07 03 2024

Rogelio #20170716 1

Sea $f(x)$ una función definida por $f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

1.- Calcule el valor de la constante C para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.

$$\int_0^2 cx^2\,dx = 1 \rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 1 \rightarrow c\left[\frac{8}{3}\right] = 1 \rightarrow \boxed{c = \frac{3}{8}}$$

2.- Calcule $P[0 < x \leq 1]$.

$$\int_0^1 \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Problema del flujo vehicular. La distribución del tiempo de avance tiene la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^4}, & \text{si } x > 1 \\ 0, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp).

$$\int_0^1 0 + \int_1^\infty \frac{k}{x^4}\,dx = 1 \rightarrow \left[\frac{-k}{3x^3}\right]_1^\infty = 1 \rightarrow -k\left[0 - \frac{1}{3}\right] = 1 \rightarrow \frac{k}{3} = 1 \rightarrow \boxed{k = 3}$$

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿Su varianza?

$$E(x) = \int_1^\infty x\frac{k}{x^4}\,dx = \int_1^\infty \frac{k}{x^3}\,dx = \left[\frac{-k}{2x^2}\right]_1^\infty = \frac{-k}{2}[0-1] = \frac{k}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Varianza} = E(x^2) - E(x)^2 \rightarrow 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$E(x^2) = \int_1^\infty \frac{k}{x^2}\,dx = \left[\frac{-k}{x}\right]_1^\infty = -k[0-1] = k = 3$$

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un carro más de dos segundos?

$$\int_2^\infty \frac{3}{x^4}\,dx = \left[\frac{-3}{3x^3}\right]_2^\infty = -[0 - \tfrac{1}{8}] = \boxed{\frac{1}{8}}$$

¿A lo más 2?

$$1 - \int_2^\infty \frac{3}{x^4}\,dx = 1 + \left[\frac{-1}{x^3}\right]_2^\infty = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

¿X segundos o menos?

$$1 - \int_{x}^{\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = 1 - \left[\frac{-1}{x^3}\right]_{x}^{\infty} = 1 - \left[-1\left(0 - \frac{1}{x^3}\right)\right] = 1 - \left[\frac{1}{x^3}\right] = \boxed{1 - \frac{1}{x^3}}$$