wedge b) \vee y = ((y \succ a) \vee y) \wedge (b \vee y) = (y \succ a) \vee y) \wedge b = b.$

Notemos que si x es el complemento de y, $x \vee y = b$. Luego

$$(y \succ a) = (y \succ x \wedge y) \leq x \Rightarrow y \vee (y \succ a) \leq y \vee x = b.$$

Entonces $x = (y \succ a) \wedge b$.

Lema 10.2. *Sean $A \in Frm$ y $a \in A$. Sea $X \subseteq A$,*

$$X = \{x \in X | a \leq x \text{ y } [a, x] \text{ es booleano}\},$$

entonces $\bigvee X \in X$.

Demostración. Sea $b = \bigvee X$. Notemos que $a \leq \bigvee X$ así resta ver que $[a, b]$ es booleano.
Sea $y \in A$ tal que $a \leq y \leq b$. Sabemos que para cualquier $x \in X$, $[a, x]$ es booleano. Como $a \leq x \wedge y \leq x$ $\exists z(x) \in [a, x]$ tal que

$$z(x) \wedge (x \wedge y) = a \text{ y } z(x) \vee (x \wedge y) = x.$$

Tomemos $z = \bigvee\{z(x)|x \in X\}$, entonces $y \wedge z = y \wedge \bigvee\{z(x)|x \in X\}$.Al ser $z(x) \leq x$, entonces $z(x) \wedge x = z(x)$, luego $z(x) \wedge x \wedge y = z(x) \wedge y$, pero $z(x) \wedge (x \wedge y) = a$. Por lo tanto $y \wedge z = \bigvee\{z(x) \wedge y | x \in X\} = a$.
Resta ver $z \vee y = b$. Sabemos que $x = z(x) \vee (x \wedge y) = (z(x) \vee x) \wedge (z(x) \vee y)$, pero como $z(x) \leq x$, entonces $x = x \wedge (z(x) \vee y)$ y esto implica que $x \leq z(x) \vee y \leq b = \bigvee X$. Luego

$$y \vee z = y \vee \bigvee\{z(x)|x \in X\} = \bigvee\{y \vee z(x)|x \in X\} \leq b.$$

Además, $b = \bigvee X \leq \bigvee\{z(x) \vee y | x \in X\}$. Por lo tanto $y \vee z = b$. Así,hemos probado que el intervalo $[a, b]$ es booleano y de esta forma $b = \bigvee X \in X$. □

Definición 10.3. *Para cualquier marco A, si $a, x \in A$, decimos que x es* ***esencialmente mayor que*** *a $(a \lessdot x)$ si y sólo si*

$$a \leq x \text{ y } (x \succ a) = a.$$

Con esta relación entre elementos de un marco ya podemos definir la ***derivada de Cantor-Bendixson*** *como*

$$cbd^A(a) = \bigwedge\{x \in A | a \lessdot x\}.$$

Lema 10.4. *Sea $A \in Frm$. Para cualquier $a \in A$, $[a, cbd^A(a)]$ es el intervalo booleano más grande arriba de a. Es decir, para cualquier $x \in A$, si $[a, x]$ es booleano, entonces $x \leq cbd^A(a)$.*

Demostración. Supongamos que $[a, y]$ es un intervalo booleano y sea $x \in A$ tal que $a \lessdot x$. Sea $b = x \wedge y$, entonces $a \leq b \leq y$. Como $[a, y]$ es booleano existe $c \in [a, y]$ tal que

$$c \wedge b = a \text{ y } c \vee b = y.$$

Si $c \wedge x \wedge y \leq c \wedge y \leq a$, entonces $c \wedge y \leq (x \succ a) = a$. Como $a \leq x \wedge y = b$ tenemos que $c \wedge y \leq b$.
Así, $b = b \vee (y \wedge c) = (b \vee y) \wedge (b \vee c) = (b \vee y) \wedge y = y$. Con ello $b = x \wedge y = y$, es decir, $y \leq x$ para cualquier $x \in A$ con $a \lessdot x$. Entonces $y \leq \bigwedge\{x \in A | a \lessdot x\} = cbd^A(a)$.
Veamos que $[a, cbd^A(a)]$ es booleano. Sea $d = cbd^A(a)$ y $y \in A$ tal que $a \leq y \leq d$. Tomemos $z = (y \succ a)$, entonces $a \leq (y \succ a) = z$ y $y \wedge z = y \wedge (y \succ a) = a$. Con ello $((y \vee z) \succ a) = (y \succ a) \wedge (z \succ a) = a$. De aquí que

$$a \leq z \vee y \text{ y } ((y \vee z) \succ a) = a,$$

es decir, $a \lessdot (y \vee z)$. Por lo tanto, $d = \bigwedge\{x \in A | a \lessdot x\} \leq y \vee z$.
Notemos que

$$y \wedge (z \wedge d) = (y \wedge z) \wedge d = a \wedge d = a$$

y

$$y \vee (z \wedge d) = (y \vee z) \wedge (y \vee d) = (y \vee z) \wedge d = d,$$

es decir, $z \wedge d$ es el complemento de y en $[a, cbd^A(a)]$. Por lo tanto $[a, cbd^A(a)]$ es booleano. □

Lema 10.5. *Sea $A \in Frm$, para cualesquiera $a, b, y, x \in A$ tenemos que:*

1. $b \leq a \lessdot x \leq y \Rightarrow b \lessdot y$.
2. *Si $a \lessdot x$ y $b \lessdot y$, entonces $a \wedge b \lessdot x \wedge y$.*

Demostración. Para la primera parte, por hipótesis $a \leq x$ y $(x \succ a) = a$, de aqui que $b \leq y$. Resta ver que $(y \succ b) = b$. Sabemos que $b \leq (y \succ b)$. Ahora si $x \leq y$, entonces $(y \succ b) \wedge x \leq (y \succ b) \wedge y = y \wedge b = b \leq a$, así $(y \succ b) \wedge x \leq a$. Por definición de implicación $(y \succ b) \leq (x \succ a) = a \leq y$. Con ello $(y \succ b) = (y \succ b) \wedge y = y \wedge b \leq b$. De esta forma $(y \succ b) = b$.

Por lo tanto $b \lessdot y$.

Para la segunda parte, notemos que $a \leq x$ y $b \leq y$, entonces $a \wedge b \leq x \wedge y$. Veamos que $((x \wedge y) \succ (a \wedge b)) = a \wedge b$.
Sea $z = ((x \wedge y) \succ (a \wedge b))$, luego $z \wedge (x \wedge y) = (x \wedge y) \wedge (a \wedge b) \leq a \wedge b \leq b$. Entonces

$$z \wedge x \leq (y \succ b) = b \leq y \Rightarrow z \wedge x \leq z \wedge x \wedge y \leq a \wedge b \leq a$$
$$\Rightarrow z \leq (x \succ a) = a.$$

Así, $z = z \wedge a \leq z \wedge x \leq b$ implica que $z \leq a$ y si $z \leq b$, entonces $z \leq a \wedge b$. Además también se cumple que $a \wedge b \leq z$, pues $(a \wedge b) \leq ((x \wedge y) \succ (a \wedge b))$. Por lo tanto $a \wedge b \lessdot x \wedge y$. □

En el contexto de teoría de marcos, la derivada de Cantor-Bendixson en el marco A es el operador

$$cbd : A \to A$$
$$cbd(a) = \bigwedge\{x \in A | a \lessdot x\}.$$

Tomemos ahora un marco A y $j \in NA$. Si $j \in NA$, entonces A_j es un marco y su derivada de Cantor-Bendixon es

$$cbd^{A_j} : A_j \to A_j$$
$$cbd^{A_j}(a) = \bigwedge\{x \in A_j | a \lessdot x\}.$$

Recordemos que si $j \in NA$, A_j es un conjunto implicativo, es decir, $(x \succ a) \in A_j$. Entonces

$$\text{esencialmente mayor en } A_j \Rightarrow \text{ esencialmente mayor en } A.$$

Consideremos la siguiente composición

$$A \xrightarrow{j} A_j \xrightarrow{cbd^{A_j}} A_j \xrightarrow{i} A$$

Esta composición nos da un operador de A que llamamos cbd_j^A y al fijarnos puntualmente en la composición tenemos que

$$cbd_j^A : A \to A$$
$$cbd_j^A(a) = \bigwedge\{x \in A_j | j(a) \lessdot x\}.$$

Notemos que $cbd_j^A \neq cbd^{A_j}$ pues el primero es un operador en A y el segundo en A_j. Si $j = id_A$ entonces $cbd_j^A = cbd^{A_j}$.

En lo que sigue, cuando sea claro el marco en el que se este trabajando omitiremos escribir el supraíndice.

Teorema 10.6. *Sea $A \in Frm$ y $j \in NA$, entonces $cbd_j^A \in PA$.*

Demostración. Sea $j \in NA$ y $x \in A$. Tomemos $e_x = j \circ u_x \circ v_x \circ j$. Como $j, u_x, v_x \in NA$, entonces e_x es al menos un prenúcleo. Sea $e = \bigwedge\{e_x | x \in A\}$, entonces $e \in PA$, pues es ínfimo de prenúcleos.

Afirmación: $cbd_j = e$.

Veamos que $cbd_j \leq e$. Sean $a \in A$ y $x \in A_j$ tales que $j(a) \lessdot x$. Por como se definió e_x, $e_x(a) = (j \circ u_x \circ v_x \circ j)(a) = j(x \vee (x \succ j(a))) = j(x \vee j(a)) = j(x) = x$ pues $j(a) \lessdot x$ y $x \in A_j$. Además, $e \leq e_x$, entonces

$$e(a) \leq e_x(a) = x \leq \bigwedge\{x \in A | j(a) \lessdot x\} = cbd_j(a).$$

Por lo tanto $e \leq cbd_j$.

Para la otra desigualdad. Tomamos $x, a \in A$ y $z = x \vee (x \succ j(a)) = (u_x \circ v_x \circ j)(a)$ y $y = e_x(a) = j(z) = (j \circ u_x \circ v_x \circ j)(a)$. Entonces $j(a) \leq z \leq j$.
Notemos que

$$(y \succ j(a)) = (j(z) \succ j(a)) = (z \succ j(a)) = ((x \vee (x \succ j(a)) \succ j(a)) = j(a).$$

Como $j(a) \leq y$ entonces $j(a) \lessdot y$ y por la definición de derivada para el núcleo j tenemos que $cbd_j \leq y = e_x(a)$.
Así, $cbd_j \leq e_x$ $\forall x \in A$. Por lo tanto $e = cbd_j$ y $cbd_j \in PA$. $\square$

Lema 10.7. *Si $A \in Frm$ y $j \in NA$, la cerradura idempotente de cbd_j, cbd_j^∞, es el núcleo mas pequeño que colapsa a todos los intervalos $[a, b]$ en A si $[j(a), j(b)]$ es booleano en A_j.*

Demostración. Como $cbd_j \in PA$, entonces $(cbd_j)^\infty \in$ es un nucleo.
Sean $a, b \in A$ tales que $[j(a), j(b)]$ es booleano en A_j. Veamos que $((cbd_j)^\infty)(a) = ((cbd_j)^\infty)(b)$. Notemos

$$b \leq j(b) \leq cbd^{A_j}(j(a)) = cbd_j^A(a) \leq (cbd_j^A)^\infty(a)$$

Como $(cbd_j^A)^\infty \in NA$ entonces

$$((cbd_j^A)^\infty)(b) \leq ((cbd_j^A)^\infty)((cbd_j^A)^\infty(a)) = (cbd_j^A)^\infty(a).$$

Así, $cbd_j(b) \leq cbd_j(a)$.
Para la otra desigualdad notemos que, si $a \leq b$ entonces

$$((cbd_j^A)^\infty)(a) \leq ((cbd_j^A)^\infty)(b).$$

Por lo tanto, $((cbd_j^A)^\infty)(a) = ((cbd_j^A)^\infty)(b)$.
Ahora solo nos queda ver que $(cbd_j^A)^\infty$ es el menor núcleo que colapsa intervalos que son booleanos bajo j en A_j. Supongamos que existe un operador $k \in NA$ tal que cumple la propiedad mencionada.
Queremos ver que si $s \in A$, entonces $(cbd_j^A)(a) \leq k(a)$. Tomemos el intervalo $[a, cbd_j^A(a)]$ en A, entonces $[j(a), j(cbd_j^A(a))]$ es un intervalo en A_j. Notemos que

$$j(cbd_j^A)(a)) = cbd_j^A(a) = cbd^{A_j}(j(a)).$$

Así, $[j(a), j(cbd_j^A(a))] = [j(a), cbd^{A_j}(j(a))]$. Por lema 10.4 este es booleano.

Como k colapsa los intervalos de A que son booleanos en A_j bajo j, entonces

$$k(cbd_j^A(a)) = k(a)$$

de esta forma podemos ver que

$$cbd_j^A(a) \leq k(a).$$

Así,

$$cbd_j^A(a) \leq (cbd_j^A)^\infty \leq k(a).$$

Por lo tanto $(cbd_j^A)^\infty$ es el menor núcleo que cumple la propiedad mencionada. □

Si consideramos $j = id$ en el lema anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 10.8. *Para cualquier $A \in$Frm, $(cbd^A)^\infty$ es el núcleo mas pequeño que colapsa a todos los intervalos booleanos de A.*

Teorema 10.9. *Sea $A \in$Frm, entonces para cualesquiera $j \in NA$ y $a \in A$*

$$cbd_j^A(a) = (w_{j(a)} \succ j)(a)$$

Notemos que la implicación que se enuncia en el Teorema es en NA que no se define como la evaluación puntual.

Demostración. Sean $j \in NA$ y $a \in A$ y consideremos $b = cbd_j^A(a)$ y $k = (w_{j(a)} \succ j)$. Veamos que $b = k(a)$
Para la desigualdad $b \leq k(a)$. Tomemos el núcleo $l = u_b \wedge v_{j(a)}$. Notemos que

$$j(a) \leq (w_{j(a)} \succ j)(a) \Rightarrow a \leq j(a) \leq k(a).$$

Afirmación: $l \leq k$.

Sea $x \in A$ y $y = (x \succ j(a))$, entonces

$$\begin{aligned} y \wedge w_{j(a)}(x) &= y \wedge ((x \succ j(a)) \wedge j(a)) \\ &= y \wedge (y \succ j(a)) \\ &= y \wedge j(a) \leq j(a) \end{aligned}$$

Entonces

$$y \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x) \leq j(a) \wedge v_{j(a)}(x) = (j(a) \succ x) \wedge j(a) \leq x.$$

Luego

$$x \vee (y \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x)) = (y \vee x) \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x) \leq x \tag{10.1}$$

Recordemos que $((x \vee (x \succ j(a))) \succ j(a)) = j(a)$ y además $j(a) \leq (x \succ j(a)) \leq x \vee (x \succ j(a))$, es decir,

$$j(a) \lessdot (x \vee (x \succ j(a))) = x \vee y \leq j(x \vee y).$$

Luego $j(a) \lessdot j(x \vee y)$.
Como $j(x \vee y) \in A_j$, entonces $b = cbd_j^A(a) = cbd^{A_j}(a) \leq j(x \vee y)$. Así,

$$\begin{aligned} b \vee x \leq j(x \vee y) \vee x = j(x \vee y) &\Rightarrow \forall x \in A, x \vee b = u_b(x) \leq j(x \vee y). \\ &\Rightarrow u_b(x) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \\ &\leq j(x \vee y) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \\ &\leq j(x \vee y) \wedge j(v_{j(a)}(x)) \wedge j(w_{j(a)}(x)) \\ &= j((y \vee x) \wedge w_{j(a)}(x) \wedge v_{j(a)}(x)) \leq j(x). \end{aligned}$$

La última desigualdad la obtenemos de aplicar j en (10.1).

Como $l = u_b \vee v_{j(a)}$ sustituyendo obtenemos que

$$\begin{aligned} (l \wedge w_{j(a)})(x) \leq j(x) &\Rightarrow l \leq w_{j(a)} \succ j = k \\ &\Rightarrow l(j(a)) \leq k(j(a)). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} l(j(a)) = (u_b \wedge v_{j(a)})(j(a)) &= (b \vee j(a)) \wedge (j(a) \succ j(a)) \\ &= b \vee j(a) = cbd_j^A(a) \vee j(a) \\ &= cbd_j^A(a) \end{aligned}$$

y $j(a) \leq k(a) \leq k(k(a)) = k(a)$. Por lo tanto $b \leq k(a)$.

Para la otra desigualdad. Sea $y \in A_j$ tal que $j(a) \lessdot y$, entonces $a \leq j(a) \leq y = j(y)$ y $w_{j(a)}(y) = ((y \succ j(a)) \succ j(a)) = (j(a) \succ j(a)) = 1$.

Luego

$$\begin{aligned} k(a) \leq k(y) = k(y) \wedge 1 = k(y) \wedge w_{j(a)}(y) & \\ \leq (k \wedge w_{j(a)})(y) & \\ = ((w_{j(a)} \succ j) \wedge w_{j(a)})(y) & \\ = (w_{j(a)} \wedge j)(y) & \\ \leq j(y) = y. & \end{aligned}$$

Así, $k(a) \leq y$, para cualquier $y \in A_j$ que cumpla $j(a) \lessdot y$. Entonces $k(a) \leq \bigwedge\{y \in A_j | j(a) \lessdot y\} = cbd_j^A(a) = b$.
Por lo tanto $k(a) = b$. □

Corolario 10.10. *Sea $A \in Frm$ para cualquier $j \in NA$, $cbd_j^A = tp \Leftrightarrow j = w_a$, donde $a = j(0)$.*

Demostración. Sean $A \in Frm$ y $j \in NA$. Sea $a = j(0)$. Como $j(j(0)) = j(0)$, entonces $j \leq w_{j(0)} = w_a$. Por el teorema anterior $cbd_j^A(0) = (w_a \succ j)(0)$. De aquí que

$$\begin{aligned} cbd_j^A = tp &\Leftrightarrow 1 = cbd_j^A(0) = (w_a \succ j)(0) \\ &\Leftrightarrow (w_a \succ j) = 1 \\ &\Leftrightarrow w_a \leq j \\ &\Leftrightarrow w_a = j. \end{aligned}$$

□

Notemos que para cada marco A le asignamos su derivada cbd^A. Recordemos que NA también es un marco, entonces de manera similar podemos asignarle su derivada cbd^{NA}. Esto mismo puede hacerse para cada $N^\alpha A$ del ensamble.

Para identificar las distintas derivadas en los primeros niveles de la torre de ensambles, introducimos más notación. Como notaremos mas adelante, existe una relación entre ellas.

Notación:

- La derivada en A:
$$cbd_j^A : A \to A$$
$$cbd_j^A(a) = \bigwedge\{x \in A_j | j(a) \lessdot x\}$$

- La derivada en NA:
$$Cbd_J^A = cbd_J^{NA} : NA \to NA$$
$$Cbd_J^A(k) = \bigwedge\{l \in NA_J | J(k) \lessdot l\}$$

- La derivada en N^2A:
$$CBD_{\mathfrak{J}}^A = Cbd_{\mathfrak{J}}^{NA} = cbd_{\mathfrak{J}}^{N^2A} : N^2A \to N^2A$$
$$CBD_{\mathfrak{J}}^A(K) = \bigwedge\{L \in N^2A_{\mathfrak{J}} | \mathfrak{J}(K) \lessdot L\}$$

- La derivada en N^3A:
$$\mathbb{CBD}_{\mathfrak{j}}^A = CBD_{\mathfrak{j}}^{NA} = Cbd_{\mathfrak{j}}^{N^2A} = cbd_{\mathfrak{j}}^{N^3A} : N^3A \to N^3A$$
$$\mathbb{CBD}_{\mathfrak{j}}^A(\mathfrak{K}) = \bigwedge\{\mathfrak{L} \in N^3A_{\mathfrak{j}} | \mathfrak{j}(\mathfrak{K}) \lessdot \mathfrak{L}\}$$

Siguiendo esta idea podemos construir la derivada para los distintos niveles de la torre de ensambles.

Teorema 10.11. *Sea $A \in Frm$, entonces $(cbd_j^A)^\infty = Cbd^A(j)$. Para cada $j \in NA$.*

Demostración. Veamos que $(cbd_j^A)^\infty \leq Cbd^A(j)$ y $Cbd^A(j) \leq (cbd_j^A)^\infty$.
Sean $j, k \in NA$ tales que $j \lessdot k$. Sea $x \in A$ y definimos $a = k(x)$, entonces $a \leq j(a) \leq k(a) = k(k(x)) = k(x) = a$, es decir, $j(a) = k(a) = a$. Así,

$$k \leq w_a \Rightarrow (w_a \succ j) \leq (k \succ j) = j$$

Por el teorema anterior

$$cbd_j^A(a) = (w_a \succ j)(a) \leq j(a) = a \Rightarrow cbd_j^A(a) \leq a$$

Al ser cbd_j^A un prenúcleo se cumple también $a \leq cbd_j^A(a)$. Por lo tanto, $cbd_j^A(a) = a$.
Veamos por inducción sobre los ordinales que $a = cbd_j^\alpha(a)$. Si $\alpha = 0$ obtenemos el caso anterior.
Tomemos $\alpha = \beta^+$ y supongamos que $cbd_j^\beta(a) = a$. Entonces

$$cbd_j^\alpha(a) = cbd_j(cbd_j^\beta(a)) = cbd_j(a) = a.$$

Finalmente si α es ordinal límite y suponemos que para cualquier ordinal $\beta \leq \alpha$, $cbd_j^\beta(a) = a$ obtenemos que

$$cbd_j^\alpha(a) = \bigvee\{cbd_j^\beta(a) | \beta \leq \alpha\} = a.$$

Como esta propiedad se cumple para cualquier ordinal, en particular se cumple para $cbd_j^\infty(a) = a$. Entonces

$$cbd_j^\infty(x) = cbd_j^\infty(a) = a = k(x), \quad \forall x \in A$$

Así $cbd_j^\infty \leq k$, $\forall k \in NA$ tal que $j \lessdot k$ y por la definición de derivada obtenemos $cbd_j^\infty \leq Cbd(j)$.
Para la otra desigualdad. Sea $x \in A$ y consideremos $a = cbd_j^\infty(x)$. Entonces

$$a \leq j(a) \leq cbd_j(a) = cbd_j(cbd_j^\infty(x)) = cbd_j^\infty(x) = a$$

Así, $j(a) = a$h con ello $j \leq w_a$. Por el teorema anterior

$$\begin{aligned} a = cbd_j(a) = (w_{j(a)} \succ j)(a) = (w_a \succ j)(a) &\Rightarrow a = (w_a \succ j)(a) \\ &\Rightarrow (w_a \succ j) \leq w_a \end{aligned}$$

y $j \leq (w_a \succ j)$. De esta forma

$$(w_a \succ j) = (w_a \succ j) \wedge w_a = w_A \wedge j = j \Rightarrow j \lessdot w_a$$

Luego al evaluar ambos operadores en x obtenemos

$$Cbd(j) \leq w_a \Rightarrow Cbd(j)(x) \leq w_a(x) \leq w_A(a) = a = cbd_j^\infty(x), \quad \forall x \in A.$$

Por lo tanto $cbd_j^\infty = Cbd(j)$.

$\square$

Lema 10.12. *Sea $A \in Frm$, entonces*

$$Cbd(v_b \vee j \vee u_a) = v_b \vee Cbd(j) \vee u_a = v_b \circ Cbd(j) \circ u_a$$

para todo $a, b \in A$ y $j \in NA$.

Demostración. Recordemos que los supremos entre prenúcleos se relacionan con la composición. Con ello obtenemos la segunda igualdad. Para la otra mostremos que se cumplen las desigualdades

$$Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a \text{ y } Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \geq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a.$$

Notemos que $Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a$ ya que $u_a, v_b, Cbd(j) \leq Cbd(v_b \vee j \vee u_a)$, pues Cbd infla y es monótona.
Para la otra desigualdad como Cbd es un prenúcleo obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a) &\leq Cbd(u_b \wedge v_a) \wedge Cbs(v_b \vee j \vee u_a) \\ &= Cbd((u_b \vee v_a) \wedge (v_b \vee j \vee u_a)) \\ &= Cbd((u_b \wedge v_a \wedge v_b) \vee (u_b \wedge v_a \wedge j) \vee (u_b \wedge v_a \wedge u_a)) \\ &= Cbd(u_b \wedge j \wedge v_a) \leq Cbd(j). \end{aligned}$$

Entonces $u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq Cbd(j)$. Haciendo supremos con v_b y u_a en ambos lados de la desigualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} v_b \vee Cbd(j) \vee u_a &\geq v_b \vee (u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a)) \vee u_a \\ &= v_b \vee Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \vee u_a \\ &= Cbd(v_b \vee j \vee u_a). \end{aligned}$$

Así $Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a$. Por lo tanto obtenemos la igualdad buscada. □

Notemos que para cada nivel del ensamble, la derivada se denota de una forma diferente. En relación con el teorema anterior se obtiene la siguiente notación la cual se utiliza solo para simplificar la escritura.

Notación:

- **Nivel 0**: Se menciona en el teorema anterior.
- **Nivel 1**: $NA \in Frm \Rightarrow (cbd_j^{NA})^\infty = Cbd^{NA}(j)\ \forall j \in N^2A$
- **Nivel 2**: $N^2A \in Frm \Rightarrow (cbd_j^{N^2A})^\infty = Cbd^{N^2A}(j)\ \forall j \in N^3A$
- **Nivel 3**: $N^3A \in Frm \Rightarrow (cbd_j^{N^3A})^\infty = Cbd^{N^3A}(j)\ \forall j \in N^4A$
- $\ldots$

Si tomamos $j = id$

- **Nivel 0**: $(cbd^A)^\infty = Cbd^A(id)$.
- **Nivel 1**: $NA \in \mathit{Frm} \Rightarrow (cbd^{NA})^\infty = Cbd^{NA}(id)$, $id \in N^2A$
- **Nivel 2**: $N^2A \in \mathit{Frm} \Rightarrow (cbd^{N^2A})^\infty = Cbd^{N^2A}(id)$, $id \in N^3A$
- **Nivel 3**: $N^3A \in \mathit{Frm} \Rightarrow (cbd^{N^3A})^\infty = Cbd^{N^3A}(id)$, $id \in N^4A$
- ...

La notación que usaremos para la identidad y la constante uno para los distintos niveles de la torre es la siguiente

$$id, tp \in NA, \quad Id, Tp \in N^2A, \quad ID, TP \in N^3A.$$

También se introduce nueva notación para facilitara la escritura de las derivadas en los distintos niveles y la relación que hay entre ellas según el teorema 10.11.

- $NA:$
  $\delta = Cbd(id) = cbd^\infty$
  $\theta = CBD(Id)(id) = Cbd^\infty(id)$
  $\xi = \mathbb{CBD}(ID)(Id)(id) = CBD^\infty(Id)(id)$
- $N^2A:$
  $\Delta = CBD(Id) = Cbd^\infty$
  $\Theta = \mathbb{CBD}(ID)(Id) = CBD^\infty(Id)$
  $\Xi = \mathbb{CBD}^\infty(ID)(Id)$
- $N^3A:$
  $\Delta = \mathbb{CBD}(ID) = CBD^\infty$
  $\Theta = \mathbb{CBD}^\infty(ID)$
  $\Xi = \ldots$

Teorema 10.13. *Para A ∈Frm*

1. *A es booleano $\Leftrightarrow cbd(0) = 1$*
2. *NA es booleano $\Leftrightarrow \delta = tp \Leftrightarrow \delta(0) = 1$*
3. *N^2A es booleano $\Leftrightarrow \theta = tp \Leftrightarrow \theta(0) = 1$*
4. *N^3A es booleano $\Leftrightarrow \xi = tp \Leftrightarrow \xi(0) = 1$*
5. *...*

Demostración. 1. Si A es booleano, por el lema 10.4 $[0, cbd(0)]$ es el intervalo más grande por arriba de 0 que es booleano, pero el intervalo más grande es $[0, 1]$. De aqui que $cbd(0) = 1$. Si $cbd(0) = 1$, entonces $[0, cbd(0)]$ es el intervalo booleano mas grande por arriba del 0, pero el intervalo es $[0, 1] = A$.

2. $\delta = Cbd(id)$, por el lema 10.4, $0 = id \in NA$, entonces $[id, Cbd(id)]$ es el intervalo más grande por arriba de id que es booleano, pero el intervalo booleano más grande por arriba de id es $[id, tp] \Leftrightarrow \delta = Cbd(id) = tp$, pero eso solo ocurre si y sólo si $Cbd(id)(0) = Cbd(0) = 1 \Leftrightarrow \delta(0) = 1$.

3. N^2A es booleano $\Leftrightarrow$ por el lema 10.4 $[Id, \theta(id)]$ es el intervalo más grande por arriba de Id que es booleano $\Leftrightarrow \theta(id) = Tp \Leftrightarrow \theta = tp$.

4. Para este inciso se usa el mismo argumento, pero para N^3A, pues $\xi = \mathbb{CBD}(ID)(Id)(id)$ y $\xi = tp \Leftrightarrow \mathbb{CBD}(ID)(Id)(id) = Tp \Leftrightarrow \mathbb{CBD}(ID) = TP$.

$\square$

Teorema 10.14. *Para $A \in Frm$ y $j \in NA$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $cbd_j = j$

2. $Cbd(j) = j$

3. $\Delta(j) = j$.

Corolario 10.15. *Para $A \in Frm$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $cbd = id$

2. $\delta = id$

3. $\theta = id$.

10.1. El caso espacial

El contexto original en que se definió la derivada de Cantor-Bendixson fue para espacios topológicos. Veremos cómo se relaciona esta construcción con la construcción de arriba.

Definición 10.16. *Si S es un espacio topológico y $Y, X \subseteq S$ subconjuntos cerrados del espacio. Decimos que Y es una parte no esencial de X, denotado por $Y \sqsubset X$ si*

$$Y \subseteq X \quad y \quad X = (X - Y)^{-}.$$

Además para cualquier $X \subseteq S$ cerrado, $X \in CS$

$$lim_S(X) = \left(\bigcup\{Y \in CS | Y \sqsubset X\}\right)^{-}$$

Recordemos que OS es un marco y la implicación en OS esta dada por

$$(V \succ U) = (V' \cup U)^{\circ}$$

y la negación

$$\neg U = U^{-\prime}$$

para cualesquiera $U, V \in OS$.
Además los ínfimos arbitrarios se calculan de la siguiente forma: $\bigvee U = (\bigcap U)^{\circ}$.

Lema 10.17. *Para cualquier espacio topológico S se cumple*

$$Y \sqsubset X \Leftrightarrow X' \lessdot Y', \quad U \lessdot V \Leftrightarrow V' \sqsubset U',$$

donde $X, Y \in CS$ y $U, V \in OS$. Además se cumple que

$$lim_S(X)' = cbd^{OS}(X'), \quad cbd^{OS}(U)' = lim_S(U').$$

Demostración. Sean $X, Y \in CS$. Tenemos que

$$X' \lessdot Y' \Leftrightarrow (Y' \succ X') = X' \Leftrightarrow (Y' \cup X)^\circ = X'.$$

Luego $(Y' \cup X)^\circ = (Y' \cap X)'^\circ = (Y' \cap X)^{-\,\prime}$. Así.

$$X \lessdot Y' \Leftrightarrow X' = (Y' \cap X)^{-\prime} \Leftrightarrow X = (Y' \cap X)^- \Leftrightarrow Y \sqsubset X.$$

Para la otra equivalencia basta con cambiar X' y Y' por U y V respectivamente.
Ahora sea $X \in CS$, entonces

$$cbd(X') = \left(\bigcap\{V \in OS | X' \lessdot V\}\right)^\circ = \left(\bigcap\{V \in OS | V' \sqsubset X\}\right)^\circ.$$

Luego

$$\begin{aligned} cbd(X')' &= \left(\bigcap\{V \in OS | X' \lessdot X\}\right)^{\circ\,\prime} \\ &= \left(\bigcup\{V \in OS | V' \sqsubset X\}\right)^{\prime -} \\ &= \left(\bigcup\{V' \in OS | V' \sqsubset X\}\right)^{-} \\ &= \left(\bigcup\{V \in CS | V' \sqsubset X\}\right)^{-} \\ &= lim_S(X). \end{aligned}$$

Para la otra igualdad basta con cambiar X' por U. □

Ahora tenemos un lema dual al lema 10.4 que nos da información sobre el espacio topológico. Para este lema solo hay que recordar que los puntos límite de un subconjunto $X \subseteq CS$ con S espacio topológico, son aquellos puntos que no son aislados en X. Un punto aislado de X, $p \in X$, es aquel para el cual existe un abierto $U \in OS$ tal que $X \cap U = \{p\}$.

Lema 10.18. *Sea S un espacio topológico T_0. Para cualquier $X \in CS$ el conjunto $lim_S(X) \subseteq X$ es el conjunto de puntos limite de X.*

Por la dualidad que se tiene entre cbd y lim, podemos traducir un problema de marcos a el espacio topológico correspondiente o viceversa. En particular ocupando los lemas 10.4, 10.17 y 10.18 podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\text{S es booleano } &\Leftrightarrow cbd^{\mathcal{O}S}(\varnothing) = S \\ &\Leftrightarrow lim_S(S) = \varnothing \\ &\Leftrightarrow S \text{ no tiene puntos aislados.} \end{aligned}$$

Ejemplo 10.19. 1. El operador cerradura para cbd, cbd^∞, puede ser tan grande como queramos.

2. Sea Γ un ordinal lo suficientemente grande. Entonces tenemos el marco Γ^+ pero ahora nos tomamos el orden inverso de tal forma que que Γ es el cero del marco y $0 = \varnothing$ es el uno del marco. Ahora los supremos serían los mínimos o la intersección y los infimos la unión.
   Notemos que para $\alpha \neq 0$, $cbd(\alpha) = \alpha$ si y sólo si α es un ordinal límite

$$\bigwedge\{\kappa \leq \Gamma | \alpha \lessdot \kappa\} = cbd(\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow \bigcup\{\kappa \leq \Gamma | \alpha \lessdot \kappa\} = \{\kappa \leq \Gamma | \alpha > \kappa \text{ y } (\kappa \succ \alpha) = \alpha\} = \alpha$$

   pues observemos que para cualquier κ,

$$(\kappa \succ \alpha) = \bigcap\{\beta \leq \Gamma | \beta \cup \kappa \leq \alpha\}$$

   entonces $(\kappa \succ \alpha) = \alpha \Leftrightarrow \kappa < \alpha$.
   Sólo los límites y el cero son puntos fijos de cbd. Entonces, al obtener $Cbd(id) = cbd^\infty = \delta$, nos quedará que Γ_δ es el conjunto de ordinales límite menores o iguales que Γ. Si seguimos iterando Cbd tendríamos que

$$Cbd(id) \text{ nos da a los ordinales límites.}$$

$$Cbd^2(id) \text{ nos da a los ordinales límites de los límites.}$$

$$\ldots$$

3. Considera el intervalo $[0, 1]$ en los reales con el orden usual. Entonces $[0, 1]$ es un marco linealmente ordenado donde los supremos e ínfimos se calculan como siempre. Notemos que aquí $cbd = id$ pues

$$cbd(a) = \bigwedge\{0 \leq b \leq 1 | a \lessdot b\} = \bigwedge\{0 \leq b \leq 1 | a \leq b \text{ y } b \succ a = a\},$$

   pero $(b \succ a) = a \Leftrightarrow a < b$. Entonces $cbd(a) = \wedge\{0 \leq b \leq a \text{ y } a < b\} = a$. Así, $cbd = id \Rightarrow cbd^\infty = id$, por el corolario 3 $\theta = id$.

■

Capítulo 11

Existencia de productos y coproductos

11.1. Productos de marcos

Teorema 11.1 (Producto de marcos)**.** *Sea* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ *de marcos arbitraria y sea* L *el producto cartesiano de los* A_λ *(vistos como conjuntos). Entonces* L*, dotado con los operadores puntuales* $\wedge, \bigvee$*, es un marco y, equipado con las proyecciones canónicas*

$$\begin{aligned} p_\lambda : L &\to A_\lambda \\ a &\mapsto p_\lambda(a) = a_\lambda \end{aligned}$$

satisface la propiedad universal del producto de los A_λ*.*

Lema 11.2. $(L, \leq, \wedge, 0, \bigvee, 1)$*, con* $0 := (0_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}$ *y* $1 := (1_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}$ *es un marco.*

Demostración. $\leq$ es orden parcial ya que:

$$\begin{aligned} x \leq x &\iff x_\lambda \leq x_\lambda \forall\lambda \in \mathscr{I}. \\ x \leq y, y \leq x &\implies x_\lambda \leq y_\lambda, y_\lambda \leq x_\lambda, \forall\lambda \in \mathscr{I} \\ &\implies x_\lambda = y_\lambda \forall\lambda \in \mathscr{I} \\ &\implies x = y. \\ x \leq y, y \leq z &\implies x_\lambda \leq y_\lambda, y_\lambda \leq z_\lambda \forall\lambda \in \mathscr{I} \\ &\implies x_\lambda \leq z_\lambda \forall\lambda \in \mathscr{I} \\ &\implies x \leq z. \end{aligned}$$

□

Para $x, y \in A$, ya que $x_\lambda \wedge_\lambda y_\lambda \in A_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathscr{I}$, entonces $x \wedge_{\mathscr{I}} y \in A$.
Luego, ya que $0_\lambda \leq_\lambda x_\lambda$ para todo $x_\lambda \in A_\lambda$ y para cada $\lambda \in \mathscr{I}$, entonces $0_{\mathscr{I}} \leq_{\mathscr{I}} x$ para todo $x \in A$.
Similarmente, para $X \subseteq A$ arbitrario, consideramos los subconjuntos $X_\lambda \subseteq A_\lambda$ formados por los x_λ componentes, y tomamos $\bigvee X_\lambda =: s_\lambda \in A_\lambda$, para cada $\lambda \in \mathscr{I}$.

Entonces $\bigvee_{\mathscr{I}} X = (s_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}} \in A$.
Además, como $1_\lambda \geq_\lambda x_\lambda$ para todo $x_\lambda \in A_\lambda$, para cada $\lambda \in \mathscr{I}$, entonces $1_{\mathscr{I}} \geq_{\mathscr{I}} x \ \forall x \in A$. Por útlimo, se cumple que:

$$
\begin{aligned}
a \wedge_{\mathscr{I}} \left(\bigvee_{\mathscr{I}} X \right) &= (a_\lambda \wedge_\lambda s_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}} \\
&= \left(\bigvee_{\lambda} \{ a_\lambda \wedge_\lambda x_\lambda \mid x_\lambda \in X_\lambda \} \right)_{\lambda \in \mathscr{I}} \\
&= \bigvee_{\mathscr{I}} \{ a \wedge_{\mathscr{I}} x \mid x \in X \}
\end{aligned}
$$

Y con esto, se cumple que A es un marco. Para cada $\lambda \in \mathscr{I}$, se define $p_\lambda^* : A \to A_\lambda$ la proyección de A sobre el respectivo componente A_λ, nótese el siguiente resultado:

Lema 11.3. *p_λ^* es morfismo de marcos, para cada $\lambda \in \mathscr{I}$.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
x \leq y &\iff x_\lambda \leq y_\lambda \ \forall \lambda \in \mathscr{I} \\
&\Rightarrow p_\lambda^*(x) \leq p_\lambda^*(y) \ \forall \lambda \in \mathscr{I}
\end{aligned}
$$

Además se cumple que $p_\lambda^*(1_{\mathscr{I}}) = 1_\lambda$ y $p_\lambda^*(0_{\mathscr{I}})$.
Finalmente:

$$
\begin{aligned}
p_\lambda^*(x \wedge y) &= p_\lambda^*[(x_\mu \wedge y_\mu)_{\mu \in \mathscr{I}}] \\
&= x_\lambda \wedge y_\lambda \\
&= p_\lambda^*(x) \wedge p_\lambda^*(y).
\end{aligned}
$$

□

$$
\begin{aligned}
p_\lambda^*(\bigvee X) &= p_\lambda^*[(s_\mu)_{\mu \in \mathscr{I}}] \\
&= s_\lambda \\
&= \bigvee X_\lambda \\
&= \bigvee p_\lambda^*[X].
\end{aligned}
$$

Demostración. Sea $B \in \mathrm{Frm}$, y considere una familia arbitraria de morfismos:

$$\{ r_\lambda^* : B \to A_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{I} \}.$$

Definimos $p^* : B \to A$, de manera que, para $b \in B$:

$$p^*(b) = (r_\lambda^*(b))_{\lambda \in \mathscr{I}}.$$

□

Se sigue que p^* es morfismo de marcos, ya que la familia de r_λ^* son morfismos de marcos, y por la construcción de los operadores de A.
Luego, para todo $b \in B$ y todo $\lambda \in \mathscr{I}$, se cumple que:

$$(p_\lambda^* \circ p^*)(b) = p_\lambda^*[(r_\mu(b))_{\mu\in\mathscr{I}}] = r_\lambda(b),$$

y nótese que p^* es único por construcción. Así, se concluye que A satisface la propiedad universal del producto en Frm.

11.2. Sitios

Ya probamos que la categoría de marcos tiene productos. Para probar que también tiene coproductos, usaremos una técnica distinta, para la cual necesitamos algunos resultados concernientes a sitios.

Definición 11.4. *Sea A una semíretícula inferior. Una función $C : A \to \mathcal{P}[\mathcal{P}(\mathcal{A})]$ es una cobertura o función de cubiertas sobre A si, para cualesquiera $a, b \in A$, se cumple que:*

1. $S \in C(a) \implies S \subseteq \downarrow(a)$
2. $S \in C(a), b \leq a \implies \{b \wedge s \mid s \in S\} \in C(b)$.

Al par (A, C) se le llama sitio.

Definición 11.5 (C-ideales)**.** *Dado un sitio (A, C), un subconjunto $I \subset A$ es un C-ideal de A si*

1. $I \in \mathcal{L}(A)$
2. *Siempre que $a \in A$ y $S \in C(a)$, entonces $S \subseteq I \Rightarrow a \in I$.*

Al conjunto de todos los C-ideales del sitio (A, C) se le denota por C-Idl.

Ejemplo 11.6 (Ejemplos de sitios)**.** Sea A una $\wedge$-retícula. Consideremos las funciones cubrientes $C_\varnothing$ y C_T definidas como:

$$C_\varnothing(a) = \varnothing$$
$$C_T(a) = \{\varnothing\}$$

para todo $a \in A$.

- En el primer caso, ninguna famila cubre a ningún elemento. Entonces, por vacuidad, toda sección inferior $F \subseteq A$ es un $C_\varnothing$-ideal. Es decir, $C_\varnothing$-$\mathrm{Idl}(A) = \mathcal{L}(A)$.
- En el segundo caso, la familia vacía cubre a todos los elementos, así que el único C_T-ideal $F \subseteq A$ es la sección total $F = A$. Es decir, C_T-$\mathrm{Idl}(A) = \{A\}$.

$\blacksquare$

Ejemplo 11.7 (Más ejemplos de sitios)**.** Sea A un marco y consideremos las funciones cubrientes $C_\vee$ y $C_\bigvee$ definidas como

$$\begin{array}{lll} X \in C_\vee(a) & \text{si, y solo si} & X \text{ es finito y } a = \bigvee X \\ X \in C_\bigvee(a) & \text{si, y solo si} & a = \bigvee X \end{array}$$

para todo $a \in A$ y todo $X \subseteq A$. Entonces

- una sección inferior $F \subseteq A$ es un $C_\vee$-ideal si, y solo si es cerrada bajo supremos finitos. Por lo tanto, los $C_\vee$-ideales de A son los ideales de A en el sentido de retículas distributivas:

$$C_\vee\text{-Idl}(A) = \mathcal{I}A.$$

- una sección inferior $F \subseteq A$ es un $C_\bigvee$-ideal si, y solo si es cerrada bajo supremos arbitrarios.

$\blacksquare$

Definición 11.8 (Marcos generado por un sitio)**.** *Sea (A, C) un sitio. Decimos que un marco B es generado por (A, C) si existe un morfismo de semiretículas inferiores $f : A \to B$ tal que, para todo $a \in A$, se cumple que f manda C-cubiertas en A a $C_\bigvee$-cubiertas de B:*

$$S \in C(a) \implies f(a) = \bigvee\{f(s) \mid s \in S\}$$

y f es universal con respecto a esta propiedad. Explícitamente, la universalidad significa que, si B' es un marco y $f' : A \to B'$ es un morfismo de $\wedge$-semiretículas que convierte cubiertas en supremos, entonces existe un único morfismo de marcos $\overline{f} : B \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{f}"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Por el argumento usual, entre cualesquiera dos marcos generados por (A, C) existe un único isomorfismo, de modo que podemos hablar de el *marco generado por (A, C).*

Teorema 11.9 (C-Idl es un marco)**.** *Sea (A, C) un cubriente, entonces, su conjunto de C-ideales C-*Idl *es un marco con la contención, y es generado por (A, C).*

Recordemos que $\mathcal{L}A$ es un marco bajo la contención y que, si B es un marco y $\nu \in NA$ es cualquier núcleo, entonces $\nu[A] = A_\nu$ es marco con el orden heredado de A.

Lema 11.10 (Previo). *La intersección arbitraria de C–ideales es un C–ideal.*

Demostración. Sean $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia arbitraria de C–ideales, y $I = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha$ su intersección. Primero, sean $x \leq y \in A$ arbitrarios, con $y \in I$. Entonces $y \in I_\alpha \forall\alpha \in \Gamma$, y así, como cada I_α es sección inferior, entonces $x \in I_\alpha \forall \alpha \in \Gamma$, y esto implica que $x \in I$. Por tanto, cómo x, y son arbitrarios, se cumple que I es sección inferior de A.
Ahora, sean $a \in A, S \in C(a)$ arbitrarios, y supongáse que $S \subseteq I$, entonces, se cumple que $S \subset I_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Por tanto, ya que cada I_α es C–ideal, se sigue que $a \in I_\alpha \ \forall\alpha \in \Gamma$, y se sigue que $a \in I$.
Con esto, concluimos que I es un C–ideal. □

Lema 11.11 (Parte 1). *Existe un núcleo $j : \mathcal{L}A \to \mathcal{L}A$ tal que $C\text{-Idl} = (\mathcal{L}A)_j$, de modo que $C\text{-Idl}$ es un cociente de $\mathcal{L}A$. En particular, $C\text{-Idl}$ es un marco.*

Demostración. Considere el marco de secciones inferiores de A, $\mathcal{L}A$, y considere la función $j : \mathcal{L}A \to \mathcal{L}A$ tal que

$$j(S) = \bigcap\{I \in C\text{-Idl} \mid S \subseteq I\} \quad S \in \mathcal{L}A.$$

Primero, para cualquier $S \in \mathcal{L}A$, por la definición de j, se tiene que $S \subseteq j(S)$, por tanto j infla. Luego, por el lema anterior, se tiene que $j(S)$ es C–ideal, y cómo $j(S) \subseteq j(S)$ trivialmente, y $j(j(S))$ debe ser el menor C–ideal que contiene a $j(S)$, obtenemos que $j(j(S)) = j(S)$, i.e. j es idempotente.

Ahora, sean $R, T \in \mathcal{L}A, I := j(R\cap T)$. Por definición de j, se tiene que $R \subseteq j(R)$ y $T \subseteq j(T)$, entonces $R \cap T \subseteq j(R) \cap j(T)$, y cómo j es idempotente, se sigue que $j(R \cap T) \subseteq j(R) \cap j(T)$.
Definase ahora el conjunto

$$R' := \{d \in A \mid \forall t \in T, d \wedge t \in I\}.$$

Por la definición de I y ya que j infla, se cumple que $R \subseteq R'$, $T \cap R' \subset I$. Por otro lado, cómo $I \in \mathcal{L}(A)$, obtenemos que $R' \in \mathcal{L}(A)$. Luego, consideremos $U \in C(A)$ tal que $U \subseteq R'$, entonces, para todo $t \in T$, se cumple que $\{u \wedge t \mid u \in U\} \subseteq I$, y además, utilizando la propiedad (ii) de C, se cumple que $\{u\wedge t \mid u \in U\} \in C(a\wedge t)$, y en consecuencia $a \wedge t \in I$, ya que I es C–ideal. Luego, cómo $t \in T$ es arbitrario, tenemos que $a \in R'$ y por tanto R' es un C–ideal.

Análogamente, se construye el C–ideal

$$T' := \{e \in A \mid \forall r \in R', e \wedge r \in I\},$$

y se cumple que $T \subseteq T'$, $T' \cap R \subseteq I$ y T' es C–ideal. Así, se sigue que $j(R) \subseteq R', j(T) \subseteq T'$ y por tanto

$$j(R) \cap j(T) \subseteq R' \cap T' \subseteq I = j(R \cap T)$$

y en conclusion, j es núcleo cuyo conjunto de puntos fijos es C-Idl. □

Lema 11.12 (Parte 2)**.** *La función $f : A \to C$-Idl definida como*

$$f(a) = j(\downarrow(a))$$

*es un morfismo de $\wedge$-semiretículas que manda C-cubiertas en supremos de C-*Idl*. Más aún, f es universal con respecto a esta propiedad, de modo que C-*Idl *es el marco generado por (A, C).*

Demostración. Cómo j es núcleo y $\downarrow$ es morfismo de $\wedge$-semiretículas, se cumple que f es morfismo de $\wedge-$retículas. Sean $a \in A, S \in C(a)$ arbitrarios. Entonces, cómo $j(\bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}) =: \mathcal{J}$ es un $C-$ideal que contiene a S, se sigue que $a \in \mathcal{J}$, luego

$$j(\downarrow(a)) \subseteq \mathcal{J}.$$

Por otro lado, se tiene $a \geq s$ para todo $s \in S$, por lo cuál $j(\downarrow(a)) \supseteq j(\downarrow(s))$. Luego, se sigue que

$$j(\downarrow(a)) \supseteq \bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}$$

y con esto, cómo j es mónotona e idempotente, obtenemos que

$$f(a) \supseteq \mathcal{J}.$$

Por otra parte, sean $B \in \mathrm{Frm}$, $g : A \to B$ un morfismo de $\wedge-$semiretículas que convierte cubiertas de C en supremos. Entonces, la función

$$\begin{aligned} \overline{g} :&\mathcal{L}A \to B \\ S &\to \bigvee_B \{g(s) \mid s \in S\} \end{aligned}$$

es el único morfismo de marcos que factoriza a g a tráves del marco libre de A, $\mathcal{L}A$, y además existe su adjunto derecho $g_* : B \to \mathcal{L}A$, que, por definición del adjunto derecho, para $b \in B$:

$$\begin{aligned} g_*(b) &= \bigcup\{L \in \mathcal{L}A \mid \overline{g}(L) \leq b\} \\ &= \bigcup\left\{L \in \mathcal{L}A \mid \bigvee_B\{g(a) \mid a \in L\} \leq b\right\} \\ &= \bigcup\{L \in \mathcal{L}A \mid g(a) \leq b(\forall a \in L)\} \\ &= \{a \in A \mid g(a) \leq b\} \end{aligned}$$

Y nótese que, si $S \in C(a)$ y $S \subseteq g_*(b)$, entonces se cumple que

$$g(a) = \bigvee_B \{g(s) \mid s \in S\} \leq b$$

y esto implica que $a \in g_*(b)$, por tanto $g_*(b)$ es un $C-$ideal.

Sea $a \in A$ arbitrario. Cómo $\overline{g}$ y g_* son adjuntos, se tiene que

$$(\overline{g} \circ g_*)(g(a)) \leq g(a).$$

Además, cómo $g_*(g(a))$ es un C–ideal que contiene a $\downarrow(a)$, tenemos que

$$f(a) = j(\downarrow(a)) \subseteq g_*(g(a))$$

, y en consecuencia, se cumple la cadena de desigualdades:

$$g(a) \leq \overline{g}(f(a)) \leq (\overline{g} \circ g_*)(g(a)) \leq g(a)$$

Es decir, que $(\overline{g} \circ f)(a) = g(a)$ con a arbitrario, por tanto $\overline{g} \circ f = g$, con $\overline{g}$ único, así que f es universal. □

11.3. Coproductos de marcos

Ya probamos que la categoría de marcos tiene productos. Ahora queremos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 11.13. *Para una familia de marcos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$, existe el coproducto*

$$\coprod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda.$$

Construiremos el coproducto como sigue: Tomaremos el coproducto A de la familia en la categoría $\mathrm{Pos}^\wedge$ de $\wedge$-semiretículas. Le daremos a A una estructura de sitio, equipándole una cobertura C. Finalmente, veremos que el marco C-Idl generado por (A, C) viene equipado con morfismos que lo convierten en el coproducto de nuestra familia en la categoría de marcos.

Lema 11.14. *Consideremos el conjunto*

$$A = \left\{ a \in \prod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda \mid a_\lambda \neq 1_{A_\lambda} \text{ para una cantidad finita de índices} \right\}.$$

Notemos que A es una subsemiretícula inferior del producto, ya que $1 \in A$ y, si $a, b \in A$, entonces $c = a \wedge b \in \prod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda$ satisface

$$c_\lambda = \begin{cases} 1_\lambda, & \text{si } a_\lambda = b_\lambda = 1_\lambda \\ a_\lambda \wedge b_\lambda, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como hay una cantidad finita de $a_\lambda \neq 1_\lambda$ y $b_\lambda \neq 1_\lambda$, entonces los $a_\lambda \wedge b_\lambda$ son finitos, por lo que $c \in A$.

Definimos las funciones $q_\lambda \colon A_\lambda \to A$, para cada $\lambda \in \mathscr{I}$, dadas por

$$q_\lambda(x) = a,$$

donde $a_\lambda = x$ y $a_\mu = 1_\mu$ para $\mu \in \mathscr{I} \setminus \{\lambda\}$.

Claramente, q_λ es monótona y $q_\lambda(1_\lambda) = 1$. Además, si $x, y \in A_\lambda$, entonces $q_\lambda(x \wedge y) = q_\lambda(x) \wedge q_\lambda(y)$, ya que las operaciones son puntuales. Así, cada q_λ es un morfismo de semiretículas inferiores.

Afirmamos que A, junto con sus funciones

$$q_\lambda : A_\lambda \to A$$

es el coproducto de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$ en la categoría de $\wedge$-semiretículas.

Demostración. Para este resultado, los $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ solo necesitan ser $\wedge$-semiretículas. Sean B una $\wedge$-semiretícula y $r_\lambda : A_\lambda \to B$ una familia de morfismos indicada por $\lambda \in \mathscr{I}$. Definimos $R : A \to B$ como

$$R(a) = \bigwedge\{r_\lambda(a_\lambda) \mid \lambda \in \mathscr{I}\}.$$

Este ínfimo existe en B, ya que todo $a \in A$ tiene soporte finito. Claramente, R preserva ínfimos y hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[r, "r_\lambda"] \arrow[d, "q_\lambda"'] & B \\ A \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $\lambda \in \mathscr{I}$. Finalmente, si $R' : A \to B$ es cualquier morfismo que hace conmutar el diagrama, tenemos

$$\begin{aligned} R'(a) &= R'(\bigwedge\{q_\lambda(a_\lambda) \mid a \in \mathscr{I}\}) \\ &= (\bigwedge\{R'(q_\lambda(a_\lambda)) \mid a \in \mathscr{I}\}) \\ &= (\bigwedge\{r_\lambda(a_\lambda) \mid a \in \mathscr{I}\}) \\ &= R(a). \end{aligned}$$

De este modo, la semiretícula A, equipada con R, es el coproducto de las A_λ en $\mathrm{Pos}^\wedge$. □

Definición 11.15. *Sean $a = (a_\lambda) \in A$, $\mu \in \mathscr{I}$ y $S \subseteq A_\mu$, definimos el reemplazo de a por S en la entrada μ–ésima como*

$$S(a,\mu) = \{(b_\lambda) \in A \mid b_\lambda = a_\lambda \text{ para } \lambda \in \mathscr{I} \setminus \{\mu\} \text{ y } b_\mu \in S\}$$

Ejemplo 11.16. Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \prod_{\lambda=1}^4 A_\lambda$, $\mu = 2$ y $S = \{x, y, z\} \subseteq A_2$, entonces

$$S(a,\mu) = \left\{ \begin{array}{c} (a_1, x, a_3, a_4), \\ (a_1, y, a_3, a_4), \\ (a_1, z, a_3, a_4) \end{array} \right\}.$$

■

Lema 11.17 (La estructura de sitio en A)**.** *La función $C : A \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ definida como*

$$C(a) = \{S(a,\mu) \mid \mu \in \mathscr{I}, S \subseteq A_\mu \text{ tal que } \bigvee S = a_\mu\}.$$

para cada $a \in A$, es una cobertura en A.

Demostración. Sean $a = (a_\lambda), b = (b_\lambda) \in A$ con $b \leq a$ y $W = S(a,\mu) \in C(a)$.

- Sea $c = (c_\lambda) \in W$. Por definición, $c_\lambda = a_\lambda$ para $\lambda \in \mathscr{I} \setminus \{\mu\}$ y $c_\mu \in S$, entonces $c_\mu \leq a_\mu$. Esto implica que $c \leq a$, es decir, $c \in \downarrow(a)$.

- Probaremos que $\{b \wedge w \mid w \in W\} = \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}(b, \mu)$.

  $\subseteq$) Sea $b \wedge w \in \{b \wedge w \mid w \in W\}$. Observamos que
  - $b \wedge w \in A$.
  - $b_\lambda \wedge w_\lambda = b_\lambda \wedge a_\lambda = b_\lambda$ para $\lambda \in \mathscr{I} \setminus \{\mu\}$.
  - $b_\mu \wedge w_\mu \in \{b_\mu \in w_\mu \mid w_\mu \in S\}$.

  Por lo que $b \wedge w \in \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}(b, \mu)$.

  $\supseteq$) Sea $c = (c_\lambda) \in \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}(b, \mu)$. Entonces $c_\lambda = b_\lambda$ para $\lambda \in \mathscr{I} \setminus \{\mu\}$ y $c_\mu \in \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\}$.
  Notemos que $c = b \wedge m$, donde $m_\lambda = a_\lambda$ para $\lambda \in \mathscr{I} \setminus \{\mu\}$ y $m_\mu = w_\mu$. Así, $m \in W$, es decir, $c \in \{b \in w \mid w \in W\}$.

  Además, $\{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\} \subseteq A_\mu$ y

  $$\bigvee \{b_\mu \wedge w_\mu \mid w_\mu \in S\} = b_\mu \wedge (\bigvee S) = b_\mu \wedge a_\mu = b_\mu$$

  Por lo tanto $\{b \wedge w \mid w \in W\} \in C(b)$.

$\square$

La estructura de los C-ideales en A no es tan sencilla de entender a primera vista. Incluimos un ejemplo de un cálculo en $C\text{-Idl}(A)$.

Ejemplo 11.18 (El menor elemento de $C\text{-Idl}(A)$.)**.** Supongamos que $a \in A$ tiene alguna entrada cero. Es decir, $a_\lambda = 0 \in A_\lambda$ para algún λ.

Al fijarnos en la entrada $a_\lambda = 0 \in A_\lambda$, tenemos $\bigvee \varnothing 0 \in A_\lambda$. Como $\varnothing(a, \lambda) = \varnothing \subseteq A$, de la definición de las C-cubiertas se sigue que $\varnothing \in C(a)$; es decir: la familia vacía cubre a a.

En particular, para cualquier C-ideal $F \subseteq A_{\mathscr{I}}$, tenemos

$$\varnothing \in C(a) \qquad \text{y} \qquad \varnothing \subseteq F,$$

y, por la definición de C-ideal, se sigue que $a \in F$.

Esto nos dice que el conjunto G de los elementos que tienen alguna entrada nula

$$G = \{a \in A \mid a_\lambda = 0 \in A_\lambda \text{ para algún } \lambda \in \mathscr{I}\}$$

está contenido en todos los C-ideales. De hecho, probaremos que G es un C-ideal. Luego, es el menor elemento en el marco de C-ideales.

Claramente, G es sección inferior, por lo cual resta probar que es cerrado bajo C-cubiertas. En efecto, tomemos una cubierta

$$Y(a, \lambda) \in C(a) \qquad \text{con} \qquad Y(a, \lambda) \subseteq G.$$

Es decir, a tiene una entrada a_λ tal que $Y \subseteq A_\lambda$ y $\bigvee Y = a_\lambda$.

Si $\bigvee Y = 0$, entonces $0 = \bigvee Y = a_\lambda$, así que $a \in G$. De otro modo, existe un $y \in Y$, $y \neq 0$. Sea $b \in Y(a, \lambda)$ el único elemento de $\{y\}(a, \lambda)$. Entonces b tiene λ-ésima entrada $b_\lambda = y \neq 0$, pero como $b \in Y(a,\lambda) \subseteq G$, existe un índice $\mu \neq \lambda$ tal que $b_\mu = 0$. Como b es igual a a en todas las entradas que no son λ (pues $b \in Y(a,\lambda)$), en particular tenemos $b_\mu = a_\mu = 0$, así que $a \in G$.

Se sigue que G es un C-ideal y, como está contenido en todos los C-ideales, concluimos que G es el menor elemento de $C\text{-Idl}(A)$. ∎

Lema 11.19 (Parte 2). *Consideremos C-Idl y los morfismos $Q_\lambda\colon A_\lambda \to C\text{-Idl}$ definidos como*

$$Q_\lambda = j(\downarrow(q_\lambda(\_))).$$

Entonces C-Idl, equipado con los morfismos Q_λ, es el coproducto de la famila de los A_λ en la categoría de marcos.

Demostración. Para cualquier marco Y y morfismos $f_\lambda\colon A_\lambda \to Y$ indicados por $\mathscr{I}$, queremos encontrar un único morfismo $f\colon C\text{-Idl} \to Y$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "Q_\lambda"'] & Y \\ C\text{-Idl} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sean X un marco y una familia de morfismos

$$\{r_\lambda\colon A_\lambda \to X \mid \lambda \in \mathscr{I}\}.$$

Dado que A, junto con los $q_\lambda : A_\lambda \to A$, es el coproducto de los A_λ como $\wedge$-semiretículas, obtenemos el morfismo de $\wedge$-semiretículas $R\colon A \to X$ dado por

$$\begin{aligned} R(a) &= \bigwedge_X \{r_\lambda(a_\lambda) \mid \lambda \in \mathscr{I}\} \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \end{aligned}$$

donde $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ es el conjunto de las coordenadas de a distintas de 1. Este es el único morfismo de $\wedge$-semiretículas que factoriza a todos los r_λ a través de A. Probaremos que R convierte cubiertas de C en supremos.

Consideremos $\mu \in \mathscr{I}$, $S \subseteq A_\mu$ y $a = (a_\lambda) \in A$ tal que $a_\mu = \bigvee_{A_\mu} S$. Hay que probar que $\bigvee R(S(a,\mu)) = R(a)$. Si $a_\mu = 1_{A_\mu}$, tenemos

$$\begin{aligned} \bigvee R(S(a,\mu)) &= \bigvee \{R(b) \mid b \in S(a,\mu)\} \\ &= \bigvee \{1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \wedge r_\mu(s) \mid s \in S\} \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \wedge \bigvee \{r_\mu(s) \mid s \in S\} \\ &= 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \wedge r_\mu(a_\mu) \\ &= R(a). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $a_\mu \neq 1_{A_\mu}$, tenemos $\mu = \lambda_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\bigvee R(S(a,\mu)) \\
&\qquad = \bigvee R(S(a,\lambda_i)) \\
&\qquad = \bigvee \{R(b) \mid b \in S(a,\lambda_i)\} \\
&\qquad = \bigvee \{1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_i}(s) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \mid s \in S\} \\
&\qquad = 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge \bigvee \{r_{\lambda_i}(s) \mid s \in S\} \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \\
&\qquad = 1_X \wedge r_{\lambda_1}(a_{\lambda_1}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_i}(a_{\lambda_i}) \wedge \cdots \wedge r_{\lambda_n}(a_{\lambda_n}) \\
&\qquad = R(a).
\end{aligned}$$

Como $R : A \to X$ manda C-cubiertas a supremos de X, la propiedad universal del marco C-Idl generado por (A, C) asegura que existe un único morfismo de marcos $g \colon C\text{-Idl} \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
C\text{-Idl} \arrow[ur, "g"] & A \arrow[u, "R"'] \arrow[l, "j(\downarrow(_))"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Notemos que

$$r_\lambda = R \circ q_\lambda = g \circ j(\downarrow(q_\lambda(\_))) = g \circ Q_\lambda.$$

Por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda \arrow[r, "r_\lambda"] \arrow[d, "Q_\lambda"'] & X \\
C\text{-Idl} \arrow[ur, "g"'] & A \arrow[u, "R"'] \arrow[l, "j(\downarrow(_))"]
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

Capítulo 12

El teorema de Tychonoff en marcos

Un espacio topológico es compacto si cualquier cubierta abierta del espacio admite una subcubierta finita. En la categoría de espacios topológicos tenemos el teorema de Tychonoff, que dice que un producto de espacios topológicos es compacto, si, y solo si, cada uno de los factores es un compacto.

Del mismo modo, cualquier marco tiene su noción de compacidad.

Definición 12.1 (Compacidad de marcos)**.** *Un marco A es compacto si, para cualquier $S \in A$ se satisface lo siguiente:*

$$\bigvee S = 1_A \implies \textit{existe } T \subseteq S \textit{ finito, tal que } \bigvee T = 1_A.$$

El objetivo de esta sección es probar el teorema análogo al de Tychonoff, pero en la categoría de marcos:

Teorema 12.2. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$ una familia de marcos. El coproducto*

$$\coprod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda$$

es compacto si, y solo si, cada A_λ es compacto.

12.1. Idea de la demostración

En la sección anterior probamos que $\coprod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda$ es el marco de C-ideales de A, donde A es el coproducto de los A_λ como $\wedge$-semiretículas y C es cierta cobertura en A. Como C-Idl es un cociente de $\mathcal{L}A$, los supremos en C-Idl se calculan como

$$\bigvee S = j(\bigcup S),$$

donde $j : \mathcal{L}A \to \mathcal{L}A$ es el núcleo asociado a C-Idl. Por lo tanto, es de esperarse que la demostración de nuestra versión del teorema de Tychonoff involucre al núcleo j de alguna manera. De hecho, toda la demostración consiste en dar una construcción de j que facilite convertir ciertos supremos arbitrarios en supremos finitos. Para llevar a cabo esta idea, primero definiremos una cierta subcobertura

$C_f \subseteq C$, de tal modo que factorizaremos la proyección $\mathcal{L}A \to C$-Idl a través de C_f-Idl:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}A \arrow[r] \arrow[d] & C\text{-Idl} \\ C_f\text{-Idl} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Más específicamente, el plan es el siguiente:

- Definimos una subcobertura $C_f \subseteq C$ en A y construimos la proyección $\mathcal{L}A \to C_f$-Idl. Es decir, dado $S \in \mathcal{L}(A)$, construimos el C_f-ideal FS generado por S.

- Vemos que el conjunto $\mathcal{D}S$ de supremos dirigidos de S está contenido en el C-ideal generado por S.

- Probamos que, si S es un C_f-ideal, entonces $\mathcal{D}S$ también lo es. Por lo tanto, $\mathcal{D}(FS)$ es un C_f ideal que contiene a S y está contenido en el C-ideal $j(S)$ generado por S.
$$S \subseteq \mathcal{D}(FS) \subseteq j(S).$$
Sin embargo, la última contención puede ser propia.

- Para saltar de $\mathcal{D}(FS)$ a $j(S)$, iteramos $\mathcal{D}$ para construir una cadena de C_f-ideales que contienen a $D(FS)$
$$FS \subseteq \mathcal{D}(FS) \subseteq \mathcal{D}^2(FS) \subseteq \dots$$
y probamos que, eventualmente, se alcanza $j(S)$.

- Con nuestra construcción de $j(S)$ veremos que, dada una familia $P \subseteq C$-Idl(A), la igualdad $j(\bigcup P) = A$ implica $F(\bigcup P) = A$. En otras palabras, $\bigvee P = 1_{C\text{-Idl}(A)}$ implica $1 \in F(\bigcup P)$.

- Con esta última herramienta, podremos demostrar la implicación $\Longleftarrow$ del teorema.

- La implicación $\Longrightarrow$ es directa.

12.2. La cobertura de cubiertas finitas

Lema 12.3. *La función $C_f : A \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ definida para todo $a \in A$ como*

$$C_f(a) = \{S \subseteq A \mid S \in C(a), S \textit{ finito}\}$$

es una cobertura sobre A.

Nuestra primera tarea será obtener una construcción para el núcleo asociado al cociente $\mathcal{L}A \to C_f$-Idl. Para esto, introduciremos algo de notación.

Definición 12.4. *Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathscr{I}$ índices distintos y $x_1, \dots, x_n$ elementos tales que $x_i \in A_{\lambda_i}$ para todo i. En otras palabras, $x = (x_1, \dots, x_n)$ es un elemento del producto $A_{\lambda_1} \times \cdots \times A_{\lambda_n}$.*

Para cualquier elemento $a \in A$ del coproducto de los A_λ en $\mathrm{Pos}^\wedge$, denotaremos como $a(x) = a(x_1, \dots, x_n)$ al elemento de A que es igual a a pero con las entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reemplazadas por $x_1, \dots, x_n$. Es decir,

$$p_\lambda(a(x_1, \dots, x_n)) = a(x_1, \dots, x_n)_\lambda = \begin{cases} x_i, & \lambda = \lambda_i \\ a_\lambda & \lambda \notin \{\lambda_1, \dots \lambda_n\} \end{cases}.$$

En particular, si $x_i \in A_{\lambda_i}$, se cumple que

$$\begin{aligned} 1(x_i) &= q_{\lambda_i}(x_i) \\ 1(x_1, \dots, x_n) &= \bigwedge \{q_{\lambda_i}(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Definición 12.5. *Dado un conjunto $S \subseteq A$, defino el conjunto FS especifivando que $a \in FS$ si, y solo si, existe un conjunto finito no vacío de índices $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ que contiene al soporte de a y conjuntos $S_1, \dots, S_n$ con $S_i \subseteq A_{\lambda_i}$ tales que $\bigvee S_i = a_{\lambda_i}$ y, para toda tupla $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, el elemento*

$$a(s_1, \dots, s_n)$$

está en S. En tal caso, decimos que a es Γ-generado por S y que $(\Gamma, S_1, \dots, S_n)$ es el testigo de $a \in FS$, ya que $(\Gamma, S_1, \dots, S_n)$ atestigua (o prueba) que a pertenece a FS.

12.3. Si S es sección inferior, FS también.

Sea S una sección inferior, $a \in FS$ y $b \leq a$.

Sea $a \in FS$ y sea $(\Gamma, S_1, \dots, S_n)$ su testigo. Sin perder generalidad, podemos suponer que Γ también contiene al soporte de b. En efecto, si $b_\gamma \neq 1_\gamma$ y $\gamma \notin \Gamma$, podemos agregar γ a Γ y poner $S_\gamma = \{1_\gamma\}$, de modo que $a_\gamma = 1_\gamma = \bigvee S_\gamma$ y, para todo $(s_1, \dots, s_n, 1_\gamma) \in \prod_{i=1}^n S_i \times S_\gamma$ se tiene

$$1(s_1, \dots, s_n, 1_\gamma) = 1(s_1, \dots, s_n) \in S.$$

Supongamos, pues, que b también tiene soporte contenido en Γ. Entonces haciendo $T_i = \{b_{\lambda_i} \wedge s \mid s \in S_i\}$ para todo $i = 1, \dots, n$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bigvee T_i &= b_{\lambda_i} \wedge \bigvee S_i \\ &= b_{\lambda_i} \wedge a_{\lambda_i} \\ &= b_{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Más aún, dado $(b_{\lambda_1} \wedge s_1, \dots, b_{\lambda_n} \wedge s_n) \in \prod_{i=1}^n T_\lambda$, tenemos

$$1(b_{\lambda_1} \wedge s_1, \dots, b_{\lambda_n} \wedge s_n) \leq 1(s_1, \dots, s_n) \in S.$$

y, como S es sección inferior, tenemos

$$1(b_{\lambda_1} \wedge s_1, \dots, b_{\lambda_n} \wedge s_n) \in S.$$

Se sigue que b es finitamente generado por S con testigo $(\Gamma, T_1, \dots, T_n)$, es decir: $b \in FS$, así que FS es sección inferior.

12.4. Si S es sección inferior, FS está contenido en todos los C_f-ideales que contienen a S.

Sea J un C_f-ideal que contiene a S. Tomemos un elemento $a \in FS$ con testigo (Γ, S), donde $\Gamma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Probaremos, por inducción sobre $k \leq n$, que, para cada tupla $(s_k, \ldots, s_n) \in S_k \times \cdots \times S_n$, el elemento $a(s_k, \ldots, s_n)$ está en J.

Para toda tupla $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, tenemos que

$$a(s_1, \ldots, s_n) \in S \subseteq J$$

ya que $a \in FS$. Esto prueba el caso base ($k = 1$).

La hipótesis de inducción (k) nos dice que, para cada tupla $(s_k, \ldots, s_n) \in S_k \times \cdots \times S_n$, el elemento $a(s_k, \ldots, s_n)$ está en J.

Ahora (el paso de inducción) sea $(s_{k+1}, \ldots, s_n) \in S_{k+1} \times \cdots \times S_n$ una tupla arbitraria y consideremos el conjunto

$$\{a(s, s_{k+1}, \ldots, s_n) \mid s \in S_k\} = S_k(a(s_{k+1}, \ldots, s_n), \lambda_k) \in C_f(a(s_{k+1}, \ldots, s_n)).$$

Esta es, en efecto, una cubierta, ya que la λ_k-ésima coordenada de $a(s_{k+1}, \ldots, s_n)$ es $a_{\lambda_k} = \bigvee S_k$. Más aún: por hipótesis de inducción, cada elemento de la cubierta está en J. Como J es un C_f-ideal, se sigue que

$$a(s_{k+1}, \ldots, a_n) \in J.$$

Esto concluye la inducción para $k \leq n$. En particular, tenemos $a(s_n) \in J$ para cada $s_n \in S_n$, pero esta es una C_f-cubierta de a contenida en J, así que $a \in J$. Por lo tanto, $FS \subseteq J$.

12.5. Si S es sección inferior, FS es cerrado bajo cubiertas y, por lo tanto, es un C_f-ideal.

Si $a \in A$ tiene una cubierta vacía, entonces tiene una entrada cero, digamos $a_{\lambda_1} = 0$. Sea $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ el resto de su soporte. Poniendo $S_1 = \{\}$ y $S_i = \{a_{\lambda_i}\}$ para $i = 2, \ldots, n$, obtenemos $\bigvee S_i = a_{\lambda_i}$. Como $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \varnothing$, se cumple que $a \in FS$ por vacuidad.

Luego, basta considerar cubiertas de dos elementos.

Sean $a, b \in FS$ con $a_\gamma = b_\gamma$ para todo $\gamma \neq \gamma_0$. Debemos mostrar que $a \vee b \in FS$.

Como antes, podemos suponer que tanto a como b tienen soporte en el mismo $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Por definición, tenemos F_γ, G_γ tales que $\bigvee F_\gamma = a_\gamma$, $\bigvee G_\gamma = b_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y

$$1(f_0, \ldots, f_n) \in S \qquad\qquad 1(g_0, \ldots, g_n) \in S.$$

siempre que $f_i \in F_{\gamma_i}$ y $g_i \in G_{\gamma_i}$.

Definamos $H_{\gamma_0} = F_{\gamma_0} \cup G_{\gamma_0}$ y $H_\gamma = \{f \wedge g \mid f \in F_\gamma, g \in G_\gamma\}$ para todo $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \gamma_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\bigvee H_{\gamma_0} &= \bigvee (F_{\gamma_0} \cup G_{\gamma_0}) \\
&= \bigvee F_{\gamma_0} \vee \bigvee G_{\gamma_0} \\
&= a_{\gamma_0} \vee b_{\gamma_0} \\
\bigvee H_\gamma &= \bigvee \{f \wedge g \mid f \in F_\gamma, g \in G_\gamma\} \\
&= \bigvee F_\gamma \wedge \bigvee G_\gamma \\
&= a_\gamma \wedge b_\gamma \\
&= a_\gamma \vee b_\gamma \text{ para } \gamma \neq \gamma_0,
\end{aligned}$$

lo cual son las entradas de $a \vee b$.

Ahora, las tuplas $x = \prod_{i=0}^n H_{\gamma_i}$ son de dos formas posibles.

- Si $x = (f_0, f_1 \wedge g_1, \ldots, f_n \wedge g_n)$, entonces

$$1(f_0, f_1 \wedge g_1, \ldots, f_n \wedge g_n) \leq 1(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in S.$$

- de otro modo, $x = (g_0, f_1 \wedge g_1, \ldots, f_n \wedge g_n)$, así que

$$1(g_0, f_1 \wedge g_1, \ldots, f_n \wedge g_n) \leq 1(g_0, g_1, \ldots, g_n) \in S.$$

Como S es sección inferior, se sigue que $1(x)$ siempre está en S, así que $a \vee b$ está en FS.

12.6. El conjunto de supremos dirigidos $\mathcal{D}S$ está contenido en todos los C-ideales que contienen a S.

Sea S una sección inferior y $\mathcal{D}S$ su conjunto de supremos dirigidos.

Sea J un C-ideal que contiene a S. Como todo $a \in \mathcal{D}S$ es el supremo de un $D \subseteq S$ dirigido y $D \subseteq S \subseteq J$, basta ver que J es cerrado bajo supremos dirigidos.

Tomemos un subconjunto dirigido $D \subseteq J$. Como D es dirigido, para cualquier $d \in D$ tenemos

$$\bigvee D = \bigvee (D \cap \uparrow d).$$

($\geq$ es obvia, para $\leq$ basta observar que todo $a \in D$ está por debajo de un $c \in D$ con $\geq a \vee d$). Luego, podemos suponer que D está contenido en una sección superior principal. En particular podemos suponer que todos los elementos de D tienen soporte en $\Gamma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Sea $a = \bigvee D$. Como D es dirigido, entonces sus proyecciones $D_1, \ldots, D_n$ a los marcos $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_2}$ son dirigidas (todos los $x_1, y_1 \in D_1$ vienen de elementos $x, y \in D$; luego, existe $z \in D$ con $x, y \leq z$, por lo cual $x_1, y_1 \leq z_1$).

Por definición del supremo, tenemos

$$a = 1(\bigvee D_1, \ldots, \bigvee D_n).$$

Por inducción sobre $k \leq n$, probaremos que, para toda tupla $(d_k, \ldots, d_n) \in D_k \times \cdots \times D_n$, el elemento

$$a(d_k, \ldots, d_n) = 1(\bigvee D_1, \ldots, \bigvee D_{k+1}, d_k, \ldots, d_n)$$

está en J.

Para cualquier tupla $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \cdots \times D_n$, cada entrada d_i es la λ_i-ésima proyección de algún $x_i \in D$. Como D es dirigido, existe $z \in D$ con $x_1, \ldots, x_n \leq z$. Luego,

$$1(d_1, \ldots, d_n) \leq z \in D \subseteq J.$$

Como J es sección inferior, tenemos $1(d_1, \ldots, d_n) \in J$. Esto prueba el caso base ($k = 1$).

La hipótesis de inducción (k) dice que, para cada tupla $(d_k, \ldots, d_n) \in D_k \times \cdots \times D_n$, el elemento $a(d_k, \ldots, d_n)$ está en J.

Ahora (paso de inducción) sea $(d_{k+1}, \ldots, d_n) \in D_{k+1} \times \cdots \times D_n$ una tupla arbitraria y consideremos el conjunto

$$\{a(d, d_{k+1}, \ldots, d_n) \mid d \in D_k\} = D_k(a(d_{k+1}, \ldots, d_n), \lambda_k) \in C(a(d_{k+1}, \ldots, d_n)).$$

Esta es, en efecto, una cubierta, ya que la λ_k-ésima coordenada de $a(d_{k+1}, \ldots, d_n)$ es $\bigvee D_k$. Más aún: por hipótesis de inducción, cada elemento de la cubierta está en J. Como J es un C-ideal, se sigue que $a(d_{k+1}, \ldots, d_n) \in J$. Esto concluye la inducción. En particular, para $k = n$, mostramos que $a(d_n) \in J$ para todo $d_n \in D_n$, pero este conjunto es una C-cubierta de a. Se sigue que $a \in J$, así que J es cerrado bajo supremos dirigidos. Por lo tanto, $\mathcal{D}S \subseteq J$.

12.7. Si S es un C_f-ideal, entonces $\mathcal{D}S$ también.

Dado $a \in S$, $\{a\} \subseteq S$ es dirigido, así que $a = \bigvee\{a\} \in \mathcal{D}S$, por lo que $S \subseteq \mathcal{D}S$.

Primero veamos que $\mathcal{D}S$ es sección inferior. Sean $a \in \mathcal{D}S$ y $b \leq a$. Podemos suponer que a y b tienen soporte en Γ. Tenemos $a = \bigvee D$ con $D \subseteq S$ dirigido. Es claro que

$$b = \bigvee\{b \wedge d \mid d \in D\}.$$

Como S es sección inferior, este último conjunto esta en S, así que basta probar que es dirigido. Sean $b \in d, b \wedge d'$ con $d, d' \in D$. Entonces existe $d'' \in D$ con $d \vee d' \leq d''$, por lo cual $b \wedge d''$ cumple $(b \wedge d) \vee (b \wedge d') = b \wedge (d \vee d') \leq b \wedge d''$ y, así, el conjunto es dirigido. Luego $b \in \mathcal{D}S$ y $\mathcal{D}S$ es sección inferior.

Ahora veamos que $\mathcal{D}S$ es cerrado bajo C_f-cubiertas. Si $a \in A$ tiene una cubierta vacía, tenemos $a \in S$, así que $a \in \mathcal{D}S$ (pues S es C_f-ideal), por lo cual basta ver que $\mathcal{D}S$ es cerrado bajo C_f-cubiertas de dos elementos. Sean $a, b \in \mathcal{D}S$

con todas sus entradas iguales excepto γ_0. Por definición, existen $D, E \subseteq S$ dirigidos con $a = \bigvee D$ y $b = \bigvee E$.

Definimos $* : D \times E \to A$ como

$$(d * e)_{\gamma_0} = d_{\gamma_0} \vee e_{\gamma_0}$$
$$(d * e)_{\gamma} = d_{\gamma} \wedge e_{\gamma} \text{ para } \gamma \neq \gamma_0$$

y sea $F = \{d * e \mid d \in D, e \in E\}$.

Ahora veamos que F es dirigido. Si $d * e, d' * e' \in F$, entonces existen $d'' \in D$ y $e'' \in E$ con $d \vee d' \leq d''$ y $e \vee e' \leq e''$. Luego, $(d * e) \vee (d' * e') \leq d'' * e''$, pues la comparación es puntual y $*$ es monótono en cada coordenada; en efecto:

$$\begin{aligned}
((d * e) \vee (d' * e'))_{\gamma_0} &= (d * e)_{\gamma_0} \vee (d' * e')_{\gamma_0} \\
&= d_{\gamma_0} \vee e_{\gamma_0} \vee d'_{\gamma_0} \vee e'_{\gamma_0} \\
&= (d_{\gamma_0} \vee d'_{\gamma_0}) \vee (e_{\gamma_0} \vee e'_{\gamma_0}) \\
&\leq d''_{\gamma_0} \vee e''_{\gamma_0} \\
((d * e) \vee (d' * e'))_{\gamma} &= (d * e)_{\gamma} \vee (d' * e')_{\gamma} \\
&= (d_{\gamma} \wedge e_{\gamma}) \vee (d'_{\gamma} \wedge e'_{\gamma}) \\
&\leq d_{\gamma} \vee e'_{\gamma} \\
&\leq d''_{\gamma} \vee e''_{\gamma}.
\end{aligned}$$

Se sigue que F es dirigido. Mas aún, $\bigvee F = a \vee b$, pues

$$\begin{aligned}
(\bigvee F)_{\gamma_0} &= \bigvee \{(d * e)_{\gamma_0} \mid d \in D, e \in E\} \\
&= \bigvee \{d_{\gamma_0} \vee e_{\gamma_0} \mid d \in D, e \in E\} \\
&= \bigvee \{d_{\gamma_0} \mid d \in D\} \vee \bigvee \{e_{\gamma_0} \mid e \in E\} \\
&= (\bigvee D)_{\gamma_0} \vee (\bigvee E)_{\gamma_0} \\
&= a_{\gamma_0} \vee b_{\gamma_0} \\
(\bigvee F)_{\gamma} &= \bigvee \{(d * e)_{\gamma} \mid d \in D, e \in E\} \\
&= \bigvee \{d_{\gamma} \wedge e_{\gamma} \mid d \in D, e \in E\} \\
&= \bigvee \{d_{\gamma} \mid d \in D\} \wedge \bigvee \{e_{\gamma} \mid e \in E\} \\
&= (\bigvee D)_{\gamma} \wedge (\bigvee E)_{\gamma} \\
&= a_{\gamma} \wedge b_{\gamma} \\
&= a_{\gamma} \vee b_{\gamma} \text{ para } \gamma \neq \gamma_0,
\end{aligned}$$

lo cual son las entradas de $a \vee b$.

Para mostrar que $a \vee b \in \mathcal{D}S$, solo queda ver que $F \subseteq S$. Para esto, usaremos que S es C_f-ideal (nótese que no lo habíamos usado excepto en un caso muy simple).

Sea $d * e \in F$; es decir: $d \in D \subseteq S$ y $e \in E \subseteq S$. Queremos construir una C_f-cubierta de $d * e$ que esté contenida en S. Consideremos $r, s \in A$ dados por

$$r_{\gamma} = s_{\gamma} = d_{\gamma} \wedge e_{\gamma} \text{ para } \gamma \neq \gamma_0$$
$$r_{\gamma_0} = d_{\gamma}$$
$$s_{\gamma_0} = e_{\gamma}.$$

Observemos que $r \leq d \in D \subseteq S$ y que $s \leq e \in E \subseteq S$. Como S es sección inferior, tenemos $r, s \in S$. Finalmente, es claro que $r \vee s = d * e$ donde el supremo se concentra en una entrada. Es decir, $\{r, s\} \in C_f(d * e)$ y $\{r, s\} \subseteq S$. Como S es C_f-ideal, se sigue que $d * e \in S$. Así, $F \subseteq S$, por lo cual $a \vee b \in \mathcal{D}S$. Es decir, $\mathcal{D}S$ es cerrado bajo C_f-cubiertas, por lo cual también es un C_f-ideal.

12.8. Lema: saltar de $\mathcal{D}(FS)$ a $j(S)$.

Sea I un C_f-ideal de A. Como ya vimos, $\mathcal{D}I$ es un C_f-ideal contenido entre I y el C-ideal $j(I)$ generado por I. Aplicando esto a $\mathcal{D}I$, obtenemos

$$I \subseteq \mathcal{D}I \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{D}I) \subseteq j(\mathcal{D}I) = j(I).$$

Poniendo $I = FS$ (el C_f-ideal generado por una sección inferior $S \subseteq A$) e iterando $\mathcal{D}$, obtenemos una cadena de C_f-ideales

$$FS \subseteq \mathcal{D}(FS) \subseteq D^2(FS) \subseteq \ldots$$

contenidos en $j(FS) = j(S)$.

La extensión de esta cadena a todos los ordinales

$$\begin{aligned} I_0 &= FS \\ I_{\alpha+1} &= \mathcal{D}(I_\alpha) \\ I_\lambda &= \bigcup\{I_\alpha \mid \alpha < \lambda\} && \text{si } \lambda \text{ es límite} \end{aligned}$$

se estaciona en el C-ideal $j(S)$ generado por S.
En efecto, sea γ el primer ordinal donde la cadena se detiene. Entonces $I_\gamma = I_{\gamma+1} = \mathcal{D}(I_\alpha)$. Es decir, I_γ es cerrado bajo supremos dirigidos. Como también es cerrado bajo supremos finitos (entrada por entrada), se sigue que es cerrado bajo supremos arbitrarios (entrada por entrada), así que es un C-ideal. Se sigue que $I_\gamma = j(S)$, como se afirmó.

12.9. Lema: generar a A como C-ideal implica generarlo como C_f-ideal

Tomemos una familia A_λ de marcos compactos y sea A su coproducto como $\wedge$-semiretículas. Equipémoslo con los cubrientes C y C_f.

Si $P \subseteq C\text{-Idl}(A)$ es tal que $\bigvee P = 1_{C\text{-Idl}(A)}$, entonces $1 \in F(\bigcup P)$. En otras palabras, si $j(\bigcup P) = A$, entonces $F(\bigcup P) = A$.
Demostración:
Supongamos que $A = j(\bigcup P)$. De la construcción anterior, tenemos $I_\gamma = j(\bigcup P)$ (donde γ es el primer ordinal donde se detiene la cadena de iteraciones $\mathcal{D}^\alpha(\bigcup P)$), así que $1 \in I_\gamma$.
Afirmamos que γ no puede ser ordinal límite. En efecto, si lo fuera, tendríamos

$$1 \in I_\gamma = \bigcup\{I_\alpha \mid \alpha < \gamma\},$$

por lo cual $1 \in I_\alpha$ para algún $\alpha < \gamma$, lo cual no puede suceder por la minimalidad de γ.

Más aún, γ no puede ser sucesor. Si fuera el caso que $\gamma = \beta + 1$, tendríamos $1 \in I_\gamma = \mathcal{D}(I_\beta)$; es decir: $1 = \bigvee D$ para algún conjunto dirigido $D \subseteq I_\beta$. Dado que D es dirigido, podemos tomar cualquier $d \in D$ y obtener

$$1 = \bigvee D = \bigvee \{a \in D \mid d \leq a\} = \bigvee (D \cap \uparrow d),$$

lo cual nos dice que, reemplazando a D por $D \cap \uparrow d$ en caso de ser necesario, podemos suponer que D está contenido en una sección superior principal. En particular, podemos suponer que todos los elementos de D tienen soporte contenido en un conjunto finito de índices Γ.

Para cada $\lambda \in \Gamma$, sea $D_\lambda = p_\lambda(D)$. Como $1 = \bigvee D$, tenemos $1_\lambda = \bigvee D_\lambda$ y, por compacidad de los A_λ, esto nos da familias finitas $E_\lambda \subseteq D_\lambda$ tales que $1_\lambda = \bigvee E_\lambda$.

Luego, todos los elementos de todos los E_λ aparecen como entradas de los elementos de un conjunto finito $E \subseteq D$. Como D es dirigido y E es finito, existe $a \in D$ tal que $\bigvee E \leq a$, pero $\bigvee E = 1$, así que

$$1 = a \in D \subseteq I_\beta,$$

lo cual contradice la minimalidad de γ.

Se sigue que $\gamma = 0$. Esto es, $A = j(\bigvee P) = I_0 = F(\bigcup P)$, como se deseaba.

12.10. Una implicación (Tychonoff)

Con toda esta herramienta, podemos demostrar el teorema de Tychonoff. Si A_λ es una familia de marcos compactos y A es su coproducto como $\wedge$-semiretículas, debemos mostrar que C-$\mathrm{Idl}(A)$ es compacto. Sea $P \subseteq C$-$\mathrm{Idl}(A)$ una familia de C-ideales tal que $\bigvee P = 1_{C\text{-}\mathrm{Idl}(A)}$. En otras palabras: $\bigcup P$ genera a A como C-ideal.

$$j(\bigcup P) = A.$$

Como acabamos de probar, esto implca que $\bigcup P$ también genera a A como C_f-ideal:

$$F(\bigcup P) = A.$$

En particular, $1 \in F(\bigcup P)$; esto es: existe algún conjunto finito no vacío de índices Γ tal que $1 \in A$ es Γ-finitamente generado por $\bigcup P$.

Es decir: para cada $\lambda \in \Gamma$ existe un conjunto finito $S_\lambda \subseteq A_\lambda$ con $\bigvee S_\lambda = 1_\lambda$ y, siempre que se tenga una tupla $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ con $x_\lambda \in A_\lambda$, se cumple

$$1(x) = \bigwedge \{q_\lambda(x_\lambda) \mid \lambda \in \Gamma\} \in \bigcup P.$$

Ahora, como Γ es finito y cada S_λ también, solo se puede formar una cantidad finta de tuplas $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$. Así, el conjunto de los $1(x)$ es finito y, por lo tanto, está contenido en una cantidad finita de factores $P_1, \ldots, P_n \in P$ de $\bigcup P$.

Luego, $1 \in A$ es Γ-finitamente generado por $\bigcup_{i=1}^n P_i$. Esto es $F(\bigcup_{i=1}^n P_i) = A$ y, así,

$$\bigvee\{P_1, \ldots, P_n\} = j(\bigcup_{i=1}^{n} P_i) = A = 1_{C\text{-Idl}(A)}.$$

Luego, C-Idl(A) es compacto.

12.11. La otra implicación

Necesitamos este pequeño resultado.

Lema 12.6. *Dada un elemento $x \in A_\lambda$, entonces*

$$j(\downarrow q_\lambda(x)) = \downarrow q_\lambda(x).$$

Demostración. En efecto, sea $a \in A$ y $S(a, \mu) \subseteq \downarrow q_\lambda(x)$ una C-cubierta de a. Queremos mostrar que $a \leq q_\lambda(x)$. Si $\mu \neq \lambda$, entonces $S(a, \mu) \subseteq \downarrow q_\lambda(x)$ nos dice que $a_\lambda \leq x$, así que $a \leq q_\lambda(x)$. Por otro lado, si $\mu = \lambda$, entonces $S(a, \lambda) \subseteq \downarrow q_\lambda(x)$ nos dice que, para todo $s \in S$ tenemos $s \leq x$. Por lo tanto, $a_\lambda = \bigvee S \leq x$, así que $a \leq q_\lambda(x)$. Se sigue que $\downarrow q_\lambda(x)$ es un C-ideal. □

Ahora sí.

Lema 12.7. *Si el coproducto C-Idl(A) de una familia de marcos A_λ es compacto, entonces cada A_λ también es compacto.*

Demostración. Supongamos que C-Idl es compacto. Si $S \subseteq A_\lambda$ es tal que $\bigvee S = 1_\lambda$, entonces $S(\lambda, 1) \in C(1)$.

Para cada $s \in S$, sea $Q_\lambda(s) = j(\downarrow q_\lambda(s))$ el C-ideal generado por s bajo q_λ. Luego,

$$\bigvee\{Q_\lambda(s) \mid s \in S\} = 1_{C\text{-Idl}(A)} = A.$$

Por la compacidad de C-Idl(A), existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ tales que

$$\bigvee\{Q_\lambda(s_i) \mid i = 1, \ldots, n\} = A.$$

Como Q_λ es morfismo de marcos, esto es

$$Q_\lambda(\bigvee\{s_i \mid i = 1, \ldots, n\}) = A.$$

Ahora, dado que $Q_\lambda(x) = \downarrow q_\lambda(x)$, tenemos

$$1 \in \downarrow q_\lambda(\bigvee\{s_i \mid i = 1, \ldots, n\}),$$

o bien

$$1 = q_\lambda(\bigvee\{s_i \mid i = 1, \ldots, n\}).$$

Proyectando a la λ-ésima coordenada, obtenemos

$$1_\lambda = \bigvee\{s_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Se sigue que A_λ es compacto. □

Capítulo 13

Producto en Top vs coproducto en Frm

Definición 13.1 (Morfismo denso). *Un morfismo de marcos $f : A \to B$ es denso si $\forall\ a \in A$se cumple que*

$$f(a) = 0 \implies a = 0$$

Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y considérense el marco de abiertos de su producto $\mathcal{O}(\prod\limits_{i \in I} S_i)$ y su coproducto $\bigoplus\limits_i \mathcal{O}(S_i)$. Dado que para cualquier $i \in I$ la proyección $p_i : \prod\limits_{i \in I} \to S_i$ es continua, entonces la preimagen $p_i^{-1} : \mathcal{O}S_i$ es un morfismo de marcos. Por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $p^\sharp : \bigoplus\limits_i \mathcal{O}S_i \to \mathcal{O}(\prod\limits_{i \in I} S_i)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}S_i \arrow[rr, "k_i"] \arrow[dr, "p_i^{-1}"'] & & \bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{O}S_i \arrow[dl, "p_i^\sharp"] \\
& \mathcal{O}(\prod\limits_{i \in I} S_i) &
\end{tikzcd}$$

donde k_i es la inclusión de $\mathcal{O}S_i$ en $\bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{O}S_i$ Se cumple que $p_i^\sharp$ siempre es suprayectivo y denso; sin embargo, rara vez es un isomorfismo.

Ejemplo 13.2. Considérese el conjunto

$$\mathbb{D} = \{\frac{a}{2^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$$

y nótese que con la topología usual de subespacio de $\mathbb{R}$ es un espacio topológico isomorfo a $\mathbb{Q}$. Sea $S = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, y para $(x, y) = (\frac{a}{2^m}, \frac{b}{2^n})$, defínase $S_{x,y}$ como el cuadrado abierto con centro en (x, y) y lado $2^{-(|m-n|+1)}$. Por ejemplo, $S_{0,0} = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Nótese ahora que $A = \{S_{x,y} : (x, y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}\}$ es un marco, y sea $\mathcal{C}$ la cubierta de coproducto de marcos definida en la sección 9.3. Así, defínase $R_{x,y}$ como el $\mathcal{C}$-ideal generado por $S_{x,y}$, y nótese que $\mathbb{D} \times \mathbb{D} = \bigcup\limits_{x,y \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}} R_{x,y}$.

Para $\alpha \in \mathrm{Ord}$, defínase la sucesión (R_α) de $\mathcal{C}$-ideales como

$$R_{\alpha+1} = \{a \in A : \exists S \in \mathcal{C}(a) \text{ con } S \subseteq R_\alpha\}$$

$$R_\lambda = \bigcup\{R_\alpha : \alpha < \lambda\} \text{ para } \lambda \text{ ordinal límite}$$

Dado que A es un conjunto, existe un $\alpha \in \mathrm{Ord}$ tal que $R_\alpha = R_\gamma\ \forall\ \gamma > \alpha$; sea R_∞ el primer término de la sucesión donde esto sucede, y nótese que es el $\mathcal{C}$-ideal generado por $\{S_{x,y} : (x,y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}\}$.

Supóngase que $(a,b) \times (c,d) \in R_\infty\ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Así para un $\delta_0 > 0$, existe $\alpha_0 \in \mathrm{Ord}$, el menor ordinal tal que $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\alpha_0}$, y nótese que α_0 debe ser un ordinal sucesor, supóngase $\alpha_0 = \beta_0 + 1$. Sean $u, v \in \mathbb{R}$ tales que $(u,v) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\beta_0}$. Considérese $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3 \cdot 2^{n_0}} < \delta_0$, y sea

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{2^{2i}}$$

y nótese que $x_0 \in \mathbb{Q}$ tiene denominador 2^{n_0}. Así, el rectángulo $R_0 = R_{x_0,0}$ tiene lado $\delta_1 = \frac{1}{2^{2n_0+1}} < 2\delta_0$. Por otro lado, $x_0 < \frac{1}{3}$, y por lo tanto el rectángulo $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\beta_0}$. Sea α_1 un ordinal tal que

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (-\delta_0, \delta_0) \in R_{\alpha_1}$$

y nótese qe también es ordinal sucesor. También, Sean $n_1 > n_0$ y

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1 - n_0} \frac{1}{2^{2i}}$$

Se puede probar que el rectángulo

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (x_1 \delta_1, x_1 + \delta_1)$$

no está en R_0, ya que $x_1 < \frac{1}{3 \cdots 2^{2n_0}}$.Siguiendo el proceso inductivamente, se obtienen tres sucesiones: $(\alpha_i), (\delta_i)$ y (x_i), donde $i \in \mathrm{Ord}$. Sin embargo, la sucesión (δ_i) es estrictamente decreciente, por lo que $\delta_\alpha \neq \delta_\gamma\ \forall\ \gamma > \delta,\ \forall\ \alpha \in \mathrm{Ord}$. Lo anterior es absurdo, ya quela sucesión (δ_i) es subconjunto de $\mathbb{R}$, y es cardinable. Por lo tanto, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times (-\delta_0, \delta_0) \notin R$, y el marco $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \times \mathcal{O}(\mathbb{D})$ no es espacial; esto es, $\mathcal{O}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \ncong \mathcal{O}(\mathbb{D}) \times \mathcal{O}(\mathbb{D})$. ∎

Sin embargo, sí es posible que $\bigoplus_i \mathcal{O}S_i \simeq \mathcal{O}(\prod_{i \in I} S_i)$. Es más:

Proposición 13.3. *Si $\{S_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios sobrios y el marco $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$ es espacial, entonces el morfismo $p_i^\sharp$ es un isomorfismo de marcos $\forall\ i \in I$.*

Demostración. Como $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$ es sobrio, los espacios $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$ y $\mathcal{O}(Y)$ son isomorfos, bajo un isomorfismo $\varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i) \to \mathcal{O}(Y)$ donde Y es el espacio de puntos de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}(S_i)$, que es sobrio.

Sean $\iota_i : \mathcal{O}(S_i) \to \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}(S_i)$ las inclusiones canónicas. Sean $q_i = \varphi \circ \iota_i$. Sean $f_i : 2 \to S_i$ funciones continuas, donce 2 es el espacio de Sierpiński. Considérese el morfismo $h : \bigoplus \mathcal{O}(S_i) \to \mathcal{O}(2)$ que factoriza los morfismos inducidos por el funtor de abiertos, $\{\mathcal{O}(f_i)\}$, y sea $f : 2 \to Y$ el morfismo único que se factoriza como $\mathcal{O}(f) = h \circ \varphi^{-1}$, ya que los marcos 2 y $\mathcal{O}(Y)$ son espaciales.

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(q_i \circ f) &= f_i \\ &= h \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \iota_i \\ &= h \circ \iota_i \\ &= \mathcal{O}(f_i)\end{aligned}$$

Por lo que $q_i \circ f = f_i$. Por la propiedad universal del coproducto, existe un único isomorfismo $g : \bigoplus_{i\in I} S_i \to Y$ tal que $q_i \circ g = p_i$. Así, se cumple que

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(g) \circ \varphi \circ \iota_i &= \mathcal{O}(q_i \circ g) \\ &= \mathcal{O}(p_i) \\ &= p^\sharp \circ \iota_i\end{aligned}$$

Por lo anterior, $\mathcal{O}(g) \circ \varphi = p^\sharp$. Como g es un isomorfismo, $\mathcal{O}(g)$ también lo es, y como φ es isomorfismo, entonces $\mathcal{O}(g) \circ \varphi = p^\sharp$ es un isomorfismo. □

Definición 13.4. *Sean A un marco y $a, b \in A$. Se dice que a está muy por debajo de b, o $a \prec b$, si*

$$\neg a \vee b = 1$$

Definición 13.5 (Marco regular). *Un marco A es regular si para todo $a \in A$ se cumple que*

$$a = \bigvee\{x \in A \mid x \prec a\}$$

La definición anterior se relaciona con la de un espacio topológico regular:

Definición 13.6. *Un espacio $S \in \mathrm{Top}$ es regular si para todo $F \subset S$ cerrado y cualquier $x\S \setminus F$ existen abiertos idsjuntos V_1, V_2 tales que $s \in V_1$ y $F \subset V_2$. Nótese que lo anterior es equivalente a que para todo abierto $U \subset S$ se cumple que*

$$U = \bigcup\{V \in \mathcal{O}(S) \mid \overline{V} \subset U\}$$

Gracias a la definición de la negación en el marco $\mathcal{O}(S)$, se cumple que S es regular si y sólo si $\mathcal{O}(S)$ lo es.

Definición 13.7 (Marco continuo). *Sean A un marco y $a, b \in A$. Se dice que a está bien por debajo de b, o $a << b$, si para todo $X \subset A$ se cumple que*

$$b \leq \bigvee X \implies \exists F \subset X \text{ finito tal que } a \leq \bigvee F$$

A es un marco continuo si para todo $a \in A$ se cumple

$$a = \bigvee\{x \in A \mid x << a\}$$

Es fácil probar que se cumplen los siguientes dos resultados.

Lema 13.8.

- $S \in \mathrm{Top}$ *es localmente compacto si y sólo si el marco* $\mathcal{O}(S)$ *es continuo.*
- *Para cualesquiera* a, b *en un marco* A *se cumple que* $a << b \implies a < b$.
- *Todo marco continuo es espacial.*
- *Todo maco compacto regular es espacial.*

Gracias a lo anterior, ocurre que las categorías de marcos continuos (ContFrm) y espacios topológicos localmente compactos (LKTop) son isomorfas. Así, la categoría de marcos regulares compactos (KRFrm) es isomorfa a la de espacios compactos Hausdorff (KHaus); este resultado es llamado Dualidad de Isbell. Gracias a estos resultados se cumple la siguiente proposición.

Proposición 13.9. *Sean* $S, T \in \mathrm{Top}$, *con* T *localmente compacto. Así, los marcos* $\mathcal{O}(S) \times \mathcal{O}(T)$ *y* $\mathcal{O}(S \times T)$ *son isomorfos.*

Las proposiciones de esta sección muestran algunos casos en los que el teorema de Tychonoff es equivalente en las categorías de marcos y espacios topológicos.

Capítulo 14

Gavillas

Recordaremos las noción de gavilla en el contexto de espacios topológicos y veremos cómo generalizar esto al contexto de marcos.

14.1. Gavillas sobre espacios topológicos

Definición 14.1. *Sean E, S espacios topológicos y $f : E \to S$ una función continua. Una sección local de f es una función continua $\sigma : U \to E$, donde U es un abierto de S, tal que $f\sigma = \mathrm{id}_U$. Decimos que una sección $\sigma : U \to E$ de f es global si $U = S$.*

Las secciones locales de una función continua $f : E \to S$ nos proporcionan información acerca del espacio E y la manera en la que éste yace sobre S. ¿En qué condiciones se puede reconstruir $f : E \to S$ si solo conocemos sus secciones?

Definición 14.2. *Sean E, S espacios topológicos y $f : E \to S$ una función continua. Decimos que f es étale (o un homeomorfismo local) si, para cada punto $e \in E$ existen vecindades $U_e \in \mathcal{O}E$ de e y $V_{f(e)} \in \mathcal{O}E$ de $f(e)$, tales que la restricción $f_e : U_e \to V_{f(e)}$ de f es un homeomorfismo.*

Veremos que la respuesta a la pregunta anterior es que una función $f : E \to S$ está completamente determinada por su secciones exactamente cuando f es étale. Para mostrar esto, pasaremos por el concepto de gavilla.

Definición 14.3. *Consideremos un espacio topológico S. Una pregavilla sobre S es un funtor $(\mathcal{O}S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$.*

Por ejemplo, tomemos un espacio "objetivo" Y y, para cada abierto $U \subseteq S$, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} CU &= \{ f : U \to Y \mid f \text{ es continua } \}, \\ KU &= \{ f : U \to Y \mid f \text{ es constante } \}. \end{aligned}$$

Dada una inclusión $U \subseteq V$, tenemos funciones de restricción $CV \to CU$ y $KV \to KU$ dadas por $f \mapsto f|_U$. Estas asignaciones son funtoriales, así que C y K son pregavillas sobre S.

Una pregavilla en S asigna información local, abierto por abierto. Queremos imponer una condición de tal modo que nos permita convertir esa información local en información global.

Definición 14.4. *Sean S un espacio topológico y $F : (\mathcal{O}S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ una pregavilla sobre S.*

Además, sean $U \in \mathcal{O}S$ un abierto y $\mathcal{U} = (U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ una cubierta abierta de U.

Decimos que una familia $(f_\alpha \in FU_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ subordinada a la cubierta $\mathcal{U}$ es una familia compatible si se cumple

$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Gamma$.

En otras palabras: las inclusiones $U_\alpha \cap U_\beta \to U_\alpha$ y $U_\alpha \cap U_\beta \to U_\beta$ inducen dos funciones

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} FU_\gamma \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in\Gamma} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

que mandan $(f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma)$ a $(f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} \mid \alpha, \beta \in \Gamma)$ y $(f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} \mid \alpha, \beta \in \Gamma)$, respectivamente. Entonces una familia $(f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma) \in \prod_{\gamma\in\Gamma} FU_\gamma$ es compatible si sus imágenes bajo estas dos funciones coinciden.

Definición 14.5. *Sea S un espacio topológico. Decimos que una pregavilla en S*

$$F : (\mathcal{O}S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$$

es una gavilla si, para cualquier abierto $U \in \mathcal{O}S$, cualquier cubierta abierta $\mathcal{U} = (U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ y cualquier familia compatible $(f_\alpha \in FU_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$, existe un único $f \in FU$ tal que

$$f|_\alpha = f_\alpha$$

para todo $\alpha \in \Gamma$.

En otras palabras, F es una gavilla si, para cualquier abierto U de S y cualquier cubierta abierta $(U_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ de U, el diagrama

$$FU \to \prod_{\gamma\in\Gamma} FU_\gamma \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in\Gamma} F(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un igualador.

Con estas herramientas, podemos demostrar que los morfismos étales están completamente determinados por sus secciones.

De hecho, demostraremos un resultado más fuerte, y la afirmación anterior será un corolario.

Por un lado, sabemos que los funtores $(\mathcal{O}S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ y las transformaciones naturales entre éstos forman una categoría, a la cual denotamos como $\mathrm{Gav}(S)$.

Definición 14.6. *Dado un espacio topológico S, definimos la categoría $\mathrm{Et}(S)$ como sigue:*

- *Los objetos de* Top/S *son pares* (E, f)*, donde* E *es un espacio topológico y* $f : E \to S$ *es una función étale.*

$$\begin{array}{c} E \\ \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ S \end{array}$$

- *Dados objetos* (E, f)*,* (E', f') *de* $\mathrm{Et}(S)$*, un morfismo* $g : (E, f) \to (E', f')$ *es una función continua* $g : E \to E'$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & E' \arrow[dl, "f'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Esta es, en efecto, una categoría, con la composición y la identidad heredadas de Top.

Nótese que, si en la definición de $\mathrm{Et}(S)$ *no pedimos que la función continua* $f : E \to S$ *sea coherente, seguimos obteniendo una categoría, a la cual denotamos como* Top/S.

Ahora ¿qué relación hay entre gavillas y morfismos étales?

Notemos que, dado un objeto (E, f) de $\mathrm{Et}(S)$, tenemos una pregavilla Γ_f en S que, a cada abierto $U \subseteq S$, le asigna las secciones locales de f con dominio U:

$$\Gamma_f U = \{\sigma : U \to E \mid f\sigma = \mathrm{id}_U\}$$

y, a cada contención $U \subseteq V$, le asigna la función de restricción $\Gamma V \to \Gamma U$. De hecho, la pregavilla Γ_f asociada a (E, f) es una gavilla, pues las funciones continuas se pueden pegar a lo largo de abiertos. (Nótese que no usamos que f fuera étale, por lo cual esta construcción sigue funcionando en Top/S). Más aún, dado un morfismo $g : (E, f) \to (E', f')$ en $\mathrm{Et}(S)$, obtenemos una transformación natural $g_* : \Gamma_f \to \Gamma_{f'}$ dada como $g_*(\sigma) = g\sigma$ pues, dados abiertos $U \subseteq V$ de S, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma_f V \arrow[r] \arrow[d, "g_*"'] & \Gamma_f U \arrow[d, "g_*"] \\ \Gamma_{f'} V \arrow[r] & \Gamma_{f'} U \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Luego, obtenemos un funtor $\Gamma : \mathrm{Et}(S) \to \mathrm{Gav}(S)$. El resultado principal es el siguiente teorema.

Teorema 14.7. *El funtor* $\Gamma : \mathrm{Et}(S) \to \mathrm{Gav}(S)$ *es una equivalencia.*

Bosquejo de la demostración. La demostración se hace construyendo el funtor $\mathrm{Gav}(S) \to \mathrm{Et}(S)$ inverso a Γ. Es decir, dada una gavilla F en U, debemos construir un espacio topológico E y un morfismo étale $f : E \to S$ tal que $\Gamma_f \simeq F$.

Primero construiremos E fibra a fibra. Dado $s \in S$, ponemos

$$F_s = \Big(\bigsqcup_{U \in \mathcal{O}S, s \in U} FU \Big) / \sim_s,$$

donde $\sim_s$ es la relación de equivalencia en $\bigsqcup_{U \in \mathcal{O}S, s \in U} FU$ dada, para cualesquiera $\sigma \in FU$, $\sigma' \in F(U')$, como $\sigma \sim_s \sigma'$ si, y solo si, existe un vecindad abierta $U_s \subseteq U \cap U'$ de s tal que $\sigma|_{U_s} = \sigma'|_{U_s}$. A la clase de equivalencia de $\sigma \in FU$ bajo la relación $\sim_s$ la denotamos como $[\sigma]_s$.

Después ponemos $T(F) = \bigsqcup_{s \in S} F_s$ y definimos la proyección $f_F : T(F) \to S$ mandando $[\sigma]_s \in T(F)$ a $s \in S$. Equipamos a $T(F)$ con la topología generada por los básicos

$$B(\sigma, U) = \{[\sigma]_s \mid s \in U\}$$

siempre que $\sigma \in FU$ y $U \in \mathcal{O}S$. Finalmente, se muestra que $f_F : T(F) \to S$ es étale y que esta construcción es inversa a Γ. □

14.2. Gavillas sobre marcos

Ahora, ¿cómo hacemos esto sobre un marco? En realidad, la teoría se puede usar casi sin modificación.

Definición 14.8.

- *Una pregavilla sobre un marco A es un funtor $F : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. Si $x \le y \in A$, denotamos la función $Fy \to Fx$ inducida por F como $f \mapsto f|_x$.*

- *Una pregavilla $F : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ es separada si, para cualesquiera $X \subseteq A$ y $f, g \in F(\bigvee X)$, se tiene*
$$(\forall x \in X,\ f|_x = g|_x) \implies f = g.$$

- *Sea F una pregavilla sobre A. Dado un subconjunto $X \subseteq A$, una familia $(f_x \in Fx \mid x \in X)$ es compatible si $f_x|_{x \wedge y} = f_y|_{x \wedge y}$ para cualesquiera $x, y \in X$.*

- *Una pregavilla $F : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ es cotejada si, para cualquier subconjunto $X \subseteq A$ y cualquier familia compatible $(f_x \in Fx \mid x \in X)$ existe un $f \in F(\bigvee X)$ tal que $f|_x = f_x$ para todo $x \in X$.*

- *Una pregravilla $F : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ es una gavilla si es separada y cotejada.*

Ejemplo 14.9. Sea Ω un marco. Dado $a \in \Omega$, consideremos

$$\begin{aligned} \Omega(a) &= \mathcal{L}(\downarrow a) \subseteq \mathcal{L}\Omega, \\ \Omega\langle a \rangle &= \{X \in \mathcal{L}(\downarrow a) \mid \bigvee X = a\} \subseteq \mathcal{L}\Omega, \\ \Omega[a] &= \downarrow a \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Cada una de estas asignaciones define una pregavilla, donde las restricciones están dadas, para $a \leq b$, como

$$
\begin{aligned}
X &\mapsto \{x \wedge b \mid x \in X\}, \\
X &\mapsto \{x \wedge b \mid x \in X\}, \\
x &\mapsto x \wedge b,
\end{aligned}
$$

respectivamente. Se verifica que, en general,

- $\Omega(\cdot)$ es cotejada pero no separada,
- $\Omega\langle\cdot\rangle$ es separada pero no cotejada y
- $\Omega[\cdot]$ es gavilla.

■

Dada una pregavilla F en un marco Ω, podemos obtener una gavilla F^+ en Ω como sigue.

Para cada $a \in \Omega$, ponemos

- $\langle a \rangle = \{X \subseteq \Omega \mid \bigvee X = a\}$.
- $F\langle a \rangle = \{(f_x \in Fx \mid x \in X)$ es compatible $\mid X \in \langle a \rangle\}$
- $F^+(a) = F\langle a \rangle/\sim$, donde $(f_x \in Fx \mid x \in X) \sim (g_y \wedge Fy \mid y \in Y)$ si existe $Z \in \langle a \rangle$, $Z \subseteq X \cap Y$ tal que $af_z = g_z$ para todo $z \in Z$.

Se puede demostrar que F^+ es una gavilla y, más aún, la asignación $F \mapsto F^+$ se extiende a un funtor que resulta ser adjunto izquierdo de la inclusión $\mathrm{Gav}(\Omega) \to [\Omega^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ de las gavillas en las pregavillas.

Sin embargo, estas construcciones son muy largas y complicadas. Se puede trabajar con las gavillas en un marco a través de una categoría equivalente a $\mathrm{Gav}(\Omega)$ llamada la categoría de Ω-conjuntos y denotada como $\mathrm{Set}(\Omega)$, pero para desarrollar esta teoría se necesitaría más tiempo.

Capítulo 15

Marcos en teoría de anillos y módulos

Esto es una prueba jeje Ahora trataremos de dar una motivación algebraica para estudiar los núcleos de un marco. En realidad, el estudio de los núcleos se puede realizar en un contexto más general que el de marcos. A continuación damos un ejemplo de cómo se pueden usar los núcleos para estudiar anillos y módulos.

Localizaciones Recordemos que, en teoría de anillos, podemos localizar un anillo A con respecto a un conjunto multiplicativo $S \subseteq A$. Por ejemplo, tomando $A = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, obtenemos la localización $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

El morfismo $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ induce dos funtores

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \leftrightarrows \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}$$

llamados restricción y extensión de escalares. Las categorías, al igual que los anillos, tienen su propio concepto de localización. La definición (que no haremos aquí) es tal que los funtores $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \leftrightarrows \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}$ exhiben que $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}$ es una localización de $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$.

Teorías de torsión La clase de los $\mathbb{Z}$-módulos (es decir, grupos abelianos) contiene las clases $\mathscr{T}_t$ y $\mathscr{F}_t$ formadas por los $\mathbb{Z}$-módulos de torsión y los $\mathbb{Z}$-módulos libres de torsión, respectivamente. Notemos que $\mathscr{T}_t$ y $\mathscr{F}_t$ satisfacen:

- $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(M, N) = 0$ para cualesquiera $M \in \mathscr{T}_t$ y $N \in \mathscr{F}_t$.
- Si $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(P, N) = 0$ para todo $N \in \mathscr{F}_t$, entonces $P \in \mathscr{T}_t$.
- Si $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(M, P) = 0$ para todo $M \in \mathscr{T}_t$, entonces $P \in \mathscr{F}_t$.

Debido a que la pareja $(\mathscr{T}_t, \mathscr{F}_t)$ satisface estos axiomas, decimos que es una teoría de torsión. Además, como $\mathscr{T}_t$ es cerrada bajo submódulos, decimos que $(\mathscr{T}_t, \mathscr{F}_t)$ es una teoría de torsión hereditaria.

Los ideales de $\mathbb{Z}$ y un colímite Consideremos el conjunto $\Lambda(\mathbb{Z})$ de los ideales de $\mathbb{Z}$. Como todos los ideales de $\mathbb{Z}$ son principales, tenemos

$$\Lambda(\mathbb{Z}) = \{\langle n\rangle \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

También consideraremos el conjunto $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ de los ideales de $\mathbb{Z}$ distintos de 0.

Notemos que $\Lambda(\mathbb{Z})$ es una retícula, con ínfimo $\wedge = \cap$ y supremo $\vee = +$. Además, el subconjunto $\Lambda^*(\mathbb{Z}) \subseteq \Lambda(\mathbb{Z})$ satisface las siguientes propiedades:

- es no vacío,
- cerrado bajo intersecciones y
- absorbe hacia arriba (es decir, si $I \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$ y $I \leq J$, entonces $J \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$).

Si un subconjunto de una retícula tiene estas propiedades, decimos que es un filtro de la retícula. En otras palabras, $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ es un filtro de $\Lambda(\mathbb{Z})$.

Cada ideal I de $\mathbb{Z}$ es, en particular, un $\mathbb{Z}$-módulo, por lo cual podemos considerar el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z})$. Además, dados ideales $I \leq J$ de $\mathbb{Z}$, tenemos un morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos

$$\varphi_J^I : \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(J, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z})$$

dado por la restricción: $\varphi_J^I(f) = f|_I$.

Notemos que los morfismos $(\varphi_J^I \mid I \leq J \in \Lambda(\mathbb{Z}))$ satisfacen

- para todo I, tenemos $\varphi_I^I = \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(I,\mathbb{Z})}$ y
- siempre que $I \leq J \leq K$, tenemos $\varphi_I^J \varphi_J^K = \varphi_I^K$. Esto es: $f|_J|_I = f|_I$.

En otras palabras: viendo al copo $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ como una categoría, tenemos un funtor

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) : (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}.$$

En general, dado un conjunto dirigido $\mathscr{I}$ y una categoría $\mathcal{C}$, un sistema dirigido en $\mathcal{C}$ indicado por $\mathscr{I}$ es un funtor $F : \mathscr{I} \to \mathcal{C}$. Como $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ es codirigido (ya que es cerrado bajo ínfimos), se sigue que $(\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\mathrm{op}}$ es dirigido. Es decir: el funtor

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) : (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$$

es un sistema dirigido en $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$, indicado por $\mathscr{I} = (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\mathrm{op}}$.

Sean $\mathscr{I}$ un conjunto dirigido y $F : \mathscr{I} \to \mathcal{C}$ un sistema dirigido. Denotemos como $\sqsubseteq$ al orden en $\mathscr{I}$ y, para cada morfismo $\alpha : i \to j$ en $\mathscr{I}$ (es decir, $i \sqsubseteq j$) usaremos la notación $\varphi_i^j = F(\alpha) : F(i) \to F(j)$. El límite directo de F es un objeto $\mathcal{C}$, comúnmente denotado $\varinjlim F$ o $\varinjlim_{i\in\mathscr{I}} F(i)$, junto con una familia de morfismos $(\eta_i : F(i) \to \varinjlim F \mid i \in \mathcal{I})$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- Para cada $i \sqsubseteq j \in \mathscr{I}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "\varphi_i^j"] \arrow[dr, "\eta_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\eta_j"] \\ & \varinjlim F & \end{tikzcd}$$

  Es decir, $\eta_j \varphi_i^j = \eta_i$.

- Dado un objeto X de $\mathcal{C}$ y una familia de morfismos $(\mu_i : F(i) \to X \mid i \in \mathcal{I})$ tales que $\mu_j \varphi_i^j = \mu_i$ (siempre que $i \sqsubseteq j$), entonces existe un único morfismo $\mu : \varinjlim F \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "\varphi_i^j"] \arrow[dr, "\eta_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\mu_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\eta_j"] \arrow[ddl, bend left, "\mu"] \\ & \varinjlim F \arrow[d, "\mu"] & \\ & X & \end{tikzcd}$$

  (siempre que $i \sqsubseteq j \in \mathscr{I}$).

Se puede demostrar que, para la categoría $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$, los límites directos siempre existen y están dados por

$$\varinjlim F = \Big(\bigsqcup_{i \in \mathscr{I}} F(i) \Big) / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $\bigsqcup_{i \in \mathscr{I}} F(i)$ definida, para $f \in F(i)$ y $g \in F(j)$, como

$$f \sim g \quad \text{si, y solo si} \quad \exists k \geq i, j,\ \varphi_i^k(f) = \varphi_j^k(g)$$

y donde los morfismos $\eta_i : F(i) \to \varinjlim_{i \in \mathscr{I}} F(i)$ son las proyecciones $f \mapsto [f]$ de $f \in F(i)$ a su clase de equivalencia.

Ahora consideremos el conjunto dirigido $\mathscr{I} = (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\mathrm{op}}$ y el sistema dirigido

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}) : (\Lambda^*(\mathbb{Z}))^{\mathrm{op}} &\to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \\ I &\mapsto \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(I, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Para cada ideal $\langle n \rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$, definamos el morfismo $\mu_n : \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}$ dado por $\mu_n(f) = f(n)/n$.

Entonces, si $\langle n \rangle \sqsubseteq \langle m \rangle$ (es decir, $\langle m \rangle \leq \langle n \rangle$), el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n \rangle, \mathbb{Z}) \arrow[rr, "\varphi_n^m"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle m \rangle, \mathbb{Z}) \arrow[dl, "\mu_m"] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Ejercicio 8. *Mostrar que el morfismo inducido en el límite directo*

$$\mu : \varinjlim_{\langle n\rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}$$
$$[f] \mapsto \frac{f(n)}{n}$$

es un isomorfismo.

Solución. Primero veamos que μ está bien definida. Tomemos morfismos relacionados $f \sim g \in \bigsqcup_{\langle n\rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \mathbb{Z})$. Es decir, $f : \langle m\rangle \to \mathbb{Z}$ y $g : \langle n\rangle \to \mathbb{Z}$ satisfacen

$$f|_{\langle k\rangle} = g|_{\langle k\rangle}$$

para alguna $k \in \mathbb{Z}$ con $m \mid k$, $n \mid k$. Es decir, $k = rm$, $k = sn$ para algunos $r, s \in \mathbb{Z}$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned}\mu([g]) &= \frac{g(n)}{n} = \frac{sg(n)}{sn} = \frac{g(sn)}{sn} = \frac{g(k)}{k} \\ &= \frac{f(k)}{k} = \frac{f(rm)}{rm} = \frac{rf(m)}{rm} = \frac{f(m)}{m} = \mu([f]).\end{aligned}$$

Se sigue que μ está bien definida en las clases de equivalencia; es decir: no depende del representante.

Ahora, dado $r/m \in \mathbb{Q}$, consideremos la función $f : \langle m\rangle \to \mathbb{Z}$ dada por $am \mapsto ar$. En efecto, f respeta sumas y productos por enteros, así que podemos considerar $[f]$.

Queremos ver que la asignación $r/m \mapsto [f]$ no depende de r y de m, sino solo del cociente r/m.

Para esto, tomamos $s/n = r/m$ y debemos mostrar que $g : \langle n\rangle \to \mathbb{Z}$ dada como $an \mapsto as$ cumple $[f] = [g]$. Como $s/n = r/m$, entonces $sm = rn$, así que mn cumple

$$f|_{\langle mn\rangle}(amn) = f(amn) = arn = asm = g(anm) = g|_{\langle mn\rangle}(amn),$$

por lo cual $f|_{\langle mn\rangle} = g|_{\langle mn\rangle}$ y $[f] = [g]$.

Luego, la asignación $r/m \mapsto [(am \mapsto ar)]$ es una función

$$\xi : \mathbb{Q} \to \varinjlim_{\langle n\rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \mathbb{Z}).$$

Notemos que ξ es $\mathbb{Z}$-lineal, ya que

$$\begin{aligned}\xi\left(a\frac{r}{m} + \frac{s}{n}\right) &= \xi\left(\frac{arn + ms}{mn}\right) \\ &= (xmn \mapsto x(arn + ms)) \\ &= (xmn \mapsto xarn + xms) \\ &= (xmn \mapsto xarn) + (xmn \mapsto xms) \\ &= a(xmn \mapsto xrn) + (xmn \mapsto xms) \\ &= a\xi\left(\frac{rn}{mn}\right) + \xi\left(\frac{ms}{mn}\right) \\ &= a\xi\left(\frac{r}{m}\right) + \xi\left(\frac{s}{n}\right).\end{aligned}$$

Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned}
\xi(\mu(r/m)) &= \xi(am \mapsto ar) \\
&= \frac{(am \mapsto ar)(m)}{m} \\
&= \frac{r}{m} \\
\mu(\xi([f])) &= \mu\left(\frac{f(n)}{n}\right) \\
&= [an \mapsto af(n)] \\
&= [an \mapsto f(an)] \\
&= [f].
\end{aligned}$$

Esto muestra que ξ es la inversa de μ, así que tenemos un isomorfismo

$$\mathbb{Q} \underset{\xi}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} \varinjlim_{\langle n\rangle \in \Lambda^*(\mathbb{Z})} \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \mathbb{Z}),$$

Esto es lo que se quería. ■

Ahora, ¿qué tiene que ver esto con núcleos?

Filtros de Gabriel Recordemos que $\Lambda^*(\mathbb{Z})$ es un filtro de $\Lambda(\mathbb{Z})$. De hecho, tiene otras propiedades interesantes: Dado cualquier ideal $I \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$, tenemos

$$(n : I) = \{k \in \mathbb{Z} \mid nk \in I\} \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además, si $J \in \Lambda^*(\mathbb{Z})$, entonces

$$(\forall n \in J,\ (n : I) \in \Lambda^*(\mathbb{Z})) \implies I \in \Lambda^*(\mathbb{Z}).$$

A un filtro con estas dos propiedades se le llama filtro de Gabriel.

Núcleos deferentes Se puede demostrar que el operador $j : \Lambda(\mathbb{Z}) \to \Lambda(\mathbb{Z})$ dado como

$$j(I) = \{n \in \mathbb{Z} \mid (n : I) \in \Lambda^*(\mathbb{Z})\}$$

es un núcleo en $\Lambda(\mathbb{Z})$, en el sentido de que es monótono, infla, es idempotente y preserva ínfimos. Más aún, el conjunto $N(\Lambda(\mathbb{Z}))$ de los núcleos en $\mathbb{Z}$ es un marco. Adicionalmente, el núcleo j satisface

$$j(n : I) = (n : j(I)).$$

A un núcleo con esta propiedad se le llama núcleo deferente.

En particular, tomando el núcleo j definido arriba, se puede demostrar que su conjunto de puntos fijos es

$$\Lambda(\mathbb{Z})_j = \{0 \leq \mathbb{Z}\},$$

el cual es isomorfo a la retícula $\Lambda(\mathbb{Q})$ de ideales de $\mathbb{Q}$.

En términos generales, hay una correspondencia (que no desarrollaremos aquí) entre los núcleos deferentes de $\Lambda(\mathbb{Z})$, los filtros de Gabriel en $\Lambda(\mathbb{Z})$, las teorías de torsión hereditaria de $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ y las localizaciones de $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$.

Por ejemplo, al núcleo j le corresponden el filtro $\Lambda^*(\mathbb{Z})$, la teoría de torsión $(\mathscr{T}_t, \mathscr{F}_t)$ y la localización $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Q}}$.

Parte V

Apéndices

Capítulo 16

Teoría de categorías

16.1. Categorías

Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de

- una colección $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$, cuyos elementos son llamados los objetos de $\mathcal{C}$;
- para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, una colección $\mathcal{C}(A, B)$, cuyos elementos se llaman *morfismos (o flechas) de A en B*, de modo que cada $\mathcal{C}(A, B)$ es disjunto de los demás; es decir; si $A \neq A'$ o si $B \neq B'$, entonces $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \varnothing$;
- para cualesquiera objetos $A, B, C \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, una función

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) &\to \mathcal{C}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \equiv fg \end{aligned}$$

  denominada 'composición';
- para cada objeto $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, una flecha distinguida $\mathrm{id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$ llamada *la flecha identidad* de A;

sujetos a las condiciones:

- asociatividad: si $f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C), h \in \mathcal{C}(C, D)$, entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- identidad: para todo $f \in \mathcal{C}(A, B)$, se cumple que $f\mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B f$.

Observación 16.1. *Dependiendo del autor, el conjunto de morfismos, que aquí denotamos como $\mathcal{C}(A, B)$, se puede escribir como $\mathrm{Hom}(A, B)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, (A, B), $[A, B]$, etc. Además, pueden exigir que cada $\mathcal{C}(A, B)$ sea un conjunto, pero para los propósitos de estas notas, esta clase puede no ser cardinable.*

Ejemplo 16.2.

- $\mathbb{Z}$ puede ser visto como categoría de, al menos, dos formas diferentes:

- Tomando $\mathrm{Ob}(\mathcal{Z}) = \{\bullet\}$ y $\mathcal{Z}(\bullet,\bullet) = \{\bullet \xrightarrow{n} \bullet \mid n \in \mathbb{Z}\}$, tomando la composición como la multiplicación usual en $\mathbb{Z}$ (nótese que aquí la composición es conmutativa), y la identidad es $1 \in \mathbb{Z}$ ($1m = m = m1$ se cumple trivialmente).
- Pensemos a $\mathbb{Z}$ con el orden dado por la divisibilidad, $(\mathbb{Z}, \leq_{div})$, donde $n \leq_{div} m$ si y sólo si $m = nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Para esta categoría, $\mathrm{Ob}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}(n,m) = \{(n,m)\}$ si y sólo si $n \leq_{div} m$.

- En general, para cualquier conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ se puede pensar la categoría $\mathcal{C}$ dada por $\mathrm{Ob}\mathcal{C} = A$ y

$$\mathcal{C}(a,b) = \begin{cases} \{(a,b)\}, & m \leq n \\ \varnothing, & m \nleq n. \end{cases}$$

- Similarmente, cualquier monoide M se puede entender como una categoría con un solo objeto $\bullet$ y definiendo $\mathcal{C}(\bullet,\bullet) = M$ y definiendo la composición como la operación del monoide.

- La categoría de conjuntos Set, donde $\mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ consta de todos los conjuntos, $\mathrm{Set}(A,B)$ son las funciones de conjuntos $A \to B$ y utilizando la composición usual.

- Dado un campo k, se tiene la categoría Vect_k, cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre k, y las flechas son las transformaciones k−lineales.

- La categoría Top, tomando como objetos los espacios topológicos, y las flechas son las funciones continuas.

- La categoría de campos Fld, cuyos objetos son campos y sus morfismos son morfismos de anillos (preservan suma, multiplicación y mandan el 1 al 1).

- La categoría de extensiones de campos. $\mathrm{Fld}^{\to}$. Los objetos de $\mathrm{Fld}^{\to}$ son las extensiones de campos, esto es, los morfismos de Fld. Dados $(k \xrightarrow{f} L), (k' \xrightarrow{g} L') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fld}^{\to})$, los morfismos de f a g en la categoría $\mathrm{Fld}^{\to}$ son morfismos de extensiones; esto es: pares de morfismos de campos que son compatibles con las extensiones:

$$\mathrm{Fld}^{\to}(f,g) = \left\{ (u,v) \in \mathrm{Fld}(k,k') \times \mathrm{Fld}(L,L') \;\middle|\; \begin{tikzcd} L \arrow[r, "v"] & L' \\ k \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & k' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \right\}.$$

Dados $f, g, h \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Fld}^{\to})$, la composición se hereda de la composición en Fld:

$$\begin{aligned} \mathrm{Fld}^{\to}(f,g) \times \mathrm{Fld}^{\to}(g,h) &\to \mathrm{Fld}^{\to}(f,h) \\ ((u,v),(x,y)) &\mapsto (x,y)(u,v) = (xu, yv). \end{aligned}$$

En un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "v"'] \arrow[rr, bend left, "yv"] & L' \arrow[r, "y"'] & L'' \\
k \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "xu"'] \arrow[ur, phantom, "\backslash\!\backslash"] & k' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "x"] \arrow[ur, phantom, "\backslash\!\backslash"] & k'' \arrow[u, "h"]
\end{tikzcd}.$$

La conmutatividad del rectángulo exterior se hereda de la conmutatividad de los dos cuadrados:

$$hxu = ygu = yvf.$$

La asociatividad de la composición se hereda de la asociatividad de la composición de morfismos de campos

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "v"'] & L' \arrow[r, "y"'] & L'' \arrow[r, "b"'] & L''' \\
k \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "u"] \arrow[ur, phantom, "\backslash\!\backslash"] & k' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "x"] \arrow[ur, phantom, "\backslash\!\backslash"] & k'' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "a"] \arrow[ur, phantom, "\backslash\!\backslash"] & k''' \arrow[u, "j"]
\end{tikzcd}.$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
((a,b)(x,y))(u,v) &= (ax,by)(u,v) \\
&= (axu,byv) \\
&= (a,b)(xu,yv) \\
&= (a,b)((x,y)(u,v))
\end{aligned}$$

La identidad de la extensión $f : k \to L$ es $\mathrm{id}_f = (\mathrm{id}_k, \mathrm{id}_L) : f \to f$. En efecto, dadas $(u,v) : f \to g$ y $(c,d) : h \to f$, tenemos

$$\begin{aligned}
(u,v)(\mathrm{id}_k, \mathrm{id}_L) &= (u\mathrm{id}_k, v\mathrm{id}_L) = (u,v) \\
(\mathrm{id}_k, \mathrm{id}_L)(c,d) &= (\mathrm{id}_k c, \mathrm{id}_L d) = (c,d).
\end{aligned}$$

∎

16.2. Funtores

Para comparar los objetos de una categoría, utilizamos las flechas de la categoría, y ahora, además, para comparar categorías, definimos el concepto de funtor. Por ejemplo, si tenemos una flecha entre espacios topológicos , esta flecha es una función continua, lo que significa que respeta la estructura,en el sentido de que la premiagen de abiertos es abierta; un morfismo de grupos respeta la estructura del grupo; un morfismo de anillos respeta la estructura del anillo, etc. Con esto en mente, tenemos la definición de funtor:

Definición 16.3 (Funtor). *Para dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ actua sobre los objetos y las flechas, de manera que consiste de lo siguiente:*

Una asignación

$$\begin{aligned} Ob(\mathcal{C}) &\longrightarrow Ob(\mathcal{D}) \\ A &\to F(A) \end{aligned}$$

Para cada $A, A' \in \mathcal{C}$, una asignación

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, A') &\longrightarrow D(FA, FA') \\ f &\to F(f) \end{aligned}$$

Que además cumple que $F(id_A) = id_{FA}$.

Ejemplo 16.4.

Dada cualquier categoría $\mathcal{C}$, el functor identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ manda todo objeto a sí mismo y todo morfismo a sí mismo.

En la categoría de grupos abelianos $\mathbb{Z}\text{-Mod}$, para un grupo abeliano G, definimos a TG como el grupo de torsión, que consta de todos los elementos de G de orden finito. Si $G = TG$ decimos que G es de torsión, y si $TG = 0$ decimos que G es libre de torsión. ■

Ejercicio 9. *Mostrar que la construcción del grupo de torsión es un endo-funtor $T : \mathbb{Z}\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$.*

Solución. Primero, sean $a, b \in T_G$ arbitrarios, entonces, existen $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$a^n = e,\ b^m = e,\ e \in G \text{ el neutro de } G.$$

Si consideramos a $p := mn$, tenemos que

$$\begin{aligned} (ab)^p &= a^p b^p \\ &= (a^n)^m (b^m)^n \\ &= e^m e^n \\ &= e \cdot e = e \end{aligned}$$

con $p = mn \in \mathbb{Z}^+$. Ya que a, b son arbitrarios, se sigue que $ab \in T_G$ y en consecuencia T_G es cerrado bajo el producto de G.

Ahora, sea $c \in T_G$ arbitrario, entonces existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $c^k = e$. Ahora nótese que:

$$\begin{aligned} cc^{-1} &= e \\ (cc^{-1})^k &= e^k = e \\ \underbrace{c^k}_{=e}(c^{-1})^k &= e \\ (c^{-1})^k &= e, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Así, como c es arbitrario, obtenemos que $c^{-1} \in T_G$ y por ende T_G contiene a los inversos.
Con lo anterior, concluimos que T_G es un subgrupo de G y por lo tanto, ya que G es arbitrario, el functor T manda objetos de $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ en objetos de $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$.
Continuando, para una función $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$, nótese que $(T_A \xrightarrow{Tf} T_B)$ se define cómo $Tf = f\,|_{T_A}$, la restricción de f en T_A. Ahora, para $a \in T_A$ arbitrario, se cumple que $a^n = e$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Luego:

$$\begin{aligned} f(a^n) = f(e) &= e \\ f\left(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}\right) &= e \\ \text{Como } f \in Ab\,, \underbrace{f(a)f(a)\cdots f(a)}_{n \text{ veces}} &= e \\ (f(a))^n &= e \end{aligned}$$

Así, $(Tf)(a) = f(a) \in T_B$, y cómo a es arbitrario, se tiene que $Tf : T_A \to T_B$ está bien definido.
Luego, nótese que $(Tf)(e) = f(e) = e$, y se tiene que $e^1 = e$, por tanto, Tf preserva al neutro.
Con esto, Tf es un morfismo de Grupos Abelianos.
Finalmente, es claro que $T1_A = 1_{T_A}$, por lo tanto T preserva morfismos, y en conclusión, es un endo-functor de $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$. ■

Adicionalmente, los functores deben respetar la composición de las categorías en una de dos maneras, que determinan la varianza del functor.

Definición 16.5 (Functor covariante y contravariante)**.** *Dados dos objetos $A, B \in \mathcal{C}$, un functor F es covariante si*

$$F(A \xrightarrow{f} B) = FA \xrightarrow{Ff} FB$$

y es contravariante si

$$F(A \xrightarrow{f} B) = FA \xleftarrow{Ff} FB$$

para todo $f \in \mathcal{C}(A, B)$. Con esto, se tiene que, para cualesquiera dos flechas f, g compatibles (que se pueden componer), se tiene que un functor F cumple que:

$$F(gf) = F(g)F(f)$$

si es covariante, y

$$F(gf) = F(f)F(g)$$

si es contravariante.

Finalmente, introducimos unas propiedades adicionales de los functores.

Definición 16.6 (Fidelidad). *Un functor F es fiel si, para cada $A, A' \in \mathcal{C}$ la función*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, A') &\to \mathcal{D}(FA, FA') \\ f &\to F(f) \end{aligned}$$

es inyectiva.

Definición 16.7 (Plenitud). *Un functor F es pleno si, para cada $A, A' \in \mathcal{C}$ la función*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, A') &\to \mathcal{D}(FA, FA') \\ f &\to F(f) \end{aligned}$$

es suprayectiva.

16.3. Transformaciones naturales

Ahora que podemos comparar categorías mediante los functores, queremos herramientas que nos permitan comparar dos functores entre dos categorías. Para cumplir esta idea, se creó el concepto de transformación natural.

Definición 16.8 (Transformación natural). *Dados dos functores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una transformación natural $\alpha : F \to G$ es una familia $(F(A) \overset{\alpha_A}{\to} G(A))_{A \in \mathcal{C}}$ de flechas de $\mathcal{D}$ tal que, para toda flecha $(A \overset{f}{\to} A') \in \mathcal{C}$, se cumple que:*

$$G(f) \circ \alpha_A = \alpha_{A'} \circ F(f).$$

Aquí, los $(\alpha_\bullet)_{A \in \mathcal{C}}$ se llaman los componentes de la transformación.

Y además, podemos componer transformaciones naturales:
Si $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son functores, y $\alpha : F \to G$,$\beta : G \to H$ son transformaciones naturales entre los functores, entonces, la composición $\beta\alpha : F \to H$ es una transformación natural que va del functor F al functor H.

Estas transformaciones se llaman 'naturales' porque precisamente aparecen de forma 'natural' en el ámbito matemático.

Támbien, se denota por $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ a la clase de todas las transformaciones naturales de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, y támbien se le suele llamar la 'exponenciación', y se denota $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Definición 16.9 (Isomorfismo natural). *Se dice que una transformación natural es un isomorfismo natural precisamente cuando es un isomorfismo en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.*

Ejercicio 10. *(*) Probar que la exponenciación es una categoría.*

Demostración. Consideramos la clase de los funtores $F : C \to D$. Para las categorías C, D fijas.
Consideramos las transformaciones naturales como morfismos.

Sean $F, G, H, I : C \to D$ funtores y $\alpha\colon F \to G$, $\beta\colon G \to H$ y $\gamma\colon H \to I$ transformaciones naturales. Tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, dashed, "G(f)"] & H(A) \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[d, dashed, "H(f)"] & I(A) \arrow[d, "I(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & G(A') \arrow[r, "\beta_{A'}"'] & H(A') \arrow[r, "\gamma_{A'}"'] & I(A') \end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, para cada $A \in C$,

$$\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A \qquad \beta_{A'} \circ G(f) = H(f) \circ \beta_A \qquad \gamma_{A'} \circ H(f) = I(f) \circ \gamma_A.$$

- ☻ *La composición es una transformación natural.*
  Definimos $\beta\alpha\colon F \to H$ a la familia $(F(A) \xrightarrow{\beta_A \circ \alpha_A} H(A))$ de D.
  Sea $(A \xrightarrow{f} A') \in C$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_{A'} \circ (\alpha_{A'} \circ F(f)) &= \beta_{A'} \circ (G(f) \circ \alpha_A) \\ &= (\beta_{A'} \circ G(f)) \circ \alpha_A \\ &= (H(f) \circ \beta_A) \circ \alpha_A. \end{aligned}$$

  Por lo que $(\beta_{A'} \circ \alpha_{A'}) \circ F(f) = H(f) \circ (\beta_A \circ \alpha_A)$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\beta_A \circ \alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\beta_{A'} \circ \alpha_{A'}"'] & H(A') \end{tikzcd}$$

  conmuta.

- ☻ *La composición es asociativa.*
  Sabemos que $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ ya que $\gamma_A \circ (\beta_A \circ \alpha_A) = (\gamma_A \circ \beta_A) \circ \alpha_A$ para cada $(A \xrightarrow{f} A') \in C$.

- ☻ *I_F es una transformación natural.*
  Sea $F\colon C \to D$ un funtor. Definimos $I_F\colon F \to F$ como la familia $(F(A) \xrightarrow{I_A} F(A)) \in D$, donde I_A es el morfismo identidad de $F(A)$, para cada $A \in C$.
  Sea $(A \xrightarrow{f} A') \in D$. Sabemos que $I_{A'} \circ F(f) = F(f) = F(f) \circ I_A$. Por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "I_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "I_{A'}"'] & F(A') \end{tikzcd}$$

  conmuta. Es decir, I_F es una transformación natural.

- *Identidad.*
  Sean $\alpha\colon F \to G$ y $\beta\colon H \to F$ transformaciones lineales, sabemos que $\alpha \circ I_F = \alpha$ y $I_F \circ \beta = \beta$, ya que $\alpha_A \circ I_A = \alpha_A$ y $I_A \circ \beta_A = \beta_A$, para cada $A \in C$.

□

Además, dados dos functores $F, G \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, $F(A) \simeq G(A)$ es la naturalidad en A si F, G son naturalmente isomorfos.

Ahora un ejemplo: Sean $V \in \mathrm{Vect}_k^{<\infty}$ de la categoría de k–espacios vectoriales de dimensión finita, y consideramos su espacio dual $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$, esto es una transformación natural $()^* : \mathrm{Vect}_k^{<\infty} \to \mathrm{Vect}_k^{<\infty}$, y además se tiene un iso-natural $V \overset{\alpha_V}{\simeq} V^{**}$, dado por la evaluación en v, $v \in V$:

$$\alpha_V(v) \in V^{**} = \mathrm{Hom}(V^*, k)$$
$$\alpha_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$$

Esto determina una transformación natural $\alpha : \mathrm{id} \to (\bullet)^{**}$, que además es un isomorfismo canónico (se llama así ya que esta dado de forma 'no-arbitraria').

Con estos conceptos, se puede construir la definición de categorías equivalentes.

La idea es como sigue: Queremos que $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$ signifique que existen dos functores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D}$ tales que $GF \equiv 1_{\mathcal{C}}$ y $FG \equiv 1_{\mathcal{D}}$. Esto quiere decir que hay isomorfismos naturales $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to Gf$ y $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{D}}$.

Definición 16.10. *Un functor $F \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ es escencialmente suprayectivo en objetos si, para todo $D \in \mathcal{D}$, existe un $A \in \mathcal{D}$ tal que $F(A) \simeq D$.*

Con esta definición, podemos observar que un functor es una equivalencia si y sólo si es pleno, fiel y esencialmente suprayectivo en objetos.

Ejercicio 11. *(**) Probar que un funtor es una equivalencia ssi es esencialmente suprayectivo y fielmente pleno.*

Solución. Primero probaremos el siguiente lema.

Lema 16.11. *Si $\alpha : F \to G$ es un isomorfismo natural entre dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, cada componente $\alpha_A : FA \to GA$ de α es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Como $\alpha : F \to G$ es un isomorfismo, existe una trasformación natual $\alpha^{-1} : G \to F$ tal que

$$\alpha\alpha^{-1} = \mathrm{id}_G \qquad\qquad \alpha\alpha^{-1} = \mathrm{id}_F$$

Esto significa que, al fijarnos en las componentes en cualquier objeto A de $\mathcal{C}$, tenemos

$$\alpha_A(\alpha^{-1})_A = (\alpha\alpha^{-1})_A = (\mathrm{id}_G)_A = \mathrm{id}_{GA}$$
$$(\alpha^{-1})_A\alpha_A = (\alpha^{-1}\alpha)_A = (\mathrm{id}_F)_A = \mathrm{id}_{FA}$$

Luego, α_A es un isomorfismo con inverso $(\alpha_A)^{-1} = (\alpha^{-1})_A$. En particular, la notación α_A^{-1} no es ambigua. □

Ahora sí, continuamos con el ejercicio. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una equivalencia. Entonces hay otro funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos

$$\epsilon : FG \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \qquad\qquad \eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \simeq GF.$$

- Primero probaremos que F es fiel. Supongamos que $f, g : A \to B$ son morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $Ff = Fg$. Aplicando G, obtenemos $GFf = GFg$. Luego, como η es transformación natural, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} GFA & A \arrow[l, "\eta_A"', "\sim"] \arrow[d, "f"] \\ GFB \arrow[from=u, "GFf"'] & B \arrow[l, "\sim", "\eta_B"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GFA & A \arrow[l, "\eta_A"', "\sim"] \arrow[d, "g"] \\ GFB \arrow[from=u, "GFg"'] & B \arrow[l, "\sim", "\eta_B"'] \end{tikzcd},$$

donde η_A y η_B son isomorfismos, por el lema que probamos. Recordando que $GFf = Gfg$, tenemos

$$\begin{aligned} f &= (\eta_B^{-1})(GFf)(\eta_A) \\ &= (\eta_B^{-1})(GFg)(\eta_A) \\ &= g, \end{aligned}$$

como se quería.

- Ahora veremos que F es pleno. Sea $g : FA \to FB$ un morfismo en $\mathcal{D}$. Queremos construir un morfismo $f : A \to B$ tal que $Ff = g$. Como G es el inverso de F (salvo iso), el candidato natural sería Gg. El problema es que este es un morfismo de GFA en GFB. Podemos intentar arrerglar esto recordando que los componentes de la transformación $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ son isomorfimos. Consideramos la composición $h = (\eta_B^{-1})(Gg)(\eta_A)$:

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[d, "Gg"'] & A \arrow[l, "\eta_A"', "\sim"] \arrow[d, dotted, "h"] \\ GFB & B \arrow[l, "\sim", "\eta_B"'] \end{tikzcd}.$$

Aplicando F, tenemos

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "g"] & FGFA \arrow[l, "\epsilon_{FA}"', "\sim"] \arrow[d, "FGg"'] & FA \arrow[l, "F\eta_A"', "\sim"] \arrow[d, "Fh"] \\ FB & FGFB \arrow[l, "\sim", "\epsilon_{FB}"'] & FB \arrow[l, "\sim", "F\eta_B"'] \end{tikzcd},$$

lo cual nos dice que Fh y g difieren por un isomorfismo. Tendríamos $Fh = g$ si fuera el caso que $(\epsilon_{FA})(F\eta_A) = \mathrm{id}_{FA}$ y que $(\epsilon_{FB})(F\eta_B) = \mathrm{id}_{FB}$. Sin embargo, esto no es cierto, en general.

Para remediar esto, en lugar de tomar h, tomamos la composición f como

$$\begin{tikzcd}
GFA \arrow[d, "Gg"'] & GFGFA \arrow[l, "GF\eta_A^{-1}"'] & GFA \arrow[l, "G\epsilon_{FA}^{-1}"'] & A \arrow[l, "\eta_A"'] \arrow[d, dotted, "f"] \\
GFB & GFGFB \arrow[l, "GF\eta_B^{-1}"'] & GFB \arrow[l, "G\epsilon_{FB}^{-1}"'] & B \arrow[l, "\eta_B"']
\end{tikzcd},$$

de modo que, al aplicar F, tenemos

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[d, "g"] & FGFA \arrow[l, "\epsilon_{FA}"'] \arrow[d, "FGg"'] & FGFGFA \arrow[l, "FGF\eta_A^{-1}"'] & FGFA \arrow[l, "FG\epsilon_{FA}^{-1}"'] & FA \arrow[l, "F\eta_A"'] \arrow[d, dotted, "Ff"] \\
FB & FGFB \arrow[l, "\epsilon_{FB}"'] & FGFGFB \arrow[l, "FGF\eta_B^{-1}"'] & FGFB \arrow[l, "FG\epsilon_{FB}^{-1}"'] & FB \arrow[l, "F\eta_B"']
\end{tikzcd}.$$

La situación puede parecer peor, pero la naturalidad nos salva. Agregando arriba y abajo los cuadrados conmutativos que nos da la condición de naturalidad, tenemos

$$\begin{tikzcd}
& FA & FGFA \arrow[l, "F\eta_A^{-1}"'] & FA \arrow[l, "\epsilon_{FA}^{-1}"'] & \\
FA \arrow[ur, equal] \arrow[d, "g"] & FGFA \arrow[l, "\epsilon_{FA}"'] \arrow[u, "\epsilon_{FA}"] \arrow[d, "FGg"'] & FGFGFA \arrow[l, "FGF\eta_A^{-1}"'] \arrow[u, "\epsilon_{FGFA}"] & FGFA \arrow[l, "FG\epsilon_{FA}^{-1}"'] \arrow[u, "\epsilon_{FA}"] & FA \arrow[l, "F\eta_A"'] \arrow[d, dotted, "Ff"] \\
FB \arrow[dr, equal] & FGFB \arrow[l, "\epsilon_{FB}"'] \arrow[d, "\epsilon_{FB}"'] & FGFGFB \arrow[l, "FGF\eta_B^{-1}"'] \arrow[d, "\epsilon_{FGFB}"] & FGFB \arrow[l, "FG\epsilon_{FB}^{-1}"'] \arrow[d, "\epsilon_{FB}"] & FB \arrow[l, "F\eta_B"'] \\
& FB & FGFB \arrow[l, "F\eta_B^{-1}"] & FB \arrow[l, "\epsilon_{FB}^{-1}"] &
\end{tikzcd}.$$

Siguiendo el camino exterior, obtenemos que

$$(F\eta_B^{-1})(\epsilon_{FB}^{-1})(\epsilon_{FB})(F\eta_B)Ff = g(F\eta_A^{-1})(\epsilon_{FA}^{-1})(\epsilon_{FA})(F\eta_A).$$

Es decir, $Ff = g$.

- Con el lema que probamos, es fácil ver que F es esencialmente suprayectivo. En efecto, para cualquier objeto B de $\mathcal{D}$, el componente $\epsilon_B : FGB \to B$ de $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo, así que B es isomorfo a un objeto en la imagen de F.

Ahora la otra implicación. Supongamos que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es fielmente pleno y esencialmente suprayectivo. Queremos definir un funtor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que haga de inverso de F (salvo iso). Como F es esencialmente suprayectivo, el axioma de elección nos permite elegir, para cada objeto B de $\mathcal{D}$, un objeto GB de $\mathcal{C}$ y un isomorfismo $\epsilon_B : FGB \xrightarrow{\sim} B$.

Falta definir la acción de G en morfismos. Dado $g : B_1 \to B_2$ en $\mathcal{D}$, definimos $f = (\epsilon_{B_2})^{-1} g(\epsilon_{B_1}) : FGB_1 \to FGB_2$, de tal modo que

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbin{/\!/}"] & FGB_1 \arrow[l, "\epsilon_{B_1}"'] \arrow[d, dotted, "f"] \\ B_2 & FGB_2 \arrow[l, "\epsilon_{B_2}"] \end{tikzcd} .$$

Como F es fielmente pleno, podemos definir a $Gg : GB_1 \to GB_2$ como el único morfismo que satisface $FGg = f : FGB_1 \to FGB_2$.

Veremos que G es un funtor. Si tomamos morfismos

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d, "g"'] \\ B_2 \arrow[d, "h"'] \\ B_3 \end{tikzcd}$$

entonces, por definición, $G(hg)$, Gh y Gg son los únicos morfismos tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d, "g"'] & FGB_1 \arrow[l, "\epsilon_{B_1}"'] \arrow[dd, "FG(hg)"] \\ B_2 \arrow[d, "h"'] \arrow[r, phantom, "\mathbin{/\!/}"] & \\ B_3 & FGB_2 \arrow[l, "\epsilon_{B_3}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_1 \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbin{/\!/}"] & FGB_1 \arrow[l, "\epsilon_{B_1}"'] \arrow[d, "FGg"] \\ B_2 \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbin{/\!/}"] & FGB_2 \arrow[l, "\epsilon_{B_2}"'] \arrow[d, "FGh"] \\ B_3 & FGB_2 \arrow[l, "\epsilon_{B_3}"'] \end{tikzcd} .$$

Se sigue que $FG(hg) = (FGh)(FGg)$. Por funtorialidad de F, esto es $FG(hg) = F((Gh)(Gg))$. Luego, como F es fiel, tenemos $G(hg) = (Gh)(Gg)$.

Por otro lado, tomando el morfismo identidad

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] \\ B \end{tikzcd}$$

tenemos que $G\mathrm{id}_B$ es el único morfismo $GB \to GB$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbin{/\!/}"] & FGB \arrow[l, "\epsilon_B"'] \arrow[d, "FG\mathrm{id}_B"] \\ B & FGB \arrow[l, "\epsilon_B"] \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $FG\mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{FGB} = F\mathrm{id}_{GB}$. Como F es fiel, esto implica que $G\mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{GB}$.

Por definición de la acción de G en morfismos, para cualquier morfismo $g : B_1 \to B_2$ en $\mathcal{D}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[d, "g"'] & FGB_1 \arrow[l, "\epsilon_{B_1}"'] \arrow[d, "FGg"] \\
B_2 & FGB_2 \arrow[l, "\epsilon_{B_2}"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto significa que la familia de morfismos $(\epsilon_B : FGB \to B)_{B \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}}$ es una transformación natural

$$\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}.$$

Como cada ϵ_B es un isomorfismo y el diagrama anterior es conmutativo, se sigue que ϵ es un isomorfismo natural, cuya inversa $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to FG$ tiene componentes dadas por

$$(\epsilon^{-1})_B = (\epsilon_B)^{-1} : B \to FGB$$

para cada objeto B de $\mathcal{D}$.

Resta construir un isomorfismo natural $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$. Sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Como F es fielmente pleno y $\epsilon : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ es un isomorfismo, podemos definir η_A como el único morfismo $\eta_A : A \to GFA$ tal que $F\eta_A = \epsilon_{FA}^{-1} : FA \to FGFA$.

Dado que $F\eta_A$ es un isomorfismo (con inverso ϵ_{FA}), se sigue que cada η_A es un isomorfismo, cuyo inverso η_A^{-1} es el único morfismo $\eta_A : A \to GFA$ tal que $F\eta_A^{-1} = \epsilon_{FA} : FGFA \to FA$. En efecto, si $f : GFA \to A$ es tal que $Ff = \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned}
F(\eta_A f) &= (F\eta_A)(Ff) = \epsilon_{FA}^{-1}\epsilon_{FA} = \mathrm{id}_{FGFA} = F\mathrm{id}_{GFA} \\
F(f\eta_A) &= (Ff)(F\eta_A) = \epsilon_{FA}\epsilon_{FA}^{-1} = \mathrm{id}_{FA} = F\mathrm{id}_A
\end{aligned}$$

así que $\eta_A f = \mathrm{id}_{GFA}$ y $f\eta_A = \mathrm{id}_A$, pues F es fiel, por lo cual $f = \eta_A^{-1}$.

Finalmente, observemos que η es una transformación natural. En efecto, para cualquier morfismo $f : A_1 \to A_2$ en $\mathcal{C}$, $Ff : FA_1 \to FA_2$ es un morfismo en $\mathcal{D}$, por lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA_1 \arrow[d, "Ff"'] & FGFA_1 \arrow[l, "\epsilon_{FA_1}"'] \arrow[d, "FGFf"] \\
FA_2 & FGFA_2 \arrow[l, "\epsilon_{FA_2}"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Como observamos antes, $F\eta_A^{-1} = \epsilon_A$ para cualquier A, así que esto es

$$\begin{tikzcd}
FA_1 \arrow[d, "Ff"'] & FGFA_1 \arrow[l, "F\eta_{A_1}^{-1}"'] \arrow[d, "FGFf"] \\
FA_2 & FGFA_2 \arrow[l, "F\eta_{A_2}^{-1}"]
\end{tikzcd}\ .$$

Es decir,

$$F(f\eta_{A_1}^{-1}) = (Ff)(F\eta_{A_1}^{-1}) = (F\eta_{A_2}^{-1})(FGFf) = F(\eta_{A_2}^{-1}GFf),$$

de modo que $f\eta_{A_1}^{-1} = \eta_{A_2}^{-1}GFf$, pues F es fiel. Luego, $\eta_{A_2}f = (GFf)\eta_{A_1}$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\eta_{A_1}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & GFA_1 \arrow[d, "GFf"] \\ A_2 \arrow[r, "\eta_{A_2}"'] & GFA_2 \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esta es la condición de naturalidad. ■

16.4. Adjunciones

En general, dadas dos categorías y dos functores entre ellas, es muy díficil saber a priori cuando estos functores forman una equivalencia, por eso se buscó las condiciones mínimas que se pueden exigir para tratar a dichas categorías 'como si fueran equivalentes'. De esta idea surgió el concepto de adjunción.

Definición 16.12. *Dadas dos categorías $\mathcal{C},\mathcal{D}$ y dos functores $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, diremos que F es el adjunto izquierdo de G, y que G es el adjunto derecho de F, denotado $F\dashv G$, si $\mathcal{D}(F(A),B)\simeq\mathcal{C}(A,G(B))$, y esto es natural en A y en B. Es decir, para cualesquiera morfismos $f:A'\to A$ en $\mathcal{C}$ y $g:B\to B'$ en $\mathcal{D}$, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(FA,B) \arrow[r, shift left, "\sim"] \arrow[d, "g\circ-\circ Ff"'] & \mathcal{C}(A,GB) \arrow[l, shift left, "\sim"] \arrow[d, "Gg\circ-\circ f"] \\ \mathcal{D}(FA',B') \arrow[r, shift left, "\sim"] & \mathcal{C}(A',GB') \arrow[l, shift left, "\sim"] \end{tikzcd}$$

La definición anterior quiere decir que hay un iso natural entre los functores: Si $A\in\mathcal{C}, B\in\mathcal{D}$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre las flechas $FA\to B$ y $A\to GB$. Es decir, a cualesquiera morfismos $(FA\xrightarrow{p}B)\in\mathcal{D}$ y $(A\xrightarrow{q}GB)\in\mathcal{C}$ les corresponden unas únicas flechas $(A\xrightarrow{\bar{p}}GB)$ y $(FA\xrightarrow{\bar{q}}B)$, respectivamente, tales que $\bar{\bar{p}}=p$ y $\bar{\bar{q}}=q$. Esto nos lleva al axioma de naturalidad, el cual es equivalente a la conmutatividad del diagrama de arriba.

Axioma (De naturalidad)**.**

1. Poniendo $A=A'$ y $f=\mathrm{id}_A:A\to A$ en el diagrama, obtenemos la condición de que, para cualquier morfismo $p:FA\to B$, se tenga $(Gg)\bar{p}=\overline{gp}$:

$$\left(GB'\xleftarrow{Gg}GB\xleftarrow{\bar{p}}A\right)=\overline{\left(B'\xleftarrow{g}B\xleftarrow{p}FA\right)}.$$

2. Poniendo $B = B'$ y $g = \mathrm{id}_B : B \to B$ en el diagrama, obtenemos la condición de que, para cualquier morfismo $q : A \to GB$, se tenga $\bar{q}(Ff) = \overline{qf}$:

$$\left(B \xleftarrow{\bar{q}} FA \xleftarrow{Ff} FA'\right) = \overline{\left(GB \xleftarrow{q} A \xleftarrow{f} A'\right)}.$$

Ejemplo 16.13.
- En álgebra surge mucho el ejemplo $free \dashv forget$. Tomando las categorias Vect_k y Set, tenemos el functor de olvidar $u : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Set}$, definido por $u((V, +, \cdot)) = V$ (olvida la estructura del espacio y lo considera como conjunto), y el functor libre $F : \mathrm{Set} \to \mathrm{Vect}_k$, definido como $F(U)$ es el espacio libre generado por U, y estos functores forman una adjunción.

  Para mostrar esto, tomamos $S \in \mathrm{Set}$, $V \in \mathrm{Vect}_k$, y la flecha $g : F(S) \to V$. Definamos $\bar{g} : S \to u(V) = V$, como $\bar{g}(s) = g(s)$ para cada $s \in S$, lo que implica que tenemos la flecha $\mathrm{Vect}_k(FS, V) \to \mathrm{Set}(S, uV)$ que manda cada g a $\bar{g}$. Ahora sea $f \in \mathrm{Set}(S, uV)$. Entonces definimos $\bar{f}$:

$$\bar{f} : FS \to V$$
$$\bar{f}\left(\sum_{s \in S} \lambda_s s\right) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s)$$

- Un caso similar se da con grupos ('mismo' functor de olvidar, y el functor que asigna el grupo libre del conjunto).

- El funtor del espacio vectorial libre es el adjunto izquierdo del de olvidar. Tenemos el funtor olvidadizo $\mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Set}$ que para cada espacio vectorial V "olvida" su estructura y le asocia el conjunto subyacente. A cada conjunto X se puede asociar el espacio vectorial $k\langle X \rangle$ generado por X; es decir, el espacio cuya base corresponde a los elementos de X. En este caso toda aplicación lineal $f : k\langle X \rangle \to V$ se define de manera única por los imágenes de los elementos de la base.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & k\langle X \rangle \\ V \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

  Esto nos da una biyección natural

$$\mathrm{Vect}_k(k\langle X \rangle, V) \cong \mathrm{Set}(X, V)$$

  Luego, el funtor $k\langle - \rangle$ es adjunto izquierdo del funtor olvidar $\mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Set}$.

- Tomando los grupos abelianos $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$, existe una adjunción con Grp, $F \dashv u$, donde u es el functor de inclusión (olvida que es abeliano), y F asigna a cada grupo G su respectiva 'abelianización', dada por $G/[G, G]$, donde $[G, G] = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$ es el subgrupo conmutador.

- Sean $A, B, C \in \mathrm{Set}$, y consideremos $f \in \mathrm{Set}(A \times B, C)$, entonces

$$\begin{aligned} f : A \times B &\to C \\ (a, b) &\to f(a, b) \end{aligned}$$

Si fijamos a, consideramos la función:

$$\begin{aligned} f_A : A &\to \mathrm{Set}(B, C) \\ a &\to f_A(a) : B \to C \\ &\qquad = f(a, -)(b) = f(a, b) \in C \end{aligned}$$

Es decir, podemos definir una función de conjuntos

$$\begin{aligned} \mathrm{Set}(A \times B, C) &\xrightarrow{\widehat{(-)}} \mathrm{Set}(A, \mathrm{Set}(B, C)) \\ f &\mapsto \hat{f}_\bullet \end{aligned}$$

y recíprocamente, tomamos una función $f : A \to \mathrm{Set}(B, C)$, entonces queremos definir una función

$$\begin{aligned} \bar{f} : A \times B &\to C \\ \bar{f}(a, b) &= f(a)(b) \end{aligned}$$

Así, definimos la función

$$\mathrm{Set}(A, \mathrm{Set}(B, C)) \xrightarrow{\overline{(-)}} \mathrm{Set}(A \times B, C)$$

y notemos que $\overline{(-)}$ y $\widehat{(-)}$ son inversas una de la otra, por tanto son una biyección, y tenemos una adjunción dada por

$$\mathrm{Set}(A \times B, C) \simeq \mathrm{Set}(A, \mathrm{Set}(B, C))$$

donde $\mathrm{Set}(C, B) =: C^B$ se le llama la exponenciación de C en B, y los functores son

$$- \times B : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$$

y el otro functor es 'exponenciar':

$$(-)^B : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$$

■

Recordemos que cuando dos categorías tiene una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, bend right, "F"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathcal{B} \arrow[u, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

Se cumple que $\mathcal{B}(FA, B) \simeq \mathcal{A}(A, GB)$, y supongamos que tenemos la configuración:

$$FA \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'$$

entonces, la composición qg le corresponde una única flecha:

$$\overline{qg} : A \longrightarrow GB'$$

o támbien podemos considerar solamente la única flecha de g:

$$\overline{g} : A \longrightarrow GB$$

y luego componerla con $G(q) : GB \to GB'$ para obtener una nueva flecha

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[dr, bend right, "G(q)\circ\overline{g}"'] & GB \arrow[d, "G(q)"] \\ & GB' \end{tikzcd}$$

y la compatibilidad dice que deberiamos obtener la misma flecha, es decir $\overline{qg} = G(q) \circ \overline{g}$. Ahora, nótese que para cualquier $A \in \mathcal{A}$, se tiene una flecha:

$$A \underset{\eta_A}{\longrightarrow} GFA$$

y por lo anterior, esta flecha es la que le corresponde a la identidad, $\eta_A = \overline{1_{FA}}$, y tenemos el caso para cada $B \in \mathcal{B}$, es decir

$$\left(A \underset{\eta_A}{\longrightarrow} GFA\right) = \overline{\left(F(A) \xrightarrow{1_{FA}} F(A)\right)}$$
$$\left(FGB \underset{\varepsilon_B}{\longrightarrow} B\right) = \overline{\left(G(B) \xrightarrow{1_{GB}} G(B)\right)}$$

entonces, esto define las transformaciones naturales en cada componente:

$$\eta_\bullet : 1_\mathcal{A} \longrightarrow GF$$
$$\varepsilon_\bullet : FG \longrightarrow 1_\mathcal{B}$$

que son, respectivamente, la **unidad** y la **co-unidad** de adjunción.

Por ejemplo, tomemos la adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_k \arrow[d, bend right, "u"'] \arrow[d, phantom, "\vdash"] \\ \mathrm{Set} \arrow[u, bend right, "F"'] \end{tikzcd}$$

del functor que olvida u y el functor de la realización libre F. Aquí, la unidad y la co-unidad son:

$$\eta_S : S \longrightarrow uF(S) = \langle \sum \lambda_s s \mid s \in S \rangle$$
$$\varepsilon_V : Fu(V) \longrightarrow V.$$

Ahora, consideremos una adjunción $F \dashv G$ entre categorías, con su unidad y co-unidad η, ε, entonces los diagramas

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

tienen que conmutar, pues si evaluamos la unidad en cada objeto $\left(A \overset{\eta_A}{\to} GFA\right) \in \mathcal{A}$ y le aplicamos F, tenemos $FA \overset{F\eta_A}{\to} FGFA$. Por otro lado, buscando al transpuesto de $GFA \overset{1_{GFA}}{\to} GFA$, obtenemos

$$\overline{1_{GFA}} : FGFA \to FA$$

pero esto es precisamente la co-unidad η_{FA}, y al componerlo con $F\eta_A$

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, bend right] & FGFA \arrow[d, "\varepsilon_{FA}"] \\ & FA \end{tikzcd}$$

Entonces, por definición de transposiciones, obtenemos que $\overline{\eta_A} = \overline{\overline{1_{FA}}} = 1_{FA}$, y la conmutatividad del otro diagrama se prueba de manera análoga.

Esto nos dice que, para cualquier adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, bend right, "F"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathcal{B} \arrow[u, bend right, "G"'] \end{tikzcd}$$

con unidad η y co-unidad ε, se cumple que la transposición es inducida por η como $\overline{g} = G(g)\eta_A$, para cualquier $g \in \mathcal{B}(FA, B)$, y dualmente por ε como $\overline{f} = \varepsilon_B F(f)$, para cualquier $f \in \mathcal{A}(A, GB)$.

Ejercicio 12. *Las transposiciones inducidas por la unidad y counidad coinciden con las transposiciones originales.*

Demostración. Recordemos que, por compatibilidad:

$$\left(\overline{F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'}\right) = \left(A \xrightarrow{\overline{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B')\right)$$
$$\left(\overline{A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)}\right) = \left(F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\overline{f}} B\right),$$

es decir, $\overline{qg} = G(q)\overline{g}$ y $\overline{fp} = \overline{f}F(p)$.
Debemos demostrar que $\overline{g} = G(g)\eta_A$ y $\overline{f} = \epsilon_B F(f)$ para $g\colon F(A) \to B$ y $f\colon A \to G(B)$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} G(g)\eta_A &= G(g)\overline{\mathrm{id}}_{F(A)} \\ &= \overline{g \circ \mathrm{id}_{F(A)}} \\ &= \overline{g}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \epsilon_B F(f) &= \overline{\mathrm{id}}_{G(B)} F(f) \\ &= \overline{\mathrm{id}_{F(A)} \circ f} \\ &= \overline{f}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 17

Ordinales

Definición 17.1 (Conjuntos linealmente ordenados)**.**

- *Un conjunto parcialmente ordenado* $(A, \leq)$ *es linealmente ordenado si para cualesquiera* $a, b \in A$ *se tiene* $a \leq b$ *o* $b \leq a$*.*
- *Para un conjunto linealmente ordenado* $(A, \leq)$*, su opuesto es el mismo conjunto* A *junto con el orden* $\leq^{op}$ *definido como*

$$a \leq^{op} b \iff b \leq a$$

  El opuesto de A *es llamado simplemente* A^**.*

- $(A, \leq)$ *es bien ordenado si todo subconjunto de* A *tiene por lo menos un primer elemento. Nótese que cualquier conjunto linealmente ordenado finito es bien ordenado.*

Ejercicio 13. *Sea* A *un conjunto linealmente ordenado.* A *es bien ordenado si y sólo si* $A^\star = A \cup \{\star\}$*, donde* $\star$ *es un elemento genérico, también lo es.*

Solución. $\Rightarrow$
Sea $(A, \leq')$ bien ordenado y considérese la relación $\leq \subset A^\star \times A^\star$ definida como $\leq' \cup \{(\star, a) : a \in A\} \cup \{(\star, \star)\}$.

1. Claramente, $\leq$ es una relación de orden.
2. Sean $x, y \in A^\star$. Si $x, y \neq \star$, como A es totalmente ordenado, $x \leq y$ o $y \leq y$. Si $x \neq \star, y = \star$, entonces $y \leq x$, si $x, y = \star$, entonces $x \leq y$ y $y \leq x$.
3. Sea $B \subset A$. Si $\star \in B, \star \leq b \ \forall \ b \in B$, y por como está definida $\leq$, no existe ningún $b \in B$ tal que $b \leq \star$, por lo que $\star$ es el menor elemento de B. Si $\star \notin B$, entonces $B \subset A$, y como $\leq$ es equivalente a $\leq'$ sobre A, entonces B tiene un menor elemento en $B \subset A \subset A^\star$.

Por lo anterior, $A^\star$ es bien ordenado.

$\Leftarrow$

Si $(A^\star, \leq)$ es bien ordenado, defínase el orden $\leq' \subset A \times A$ como

$$\leq' = \leq \setminus \left(\{(\star, a) : a \in A\} \cup \{(a, \star) : a \in A\} \right).$$

1. Claramente, $\leq'$ es una relación de orden total.
2. Sea $B \subset A$. Como $A \subset A^\star$, entonces $B \subset A^\star$, por lo que $\exists b \in B$ que es el menor elemento de B.

Por lo anterior, A es bien ordenado. ■

Definición 17.2 (Isomorfismo de conjuntos linealmente ordenados)**.** *Un morfismo $f : A \to B$ entre conjuntos linealmente ordenados es una biyección monótona.*

Definición 17.3 (Tipo de orden)**.** *Para un conjunto linealmente ordenado A, el tipo de orden $\iota(A)$ es la clase de equivalencia de A bajo la relación de equivalencia $\simeq$ definida como*

$$A \simeq B \iff \exists f : A \to B \text{ tal que } f \text{ es isomorfismo}$$

Si $\alpha = \iota(A)$, entonces $\alpha^* = \iota(A^*)$.

Ejemplo 17.4 (Construcción Von Neumann de $\mathbb{N}$)**.** $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado, pensado como la siguiente construcción:

$$0 = \varnothing$$

$$\begin{gathered} 1 = \{\varnothing\} = \{0\} \\ 2 = \{\{\varnothing\}\} = 1 \cup \{1\} \\ 3 = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} = 2 \cup \{2\} \\ \vdots \\ n + 1 = n \cup \{n\} \\ \vdots \end{gathered}$$

Así, $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ es un conjunto bien ordenado con el orden $\leq$ definido como

$$a \leq b \iff a \subset b$$

Y esta construcción también cumple con los axiomas de Peano. ■

Ejemplo 17.5 (Algunos tipos de orden)**.** $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos linealmente ordenados, y sus tipos de orden son

- $\omega = \iota(\mathbb{N})$
- $\eta = \iota(\mathbb{Q})$
- $\zeta = \iota(\mathbb{R})$

■

Definición 17.6 (Sucesor). *Para $(A, \leq)$ con $\alpha = \iota(A)$, por el ejercicio 13 $A^+ = A \cup \{A\}$ es también linealmente ordenado. A^+ es llamad sucesor de A, y $\alpha^+ = \iota(A^+) = \alpha \cup \{\alpha\}$*

Claramente la construcción de Von Neumann de $\mathbb{N}$ es compatible con esta definición de sucesor, y cualquier $n \in \mathbb{N}$ tiene la forma $n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Por lo tanto, se puede pensar en el tipo de orden de $\mathbb{N}$ como

$$\omega = \bigcup \{n : n\mathbb{N}\}$$

Y a través de la operación sucesor se pueden obtener los ordinales

$$\begin{aligned}
\omega + 1 &= \omega^+ = \omega \cup \{\omega\} \\
\omega + 2 &= (\omega + 1)^+ = \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega + 1\} \\
&\vdots \\
\omega \cdot 2 &= \omega + \omega = \bigcup \{\omega + n : n < \omega\} \\
&\vdots \\
\omega^2 &= \omega \cdot \omega = \bigcup \{\omega^n : nz\omega\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definición 17.7 (Ordinal). *Un ordinal es el tipo de orden de un conjunto bien ordenado.*

Definición 17.8 (Operaciones con conjuntos linealmente ordenados). *Sean A, B conjuntos linealmente ordenados, con tipos de orden α y β respectivamente.*

- *La unión ajena de A y B es $A \dot{\cup} B = (B \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$.*
- *La suma de A y B es el conjunto linealmente ordenado $B + A = (B \dot{\cup} A)$ junto con la relación $\leq$ definida como*

  $$(x, i) \leq (y, j) \iff \begin{cases} i < j \\ o \\ i = j \text{ y } x \leq y \end{cases}$$

  Nótese que si A y B son bien ordenados, $B + A$ también lo es. Más aún, si $A \simeq A'$ y $B \simeq B'$, entonces $B + A \simeq B' + A'$. Por lo tanto, se puede definir el ordinal

  $$\alpha + \beta = \iota(B + A)$$

Ya que se ha definido la suma de ordinales, vale la pena hacer algunas observaciones con los ordinales conocidos.

Ejemplo 17.9 (Algunas propiedades de la suma de ordinales).

- Si A y B son conjuntos finitos, la suma de los ordinales α y β funciona como la suma usual de números naturales.

- $1 + \omega = \omega$
- $\omega + 1 \neq \omega$
- $\eta + 1 \neq \eta \neq 1 + \eta$
- $\eta + \eta = \eta$
- $\zeta + \zeta \neq \zeta$

También, para cualesquiera α, β, γ ordinales, se cumples que

$$(\gamma + \beta) + \alpha = \gamma + \beta + \alpha)$$

■

Definición 17.10 (Producto y potencias de ordinales). *Es fácil ver que para dos conjuntos bien ordenados A y Bcon tipos de orden α y β respectivamente, el conjunto $B \times A$ es bien ordenado con un orden que compara los elementos de $B \times A$ entrada por entrada. Así, se puede definir el producto de ordinales*

$$\beta\alpha = \iota(B \times A)$$

Es fácil ver que el producto de ordinales es asociativo, distributivo y además que

$$(\beta\alpha)^* = \beta^*\alpha^*$$

Tomando en cuenta esta definición del producto, se pueden definir las potencias de un ordinal β como

$$\beta^0 = 1$$
$$\beta^{a+1} = \beta^a\beta$$

para cualquier $a \in \mathbb{N}$.

Nótese que bajo esta definición de potencia, se cumple que

$$\omega^a + \omega^b = \omega^b$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$. La clase de ordinales $\mathbb{O}rd$ es una clase no cardinable, y es bien ordenada.

Definición 17.11 (Encaje bien ordenado). *Un encajebien ordenado entre dos conjuntos bien ordenados A y B es una función $f : A \to B$ si es monótona, inyectiva y se $f(A) \simeq A$ es una sección inferior de B. Si existe un encaje bien ordenado $fA \to B$, se dice que A es un sub-orden de B, o $A \trianglelefteq B$. Es fácil ver que si $A \trianglelefteq B$ y también $B \trianglelefteq A$, entonces $A \simeq B$, con un isomorfismo único.*

Ejercicio 14. *Sean A, B conjuntos bien ordenados, y $f, g : A \to B$ dos encajes. Entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $a_0 \in A$. Como B es bien ordenado, los elementos $f(a_0)$ y $g(a_0)$ son comparables. Sin perder generalidad, supongamos que $f(a_0) \leq g(a_0)$.
Entonces $f(a_0) = g(a_1) \leq g(a_0)$ para algún $a_1 \in A$ ya que $g[A]$ es sección inferior.
Además $a_1 \leq a_0$ ya que, en caso contrario, se tiene que $g(a_1) > g(a_0)$, lo cual es una contradiccion.
Notemos que $f(a_1) \in g[A]$ ya que $f(a_1) \leq f(a_0)$, es decir, existe un $a_2 \in A$ tal que $f(a_1) = g(a_2)$. Repitiendo este proceso obtenemos las siguientes cadenas:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & g(a_0) \\
 & & & & | \\
a_0 & & f(a_0) & = & g(a_1) \\
| & & | & & | \\
a_1 & & f(a_1) & = & g(a_2) \\
| & & | & & | \\
a_2 & & f(a_2) & = & g(a_3) \\
| & & | & & | \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
| & & | & & | \\
a_{n-2} & & f(a_{n-2}) & = & g(a_{n-1}) \\
| & & | & & | \\
a_{n-1} & & f(a_{n-1}) & = & g(a_n) \\
| & & | & & | \\
a_n & & f(a_n) & = & g(a_{n+1}) \\
| & & | & & | \\
a_{n+1} & & f(a_{n+1}) & = & g(a_{n+2}) \\
| & & | & & | \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Como A es bien ordenado, la cadena de la izquierda tiene un mínimo. Si a_n es el mínimo de esta cadena, entonces $a_n = a_{n+1}$. Tenemos que

$$
\begin{gathered}
a_{n+1} = a_n \Rightarrow f(a_n) = g(a_{n+1}) = g(a_n) = f(a_{n-1}) \\
\Rightarrow a_n = a_{n-1},\ \textit{por inyectividad de f} \Rightarrow f(a_{n-1}) = g(a_n) = g(a_{n-1}) = f(a_{n-2}) \\
\Rightarrow a_{n-1} = a_{n-2},\ \textit{por inyectividad de f} \Rightarrow f(a_{n-2}) = g(a_{n-1}) = g(a_{n-2}) = f(a_{n-3}) \\
\vdots \\
\Rightarrow a_2 = a_1,\ \textit{por inyectividad de f} \Rightarrow f(a_1) = g(a_2) = g(a_1) = f(a_0) \\
\Rightarrow a_1 = a_0 \Rightarrow g(a_0) = g(a_1) = f(a_0)
\end{gathered}
$$

Como el elemento $a_0 \in A$ es arbitrario, concluimos que f y g tienen la misma regla de correspondencia, es decir, $f = g$. $\square$

Bibliografía

[1] Charles Ehresmann. «Gattungen von lokalen Strukturen». En: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 60 (1958), págs. 49-77.

[2] C. H. Dowker y Dona Papert. «Quotient Frames and Subspaces». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-16.1 (1966), págs. 275-296. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s3-16.1.275. eprint: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/plms/s3-16.1.275. URL: https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s3-16.1.275.

[3] JOHN R. ISBELL. «ATOMLESS PARTS OF SPACES». En: *Mathematica Scandinavica* 31.1 (1972), págs. 5-32. ISSN: 00255521, 19031807. URL: http://www.jstor.org/stable/24490585.