

JACKSON LAWRENCE  
00000070612

LOUIS GABRIEL HERNANDES  
00000070250

# FUZZY AHP

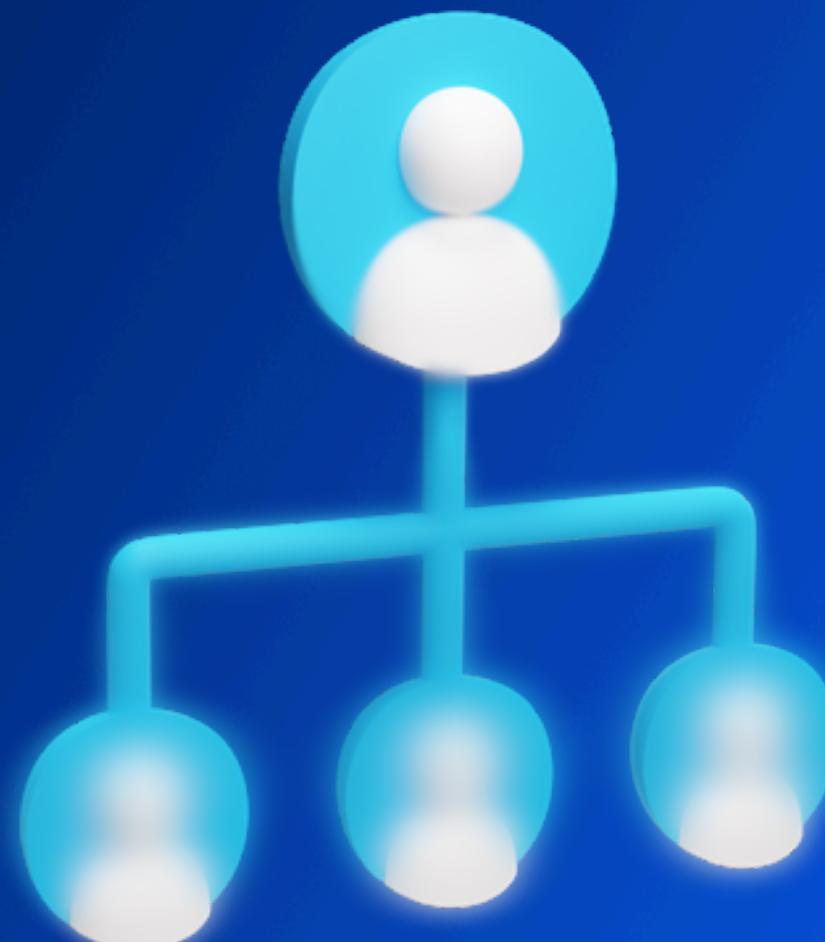


OSCAR JIRO HARLISON  
00000072786

IGNATIUS STEVEN  
00000070642

## DEFINITION

- Fuzzy AHP adalah sebuah perpanjangan dari teknik AHP tradisional yang menginkorporasi fuzzy logic untuk mengatasi ketidakpastian dan ambiguitas pada MCDM
- Fuzzy AHP menggunakan angka fuzzy untuk mengekspresikan derajat preferensi antara alternatif sehingga **mengurangi ambiguitas dari penilaian pakar** serta angka fuzzy triangular untuk **mewakili opini pakar secara lebih fleksibel lagi** (Amrullah et al., 2023)





## WHY USE FAHP?

- Mengatasi **ketidakpastian dan ambiguitas dengan lebih baik** dibanding pasangan tradisionalnya karena menggunakan angka fuzzy untuk merepresentasikan opini pakar (Amrullah et al., 2023)
- **Lebih fleksibel** karena dapat mengintegrasikan opini pakar dengan data algoritmik (Cui et al., 2023) serta **mudah beradaptasi** dengan tingkat kualitas data dan opini yang bervariasi (Purushothaman & Ahmad, 2022)
- **Lebih tahan terhadap masalah pemeringkatan terbalik** dibandingkan pasangan tradisionalnya (Nazim et al., 2022)

## HOWEVER...

- Kompleksitas meningkat dibanding **TOPSIS tradisional** karena menggunakan angka fuzzy yang dapat memperumit proses pembuatan keputusan
- **Hasil dapat lebih tidak konsisten** karena konsistensi perbandingan berpasangan matriks yang juga tidak konsisten (Mukherjee, 2017)
- **Melanggar aksioma-aksioma AHP tradisional** yang ditetapkan Saaty, penemu metode AHP, sehingga memunculkan berbagai masalah dalam implementasi serta dapat mengurangi reliability hasil (Mukherjee, 2017)

## RECENT APPLICATIONS

- Seleksi subkontraktor perkapalan (Amrullah et al., 2023)
- Evaluasi performa bandara (Dimitrou et al., 2024)
- Seleksi turbin angin (Kahraman, 2023)
- Evaluasi risiko dalam navigasi (Boanić et al., 2023)



## HOW IT WORKS

- Awalnya, buat struktur hierarki, membagi masalah menjadi level-level: goal, kriteria, subkriteria, dan alternatif
- Buat matriks perbandingan berpasangan dengan angka fuzzy
- Normalisasi matriks dan agregasikan bobot fuzzy
- Setelah mengagregasikan bobot fuzzy, defuzifikasi untuk mendapatkan nilai prioritas crisp
- Jika perlu, lakukan cek untuk memastikan perbandingan konsisten
- Peringkat final ditentukan dari bobot kriteria dan alternatif yang sudah didefuzifikasi

## OVERALL CONCEPT

BUAT STRUKTUR HIERARKI  
GOAL, KRITERIA, ALTERNATIF

BUAT PAIRWISE COMPARISON MATRIX UNTUK  
SETIAP KRITERIA DENGAN ANGKA FUZZY

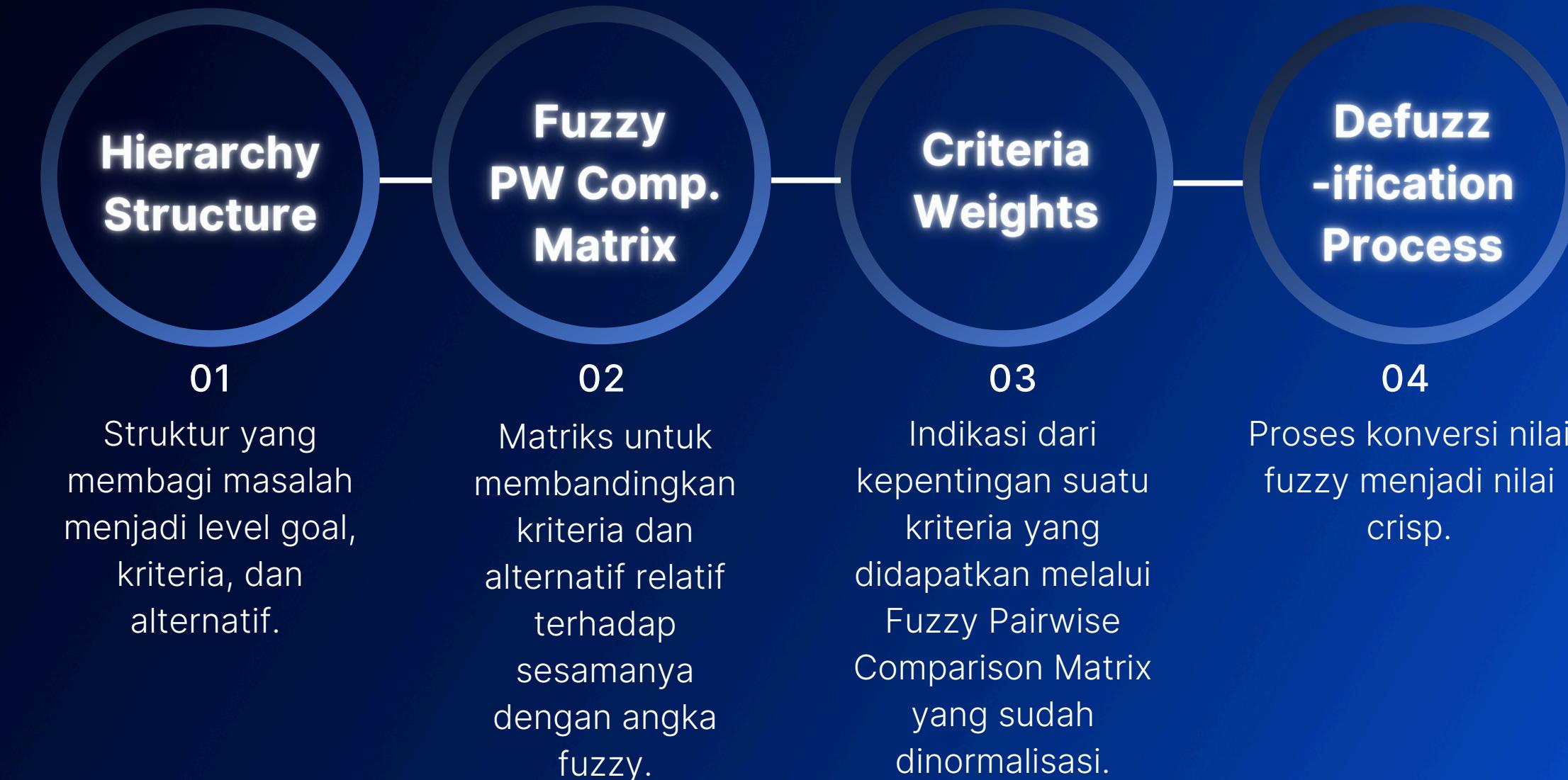
NORMALISASI DAN HITUNG  
BOBOT FUZZY KRITERIA DAN ALTERNATIF

DEFUZIFIKASI UNTUK MENDAPAT  
NILAI PRIORITAS CRISP

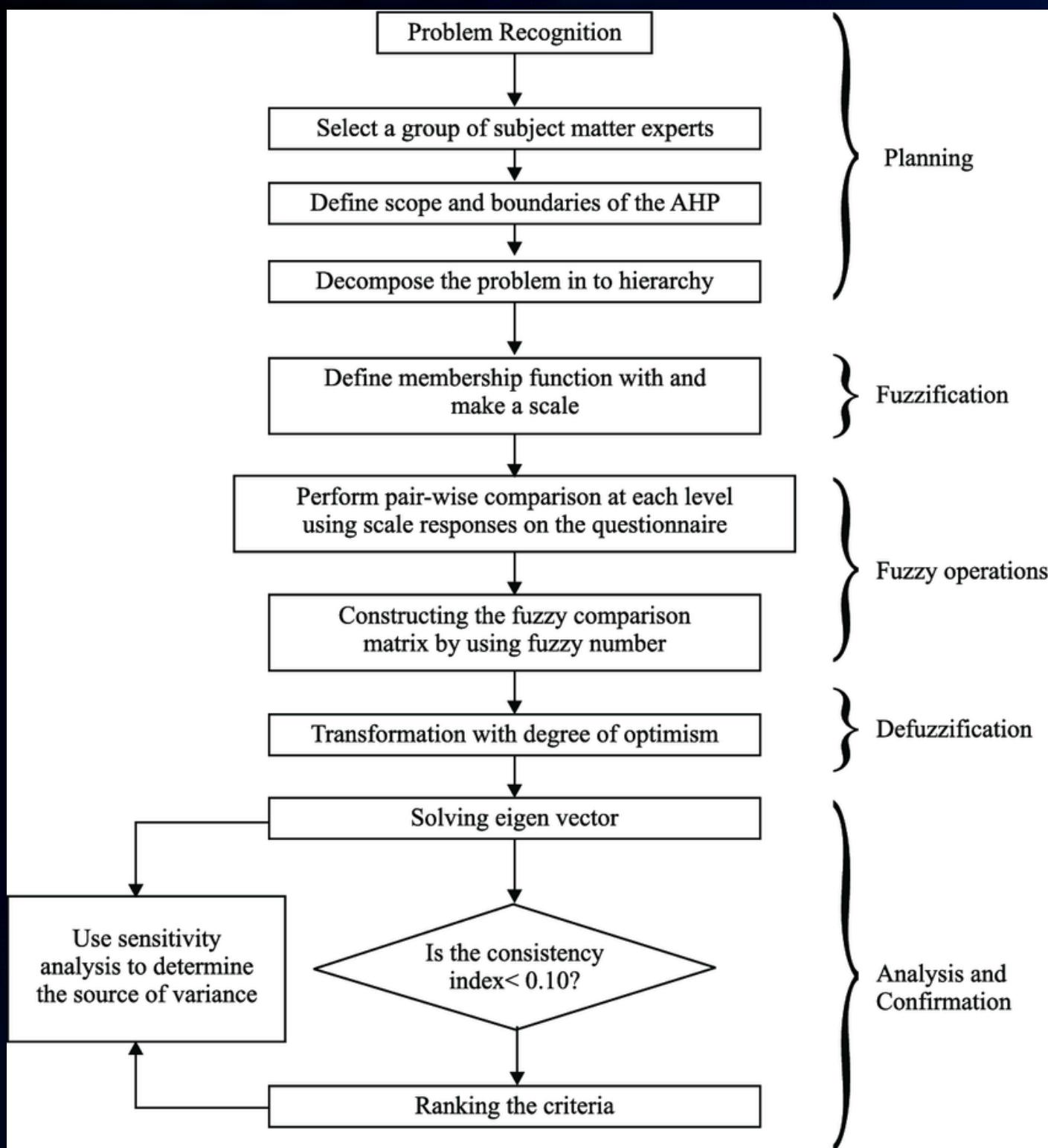
PASTIKAN KONSISTENSI

OUTPUT RANKING ALTERNATIF BERDASARKAN  
BOBOT YANG SUDAH DIDEFUZ.

## KEY COMPONENTS



# ALGORITHM



<https://github.com/KriezAlf/ExSys/>

```

import numpy as np

# Define triangular fuzzy number
def triangular_fuzzy_number(l, m, u):
    return (l, m, u)

# Generate fuzzy comparison matrix
def generate_fuzzy_matrix(n, scale):
    fuzzy_matrix = np.zeros((n, n, 3)) # Triangular fuzzy numbers
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                fuzzy_matrix[i, j] = (1, 1, 1) # Diagonal elements
            else:
                fuzzy_matrix[i, j] = scale[i][j]
                fuzzy_matrix[j, i] = [1/scale[i][j][2], 1/scale[i][j][1], 1/scale[i][j][0]] # Reciprocal
    return fuzzy_matrix

# Fuzzy synthesis
def fuzzy_synthesis(fuzzy_matrix):
    row_sums = np.sum(fuzzy_matrix, axis=1)
    total_sum = np.sum(row_sums, axis=0)
    return row_sums / total_sum
  
```



# ALGORITHM

```
# Defuzzify fuzzy weights
def defuzzify(fuzzy_weights, alpha=0.5):
    crisp_weights = [alpha * w[2] + (1 - alpha) *
                     w[0] for w in fuzzy_weights]
    return crisp_weights

# Example
criteria = ["C1", "C2", "C3"]
scale = [
    [(1, 1, 1), (1/2, 1, 3/2), (1/3, 1/2, 1)],
    [(2/3, 1, 2), (1, 1, 1), (1/2, 1, 3/2)],
    [(1, 2, 3), (2/3, 1, 2), (1, 1, 1)]
]

fuzzy_matrix = generate_fuzzy_matrix(len(criteria), scale)
fuzzy_weights = fuzzy_synthesis(fuzzy_matrix)
crisp_weights = defuzzify(fuzzy_weights)

print("Crisp Weights:", crisp_weights)
```

## EXTRA ALGORITHM

```
def calculate_eigenvector(crisp_weights):
    """
    Normalize the crisp weights to calculate eigenvector for ranking.
    """
    total = sum(crisp_weights)
    return [cw / total for cw in crisp_weights]

def consistency_check(matrix, n):
    """
    Check if the consistency index (CI) is less than 0.1.
    """
    # Compute CR = CI / RI where RI = Random Index (depends on n)
    pass # Placeholder for CI calculation

def sensitivity_analysis(crisp_weights):
    """
    Analyze the sensitivity of criteria based on variations in weights.
    """
    pass # Placeholder for sensitivity analysis
```



## TRIANGULAR FUZZY NUMBER (TFN)

Intensity	Linguistic Variable	Triangle Fuzzy Number (TFN)	Reciprocal TFN Number
1	Equal Significant	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)
2	Equal to Average Significant	(1/2, 1, 3/2)	(2/3, 1, 2)
3	Averagely Significant	(1, 3/2, 2)	(1/2, 2/3, 1)
4	Averagely to Strongly Significant	(3/2, 2, 5/2)	(2/5, 1/2, 2/3)
5	Strongly Significant	(2, 5/2, 3)	(1/3, 2/5, 1/2)
6	Strongly to very Strongly Significant	(5/2, 3, 7/2)	(2/7, 1/3, 2/5)
7	Very Strongly Significant	(3, 7/2, 4)	(1/4, 2/7, 1/3)
8	Very Strongly to Extremely Significant	(7/2, 4, 9/2)	(2/9, 1/4, 2/7)
9	Extremely Significant	(4, 9/2, 9/2)	(2/9, 2/9, 1/4)

\*Consists of 3 function element : Lowest value (l), Middle value (m), and Highest value (u)

## FUZZY SYNTHETIC EXTENT

$$S_i = \sum_{j=1}^m M_{gi}^j X \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^i \right]^{-1}$$

$$\sum_{j=1}^m M_{gi}^j = \left( \sum_{j=1}^m l_j, \sum_{j=1}^m m_j, \sum_{j=1}^m u_j \right)$$

$$\left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{gi}^i \right]^{-1} = \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^n u_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^n l_i} \right)$$

## PRIORITIZED VECTOR VALUE

$$V(M_2 \geqslant M_1) = \begin{cases} 1 & \text{if } m_2 \geq m_1 \\ 0 & \text{if } l_1 \geq u_2 \\ \frac{l_1 - u_2}{(m_2 - u_2)(m_1 - l_1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

## DEFUZZIFICATION

$$d'(A_i = \min V(S_i \geqslant S_k))$$

## FUZZY VECTOR WEIGHT VALUE

$$W' = (d'(A_1), d'(A_2), \dots, d'(A_n))^T$$

## NORMALIZED FUZZY VECTOR WEIGHT VALUE

$$W = (d'(A_1), d'(A_2), \dots, d'(A_n))^T$$

## DEFINE VECTOR VALUE IN EACH CRITERIA

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}$$

$$a_j^{\max} = \max(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij})$$

$$a_j^{\min} = \min(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij})$$

## WEIGHT SCORE FOR RANKING

$$S_j = \sum [(S_{ij}) \times (W_i)]$$



## CASE STUDY : CHOOSING THE BEST EMPLOYEE OF THE YEAR

Permasalahan yang akan diselesaikan adalah memilih karyawan terbaik dalam 1 tahun dengan 4 kriteria sebagai patokan pemilihan yaitu dari segi pengetahuan SME / UMKM, cara Market barang yang dijual, Product knowledge yang dikuasai, dan pemahaman Market Place untuk menjual suatu barang.

Semua nilai disajikan ke dalam tabel berikut.

Alternative	Criteria			
	C1 (SME Scope)	C2 (Market)	C3 (Product)	C4 (Market Place)
A1 (Employee 1)	2	1	1	1
A2 (Employee 2)	2	1	3	3
A3 (Employee 3)	1	2	3	3
A4 (Employee 4)	1	1	2	3

Tertera juga nilai weight untuk setiap kriteria yaitu :

Criteria	C1 (SME Scope)	C2 (Market)	C3 (Product)	C4 (Market Place)
Weight	5	3	9	7

Kemudian hitung matriks perbandingan dengan didapati dari selisih nilai antara dua kriteria dengan nilainya harus positif.

Apabila ada negatif, maka nilai tersebut diabsolusi / dipositifkan kemudian dilakukan 1 per nilai tersebut.

Misalnya pada (C1, C2), yaitu  $5-3 = 2$  dan kebalikannya adalah 1 per nilai tersebut yaitu  $(C2, C1) = 1/2$ .

Secara lengkap adalah sebagai berikut.

	C1 (SME Scope)	C2 (Market)	C3 (Product)	C4 (Market Place)
C1 (SME Scope)	1	2	1/4	1/3
C2 (Market)	1/2	1	1/6	1/7
C3 (Product)	4	6	1	2
C4 (Market Place)	3	7	1/2	1

Konversikan nilai semua kriteria tersebut ke dalam L, M, U dengan tabel TFN yaitu :

	C1			C2			C3			C4		
	L	M	U	L	M	U	L	M	U	L	M	U
C1	1.00	1.00	1.00	0.50	1.00	1.50	0.40	0.50	1.50	0.40	0.50	1.50
C2	0.67	1.00	2.00	1.00	1.00	0.40	0.50	1.50	0.40	0.50	1.50	1.50
C3	1.50	2.00	0.67	1.50	2.00	0.67	1.00	1.00	2.50	3.00	3.50	1.00
C4	1.50	2.00	0.67	1.50	2.00	0.67	0.28	0.33	0.40	1.00	1.00	1.00

Jika nilainya tidak ada di dalam tabel (Lihat Intensity), maka ambil nilai Reciprocalnya.

Biasanya nilai di atas ini sudah diberikan pada soal, tetapi pada permasalahan ini dibuat berdasarkan matriks perbandingan dengan selisih antara dua kriteria.

Kemudian hitung total nilai lower, middle, dan upper dari masing-masing kriteria.

Lower C1 :  $\sum_{j=1}^n l_j = 1 + 0.5 + 0.4 + 0.4 = 2.3$

Lower C2 :  $\sum_{j=1}^n l_j = 0.67 + 1 + 0.4 + 0.4 = 2.47$

Lower C3 :  $\sum_{j=1}^n l_j = 1.5 + 1.5 + 1 + 2.5 = 6.5$

Lower C4 :  $\sum_{j=1}^n l_j = 1.5 + 1.5 + 0.28 + 1 = 4.28$

Total Lower :  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n l_{ij} = 2.3 + 2.47 + 6.5 + 4.28 = 15.55$

Middle C1 :  $\sum_{j=1}^n m_j = 1 + 1 + 0.5 + 0.5 = 3$

Middle C2 :  $\sum_{j=1}^n m_j = 1 + 1 + 0.5 + 0.5 = 3$

Middle C3 :  $\sum_{j=1}^n m_j = 2 + 2 + 1 + 3 = 8$

Middle C4 :  $\sum_{j=1}^n m_j = 2 + 2 + 0.33 + 1 = 5.33$

Total Middle :  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij} = 3 + 3 + 8 + 5.33 = 19.33$

Upper C1 :  $\sum_{j=1}^n u_j = 1 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = 5.5$

Upper C2 :  $\sum_{j=1}^n u_j = 2 + 1 + 1.5 + 1.5 = 6$

Upper C3 :  $\sum_{j=1}^n u_j = 0.67 + 0.67 + 1 + 3.5 = 5.84$

Upper C4 :  $\sum_{j=1}^n u_j = 0.67 + 0.67 + 0.4 + 1 = 2.74$

Total Upper :  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ij} = 5.5 + 6 + 5.84 + 2.74 = 20.08$

Lalu hitung nilai sintesis Fuzzy pada lower, median, dan upper. Di contoh sini dipisah lower, median, dan uppernya. Kalau di formula sama saja hanya saja penulisannya digabung menggunakan koma.

Perlu diperhatikan rumusnya ada yang (u, m, l) dan (l, m, u). Memang terbalik untuk dikalikan nilainya.

$s_i$  pada lower :

$$s_1 = \sum_{j=1}^n l_j / \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ij} = 2.3 / 20.08 = 0.115$$

$$s_2 = \sum_{j=1}^n l_j / \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ij} = 2.47 / 20.08 = 0.123$$

$$s_3 = \sum_{j=1}^n l_j / \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ij} = 6.5 / 20.08 = 0.324$$

$$s_4 = \sum_{j=1}^n l_j / \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ij} = 4.28 / 20.08 = 0.213$$



## CASE STUDY : CHOOSING THE BEST EMPLOYEE OF THE YEAR

$S_i$  pada middle :

$$S_1 = \sum_{j=1}^n m_j / \sum_{j=1}^m m_j = 3 / 19.33 = 0.155$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^n m_j / \sum_{j=1}^m m_j = 3 / 19.33 = 0.155$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^n m_j / \sum_{j=1}^m m_j = 8 / 19.33 = 0.414$$

$$S_4 = \sum_{j=1}^n m_j / \sum_{j=1}^m m_j = 5.33 / 19.33 = 0.276$$

$S_i$  pada upper :

$$S_1 = \sum_{j=1}^n u_j / \sum_{j=1}^m l_j = 5.5 / 15.55 = 0.354$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^n u_j / \sum_{j=1}^m l_j = 6 / 15.55 = 0.386$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^n u_j / \sum_{j=1}^m l_j = 5.84 / 15.55 = 0.376$$

$$S_4 = \sum_{j=1}^n u_j / \sum_{j=1}^m l_j = 2.74 / 15.55 = 0.176$$

Hasil semua  $S_i$  dalam tabel adalah :

	$S_i$		
	L	M	U
C1	0.115	0.155	0.354
C2	0.123	0.155	0.386
C3	0.324	0.414	0.376
C4	0.213	0.276	0.176

Tabel disamping ini dipakai untuk menghitung nilai prioritas vektor tiap kriteria.

$$V(C_1 \geq C_1) = 1, \text{ karena } m_1 = m_1 \rightarrow 1 = 1$$

$$V(C_1 \geq C_2) = 1, \text{ karena } m_1 \geq m_2 \rightarrow 0.155 = 0.155$$

$$V(C_1 \geq C_3) = (0.324-0.354)/[(0.155-0.354)-(0.414-0.324)] = 0.104, \text{ karena } m_1 \leq m_3 \rightarrow 0.155 \leq 0.414$$

$$V(C_1 \geq C_4) = (0.213-0.354)/[(0.155-0.354)-(0.276-0.213)] = 0.538, \text{ karena } m_1 \leq m_4 \rightarrow 0.155 \leq 0.276$$

$$V(C_2 \geq C_1) = 1, \text{ karena } m_1 \geq m_2 \rightarrow 0.155 = 0.155$$

$$V(C_2 \geq C_2) = 1, \text{ karena } m_2 = m_2 \rightarrow 1 = 1$$

$$V(C_2 \geq C_3) = (0.324-0.386)/[(0.155-0.386)-(0.414-0.324)] = 0.193, \text{ karena } m_2 \leq m_3 \rightarrow 0.155 \leq 0.414$$

$$V(C_2 \geq C_4) = (0.213-0.386)/[(0.155-0.386)-(0.276-0.213)] = 0.588, \text{ karena } m_2 \leq m_4 \rightarrow 0.155 \leq 0.276$$

$$V(C_3 \geq C_1) = 1, \text{ karena } m_3 \geq m_1 \rightarrow 0.414 \geq 0.155$$

$$V(C_3 \geq C_2) = 1, \text{ karena } m_3 \geq m_2 \rightarrow 0.414 \geq 0.155$$

$$V(C_3 \geq C_3) = 1, \text{ karena } m_3 = m_3 \rightarrow 1 = 1$$

$$V(C_3 \geq C_4) = 1, \text{ karena } m_3 \geq m_4 \rightarrow 0.414 \geq 0.276$$

$$V(C_4 \geq C_1) = 1, \text{ karena } m_4 \geq m_1 \rightarrow 0.276 \geq 0.155$$

$$V(C_4 \geq C_2) = 1, \text{ karena } m_4 \geq m_2 \rightarrow 0.276 \geq 0.155$$

$$V(C_4 \geq C_3) = (0.324-0.176)/[(0.276-0.176)-(0.414-0.324)] = 14.8, \text{ karena } m_4 \leq m_3 \rightarrow 0.276 \leq 0.414$$

$$V(C_4 \geq C_4) = 1, \text{ karena } m_4 = m_4 \rightarrow 1 = 1$$

Kemudian, hasil vektor di atas semua akan digunakan untuk mencari nilai ordinat defuzzifikasi dengan mencari nilai minimal dari nilai vektor setiap kriteria.

	C1	C2	C3	C4	Defuzzifikasi
C1	1	1	0.104	0.538	0.104
C2	1	1	0.193	0.588	0.193
C3	1	1	1	1	1
C4	1	1	14.8	1	1

Dari vektor defuzzifikasi maka dapat diperoleh nilai weight untuk setiap kriteria yaitu :

$$W' = (0.104, 0.193, 1, 1)^T$$

$$\Sigma W = 0.104 + 0.193 + 1 + 1 = 2.297$$

Setelah itu didapatkan normalized weight yaitu :

$$W = (0.104, 0.193, 1, 1) / 2.297$$

$$= (0.045, 0.084, 0.435, 0.435)$$

Criteria	C1	C2	C3	C4
Weight	0.045	0.084	0.435	0.435

Kemudian hitung nilai bobot vektor untuk setiap kriteria.

Alternative	Criteria			
	C1 (SME Scope)	C2 (Market)	C3 (Product)	C4 (Market Place)
A1 (Employee 1)	2	1	1	1
A2 (Employee 2)	2	1	3	3
A3 (Employee 3)	1	2	3	3
A4 (Employee 4)	1	1	2	3
Max	2	2	3	3
Min	1	1	1	1

Untuk C1 :

$$A1 = (2-1)/(2-1) = 1$$

$$A2 = (2-1)/(2-1) = 1$$

$$A3 = (1-1)/(2-1) = 0$$

$$A4 = (1-1)/(2-1) = 0$$

Secara lengkap, hasilnya adalah sebagai berikut.



## CASE STUDY : CHOOSING THE BEST EMPLOYEE OF THE YEAR

Alternative	Criteria			
	C1 (SME Scope)	C2 (Market)	C3 (Product)	C4 (Market Place)
A1 (Employee 1)	1	0	0	0
A2 (Employee 2)	1	0	1	1
A3 (Employee 3)	0	1	1	1
A4 (Employee 4)	0	0	0.5	1
Weight	0.045	0.084	0.435	0.435

Nilai-nilai di atas akan dikalikan kemudian dijumlahkan untuk memperoleh ranking yaitu sebagai berikut.

$$A1 = (1 * 0.045) + (0 * 0.084) + (0 * 0.435) + (0 * 0.435) = 0.045$$

$$A2 = (1 * 0.045) + (0 * 0.084) + (1 * 0.435) + (1 * 0.435) = 0.915$$

$$A3 = (0 * 0.045) + (1 * 0.084) + (1 * 0.435) + (1 * 0.435) = 0.954$$

$$A4 = (0 * 0.045) + (0 * 0.084) + (0.5 * 0.435) + (1 * 0.435) = 0.653$$

Secara lengkap, maka tabel yang diperoleh adalah sebagai berikut.

Maka, dapat diperoleh ranking dilihat dari weight score yaitu sebagai berikut.

Alternative	Weight Score	Ranking
A1 (Employee 1)	0.045	4
A2 (Employee 2)	0.915	2
A3 (Employee 3)	0.954	1
A4 (Employee 4)	0.653	3

∴ Oleh karena itu, pemilihan karyawan terbaik dalam 1 tahun dengan 4 kriteria sebagai patokan pemilihan yaitu dari segi pengetahuan SME / UMKM, cara Market barang yang dijual, Product knowledge yang dikuasai, dan pemahaman Market Place untuk menjual suatu barang, jatuh kepada karyawan Employee 3.

Alternative	Criteria				Vector Weight Value	Weight Score
	C1 (SME Scope)	C2 (Market)	C3 (Product)	C4 (Market Place)		
A1 (Employee 1)	1	0	0	0	0.045	0.045
A2 (Employee 2)	1	0	1	1	0.084	0.915
A3 (Employee 3)	0	1	1	1	0.435	0.954
A4 (Employee 4)	0	0	0.5	1	0.435	0.653

**Links:**

- 

**Paper:**

- <https://www.doi.org/10.1088/1755-1315/1265/1/012007>
- <https://www.doi.org/10.1007/s00500-023-08232-7>
- <https://www.doi.org/10.30880/jtmb.2022.09.01.002>
- <https://www.doi.org/10.1016/j.aej.2022.04.005>
- [https://www.doi.org/10.1007/978-81-322-3700-6\\_5](https://www.doi.org/10.1007/978-81-322-3700-6_5)
- <https://www.doi.org/10.1016/b978-0-443-29109-8.00003-7>
- <https://www.doi.org/10.3233/JIFS-236035>
- <https://www.doi.org/10.31181/rme040122082023b>

**Video:**

- <https://youtu.be/YfeAN-EM7dc?si=rGI6mC1cp9aX0ZB>
- [https://youtu.be/sTb1t6jq8pA?si=bHXNVeVzoa6\\_osrK](https://youtu.be/sTb1t6jq8pA?si=bHXNVeVzoa6_osrK)
- <https://youtu.be/ZqaVuZ22mWs?si=yD0tf-IXctF7DKYv>
- [https://youtu.be/5k3Wz1AfVWs?si=Xrc5BEdrRe6Ezmw\\_](https://youtu.be/5k3Wz1AfVWs?si=Xrc5BEdrRe6Ezmw_)
- [https://www.youtube.com/live/AadG3e8r3n0?si=O9AgObSB\\_9ygo0rv](https://www.youtube.com/live/AadG3e8r3n0?si=O9AgObSB_9ygo0rv)
- [https://youtu.be/g7unJVi1tgU?si=\\_nnGB38SoQfA\\_bCU](https://youtu.be/g7unJVi1tgU?si=_nnGB38SoQfA_bCU)

**Github:**

- <https://github.com/Louis-Gabriel-Hernandes/FuzzyAHP>