Matriks adalah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk persegi panjang, serta termuat di antara sepasang kurung. Matriks baris × kolom ✓
kolom × baris ✗

Bilangan di dlm matriks disebut entri dalam matriks/elemen/unsur. Matriks segitiga atas = Bawah diagonal utama nol.
" bawah = Atas "

Latihan Soal:

4. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 3 & y \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}$. Jika $3A - B = C$. Nilai $x + y = \ldots$?

→ ◦) $\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 3x & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x & -1 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ ◦) $3 - y = 2$, $y = 1$ ◦) $3x = -6$, $x = -2$

$\begin{pmatrix} 12+x & 7 \\ 3x-3 & 3-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ ◦) ∴ $x + y = -1$

Syarat perkalian matriks yaitu jumlah banyaknya kolom matriks pertama = jumlah banyaknya baris matriks kedua.
↳ $A_{1\times3} \cdot B_{3\times1} = C_{1\times1}$ ↳ $AB = AC$ belum tentu $B = C$
$B_{3\times1} \cdot A_{1\times3} = C_{3\times3}$ $AB = 0$ " $A = 0 \vee B = 0$

3. Diketahui persamaan matrik $\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$, cari x dan y.

→ ◦) $\begin{pmatrix} 4x-20+8 & -x+5+4y-4 \\ -20+4 & 5+2y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-12 & -x+4y+1 \\ -16 & 2y+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$

◦) $4x = 12 \rightarrow x = 3$ ◦) $2y = 2 \rightarrow y = 1$

No.
Date. / /

$A_{2\times3} = {}_2A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T_{2\times3} = {}_2A^{T3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

- $\boxed{(A+B)^T = A^T + B^T}$
- $\boxed{(AB)^T = B^T \cdot A^T}$
- $\boxed{(A^T)^T = A}$

Matriks simetris berlaku apabila matriks perseginya $A = A^T$.

Nilai determinan / bilangan skalar hanya berlaku di matriks bujur sangkar. $\det(A) = 0$ disebut matriks singular.
$\hookrightarrow = |A|$

Metode Sarrus hanya berlaku untuk matriks 3×3.

Minor unsur a_{ij} adalah determinan yang berasal dari determinan orde ke-n tadi dikurangi dengan baris ke-i dan kolom ke-j. Notasi : M_{ij}.

Kofaktor dari baris ke-i dan kolom ke-j dituliskan dgn :
$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$

Teorema Laplace : Determinan dari suatu matriks = Jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

1. Tentukan determinan matriks berikut menggunakan teorema Laplace
$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

No.

Date. / /

→ c) $|A| = a_{12} \cdot C_{12} + a_{22} \cdot C_{22} + a_{32} \cdot C_{32}$ (Ekspansi kolom) → Kolom tetap

$= 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= -2 \cdot (1-6) + 2 + 6 = 10 + 8 = 18$

d) $|A| = a_{31} \cdot C_{31} + a_{32} \cdot C_{32} + a_{33} \cdot C_{33}$ (Ekspansi baris) → Baris tetap

$= 2 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 9 + (-1)(-2+2) = 18$

- Apabila $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ -6 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, maka $\det A = -\det B$

- Apabila $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, maka $\det A = -\det C$

- Apabila $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \\ -6 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ maka $\det B = 0$

- Apabila $C = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ maka $\det C = 0$

- Apabila $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 7 & 20 & 3 & 5 \\ -6 & 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, maka

  $\det B = (5) \det A$

- Apabila $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -18 & 6 & 6 & 12 \end{bmatrix}$, maka

  $\det C = (3) \det A$

- $\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$

- Apabila $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -18 & 6 & 6 & 12 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -12 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

  $\det B = \det A_1 + \det A_2$

- det (triangular) = Product of diagonal
  - ↳ Upper triangular matrix / Zeros below main diagonal

    $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

  - ↳ Lower triangular matrix / Zeros above main diagonal

    $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

- det (matrix) = det (transpose)
  - ↳ $\boxed{|A| = [a_{ij}] = |A^T|}$

- The n×n matrix A is invertible → $\det(A) \neq 0$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 0$

- kofaktor ≠ matriks kofaktor

- $\boxed{\text{adjoint } A = \text{Adj } A = [A_{ij}]^T = [A_{ji}] = [\text{Cofactor matrix}]^T}$

No.
Date. / /

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, hitunglah:

a. $\det(A) = \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{matrix} = 3+0+40-18-5-0 = 20$

b. $\det(B) = \left| \begin{matrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix} = 2+20+12-6+40+2 = 70$

c. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0+4 & 2+0+8 & 3+0-2 \\ -8+3+2 & 8+3+4 & 12+15-1 \\ -6+5+2 & 6+5+4 & 9+25-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 10 & 1 \\ -3 & 15 & 26 \\ 1 & 15 & 33 \end{bmatrix}$

d. $\det(A \cdot B) = 20 \cdot 70 = 1400$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, Cari adjoint, semua minor, dan invers!

- $M_{11} = -2$
- $M_{12} = 1$
- $M_{13} = 11$
- $C_{11} = -2$
- $C_{12} = -1$
- $C_{13} = 11$
- $M_{21} = -10$
- $M_{22} = -5$
- $M_{23} = 5$
- $C_{21} = 10$
- $C_{22} = -5$
- $C_{23} = -5$
- $M_{31} = -6$
- $M_{32} = -7$
- $M_{33} = 3$
- $C_{31} = -6$
- $C_{32} = 7$
- $C_{33} = 3$
- $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 11 \\ 10 & -5 & -5 \\ -6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
- $\text{adj}(A) = C^t = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & -6 \\ -1 & -5 & 7 \\ 11 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 & 10 & -6 \\ -1 & -5 & 7 \\ 11 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

No.
Date / /

Operasi Baris Elementer (OBE)

1. Mempertukarkan elemen-elemen baris ke-i dgn baris ke-j → b_{ij}
2. Mengalikan elemen- elemen baris ke-i dgn skalar k → $b_i(k)$ $k \neq 0$
3. Mengganti elemen-elemen baris ke-i dgn elemen-elemen baris ke-i yang lama ditambah dgn kelipatan k dari baris ke-j → $b_{ij}(k)$

Contoh :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

→ ① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_{12}} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_1(-2)} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

yg ubah ← → tetap (Kali dgn skalar)

③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(-2).1+3$ $(-2).2+4$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, buat jadi matriks segitiga atas!

→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_{31}(-3)]{b_{21}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_{32}(-\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{20}{3}$
$= 20$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_{13}(-2)]{b_{23}(-1)} \begin{pmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_{12}(-5)} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = (-10)(-2) \cdot 1$
$= 20$

No.
Date. / /

Invers dengan OBE

$[A/I] \xrightarrow{OBE} [I/A^{-1}]$

1. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

→ a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{21}(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_2(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$ —

$\xrightarrow{b_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$

2. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

→ a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_{31}(-3)]{b_{21}(-4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{32}(-\frac{5}{3})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[b_{23}(\frac{21}{20})]{b_{13}(-\frac{3}{10})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{20} & -\frac{3}{4} & \frac{21}{20} \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[b_3(\frac{3}{20})]{b_2(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{20} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{20} \end{array}\right)$

A system of linear equations is said to be consistent if it has either 1 solution or infinitely many solutions. A system of linear equotion is said to be inconsistent if it has no solution.

SPL
- Konsisten
  - Jawaban tunggal ($det(A) \neq 0$)
  - Jawaban banyak ($det(A) = 0$)
- Tidak konsisten — Tidak ada jawaban

No
Date / /

An augmented matrix of a system consists of the coefficient matrix with an added column containing the constants from the right sides of the equations.

$$\boxed{[A|B] \xrightarrow{OBE} [I|X]}$$

Contoh :

1. $x_1 + 2x_2 = 5$
$3x_1 - 4x_2 = 7$, dibuat ke dalam matriks dan cari nilai x_1, x_2, x_3 dengan OBE!

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{21}(-3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -10 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{b_2(-\frac{1}{10})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{b_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$

Gauss Jordan
$x_1 = \frac{17}{5}$ $x_2 = \frac{4}{5}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ Gauss

$x_1 + 2x_2 = 5$
$x_2 = \frac{4}{5} \rightarrow x_1 = \frac{17}{5}$

2. $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$2x_2 - 8x_3 = 8$
$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$, dibuat ke dalam matriks dan cari nilai x_1, x_2, dan x_3 dengan OBE!

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$x_1 = 29$
$x_3 = 3$
$x_2 - 4x_3 = 4$
$x_2 = 16$
Gauss

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[b_2(\frac{1}{2})]{b_{31}(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{32}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{12}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[b_{23}(4)]{b_{13}(7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

(Gauss-Jordan)

$x_1 = 29$
$x_2 = 16$
$x_3 = 3$

3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{B_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{B_{31}(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-3}{2} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{B_{31}(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$ Tidak konsisten karena $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \frac{5}{2}$ selalu salah.

4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -3 & -8 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{b_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -3 & -8 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{32}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Gauss

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ selalu benar

$\xrightarrow{b_{12}(\frac{3}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_2 - 4x_3 = 8$
$x_1 - 5x_3 = \frac{25}{2}$
Jawaban byk / Konsisten

- If $D \neq 0$, then the system is consistent and has unique solution.
- If $D = 0$ and $D_1 = D_2 = 0$, then the system is consistent and has infinitely many solutions.
- If $D = 0$ and one of $D_1, D_2 \neq 0$, then the system is inconsistent and has no solution.

Matrik echelon-baris adalah matriks yang memenuhi ketiga syarat berikut :

- Jika sebuah baris memiliki elemen yang tidak semuanya nol, maka elemen yang pertama kali muncul adalah angka 1 (Disebut Leading 1).

- Jika sebuah baris memiliki elemen yang semuanya nol, maka baris tersebut harus berada di bagian bawah.

- Jika 2 buah baris memiliki Leading 1, maka Leading 1 pada baris bawah harus berada di sebelah kanan dari Leading 1 pada baris atas.

Matrik echelon-baris tereduksi adalah matriks echelon yang memenuhi syarat tambahan yaitu jika sebuah kolom memiliki Leading 1, maka elemen-elemen lain pada kolom tersebut harus semuanya 0.

$[A \mid B]$ = augmented matriks = Matriks lengkap

Contoh :

1. $$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[b_{41}(-2)]{b_{21}(-2)} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_2(-1)} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[b_{42}(-4)]{b_{32}(-5)} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_{34}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{b_3(\frac{1}{6})} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

∘) $x_6 = \frac{1}{3}$

∘) $x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1$

$x_3 + 2x_4 = 0$

$x_3 = -2x_4$

∘) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0$

$x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$

$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$

∘)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_5 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2∘ Selesaikan dengan metoda eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

$x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

→ ∘)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[b_{21}(-2)]{b_{31}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \xrightarrow[b_3(\frac{1}{3})]{b_2(\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{b_3(-6)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

∘) $x_3 = 3$

∘) $x_2 - \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2}$

$x_2 - \frac{21}{2} = -\frac{17}{2}$

$x_2 = 2$

∘) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$x_1 + 2 + 6 = 9$

$x_1 = 1$

Penyelesaian trivial (sederhana) : $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$

→ Khusus utk SPL Homogen

Penyelesaian non trivial (Tidak sederhana) : Ada penyelesaian lain yang tidak semuanya nol.

det(A) ≠ 0 → Jawaban tunggal / trivial, hanya untuk matriks A berukuran n×n.

- **Vektor** adalah besaran yang mempunyai arah.

- Notasi Vektor : $\boxed{\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3)}$

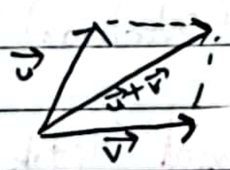
- Panjang Vektor : $\boxed{\|\vec{c}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$

- Vektor Satuan : Vektor yang panjangnya = 1
  ↳ $\boxed{\|\vec{c}\| = 1}$

- Vektor satuan standard (baku) yang searah dengan :
  - sumbu x : $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0)$
  - sumbu y : $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)$
  - sumbu z : $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1)$

- Vektor satuan searah $\vec{c}$: $\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}}$

- $\vec{u} + \vec{v} =$



- $k\vec{u}$: $k > 0 \rightarrow$ searah dengan $\vec{u}$
  ↳ k = Skalar $k < 0 \rightarrow$ berlawanan arah dengan $\vec{u}$

No.
Date. / /

Hasil kali titik / dot product merupakan operasi antara 2 buah vektor pada ruang yang sama yang menghasilkan vektor.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha}$$

Sifat hasil kali yaitu :

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b}$, dimana $k \in R$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$

~~Tidak berlaku sifat komutatif~~

Hasil kali silang / cross product merupakan operasi antara 2 buah vektor pada ruang R^3 yang menghasilkan vektor.

$$\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Sifat cross product yaitu :

- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
- $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\alpha \cdot \vec{u}}$, dimana $\vec{u} \perp \vec{a}$ dan $\vec{u} \perp \vec{b}$
hanya untuk R^3

V dinamakan ruang vektor jika terpenuhi aksioma :

- V tertutup terhadap operasi penjumlahan $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$, maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$
- $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
- $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
- Terdapat $\bar{0} \in V$ sehingga untuk $\forall \bar{u} \in V$ berlaku $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$
- Untuk setiap $\bar{u} \in V$ terdapat $(-\bar{u})$ sehingga $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$
- V tertutup terhadap operasi perkalian dengan skalar untuk $\forall \bar{u} \in V$ dan $k \in$ Riil, maka $k\bar{u} \in V$
- $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
- $(k + l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$
- $k(l\bar{u}) = l(k\bar{u}) = (kl)\bar{u}$
- $1 \cdot \bar{u} = \bar{u}$

Ruang Euclides Orde n

Operasi-operasi pada ruang vektor Euclides :

- Penjumlahan : $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$
- Perkalian dengan skalar Riil sembarang (k) : $k\bar{u} = (ku_1 + ku_2, \dots, ku$
- Perkalian titik / Euclidean inner product : $\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$
- Panjang vektor : $\|\bar{u}\| = (\bar{u} \cdot \bar{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$
- Jarak antara 2 vektor : $d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$

Misalkan W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V. W dinamakan subruang / subspace. Jika W jg mrpkn ruang vektor yang tertutup thdp operasi penjumlahan dan perkalian dgn skalar.

No.
Date. / /

Syarat W disebut subruang dari V :

- $W \neq \{\}$
- $W \subseteq V$
- Jika $\bar{u}, \bar{v} \in W$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in W$
- Jika $\bar{u} \in W$ dan $k \in$ Riil maka $k\bar{u} \in W$

$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \dots + k_n\bar{v}_n$, dengan $\bar{v}$ = vektor

↳ kombinasi linear (Hrs jwbn tunggal) k = skalar riil

↳ Contoh : $\bar{v}_1 = (1,1,0)$

$\bar{v}_2 = (0,1,1)$

$\bar{v}_3 = (2,3,1)$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$= k_1(1,1,0) + k_2(0,1,1) + k_3(2,3,1)$

$= (k_1 + 0k_2 + 2k_3,\ k_1 + k_2 + 3k_3,\ 0k_1 + k_2 + k_3)$

$= (k_1 + 2k_3,\ k_1 + k_2 + 3k_3,\ k_2 + k_3)$

$k_1 + 2k_3 = u_1$

$k_1 + k_2 + 3k_3 = u_2$

$k_2 + k_3 = u_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & u_1 \\ 1 & 1 & 3 & u_2 \\ 0 & 1 & 1 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 1 & 1 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 - (u_2 - u_1) \end{array}\right)$$

Bila konsisten hrs = 0

Maka, $u_3 - (u_2 - u_1) = 0 \rightarrow$ Jwbn byk ($\vec{u}$ bkn kombinasi linear dari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$)

$u_3 - (u_2 - u_1) \neq 0 \rightarrow$ (Tdk ada jwbn)

↳ Kontradiksi dgn vektor sembarang (Unsurnya bebas, tak bersyarat)

↳ Contoh : $\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$= (u_1, 0, 0) + (0, u_2, 0) + (0, 0, u_3)$

$= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$

Maka, $\vec{u}$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{i}, \vec{j}$, dan $\vec{k}$

Contoh Soal :

1. Misal $\bar{u} = (2,4,0)$ dan $\bar{v} = (1,-1,3)$ adlh vektor di R^3. Apakah vektor ini mrpkn kombinasi linear dari vektor diatas?

a. $\bar{a} = (4,2,6)$

→ ◦) $\bar{a} = k_1\bar{u} + k_2\bar{v}$

$= k_1(2,4,0) + k_2(1,-1,3)$

$= (2k_1 + k_2,\ 4k_1 - k_2,\ 3k_2)$

$= (4,2,6)$

◦) $2k_1 + k_2 = 4$ ◦) $3k_2 = 6$

$2k_1 = 2$ $k_2 = 2$

$k_1 = 1$

◦) Maka, $\bar{a}$ mrpkn kombinasi linear dari $\bar{u}$ dan $\bar{v}$

b. $\bar{b} = (1,5,6)$

→ ◦) $\bar{b} = k_1\bar{u} + k_2\bar{v}$

$= k_1(2,4,0) + k_2(1,-1,3)$

$= (2k_1 + k_2,\ 4k_1 - k_2,\ 3k_2)$

$= (1,5,6)$

◦) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{b_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{21}(-4)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[b_3(\frac{1}{3})]{b_2(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$k_2 = -1 \vee k_2 = 2$

◦) Maka, $\bar{b}$ tidak merupakan kombinasi linear dari $\bar{u}$ dan $\bar{v}$

c. $\bar{c} = (0,0,0)$

→ ◦) $\bar{c} = k_1\bar{u} + k_2\bar{v}$

$= k_1(2,4,0) + k_2(1,-1,3)$

$= (2k_1 + k_2,\ 4k_1 - k_2,\ 3k_2)$

$= (0,0,0)$

◦) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{b_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{21}(-4)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[b_3(\frac{1}{3})]{b_2(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$k_1 + \frac{1}{2}k_2 = 0 \vee k_2 = 0$

$k_1 = 0$

◦) Maka, $\bar{c}$ merupakan kombinasi linear dari $\bar{u}$ dan $\bar{v}$

No.
Date. / /

Himpunan vektor $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ dikatakan membangun suatu ruang vektor V jika setiap vektor pada V selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S. Syarat agar dapat dikatakan kombinasi linear SPL tsb harus mempunyai solusi/konsisten. S dikatakan bebas linear/linearly independent, jika SPL homogen $(k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n = \bar{0})$ hanya mempunyai 1 solusi tunggal yaitu $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$. Jika solusinya tidak tunggal, maka S dinamakan himpunan tak bebas linear/bergantung linear/linearly dependent.

Basis dan Dimensi

Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor di V, maka S dinamakan basis bagi V jika kedua syarat berikut dipenuhi yaitu :
- S membangun V
- S bebas linear

Contoh : • $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ membangun R^3.

$\vec{v}_1 = (1,1,0)$
$\vec{v}_2 = (0,1,1)$
$\vec{v}_3 = (1,0,1)$

• $\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 1 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & 1 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 1 & 1 & u_3 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 2 & u_3 - (u_2 - u_1) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{b_3(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(u_3 - u_2 + u_1) \end{array}\right) \xrightarrow[b_{23}(1)]{b_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \end{array}\right)$$

No.
Date. / /

∘) $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, dan $\vec{v_3}$ bebas linier

$\vec{v_1} = (1,1,0)$

$\vec{v_2} = (0,1,1)$

$\vec{v_3} = (1,0,1)$

∘) $k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3} = \vec{0}$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

∘) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{b_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{b_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&0\end{array}\right) \xrightarrow{b_3(\frac{1}{2})}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$k_3 = 0 \;\vee\; k_2 - k_3 = 0 \;\vee\; k_1 + k_3 = 0$

$k_2 = 0 \qquad k_1 = 0$

∘) ∴ Kesimpulan : $\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}, \vec{v_2}, \text{ dan } \vec{v_3} \text{ membangun } R^3\\ \vec{v_1}, \vec{v_2}, \text{ dan } \vec{v_3} \text{ bebas linier}\end{array}\right\}$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, dan $\vec{v_3}$ basis dari R^3

Latihan Soal :

1. Nyatakanlah matriks $\begin{bmatrix}6&3\\0&8\end{bmatrix}$ sebagai kombinasi linear dari matriks berikut : $\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\2&4\end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix}4&-2\\0&-2\end{bmatrix}$

→ ∘) $\begin{pmatrix}6&3\\0&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}k_1 + \begin{pmatrix}0&1\\2&4\end{pmatrix}k_2 + \begin{pmatrix}4&-2\\0&-2\end{pmatrix}k_3$

∘) $k_1 + 4k_3 = 6$ ∘) $2k_1 + k_2 - 2k_3 = 3$ ∘) $-k_1 + 2k_2 = 0$ ∘) $3k_1 + 4k_2 - 2k_3 = 8$

∘) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&4&6\\2&1&-2&3\\-1&2&0&0\\3&4&-2&8\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{b_{31}(1)\\ b_{41}(-3)}]{b_{21}(-2)}$

No.
Date. / /

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & -14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[b_{42}(-4)]{b_{32}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow[b_4\left(\frac{1}{26}\right)]{b_3\left(\frac{1}{24}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

∘) $k_3 = 1$ ∘) $k_2 - 10k_3 = -9$ ∘) $k_1 + 4k_3 = 6$

$k_2 = 1$ $k_1 = 2$

∘)∘ Maka, $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ merupakan kombinasi linear dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. Periksa, apakah himpunan berikut bebas linear!

a. $\{6-x^2, 6+x+4x^2\}$

→ ∘) Misalkan suatu persamaan kuadrat $P(x) = ax^2+bx+c$

∘) $(6-x^2)k_1 + (6+x+4x^2)k_2 = 0x^2+0x+0$

∘) $-k_1x^2 + 4k_2x^2 = 0x^2 \rightarrow -k_1 + 4k_2 = 0$

∘) $0 + 1k_2x = 0x \rightarrow k_2 = 0$ $\Big\}\ k_1 = 0$

∘) $6k_1 + 6k_2 = 0 \rightarrow k_1 + k_2 = 0$

∘)∘ Maka, himpunan $\{6-x^2, 6+x+4x^2\}$ bebas linear

b. $\{1+3x+3x^2, x+4x^2, 5+6x+3x^2, 7+2x-x^2\}$

→ ∘) Misalkan suatu persamaan kuadrat $P(x) = ax^2+bx+c$

∘) $(1+3x+3x^2)k_1 + (x+4x^2)k_2 + (5+6x+3x^2)k_3 + (7+2x-x^2)k_4$
$= 0x^2 + 0x + 0$

∘) $3k_1x^2 + 4k_2x^2 + 3k_3x^2 - 1x^2k_4 = 0x^2 \rightarrow 3k_1 + 4k_2 + 3k_3 - k_4 = 0$

∘) $3k_1x + 1k_2x + 6k_3x + 2k_4x = 0x \rightarrow 3k_1 + k_2 + 6k_3 + 2k_4 = 0$

∘) $1k_1 + 0 + 5k_3 + 7k_4 = 0 \rightarrow k_1 + 5k_3 + 7k_4 = 0$

∘) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{13}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[b_{31}(-3)]{b_{21}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & -22 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{b_{32}(-4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 54 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{b_3\left(\frac{1}{24}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & 0 \end{array}\right)$$

No.
Date / /

∘) $k_3 + \frac{9}{4}k_4 = 0$ ∘) $k_2 - 9k_3 - 19k_4 = 0$ ∘) $k_1 + 5k_3 + 7k_4 = 0$
$k_3 = -\frac{9}{4}k_4$ $k_2 + \frac{81}{4}k_4 - \frac{76}{4}k_4 = 0$ $k_1 - \frac{45}{4}k_4 + \frac{28}{4}k_4 = 0$
∘) ∴ Maka, himpunan $k_2 = -\frac{5}{4}k_4$ $k_1 = \frac{17}{4}k_4$
$\{1+3x+3x^2, x+4x^2, 5+6x+3x^2, 7+2x-x^2\}$ bergantung linear.

3. Periksa, apakah himpunan $A = \{6-x^2, 6+x+4x^2\}$ membangun polinom orde 2!

→ ∘) Misalkan suatu persamaan kuadrat $P(x) = ax^2 + bx + c$
∘) $(6-x^2)k_1 + (6+x+4x^2)k_2 = ax^2 + bx + c$
∘) $6k_1 + 6k_2 = c$ ∘) $0k_1 + 1xk_2 = bx$ ∘) $-1x^2k_1 + 4x^2k_2 = ax^2$
$k_2 = b$ $-k_1 + 4k_2 = a$
∘) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & a \\ 0 & 1 & b \\ 6 & 6 & c \end{array}\right) \xrightarrow{b_1(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -a \\ 0 & 1 & b \\ 6 & 6 & c \end{array}\right) \xrightarrow{b_{31}(-6)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 30 & 6a+c \end{array}\right) \xrightarrow{b_3(-30)}$
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & -a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 6a-30b+c \end{array}\right)$
∘) ∴ Hanya konsisten / banyak jawaban jika $6a-30b+c=0$, maka himpunan $A = \{6-x^2, 6+x+4x^2\}$ tidak membangun polinom orde 2.

4. Periksa, apakah himpunan berikut merupakan basis bagi polinom orde 2.

a. $\{4+6x+x^2, -1+4x+2x^2, 5+2x-x^2\}$
→ ∘) Misalkan suatu persamaan kuadrat $P(x) = ax^2 + bx + c$
∘) Bebas linear :
∘) $(4+6x+x^2)k_1 + (-1+4x+2x^2)k_2 + (5+2x-x^2)k_3 = 0x^2 + 0x + 0$
∘) $4k_1 - k_2 + 5k_3 = 0$ ∘) $6xk_1 + 4xk_2 + 2xk_3 = 0x$
∘) $1x^2k_1 + 2x^2k_2 - 1x^2k_3 = 0x^2$ $6k_1 + 4k_2 + 2k_3 = 0$
$k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$ $3k_1 + 2k_2 + k_3 = 0$

VOS

No.
Date. / /

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 4 & -1 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_{31}(-4)]{b_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & -9 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_3(-\frac{1}{9})]{b_2(-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- $k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$ - $k_2 - k_3 = 0$

$k_1 + k_2 = 0$ $k_2 = k_3$

$k_1 = -k_2$

- Membangun polinom orde 2:
  - $(4+6x+x^2)k_1 + (-1+4x+2x^2)k_2 + (5+2x-x^2)k_3 = ax^2+bx+c$
  - $4k_1 - k_2 + 5k_3 = c$ - $6xk_1 + 4xk_2 + 2xk_3 = bx$
  - $1x^2k_1 + 2x^2k_2 - 1x^2k_3 = ax^2$ $6k_1 + 4k_2 + 2k_3 = b$

    $k_1 + 2k_2 - k_3 = a$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 6 & 4 & 2 & | & b \\ 4 & -1 & 5 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[b_{31}(-4)]{b_{21}(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & -8 & 8 & | & b-6a \\ 0 & -9 & 9 & | & c-4a \end{pmatrix} \xrightarrow[b_3(-\frac{1}{9})]{b_2(-\frac{1}{8})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{6a-b}{8} \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{4a-c}{9} \end{pmatrix}$$

    $$\xrightarrow{b_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{6a-b}{8} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{b-6a}{8} + \frac{4a-c}{9} \end{pmatrix}$$
- ∴ Maka, himpunan $\{4+6x+x^2, -1+4x+2x^2, 5+2x-x^2\}$ tidak merupakan basis bagi polinom orde 2 karena bergantung linear dan tidak membangun polinom orde 2.

b. $\{-4+x+3x^2, 6+5x+2x^2, 8+4x+x^2\}$

→ - Misalkan suatu persamaan kuadrat $P(x) = ax^2+bx+c$
- Bebas linear:
  - $(-4+x+3x^2)k_1 + (6+5x+2x^2)k_2 + (8+4x+x^2)k_3 = 0x^2+0x+0$
  - $-4k_1 + 6k_2 + 8k_3 = 0$ - $1xk_1 + 5xk_2 + 4xk_3 = 0x$

    $-2k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0$ $k_1 + 5k_2 + 4k_3 = 0$

    - $3x^2k_1 + 2x^2k_2 + 1x^2k_3 = 0x^2$

      $3k_1 + 2k_2 + k_3 = 0$
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & | & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_{31}(-3)]{b_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & | & 0 \\ 0 & 13 & 12 & | & 0 \\ 0 & -13 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_2(\frac{1}{13})} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{12}{13} & | & 0 \\ 0 & -13 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_{32}(13)}$$

    $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{12}{13} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
  - $k_3 = 0$ - $k_2 + \frac{12}{13}k_3 = 0$ - $k_1 + 5k_2 + 4k_3 = 0$

    $k_2 = 0$ $k_1 = 0$

No.
Date / /

∘) Membangun polinom orde 2 :

∘) $(-4+x+3x^2)k_1 + (6+5x+2x^2)k_2 + (8+4x+x^2)k_3 = ax^2+bx+c$

∘) $-4k_1 + 6k_2 + 8k_3 = c$ ∘) $1xk_1 + 5xk_2 + 4xk_3 = bx$

∘) $3x^2k_1 + 2x^2k_2 + 1x^2k_3 = ax^2$ $k_1 + 5k_2 + 4k_3 = b$

$3k_1 + 2k_2 + k_3 = a$

∘) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & b \\ -4 & 6 & 8 & c \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[b_{31}(-3)]{b_{21}(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & b \\ 0 & 26 & 24 & 4b+c \\ 0 & -13 & -11 & a-3b \end{array}\right) \xrightarrow{b_2(\frac{1}{26})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & b \\ 0 & 1 & \frac{24}{26} & \frac{4b+c}{26} \\ 0 & -13 & -11 & a-3b \end{array}\right)$

$\xrightarrow{b_{32}(13)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & b \\ 0 & 1 & \frac{24}{26} & \frac{4b+c}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4b+c}{2} + a - 3b \end{array}\right)$

∘) Maka, himpunan $\{-4+x+3x^2, 6+5x+2x^2, 8+4x+x^2\}$ merupakan basis bagi polinom orde 2 karena bebas linear dan dapat membangun polinom orde 2.

5. Diberikan SPL homogen : $p+2q+3r=0$

$p+2q-3r=0$

$p+2q+3r=0$

Tentukan basis ruang solusi (Buktikan) dan tentukan dimensinya

→ ∘) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[b_{31}(-1)]{b_{21}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{b_2(-\frac{1}{6})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{b_{12}(-3)}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ∘) $r=0$ ∘) $X = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q \\ q \\ r \end{pmatrix}$

∘) $p+2q=0$

$p=-2q$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

∘) Basis ruang solusi $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

∘) Dimensi / Nulitas = 2

6. Tentukan rank dari matriks : $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

VOS

No.

Date. / /

a) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_{31}(-1)]{b_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{b_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Dimensi $= 2$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{b_{31}(1) \\ b_{41}(-1)}]{b_{21}(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_{23}}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{b_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Dimensi $= 2$

c): Rank $= 2$

- Jenis ruang vektor
  - Himpunan vektor Euclides (R^n)
  - Himpunan Matriks berukuran $m \times n$ ($M_{m \times n}$)
  - Himpunan polinom pangkat n (P_n)

- Pada suatu matriks A dapat langsung dicari basis ruang kolom dengan OBE hingga mencapai matriks echelon baris tereduksi. Jika harus mencari basis ruang baris dengan OBE juga tetapi harus matriks A^t hingga menjadi matriks echelon baris tereduksi.

- Dimensi basis ruang baris = Basis ruang kolom disebut rank

- Dimensi basis ruang solusi dinamakan nulitas

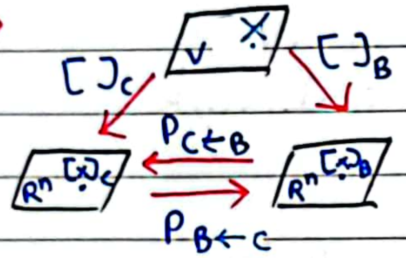
- Koordinat Basis :
  - Jika V merupakan ruang vektor dan B merupakan basis untuk V, maka untuk setiap vektor v di V, akan ada 1 cara utk menuliskan v sbg kombinasi linier dr basis B
  - Jika $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan basis dr ruang vektor V dan v merupakan vektor di V, maka v dpt dituliskan sbg $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots c_n v_n$ disebut sbg koordinat v thdp basis B dan vektor kolomnya yaitu :

$$\boxed{[v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}} \rightarrow \text{Vektor koordinat v thdp basis B}$$

- **Perubahan Basis :**
  - Jika $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ dan $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ merupakan basis dr ruang vektor V. Maka, matriks $n \times n$ dimana kolomnya merupakan vektor koordinat $[u_1]_C, \dots, [u_n]_C$ dr vektor di B thdp C ($P_{C \leftarrow B}$) disebut sbg perubahan basis dari B ke C.

  - $\boxed{P_{C \leftarrow B} = \left[[u_1]_C \; [u_2]_C \cdots [u_n]_C \right]}$

  - Teorema :
    - $P_{C \leftarrow B}[x]_B = [x]_C$, $\forall x$ di V / $[p(x)]_C = P_{C \leftarrow B}[p(x)]_B$
    - $P_{C \leftarrow B}$ merupakan matriks P dgn $P[x]_B = [x]_C$, $\forall x$ di V
    - $P_{C \leftarrow B}$ memiliki invers yaitu $(P_{C \leftarrow B})^{-1} = P_{B \leftarrow C}$

  - 

  - Pergantian Basis dengan Metode Gauss Jordan :
    - Misalkan $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ dan $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ merpkn basis dr ruang vektor V dan $B = [[u_1]_\varepsilon, \dots, [u_n]_\varepsilon]$ dan $C = [[v_1]_\varepsilon, \dots, [v_n]_\varepsilon]$ dimana ε merupakan basis utk V. Maka, reduksi baris yg diaplikasikan ke matriks augmented $n \times 2n$ $[C|B]$ memberikan hasil :

$$\boxed{[C|B] \rightarrow [I|P_{C \leftarrow B}]}$$

Suatu set vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ di R^n dikatakan orthogonal jika setiap vektornya memenuhi $v_i \cdot v_j = 0$, untuk $i \neq j$. Jika set vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ merupakan set vektor bukan 0 yang orthogonal di R^n maka vektor-vektor tersebut linier independen. Basis orthogonal untuk subruang W di R^n adalah basis dari subruang W yang merupakan set orthogonal.

Teorema : Misalkan $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ adalah basis orthogonal untuk subruang W di R^n dan misalkan w merupakan vektor di W dimana w dibentuk oleh nilai skalar yang diberikan sebagai berikut.

$$\boxed{w = c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k}$$ → Cari koordinat dari w dgn suatu basis

Maka, nilai untuk tiap skalar diberikan sebagai berikut.

$$\boxed{c_i = \frac{w \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}}, \text{ untuk } i = 1, \ldots, k$$

Suatu set vektor di R^n dikatakan orthonormal jika set vektor tersebut saling orthogonal dan ternormalisasi. Basis orthonormal untuk subruang W di R^n adalah basis yang memenuhi syarat himpunan vektor orthonormal.

Teorema : Jika $[q_1, q_2, q_3]$ merupakan basis orthonormal untuk subruang W di R^n dan w merupakan vektor di W, maka

$$\boxed{w = (w \cdot q_1) q_1 + (w \cdot q_2) q_2 + \ldots + (w \cdot q_k) q_k}$$

No.
Date. / /

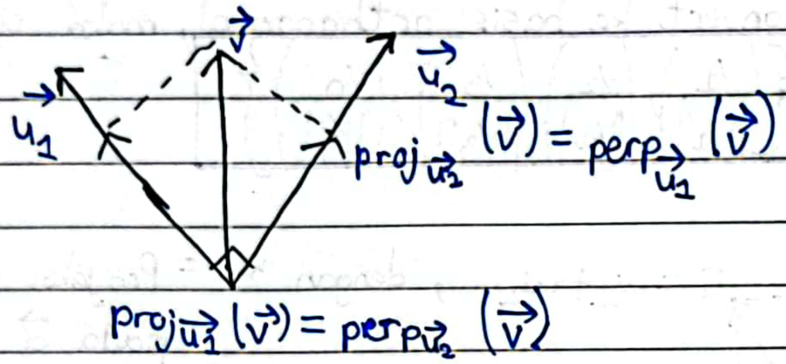
Misalkan W adalah subruang di R^n dan $[u_1, \dots u_k]$ adalah basis orthogonal untuk subruang W. Untuk setiap vektor v di R^n, maka proyeksi orthogonal v di W didefinisikan sebagai berikut.

$$\boxed{\text{proj}_W(v) = \left(\frac{u_1 \cdot v}{u_1 \cdot u_1}\right)u_1 + \dots + \left(\frac{u_k \cdot v}{u_k \cdot u_k}\right)u_k}$$

$$\boxed{\text{proj}_W(v) = \text{proj}_{u_1}(v) + \dots + \text{proj}_{u_k}(v)}$$

Komponen v orthogonal terhadap W adalah sebuah vektor.

$$\boxed{\text{perp}_W(v) = v - \text{proj}_W(v)}$$



$$\vec{v} = \text{proj}_{\vec{u_1}}(\vec{v}) + \text{proj}_{\vec{u_2}}(\vec{v})$$
$$= \text{proj}_{\vec{u_1}}(\vec{v}) + \text{perp}_{\vec{u_1}}(\vec{v})$$

NB :

- Orthogonal suatu vektor : $v_1 \cdot v_2 = 0$
- Orthonormal suatu vektor ketika panjang vektor = 1. Kalau tidak orthonormal dan mau dijadikan orthonormal, maka dibagikan panjang vektor dengan vektornya.

VOS

Rumus Metode Gram - Schmidth :

Misalkan ada vektor $\{u_1, \dots u_n\}$, maka :

$$\boxed{v_1 = u_1}$$

$$\boxed{v_2 = u_2 - \left(\frac{u_1 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) \cdot v_1}$$

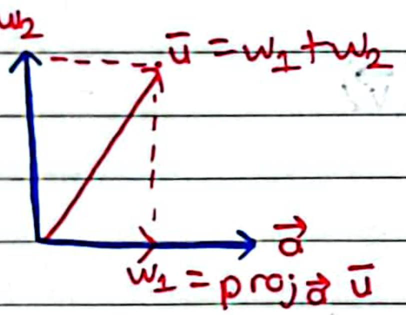
$$\boxed{v_3 = u_3 - \left(\frac{v_1 \cdot u_3}{v_1 \cdot v_1}\right) \cdot v_1 - \left(\frac{v_2 \cdot u_3}{v_2 \cdot v_2}\right) \cdot v_2}$$

dst...

$W_1 = \text{span}(u_1)$
$W_2 = \text{span}(u_1, u_2)$
$W_3 = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$

$\{v_1, \dots v_n\}$ adalah basis orthogonal dari subruang W. Bila mau konvert ke basis orthonormal, maka dilakukan

$$\boxed{W = \left\{\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}\right), \left(\frac{v_2}{\|v_2\|}\right), \left(\frac{v_3}{\|v_3\|}\right), \dots, \left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)\right\}}$$



, dengan w_1 = Proyeksi ortogonal $\bar{u}$ pada $\vec{a}$
= Komponen vektor $\bar{u}$ sejajar (Sepanjang $\vec{a}$)

w_2 = Komponen vektor $\vec{u}$ yang ortogonal thdp $\vec{a}$

$$\boxed{w_1 = \text{proj}_a \bar{u} = \frac{\vec{a} \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|^2} \cdot \bar{u}}$$

$$\boxed{w_2 = \bar{u} - w_1 = \bar{u} - \text{proj}_a \bar{u} = \text{perp}_a \bar{u}}$$

Misalkan A merupakan $M_{n\times n}$, dan ada sebuah nilai skalar λ yang disebut nilai eigen dari A yaitu nilai yang menyebabkan ada vektor bukan nol x sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen dari A yang berkorespondensi terhadap λ.

$$\boxed{Ax = \lambda x \rightarrow (A - \lambda \cdot I)x = 0 \rightarrow \text{OBE}}$$

Misalkan A adalah $M_{n\times n}$ dan λ adalah nilai eigen dari A. Himpunan semua vektor eigen (Termasuk vektor nol) yang berkorespondensi dengan λ disebut sebagai eigen space/ E_λ.

Cara mencari nilai eigen dan eigen spaces yaitu :

1. Tentukan persamaan $Ax = \lambda x \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$
2. Tentukan nilai eigen dengan menyelesaikan persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Untuk setiap nilai eigen yang ditemukan, tentukan null space dari matrik $A - \lambda I \rightarrow$ hasilnya E_λ.
4. Tentukan basis dari setiap eigen spacenya jika diperlukan

Misalkan A adalah matrik bujur sangkar dengan nilai eigen λ dan vektor eigen x, maka :

- Untuk semua nilai integer positif n, λ^n adalah nilai eigen dari A^n dengan vektor eigen yang berkorespondensi adalah x.
- Jika A inversible, maka I/λ adalah nilai eigen dari A^{-1} dengan vektor eigen yang berkorespondensi adalah x.
- Jika A inversible, maka untuk sembarang nilai integer n, λ^n adalah nilai eigen dari A^n dengan vektor eigen yang berkorespondensi adalah x.

Jika A dan B merupakan $M_{n \times n}$, maka matrik A serupa dengan B ($A \sim B$) jika ada matrik invers $n \times n$ yaitu P sehingga $P^{-1}AP = B$. Sifat-sifat matriks serupa yaitu :

- $A \sim A$
- Jika $A \sim B$, maka $B \sim A$
- Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, maka $A \sim C$

, dengan A, B, C adalah $M_{n \times n}$.

Misalkan A dan B adalah $M_{n \times n}$ dimana $A \sim B$, maka :

- det A = det B
- A inversible jika dan hanya jika B inversible
- A dan B memiliki rank yang sama
- A dan B memiliki karakteristik polynomial yang sama
- A dan B memiliki nilai eigen yang sama

Matrik A dengan ukuran $n \times n$ diagonalizable jika ada matrik diagonal D sehingga $A \sim D$, atau jika ada matrik invers $n \times n$ P sehingga $P^{-1}AP = D$. Suatu matrik $n \times n$ dikatakan diagonalizable jika A memiliki vektor eigen yang saling independen.

Prosedur untuk melakukan diagonalisasi matrik yaitu :

1. Tentukan n vektor eigen dari matrik A yang linier independen, misalkan p_1, p_2, dan p_3.
2. Tentukan matrik P yang isinya berupa vektor p_1, p_2, dan p_3 sebagai vektor kolomnya.
3. Matrik $P^{-1}AP$ akan terdiagonalisasi dgn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mergkn diagonal entrinya dimana $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen yang

berkorespondensi dengan vektor eigen $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Cara menghitung matrik berpangkat yaitu :

Jika matrik A adalah $M_{n \times n}$ dan P adalah matrik yang inversible, maka $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$. Untuk setiap bilangan integer k berlaku $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = D^k$. Sehingga didapatkan $\boxed{A^k = PD^kP^{-1}}$.

Week 15

Misalkan V dan W ruang vektor. Fungsi/pemetaan dari V ke W, $F: V \to W$, disebut transformasi linier, jika memenuhi 2 aksioma berikut.

1) $F(u+v) = F(u) + F(v), \forall u \forall v \in V$
2) $F(ku) = k \cdot F(u), \forall u \in V$ dan k skalar anggota bilangan riil

Transformasi linier dari R^2 ke R^2 yang memutar suatu titik (a,b) sebesar sudut θ dengan titik putaran $(0,0)$, dinyatakan oleh rumusan berikut.

$$\boxed{T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}$$

Transformasi	Matriks Transformasi
Pencerminan terhadap sumbu y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap sumbu x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Pencerminan terhadap sumbu $y=x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap sumbu $y=-x$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap titik asal $(0,0)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap sumbu $x=h$	$P(x,y) \to P'(2h-x, y)$
Pengecilan jika $0 < k < 1$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Pencerminan terhadap sumbu $y=k$	$P(x,y) \to P'(x, 2k-y)$
Pembesaran, jika $k > 1$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Peregangan / Pemampatan searah sb-x	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Peregangan / Pemampatan searah sb-y	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Misalkan $L: V \to W$ suatu transformasi linear, maka ruang nol (Kernel) dari L adalah

$$\boxed{Ker(L) = \{ v \in V \mid L(v) = 0_W \}}$$

Misalkan $L: V \to W$ suatu transformasi linier dan S adalah ruang bagian dari V. Jangkauan / Image dari S, ditulis $L(S)$ adalah

$$\boxed{L(S) = \{ w \in W \mid w = L(v), \text{ untuk suatu } v \in S \}}$$

Jangkauan dari V, yaitu $L(V)$ disebut peta / range dari L.