1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

• I = Martriks Identitas $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

• Characteristic equation:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$= (3-\lambda)(3-\lambda) - 5 \cdot 2$$
$$= 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 10$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda - 1$$

• $A - \lambda I$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

2. Eigenvalues:

• $f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$

• Memakai rumus Al-Khawarizmi

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• $f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$ — $a = 1$, $b = -6$, $c = -1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2}$$
$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$
$$= 3 \pm \sqrt{10}$$

• $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10}$
$\lambda_2 = 3 - \sqrt{10}$

o) Eigen vectors :

o) $\lambda_1 = 3+\sqrt{10} \longrightarrow$

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 3+\sqrt{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{10} & 2 \\ 5 & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o) $-\sqrt{10}x_1 + 2x_2 = 0$

$$2x_2 = \sqrt{10}x_1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}x_1$$

Then we get first eigenvectors :

$$x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_1 \neq 0$$

o) $\lambda_2 = 3-\sqrt{10} \longrightarrow$

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda_2 I)x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 3-\sqrt{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{10} & 2 \\ 5 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o) $\sqrt{10}x_1 + 2x_2 = 0$

$$2x_2 = -\sqrt{10}x_1$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}x_1$$

Then we get second eigenvectors :

$$x = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_2 \neq 0$$

- Cara lain mencari eigenvector :

- Dari $\lambda_1 = 3+\sqrt{10} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{10} & 2 \\ 5 & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & -\sqrt{10} & 0 \end{array}\right]$$

- $\left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & -\sqrt{10} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \left(\frac{-\sqrt{10}}{2}\right) R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} -\sqrt{10} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$

$$-\sqrt{10}\,x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_2 = \sqrt{10}\,x_1$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{10}\,x_1}{2}$$

- Eigenvector pada umumnya matriksnya $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, maka

$x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \; k_1 \neq 0$

- Dari $\lambda_2 = 3-\sqrt{10} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 2 \\ 5 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & \sqrt{10} & 0 \end{array}\right]$$

- $\left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{10} & 2 & 0 \\ 5 & \sqrt{10} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \sqrt{10} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$

$$\sqrt{10}\,x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_2 = -\sqrt{10}\,x_1$$
$$x_2 = \frac{-\sqrt{10}\,x_1}{2}$$

$\Rightarrow$ Eigenvector pada umumnya matriksnya $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, maka

$$x = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, \quad k_2 \neq 0$$

3. c) Use first eigenvector to prove $Ax = \lambda x$

$\Rightarrow Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = 3+\sqrt{10} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 5+\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{2}+\frac{10}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ 5+\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{2}+5 \end{bmatrix} \quad \text{(Terbukti)}$$

NB: Saya memakai $\lambda_1 = 3+\sqrt{10}$ untuk menentukan first eigenvector, tetapi bisa saja $\lambda_1 = 3-\sqrt{10}$ karena dari $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$, tidak ada aturan untuk menentukan λ_1 dan λ_2 yg mana utk $3+\sqrt{10}$ atau $3-\sqrt{10}$. Jika λ_1 sebagai eigenvalue untuk first eigenvector dengan nilai $\lambda_1 = 3-\sqrt{10}$, maka berdasarkan hasil di nomor 2, eigenvectornya adalah $x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$

Pembuktiannya: $Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = 3-\sqrt{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} \\ 5-\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{2}+\frac{10}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} \\ 5-\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{10} \\ 5-\frac{3\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{(Terbukti)}$$