EPM 101

Nama : Jackson Lawrence

NIM : 00000070612

Tugas 2

Mata Kuliah : Kalkulus

1. Dengan menggunakan teorema fundamental kalkulus dan teknik-teknik pengintegralan, Tentukan $\frac{d}{dx}\int_0^{\sin 2x+\cos 3} t^2(1+t)\,dt$

Jawaban : ◦ $\frac{d}{dx}\int_0^{\sin 2x+\cos 3} t^2(1+t)\,dt$ ◦ Misalkan $u = \sin 2x + \cos 3$

$= \frac{d}{dx}\int_0^{u}(t^3+t^2)\,dt$

$= \frac{d}{du}\int_0^{u}(t^3+t^2)\,dt \cdot \frac{du}{dx}$) Teorema Fundamental Kalkulus 1

$= (u^3+u^2)\cdot\frac{du}{dx}$

$= [(\sin 2x+\cos 3)^3 + (\sin 2x+\cos 3)^2]\cdot\frac{d(\sin 2x+\cos 3)}{dx}$

$= (\sin^3 2x + \cos^3 3 + 3\sin^2 2x\cos 3 + 3\sin 2x\cos^2 3 + \sin^2 2x + 2\sin 2x\cos 3 + \cos^2 3)\cdot(2\cos 2x + 0)$

$= (\sin^3 2x + \cos^3 3 + \sin^2 2x + \cos^2 3 + 2\sin 2x\cos 3 + 3\sin^2 2x\cos 3 + 3\sin 2x\cos^2 3)\cdot(2\cos 2x)$

$= 2\cdot\sin^3 2x\cdot\cos 2x + 2\cdot\cos 2x\cdot\cos^3 3 + 2\cdot\sin^2 2x\cos 2x + 2\cos 2x\cdot\cos^2 3 + 4\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3 + 6\cdot\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3 + 6\sin 2x\cdot\cos^2 3\cdot\cos 2x$

$= \sin 4x\cdot\sin^2 2x + 2\cdot\cos 2x\cdot\cos^3 3 + \sin 4x\cdot\sin 2x + 2\cdot\cos 2x\cdot\cos^2 3 + 2\cdot\sin 4x\cdot\cos 3 + 3\cdot\sin 4x\cdot\sin 2x\cdot\cos 3 + 3\cdot\sin 4x\cdot\cos^2 3$

$= \sin 4x\cdot\sin^2 2x + \sin 4x\cdot\sin 2x + 2\cdot\sin 4x\cdot\cos 3 + 3\cdot\sin 4x\cdot\sin 2x\cdot\cos 3 + 3\cdot\sin 4x\cdot\cos^2 3 + 2\cdot\cos 2x\cdot\cos^3 3 + 2\cos 2x\cdot\cos^2 3$

$= \sin 4x(\sin^2 2x + \sin 2x + 2\cos 3 + 3\cdot\sin 2x\cdot\cos 3 + 3\cos^2 3) + 2\cdot\cos 2x\cdot\cos^2 3(\cos 3 + 1)$ //

◦ Apabila disederhanakan nilai $\cos 3 \approx -0.98999 \approx -1$, maka hasilnya akan menjadi sebagai berikut:

◦ $\frac{d}{dx}\int_0^{\sin 2x+\cos} t^2(1+t)\,dt = \sin 4x(\sin^2 2x + \sin 2x + 2\cos 3 + 3\cdot\sin 2x\cos 3 + 3\cos^2 3) + 2\cdot\cos 2x\cdot\cos^2 3(\cos 3+1)$

$= \sin 4x(\sin^2 2x + \sin 2x + 2\cdot(-1) + 3\cdot\sin 2x\cdot(-1) + 3\cdot(-1)^2) + 2\cdot\cos 2x\cdot(-1)^2(-1+1)$

$= \sin 4x \left(\sin^2 2x + \sin 2x \quad -2 - 3 \cdot \sin 2x + 3 \right)$
$+ 2 \cdot \cos 2x \cdot (1) \cdot 0$
$= \sin 4x \left(\sin^2 2x - 2 \sin 2x + 1 \right)$
$= \sin 4x \cdot \left(\sin 2x - 1 \right)^2$ //

2. Dengan menggunakan teorema fundamental kalkulus dan teknik - teknik pengintegralan hitunglah $\int_0^1 4x^2 (1+4x^3)^6 \, dx$

Jawaban : ◦) $\int_0^1 4x^2 (1+4x^3)^6 \, dx$

◦) Misalkan $u = 1+4x^3$

$\frac{d(u)}{dx} = \frac{d(1+4x^3)}{dx}$

$\frac{du}{dx} = 0 + 12x^2$

$du = 12x^2 \, dx$

$dx = \frac{du}{12x^2}$

$= \int_0^1 \cancel{4x^2} \cdot u^6 \cdot \frac{du}{3\cancel{12x^2}}$

$= \int_0^1 \frac{u^6}{3} \cdot du$

$= \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 u^6 \, du$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{u^7}{7} \Big]_0^1 \right)$

◦) Memakai cara Teknik Fundamental Kalkulus 2

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{(1+4x^3)^7}{7} \right]_0^1$

$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(1+4\cdot(1)^3)^7}{7} - \frac{(1+4\cdot(0)^3)^7}{7} \right]$

$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(1+4)^7}{7} - \frac{(1+0)^7}{7} \right]$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5^7 - 1}{7} \right)$

$= \frac{78125-1}{21}$

$= \frac{78124}{21}$

$= 3720 \frac{4}{21}$ //

3. Tentukanlah integral tak tentu $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

Jawaban : ◦) $\int e^{2x} \sin 3x \, dx = \int \sin 3x \; e^{2x} \, dx$

◦) Misalkan $u = \sin 3x$

$\frac{d(u)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin 3x)$

$\frac{du}{dx} = 3\cos 3x$

$du = 3\cos 3x \, dx$

◦) Misalkan $dv = e^{2x} \, dx$

$\int dv = \int e^{2x} \, dx$

$v = \frac{e^{2x}}{2} + C$

∘ Rumus integral parsial : $\int u\,dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

∘ $\int e^{2x} \cdot \sin 3x\,dx = \int \underbrace{\sin 3x}_{u}\ \underbrace{e^{2x}\,dx}_{dv}$

$= \sin 3x \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} + C\right) - \int \left(\frac{e^{2x}}{2} + C\right) \cdot 3\cos 3x\,dx$

$= \frac{\sin 3x \cdot e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 3\cos 3x\,dx + C$

$= \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x} \cdot \cos 3x\,dx + C$

∘ Perhatikan $\int e^{2x} \cdot \cos 3x\,dx$

↳ $\int e^{2x} \cdot \cos 3x\,dx = \int \underbrace{\cos 3x}_{a} \cdot \underbrace{e^{2x}\,dx}_{db}$

↳ Rumus integral parsial : $\int a\,db = ab - \int b\,da$

↳ Misalkan : $a = \cos 3x$

$\frac{d(a)}{dx} = \frac{d(\cos 3x)}{dx}$

$\frac{da}{dx} = -3\sin 3x$

$da = -3\sin 3x\,dx$

↳ Misalkan : $db = e^{2x}\,dx$

$\int db = \int e^{2x}\,dx$

$b = \frac{e^{2x}}{2} + C$

↳ $\int e^{2x} \cdot \cos 3x\,dx = \int \cos 3x \cdot e^{2x}\,dx$

$= \cos 3x \cdot \left(\frac{e^{2x}}{2} + C\right) - \int \left(\frac{e^{2x}}{2} + C\right) \cdot -3 \cdot \sin 3x\,dx$

$= \frac{\cos 3x \cdot e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot -3 \cdot \sin 3x\,dx + C$

$= \frac{e^{2x} \cdot \cos 3x}{2} + \frac{3}{2}\int e^{2x} \cdot \sin 3x\,dx + C$

∘ Dari penjabaran persamaan-persamaannya, didapatkan :

- $\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cdot \cos 3x \, dx + C$
- $\int e^{2x} \cdot \cos 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \cos 3x}{2} + \frac{3}{2} \cdot \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx + C$

∘ $\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cdot \cos 3x \, dx + C$

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{e^{2x} \cdot \cos 3x}{2} + \frac{3}{2} \cdot \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx \right) + C$$

$$\frac{\left(\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx\right) \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{\left(e^{2x} \cdot \sin 3x\right) \cdot 2}{2 \cdot 2} - \frac{3 \cdot e^{2x} \cdot \cos 3x}{4} - \frac{9 \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx}{4} + C$$

$$\frac{9 \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx}{4} + \frac{4 \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx}{4} = \frac{2 e^{2x} \sin 3x - 3 e^{2x} \cos 3x}{4} + C$$

$$\frac{13 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx}{4} = \frac{2 e^{2x} \sin 3x - 3 e^{2x} \cos 3x}{4} + C$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{2 e^{2x} \cdot \sin 3x - 3 e^{2x} \cos 3x}{13} + C \,//$$

4. Tentukanlah integral tak tentu $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx$

Jawaban : ∘ $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx$

∘ Misalkan $u = \sin x$

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^4 \cdot \cos^{\cancel{5}\,4} x \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int u^4 \cdot \cos^4 x \, du$$

$$= \int u^4 \cdot (\cos^2 x)^2 \, du$$

$$= \int u^4 \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \, du$$

$$= \int u^4 \cdot (1 - u^2)^2 \, du$$

$$= \int u^4 \cdot (1 - 2u^2 + u^4) \, du$$

$$= \int u^4 - 2u^6 + u^8 \, du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\sin^5 x \cdot 63}{5 \cdot 63} - \frac{2 \sin^7 x \cdot 45}{7 \cdot 45} + \frac{\sin^9 x \cdot 35}{9 \cdot 35} + C$$

$$= \frac{63 \cdot \sin^5 x - 90 \sin^7 x + 35 \sin^9 x}{315} + C \,//$$

5. Tentukan volume benda padat yang didapatkan dengan memutar daerah yang dibatasi oleh $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 2$, seputar sumbu-x.

Jawaban : ◦ Untuk menjawab pertanyaan di atas, alangkah baiknya untuk menggambar terlebih dahulu grafiknya yaitu sebagai berikut

◦ $y = e^{2x}$

↳ $x = 0 \to y = e^0 = 1$

↳ $x = 1 \to y = e^2 \approx 7.4$

↳ $x = \frac{1}{2} \to y = e^1 \approx 2.7$

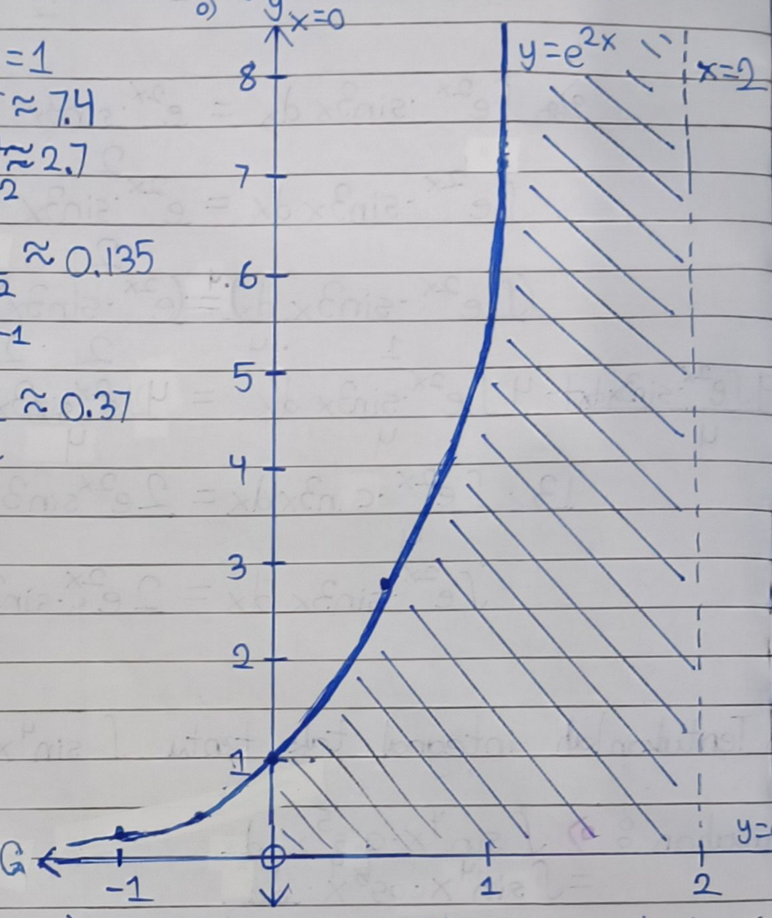
↳ $x = -1 \to y = e^{-2}$

$= \frac{1}{e^2} \approx 0.135$

↳ $x = -\frac{1}{2} \to y = e^{-1}$

$= \frac{1}{e} \approx 0.37$

↳ $y > 0$

◦ 

◦ NB: Arsiran di grafik di atas berhenti sampai grafik tersebut menyentuh saat $x = 2$ atau pada saat $y = e^4$ 54.6

◦ : $V = \pi \int_0^2 (e^{2x})^2 - 0^2 \, dx$

$= \pi \cdot \int_0^2 e^{4x} \, dx$

$= \pi \cdot \int_0^2 e^u \cdot \frac{du}{4}$

$= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^2 e^u \, du$

◦ Misalkan $u = 4x$

$\frac{d(u)}{dx} = \frac{d(4x)}{dx}$

$\frac{du}{dx} = 4$

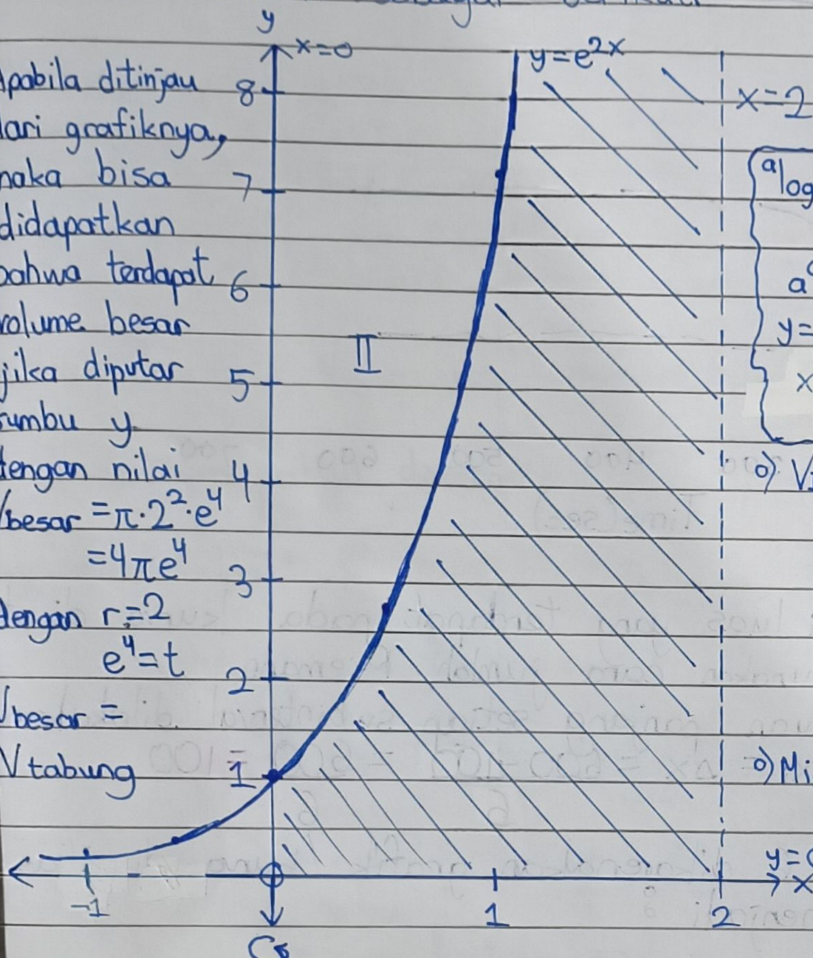
$dx = \frac{du}{4}$

$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(e^u\right]_0^2) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(e^{4x}\right]_0^2) = \frac{\pi}{4} \cdot (e^{4 \cdot 2} - e^{4 \cdot 0}) = \frac{\pi}{4} (e^8 - e^0)$

$= \frac{\pi}{4} (e^8 - 1) = \frac{\pi e^8 - \pi}{4}$ satuan volume.//

6. Tentukan volume benda padat yang didapatkan dengan memutar daerah yang dibatasi oleh $y=e^{2x}$, $y=0$, $x=0$, dan $x=2$, seputar sumbu-y. (Hint: Tidak perlu menghitung secara langsung integral tentu. Gunakan hasil yang didapatkan pada soal no. 5).

Jawaban: ◦) Berdasarkan soal nomor 5, grafik yang didapatkan adalah sebagai berikut.



Apabila ditinjau dari grafiknya, maka bisa didapatkan bahwa terdapat volume besar jika diputar sumbu y dengan nilai

$V_{besar} = \pi \cdot 2^2 \cdot e^4$
$= 4\pi e^4$

dengan $r=2$
$e^4 = t$

$V_{besar} = V_{tabung}$

◦) NB: Arsiran di grafik di atas berhenti sampai grafik tersebut menyentuh saat $x=2$ atau pada saat $y=e^4 \approx 54.6$

${}^a\log b = c$
$\equiv$
$a^c = b$, maka
$y = e^{2x} \equiv$
$x = \frac{{}^e\log y}{2}$

◦) $V_{II} = \pi \int_1^{e^4} \left(\frac{{}^e\log y}{2}\right)^2 - 0^2\,dy$
$= \pi \int_1^{e^4} \frac{1}{4} \cdot {}^e\log^2 y\,dy$
$= \frac{\pi}{4} \int_1^{e^4} \cdot {}^e\log^2 y\,dy$ ... ①

◦) Misalkan $z = {}^e\log y$
$e^z = y$
$\frac{de^z}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{dy}{dy}$
$e^z \cdot dz = dy$

◦) Dari ①, $V_{II} = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^{e^4} {}^e\log^2 y\,dy$
$= \frac{\pi}{4} \int_1^{e^4} z^2 \cdot e^z\,dz$ ... ②

Misalkan: $u = z^2$
$\frac{d(u)}{dz} = \frac{d(z^2)}{dz}$
$du = 2z\,dz$

◦) $e^z\,dz = dv$
$\int dv = \int e^z\,dz$
$v = e^z + C$

◦) Dari ②, $V_{II} = \frac{\pi}{4} \int_1^{e^4} z^2 \cdot e^z\,dz$

use Integral Parsial

$= \frac{\pi}{4} \left(z^2 \cdot e^z - \int e^z \cdot 2z\,dz\right]_1^{e^4})$
$= \frac{\pi}{4} \left(z^2 \cdot e^z - 2 \cdot \int e^z \cdot 2z\,dz\right]_1^{e^4})$ ... ③

Misalkan: $a = z$
$\frac{d(a)}{dz} = \frac{d(z)}{dz}$
$da = dz$

◦) $db = e^z\,dz$
$\int db = \int e^z\,dz$
$b = e^z + C$

◦) Dari ③, $V_{II} = \frac{\pi}{4} \left(z^2 \cdot e^z - 2 \cdot (z \cdot e^z - \int e^z \cdot dz)\right]_1^{e^4})$
$= \frac{\pi}{4} \left(z^2 \cdot e^z - 2 \cdot (z \cdot e^z - e^z)\right]_1^{e^4})$
$= \frac{\pi}{4} \left(z^2 \cdot e^z - 2z \cdot e^z + 2e^z\right]_1^{e^4})$
$= \frac{\pi}{4} \left(e^z (z^2 - 2z + 2)\right]_1^{e^4})$
$= \frac{\pi}{4} \left(e^{{}^e\log y} ({}^e\log^2 y - 2 \cdot {}^e\log y + 2)\right]_1^{e^4})$
$= \frac{\pi}{4} \left(y ({}^e\log^2 y - 2 \cdot {}^e\log y + 2)\right]_1^{e^4})$
$= \frac{\pi}{4} \left(e^4 ({}^e\log^2 e^4 - 2 \cdot {}^e\log e^4 + 2) - 1(0 - 0 + 2)\right)$
$= \frac{\pi}{4} \left(e^4 (16 - 8 + 2) - 2\right) = \frac{\pi}{4}(10e^4 - 2)$

◦ $V_{arsir} = V_{besar} - V_{II} = 4\pi e^4 - \frac{\pi}{4}(10e^4 - 2)$
$= \frac{16\pi e^4 - 10\pi e^4 + 2\pi}{4}$
$= \frac{6\pi e^4 + 2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(3e^4 + 1)$ //

Saya tidak dapat menggunakan hint yang diminta oleh soal karena hasil di soal nomor 5 dan hasil di soal nomor 6 beda jauh yaitu $\frac{\pi}{4}(e^8 - 1)$ dan $\frac{\pi}{2}(3e^4 + 1)$.

∘) Selain dari cara di atas, dapat dilakukan dengan cara metode integral lain yaitu sebagai berikut.

∘) Varsir $= 2\pi \int_0^2 x \cdot e^{2x}\,dx$

$= 2\pi \left[\dfrac{2xe^{2x} - e^{2x}}{4}\right]_0^2$

$= 2\pi \left(\dfrac{2 \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot 2} - e^{2 \cdot 2} - (2 \cdot 0 e^0 - e^0)}{4}\right)$

$= 2\pi \left(\dfrac{4e^4 - e^4 - 0 + 1}{4}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2}(3e^4 + 1)$ //

Hasilnya sama

∘) $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}dx}_{v}$

$= u \cdot v - \int v\,du$

$= x \cdot \dfrac{e^{2x}}{2} - \int \dfrac{e^{2x}}{2}\,dx$

$= \dfrac{x \cdot e^{2x}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \int e^{2x}\,dx$

$= \dfrac{x \cdot e^{2x}}{2} - \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{2x}}{2}\right) + C$

$= \dfrac{2xe^{2x} - e^{2x}}{4}$

∘) Misalkan:

$x = u$

$\dfrac{d(x)}{dx} = \dfrac{d(u)}{dx}$

$\dfrac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

∘) Misalkan:

$dv = e^{2x}\,dx$

$\int dv = \int e^{2x}\,dx$

$v = \dfrac{e^{2x}}{2} + C$

∘) NB: Pada soal nomor 5 terdapat sedikit keambiguan pada π, dan 2. Sehingga saya mencoba segala kemungkinan dan didapatkan $x = 2$ yang cocok untuk menghitung volume benda putarnya.

∘) $\int e^{2x}\,dx$

$= \int e^z \dfrac{dz}{2}$

$= \dfrac{e^z}{2} + C$

$= \dfrac{e^{2x}}{2} + C$

∘) Misalkan:

$z = 2x$

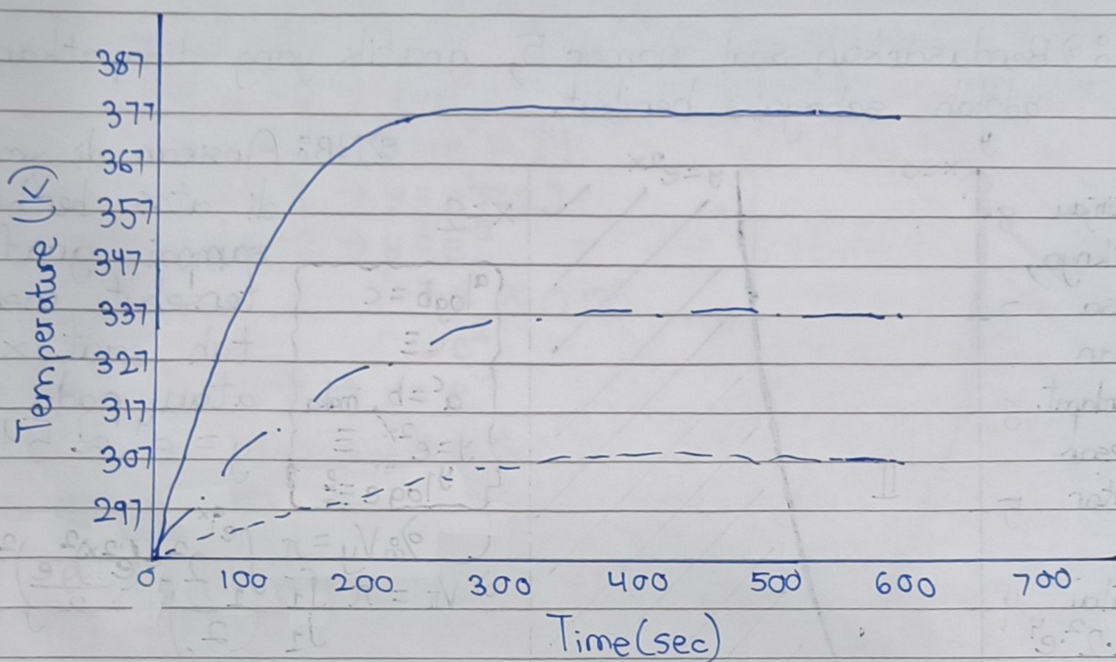
$\dfrac{d(z)}{dx} = \dfrac{d(2x)}{dx}$

$\dfrac{dz}{dx} = 2$

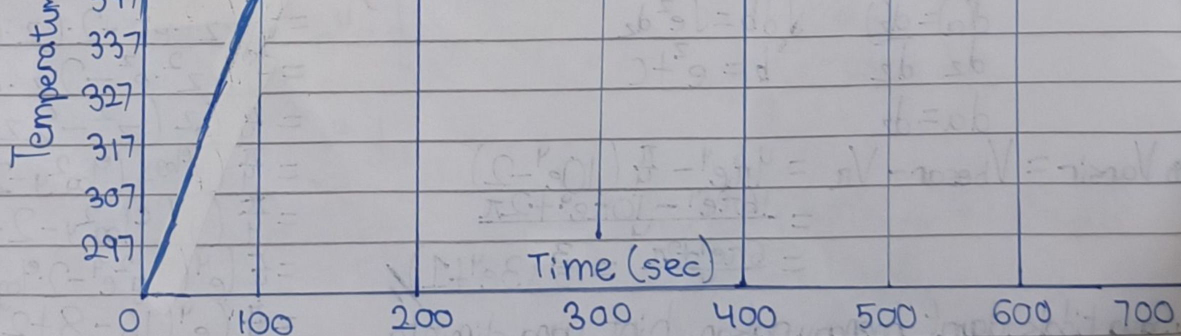
$dx = \dfrac{dz}{2}$

KIKY

7. Di bawah adalah kurva temperatur terhadap waktu sebuah mesin. Jika panas yang dihasilkan mesin tersebut adalah luas area di bawah kurva. Perkirakan rentang panas yang dihasilkan mesin tersebut pada kondisi temperatur tertinggi selama 600 detik.



Jawaban :
- Untuk mencari luas yang terdapat pada kurva di atas dapat menggunakan cara jumlah Riemann.
- Dalam penentuan panjang setiap subinterval dilakukan dengan : $\Delta x_i = \Delta x = \frac{600 - 0}{6} = \frac{600}{6} = 100$
- Bagi dengan 6 dikarenakan grafik / kurva di atas dipartisi menjadi :



d) Subinterval 1 : 0 − 100 → $f(x_1) = f(100) = 352$
Subinterval 2 : 100 − 200 → $f(x_2) = f(200) = 370$
Subinterval 3 : 200 − 300 → $f(x_3) = f(300) = 377$
Subinterval 4 : 300 − 400 → $f(x_4) = f(400) = 380$
Subinterval 5 : 400 − 500 → $f(x_5) = f(500) = 381$
Subinterval 6 : 500 − 600 → $f(x_6) = f(600) = 382$

∘) Jumlah Riemann $= \sum_{i=1}^{6} f(x_i) \cdot \Delta x_i$

∘) NB : Perlu diingatkan bahwa rentang panas yang dihasilkan sesuai grafik memiliki jawaban fluktuatif.

$= (352 + 370 + 377 + 380 + 381 + 382) \cdot 100$
$= 2242 \cdot 100$
$= 224200$ // (Perkiraannya 224200 Joule) → Satuan panas

∘) Panas yang dihasilkan dari kurva temperatur terhadap waktu sebuah mesin adalah 224200 J atau 224.2 kJ.

8. Gunakan tes rasio untuk menentukan apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3) \cdot 4^n}{2^{3n+1}}$ konvergen atau divergen.

Jawaban : ∘) Deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(n+3) \cdot 4^n}{2^{3n+1}}$ ∘) Dengan tes rasio, maka :

∘) $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1+3) \cdot 4^{n+1}}{2^{3(n+1)+1}} \cdot \frac{2^{3n+1}}{(-1)^n \cdot (n+3) \cdot 4^n} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^n} \cdot -1 \cdot (n+4) \cdot 2^{2n+2} \cdot 2^{3n+1}}{2^{3n+4} \cdot \cancel{(-1)^n} \cdot (n+3) \cdot 2^{2n}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-1 \cdot (n+4) \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot 2^2 \cdot \cancel{2^{3n}} \cdot 2}{\cancel{2^{3n}} \cdot 2^4 \cdot (n+3) \cdot \cancel{2^{2n}}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-1 \cdot (n+4)}{2 \cdot (n+3)} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-n-4}{2n+6} \right| \begin{matrix} \div n \\ \div n \end{matrix}$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-1 - \frac{4}{n}}{2 + \frac{6}{n}} \right|$

$= \left| \frac{-1 - \frac{4}{\infty}}{2 + \frac{6}{\infty}} \right|$

$= \left| \frac{-1 - 0}{2 + 0} \right|$

$= \left| \frac{-1}{2} \right|$

$= \frac{1}{2}$

∘) Karena $L = \frac{1}{2}$ yang berarti $L < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3) \cdot 4^n}{2^{3n+1}}$ konvergen.

9. Tunjukkanlah bahwa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4+y^4}$ tidak ada.

Jawaban :

∘) Dekati (0,0) sepanjang sumbu x

↳ $y = 0$

↳ $f(x,0) = \frac{0^2 \cdot \sin^2 x}{x^4 + 0^4}$

$= \frac{0}{x^4} = 0$

∘) Misalkan :

$f(x,y) = \frac{y^2 \cdot \sin^2 x}{x^2+y^2}$

∘) Atau :

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

∘) Dekati (0,0) sepanjang sumbu y

↳ $x = 0$

↳ $f(0,y) = \frac{y^2 \cdot \sin^2 0}{0^4+y^4}$

$= \frac{0}{y^4} = 0$

∘) Dekati sepanjang $y = x$

↳ $f(x,x) = \frac{x^2 \cdot \sin^2 x}{x^4+x^4}$

$= \frac{\cancel{x^2} \cdot \sin^2 x}{2x^4 x^2}$

$= \frac{\sin^2 x}{2x^2}$

↳ $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

∘) Karena $0 \neq \frac{1}{2}$, maka terbukti bahwa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4+y^4}$ tidak ada//

10. Gunakanlah turunan implisit untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ jika diketahui bahwa $e^z = xyz$.

Jawaban : ◦) $e^z = xyz$

$$\frac{\partial(e^z)}{\partial x} = \frac{\partial(xyz)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(e^z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = yz + xy \frac{\partial z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = yz + xy \cdot 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = yz$$

$$(e^z - xy) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy} //$$

◦) $e^z = xyz$

$$\frac{\partial(e^z)}{\partial y} = \frac{\partial(xyz)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(e^z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xz + xy \frac{\partial z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

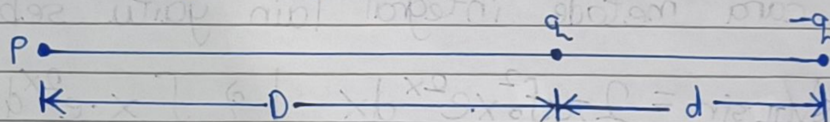
$$e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xz + xy \cdot 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

$$(e^z - xy) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy} //$$

b. Dipol medan listrik terdiri dari 2 muatan dengan besar sama tetapi tanda berbeda. Jika 2 muatan tersebut adalah q dan -q dan mereka terpisah sejauh d, maka potensial listrik V di titik P adalah



$$V = \frac{q}{D} - \frac{q}{D+d}$$

Nyatakanlah persamaan V di atas dengan deret McLaurin dalam variabel $\frac{d}{D}$!

Jawaban : ◦) Rumus medan listrik dipol : $V = \frac{q}{D} - \frac{q}{D+d}$

◦) Nyatakan dalam varabel $\frac{d}{D}$

◦) $V = \frac{q}{D} - \frac{q}{D+d} = \frac{q}{D}\left(1 - \frac{D}{D+d}\right) = \frac{q}{D}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{d}{D}}\right)$

◦) Misalkan $x = \frac{d}{D}$, maka $V = \frac{q}{D}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{d}{D}}\right) = \frac{q}{D}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)$

◦) Dari deret McLaurin, maka : $= \frac{q}{D}\left[1 - (1+x)^{-1}\right]$

$\circ)$ $(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n = 1 - x + \frac{(-1)(-1-1)}{2!} x^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!} x^3 + \ldots$

$= 1 - x + \frac{2 \cdot x^2}{2} - \frac{6 \cdot x^3}{6} + \ldots$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

$\circ)$: $E = \frac{q}{D} \left[1 - (1+x)^{-1} \right]$

$= \frac{q}{D} \left[1 - (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots) \right]$

$= \frac{q}{D} (1 - 1 + x - x^2 + x^3 - \ldots)$

$= \frac{q}{D} (x - x^2 + x^3 - \ldots)$ //

NB: $\circ)$ Deret McLaurin untuk fungsi $f(x) = (1+x)^{-1}$

$\circ)$ Rumus deret McLaurin : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$

$\circ)$ $f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} \longleftrightarrow f(0) = (1+0)^{-1} = 1$

$\circ)$ Misalkan : $u = 1 \rightarrow u' = 0$

$v = 1+x \rightarrow v' = 0+1$

$v' = 1$

Memakai rumus $f(x) = \frac{u}{v}$

$f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$\hookrightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (1+x) - 1 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2} \longleftrightarrow f'(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$

$\circ)$ Misalkan : $u = -1 \rightarrow u' = 0$

$v = (1+x)^2 \rightarrow v' = 2x+2$

Memakai rumus $f(x) = \frac{u}{v}$

$f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$\hookrightarrow f''(x) = \frac{0 \cdot (1+x)^2 - (2x+2) \cdot (-1)}{((1+x)^2)^2}$

$= \frac{2x+2}{(1+x)^4} = \frac{2(x+1)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \longleftrightarrow f''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$

$\circ)$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!} = \frac{f(0) \cdot x^0}{0!} + \frac{f'(0) \cdot x^1}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \ldots$

$= \frac{1 \cdot 1}{1} + \frac{(-1) \cdot x}{1} + \frac{2 \cdot x^2}{2} + \ldots$

$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \ldots$ //

KIKY