TUGAS 2 – NUMERICAL ANALYSIS

PROGRAM STUDI INFORMATIKA

FAKULTAS TEKNIK & INFORMATIKA

Data Mahasiswa :

- Nama : Jackson Lawrence
- NIM : 00000070612
- Angkatan : 2022
- Mata Kuliah : Numerical Analysis | IF 420 – A

1. Write down the characteristic equation for matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Answer : Untuk mencari characteristic equation dapat dilakukan dengan mencari determinan dari persamaan Ax = λx yang menjadi (A - λI) dengan I merupakan matriks identitas (det(A - λI)). Untuk cara manual perhitungan mencari characteristic equation adalah sebagai berikut.

1. ∘ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

∘ Characteristic equation:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (3-\lambda)(3-\lambda) - 5 \cdot 2 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 10 = \lambda^2 - 6\lambda - 1$$

∘ I = Martriks Identitas $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

∘ $A - \lambda I$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang didapatkan di atas membuahkan characteristic equation berupa $\lambda^2 - 6\lambda - 1$ dan apabila menggunakan bahasa pemrograman Python juga akan membuahkan hasil yang sama yaitu sebagai berikut.

```
import numpy as np

from numpy.linalg import eig

a = np.array([[3,2],[5,3]])

characteristicEquation =  np.poly(a)
print("Characteristic equation : ", characteristicEquation)
print("\n")
c1 = round(characteristicEquation[0])
c2 = round(characteristicEquation[1])
c3 = round(characteristicEquation[2])
print("Coefficient of λ^2 :", c1)
print("Coefficient of λ :",  c2)
print("Constant term :", c3)
print("\nCharacteristic equation in λ : ")
print("(", c1, ")λ^2 + (", c2, ")λ + (" , c3, ")")
print("\n")
```

Dari koding di atas akan membuahkan output yang sama untuk koefisien λ^2, λ, dan konstanta yang menjadikan sebuah characteristic equation $\lambda^2 - 6\lambda - 1$ yaitu sebagai berikut.

```
PS C:\Users\hp\Downloads> python -u "c:\Users\hp\Downloads\Week5.py"
Characteristic equation :  [ 1. -6. -1.]


Coefficient of λ^2 : 1
Coefficient of λ : -6
Constant term : -1


Characteristic equation in λ :
( 1 )λ^2 + ( -6 )λ + ( -1 )
```

2. Using the above characteristic equation to solve for eigenvalues and eigenvectors for matrix A.

Answer : Dalam mencari eigenvalues dan eigenvectors harus didasari characteristic equation sama dengan 0, $\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$, sehingga dengan ini dapat menggunakan rumus Al-Khawarizmi untuk mencari nilai akar-akar dari λ. Hasil eigenvalues yang diperoleh dengan cara manual adalah sebagai berikut.

2.) Eigenvalues :

.) $f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$

.) Memakai rumus Al-Khawarizmi

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

.) $f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0 < \begin{matrix} a = 1 \\ b = -6 \\ c = -1 \end{matrix}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$= 3 \pm \sqrt{10}$$

.) $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10}$
$\lambda_2 = 3 - \sqrt{10}$

Hasil yang diperoleh adalah $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10} \approx 6.1622778$ dan $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10} \approx -0.1622778$ atau boleh sebaliknya seperti $\lambda_2 = 3 + \sqrt{10} \approx 6.1622778$ dan $\lambda_1 = 3 - \sqrt{10} \approx -0.1622778$ karena tidak ada penentuan untuk nilai λ_1 atau λ_2 disamakan dengan nilainya. Setelah mendapatkan eigenvalues dengan 2 buah nilai akar-akar λ dapat mencari eigenvectors dari masing-masing eigenvalues yaitu sebagai berikut.

∘) Eigen vectors :

∘) $\lambda_1 = 3+\sqrt{10} \longrightarrow$

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 3+\sqrt{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{10} & 2 \\ 5 & -\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∘) $-\sqrt{10}x_1 + 2x_2 = 0$

$$2x_2 = \sqrt{10}x_1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}x_1$$

Then we get first eigenvectors :

$$x = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_1 \neq 0$$

∘) $\lambda_2 = 3-\sqrt{10} \longrightarrow$

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 3-\sqrt{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{10} & 2 \\ 5 & \sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∘) $\sqrt{10}x_1 + 2x_2 = 0$

$$2x_2 = -\sqrt{10}x_1$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}x_1$$

Then we get second eigenvectors :

$$x = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_2 \neq 0$$

- Cara lain mencari eigenvector :
- Dari $\lambda_1 = 3+\sqrt{10} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{10} & 2 \\ 5 & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & -\sqrt{10} & 0 \end{array}\right]$$

- $\left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & -\sqrt{10} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \left(\frac{-\sqrt{10}}{2}\right) R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{10} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$

$$-\sqrt{10}x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_2 = \sqrt{10}\,x_1$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{10}\,x_1}{2}$$

- Eigenvector pada umumnya matriksnya $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, maka

$$x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_1 \neq 0$$

- Dari $\lambda_2 = 3-\sqrt{10} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 2 \\ 5 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & \sqrt{10} & 0 \end{array}\right]$$

- $\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & \sqrt{10} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{10} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$

$$\sqrt{10}x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_2 = -\sqrt{10}\,x_1$$
$$x_2 = \frac{-\sqrt{10}\,x_1}{2}$$

c) Eigenvector pada umumnya matriksnya $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, maka

$x = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$, $k_2 \neq 0$

Eigenvector yang diperoleh untuk $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10} \approx 6.1622778$ adalah

$$x = k1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = k1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5811388 \end{bmatrix}$$

Eigenvector yang diperoleh untuk $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10} \approx -0.1622778$ adalah

$$x = k2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = k2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5811388 \end{bmatrix}$$

Dengan hasil yang didapatkan di atas menggunakan cara manual akan digunakan cara pemrograman Python yaitu sebagai berikut.

```python
import numpy as np

from numpy.linalg import eig

a = np.array([[3,2],[5,3]])

value, vector = eig(a)

print("Eigenvalue : ", value)
print("Eigenvector : ", vector)
print("\n")

print("Explanation : ")
for i in range(len(value)):
    print("When eigenvalue = ", value[i], ", the eigenvector is ", vector[:,i])
```

Output yang didapatkan adalah sebagai berikut.

```
PS C:\Users\hp\Downloads> python -u "c:\Users\hp\Downloads\Week5.py"
Eigenvalue :  [ 6.16227766 -0.16227766]
Eigenvector :  [[ 0.53452248 -0.53452248]
 [ 0.84515425  0.84515425]]

When eigenvalue =  6.16227766016838 , the eigenvector is  [0.53452248 0.84515425]
When eigenvalue =  -0.16227766016837908 , the eigenvector is  [-0.53452248  0.84515425]
```

Apabila dicocokan dari cara manual dan cara pemrograman Python didapatkan konsep yang sama dengan hasil yang berbeda.

3. Use the first eigenvector that derived from problem 2 to verify that $Ax = \lambda x$.

Answer : Dari soal nomor 2 didapatkan first eigenvector berupa $x = k1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$, sehingga untuk mengecek persamaan $Ax = \lambda x$ dengan cara manual adalah sebagai berikut.

3. a) Use first eigenvector to prove $Ax = \lambda x$

a) $Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = 3+\sqrt{10} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 5+\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{2}+\frac{10}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 5+\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{2}+5 \end{bmatrix} \quad \text{(Terbukti)}$$

NB: Saya memakai $\lambda_1 = 3+\sqrt{10}$ untuk menentukan first eigenvector, tetapi bisa saja $\lambda_1 = 3-\sqrt{10}$ karena dari $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$, tidak ada aturan untuk menentukan λ_1 dan λ_2 yg mana utk $3+\sqrt{10}$ atau $3-\sqrt{10}$. Jika λ_1 sebagai eigenvalue untuk first eigenvector dengan nilai $\lambda_1 = 3-\sqrt{10}$, maka berdasarkan hasil di nomor 2, eigenvectornya adalah $x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$

Pembuktiannya: $Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = 3-\sqrt{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \sqrt{10} \\ 5 - \frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{2} + \frac{10}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - \sqrt{10} \\ 5 - \frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{10} \\ 5 - \frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(Terbukti)}$$

Adapun dengan cara pemrograman Python akan membuahkan konsep yang serupa juga yaitu sebagai berikut.

```python
import numpy as np

from numpy.linalg import eig

a = np.array([[3,2],[5,3]])

value, vector = eig(a)

print("Check proving Ax = λx : ")
x = vector[:, 0]
lambdaOriginal = value[0]

Ax = np.dot(a,x)
lambdaX = lambdaOriginal * x

if np.allclose(Ax, lambdaX):
    print("Proved\nAx = λx")
    print("Ax = ", Ax)
    print("λx = ", lambdaX)
else :
    print("Ax ≠ λx")
```

Output yang didapatkan dari koding di atas adalah sebagai berikut.

```
PS C:\Users\hp\Downloads> python -u "c:\Users\hp\Downloads\Week5.py"
Check proving Ax = λx :
Proved
Ax = λx
Ax =  [3.29387596 5.20807518]
λx =  [3.29387596 5.20807518]
```

Kesimpulannya, cara menggunakan pemrograman Python secara keseluruhan dari nomor 1 hingga 3 dengan outputnya berturut-turut adalah sebagai berikut.

```python
import numpy as np

from numpy.linalg import eig

a = np.array([[3,2],[5,3]])

characteristicEquation =  np.poly(a)
print("Characteristic equation : ", characteristicEquation)
print("\n")
c1 = round(characteristicEquation[0])
c2 = round(characteristicEquation[1])
c3 = round(characteristicEquation[2])
print("Coefficient of λ^2 :", c1)
print("Coefficient of λ :",  c2)
print("Constant term :", c3)
print("\nCharacteristic equation in λ : ")
print("(", c1, ")λ^2 + (", c2, ")λ + (" , c3, ")")
print("\n")

value, vector = eig(a)

print("Eigenvalue : ", value)
print("Eigenvector : ", vector)
print("\n")

print("Explanation : ")
for i in range(len(value)):
    print("When eigenvalue = ", value[i], ", the eigenvector is ", vector[:,i])

print("\n")
print("Check proving Ax = λx : ")
x = vector[:, 0]
lambdaOriginal = value[0]

Ax = np.dot(a,x)
lambdaX = lambdaOriginal * x

if np.allclose(Ax, lambdaX):
    print("Proved\nAx = λx")
    print("Ax = ", Ax)
    print("λx = ", lambdaX)
else :
    print("Ax ≠ λx")
```

```
PS C:\Users\hp\Downloads> python -u "c:\Users\hp\Downloads\Week5.py"
Characteristic equation :  [ 1. -6. -1.]


Coefficient of λ^2 : 1
Coefficient of λ : -6
Constant term : -1

Characteristic equation in λ :
( 1 )λ^2 + ( -6 )λ + ( -1 )


Eigenvalue :  [ 6.16227766 -0.16227766]
Eigenvector :  [[ 0.53452248 -0.53452248]
 [ 0.84515425  0.84515425]]


Explanation :
When eigenvalue =  6.16227766016838 , the eigenvector is  [0.53452248 0.84515425]
When eigenvalue =  -0.16227766016837908 , the eigenvector is  [-0.53452248  0.84515425]


Check proving Ax = λx :
Proved
Ax = λx
Ax =  [3.29387596 5.20807518]
λx =  [3.29387596 5.20807518]
PS C:\Users\hp\Downloads> █
```

NB :

Hasil lain eigenvectors (Tambahan saja)

∘) Eigen vectors :

∘) $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10} \longrightarrow Ax = \lambda x$

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 3+\sqrt{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{10} & 2 \\ 5 & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∘) $\left.\begin{aligned} -\sqrt{10}\,x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 &= \sqrt{10}\,x_1 \\ x_2 &= \frac{\sqrt{10}}{2} x_1 \end{aligned}\right\}$ Then we get first eigenvectors :

$$x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_1 \neq 0$$

∘ Selain hasil di atas bisa didapatkan juga first eigenvector yang berbeda yaitu :

$$-\sqrt{10}\,x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_2 = \sqrt{10}\,x_1$$
$$x_1 = \frac{2x_2}{\sqrt{10}}$$
$$x_1 = \frac{2\sqrt{10}\,x_2}{10}$$
$$\left.x_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}x_2\right\}$$ Then we get first eigenvectors :

$$x = k_1\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} \\ 1 \end{bmatrix},\ k_1 \neq 0$$

∘ Begitupula dengan second vectornya yaitu :

∘ $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10} \longrightarrow$

$$Ax = \lambda x$$
$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 3-\sqrt{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \sqrt{10} & 2 \\ 5 & \sqrt{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

∘ $$\left.\begin{aligned} \sqrt{10}\,x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 &= -\sqrt{10}\,x_1 \\ x_2 &= -\frac{\sqrt{10}}{2}x_1 \end{aligned}\right\}$$ Then we get second eigenvectors :

$$x = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix},\ k_2 \neq 0$$

∘ Selain hasil di atas bisa didapatkan juga second eigenvector yang berbeda yaitu :

$$\sqrt{10}\,x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\sqrt{10}\,x_1 = -2x_2$$
$$x_1 = \frac{-2x_2}{\sqrt{10}}$$
$$x_1 = \frac{-2\sqrt{10}\,x_2}{10}$$
$$\left.x_1 = \frac{-\sqrt{10}\,x_2}{5}\right\}$$ Then we get second eigenvectors :

$$x = k_2\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ 1 \end{bmatrix},\ k_2 \neq 0$$

c) Untuk pembuktian dalam kasus ini menggunakan first eigenvector $Ax = \lambda x$ yaitu :

o) $A_x = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = 3+\sqrt{10} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{5} + 2 \\ \frac{5\sqrt{10}}{5} + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{5} + \frac{10}{5} \\ 3 + \sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{5} + 2 \\ 3 + \sqrt{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{5} + 2 \\ 3+\sqrt{10} \end{bmatrix}$$ (Terbukti)