rapport_td8_simon_jiaxuan

Exercice 1:

Question 1:

Pour derminer la loi de la variable X_n, d'après l'équation de l'énoncé, on peut savoir que X_n a deux états: 0 et 1, donc X_n est une variable Bernoulli, et $X_n \sim Binomiale(p)$, pour calculer la paramètre p:

$P(X_n = 1) = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1) = \int P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \mid U_n = u) \times f_U(u)du$

$= \int_0^1 P(u^2 + V_n^2 \leq 1)du$ parce que u est compris entre 0 et 1

$= \int_0^1 P(V_n \leq \sqrt{1-u^2})du$

$= \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ car V_n est dans l'intervalle [0,1], donc $P(V_n \leq \sqrt{1-u^2}) = \sqrt{1-u^2}$

Ici on effectue un changement de variable, en raison de $U_n^2 + V_n^2 \leq 1$, donc on peut poser $U_n^2 = sin^2 x$ et $V_n^2 = cos^2 x$, puis on a $u^2 = sin^2 x$, avec $u = sinx$, on peut déduire que $du = cosx \times dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sin^2 x} \times cosxdx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 xdx$

or $cos^2 x = \frac{cos2x+1}{2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos2x+1}{2}dx$

$= \frac{\pi}{4}$

comme ça, $p = \frac{\pi}{4}$, donc $X_n \sim Binomiale(\frac{\pi}{4})$

Pour calculer la variance de Z_n et montrer que Z_n converge vers π

$Var[Z_n] = \frac{4^2}{n^2} \times Var[\sum_{i=1}^n X_i]$ ici en appliquant la propiété de variance

donc par indépendant des X_i,

$Var[Z_n] = \frac{4^2}{n^2} \times \sum_{i=1}^n Var[X_i]$

et comme X_i suit une loi de Bernoulli, et son paramètre: $p = \frac{\pi}{4}$

$Var[Z_n] = \frac{4^2}{n^2} \times \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4} \times (1 - \frac{\pi}{4})$

$= \frac{1}{n}\pi(4-\pi)$

donc $\lim_{n \to +\propto} \frac{1}{n}\pi(4-\pi) = 0$

pour montrer que la suite Z_n converge vers π

$E[Z] = E[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{4}{n} \times n \times \frac{\pi}{4} = \pi$

(La question suivante nous permettra de finir la demonstration en même temps grâce à l'inégalité de Chebishev)

Qestion 2:

D'après le théorème de Chebishev, on a :

$\forall \epsilon > 0, P(|z - \pi| > \epsilon) \leq \alpha = 0(\frac{1}{n})$

et on veut que $P(|Z_n - \pi| \leq \epsilon) \geq 95\% = 1 - \alpha$

$=> 1 - P(|Z_n - \pi| > \epsilon) \geq 1 - \alpha$

donc $P(|Z_n - \pi| > \epsilon) \leq \alpha$

or $Var[Z_n] = \frac{\pi(4-\pi)}{n}$

finalement on va chercher le n_0 qui est inférieure ou équale n

$\frac{\pi(4-\pi)}{n\epsilon^2} \leq \alpha$

donc $n_0 = \lceil \frac{\pi(4-\pi)}{\alpha\epsilon^2} \rceil$

```
epsilon <- 1e-3
alpha <- 0.05
n <- ceiling( pi*(4-pi)/(alpha*epsilon^2))
log10(n)
```

```
## [1] 7.731873
```

```
u <- runif(n)
v <- runif(n)
4*mean(u^2 + v^2 < 1) - pi
```

```
## [1] -0.0002884341
```

Question 3:

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum X_n - \sqrt{n} \times \mu$

$= \sqrt{n}(Z_n - \pi)$

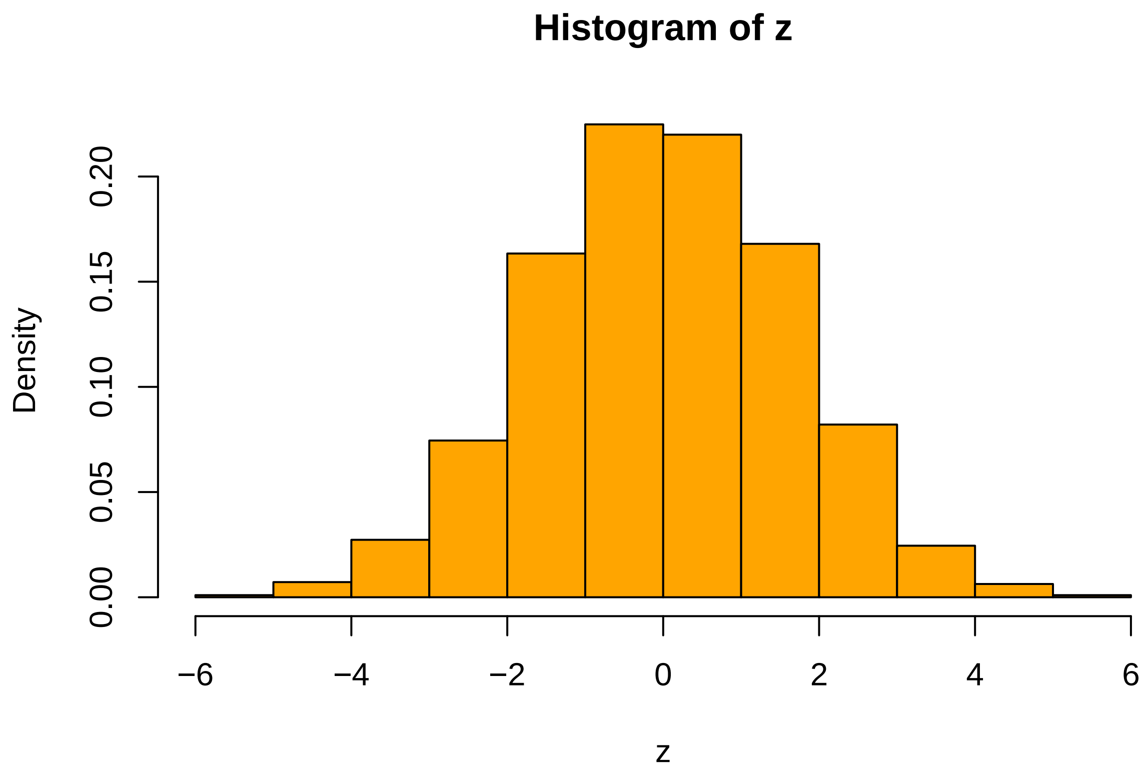
$Var[\sqrt{n}(Z_n - \pi)] = n \cdot Var[Z_n - \pi]$ par la propiété de la variance

$= n \cdot Var[Z_n]$

$= \pi \cdot (4 - \pi)$ donc cette variance est une constante

La loi connue qui semble correspondre à Z_n est la loi normale.

```
rzn <- function(m=1,n=1000){
  zn <- NULL
  for (i in 1:m){
    u <- runif(n)
    v <- runif(n)
    zn <- c(zn, 4*mean(u^2 + v^2 < 1) )
  }
  return(zn)
}
n <- 3000
m <- 10000
z  <- sqrt(n)*(rzn(m,n) - pi)
hist(z, prob = TRUE, col = "orange")
```



Exercice 2:

Qestion 1:

$E[y_n] = E[\varphi(U_i)]$

$or\ u \sim U(0,1)$

$= \int_0^1 \varphi(u)du$

$= \mathcal{I}$

(L'utilisation du théorème de Chebichev avec la variance déterminée dans la question suivante permet alors de conclure)

Question 2:

$Var[y_n] = \frac{1}{n} \cdot Var[\varphi(u)]$

$= \frac{1}{n}(E[\varphi(u)^2] - E[\varphi(u)]^2)$

$= \frac{1}{n} \cdot (\int_0^1 \varphi(u)^2 du - I)$

$= \frac{1}{n} \cdot (\int_0^1 u^3 du - \int_0^1 u^4 du - \frac{\pi^2}{256})$

$= \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{\pi^2}{256})$

apres le théorème de chebichev:

$\approx \frac{0.0114}{\epsilon^2 n}$

et $\epsilon = 10^{-3}, \alpha = 0.05$

donc:

$n \geq \frac{Var[\varphi(u)]}{\alpha\epsilon^2} > 228937$

Question 3:

Par linéarité de l'espérance et identique distribution de V_i

$E[Z_n] = E[\frac{\varphi(v)}{f(v)}]$

or par le théorème de transfert, $E[g(v)] = \int_0^1 g(v)f(v)dv$

donc

$E[Z_n] = \int_0^1 \frac{\varphi(v)}{f(v)} f(v)dv = I$

et on veut que $Var[Z_n] \to 0$ quand $n \to \infty$

or $Var[Z_n] = \frac{1}{n}(E[\frac{\varphi(v)^2}{f(v)^2}] - E[\frac{\varphi(v)}{f(v)}]^2)$

$= \frac{1}{n}(\int_0^1 \frac{\varphi(v)^2}{f(v)}dv - I^2)$

$= \frac{1}{n}(\int_0^1 \frac{v^2(1-v)}{6v(1-v)}dv - \frac{\pi^2}{256})$

$= \frac{1}{n}(\frac{1}{18} - \frac{\pi^2}{256})$

Question 4:

```
phi <- function(u){ sqrt((1-u)*u^3)}
n <- 1000000
# Algorithme 1

mean(y <- phi(runif(n))) - pi/16
```

```
## [1] -1.163283e-05
```

```
var(y)
```

```
## [1] 0.01145179
```

```
# Algorithme 2
f <- function(v){dbeta(v,2,2)}
u <- rbeta(n, 2, 2)
mean(z <- phi(u)/f(u)) - pi/16
```

```
## [1] -1.669913e-06
```

```
var(z)
```

```
## [1] 0.01694425
```

En conclusion, entre les deux algorithmes, on prefère à choisir le premier car il est plus simple.

Question 5:

on choisit le C_α tel que:

$\int_0^1 f_\alpha(v)dv = 1$

ie $C_\alpha = (\int_0^1 v^\alpha (1-v) dv)^{-1}$

$= (\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2})^{-1}$

$= (\alpha+1) \cdot (\alpha+2)$

donc on cherche à minimiser (selon le α)

$E[\frac{\varphi(v)^2}{f_\alpha(v)^2}] - I^2$

autrement dit:

$\int_0^1 \frac{\varphi(v)^2}{f_\alpha(v)} dv - I^2$

$= \frac{1}{(4-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)} - I^2$

docn $\frac{d[(4-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)]}{d\alpha} = -\frac{(4-\alpha)(\alpha+1)+(4-\alpha)(\alpha+2)-(\alpha+1)(\alpha+2)}{((4-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2))^2}$

or $P(\alpha) = -3\alpha^2 + (3+2-3)\alpha + 4 + 8 - 2$

$= -3(\alpha - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{31}}{3})(\alpha - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{31}}{3})$

donc minimal pour $\alpha = \frac{1+\sqrt{31}}{3} \approx 2,19$