Introduction to Digital Designs

Huy Vu

Faculty of Electrical and Electronics Engineering Ho Chi Minh City University of Technology

Ngày 10 tháng 7 năm 2024

Mục lục

1	ΗÊ	THỐNG SỐ ĐẾM - SỐ NHỊ PHÂN	2
	1.1	Các hệ thống số đếm:	2
		1.1.1 Khái niệm:	2
		1.1.2 Chuyển đổi cơ số:	
	1.2	Số nhị phân (Binary):	3
		1.2.1 Các tính chất của số nhị phân	3
		1.2.2 Các phép toán số học trên số nhị phân:	1
		1.2.3 Mã nhị phân:	ó
	1.3	Số nhị phân có dấu:	3
		1.3.1 Biểu diễn số có dấu:	3
		1.3.2 Số bù 1 (1's Complement):	
		1.3.3 Số bù 2 (2's Complement):	7
		1.3.4 Các phép toán cộng trừ số có dấu:	
	1.4	Cộng trừ số BCD:)
2	ĐA	I SỐ BOOLE - CỔNG LOGIC	1
_	2.1	Cấu trúc đại số Boole:	
	2.1	2.1.1 Các tiên đề (Axioms):	
		2.1.2 Các định lý cơ bản (Basic Theorems):	
	2.2	Hàm Boole (Boolean Function):	
		2.2.1 Dịnh nghĩa:	
		2.2.2 Bù của 1 hàm:	
	2.3	Dạng chính tắc và dạng chuẩn của hàm Boole:	
		2.3.1 Các tích chuẩn (minterm) và tổng chuẩn (Maxterm):	
		2.3.2 Dạng chính tắc (Canonical Form):	2
		2.3.3 Dạng chuẩn (Standard Form):	2
	2.4	Cổng logic	3
		2.4.1 Cổng NOT:	3
		2.4.2 Cổng AND:	3
		2.4.3 Cổng OR:	1
		2.4.4 Cổng NAND:	1
		2.4.5 Cổng NOR:	1
		2.4.6 Cổng XOR:	5
		2.4.7 Cổng XNOR:	5

1 HỆ THỐNG SỐ ĐẾM - SỐ NHỊ PHÂN

1.1 Các hệ thống số đếm:

1.1.1 Khái niệm:

- Cơ số (r-radix): là số lượng ký tự chữ số (ký số digit) sử dụng để biểu diễn trong hệ thống số đếm.
- Trọng số (weight): đại lượng biểu diễn cho vị trí của 1 con số trong chuỗi số. **Trọng số = Cơ số v**ị trí
- Giá trị (value): tính bằng tổng theo trọng số. Giá trị = \sum (Ký số \times Trọng số).
- a. Số thập phân (Decimal): Cơ số r = 10.

4	0	7	6	2	5
10^{2}	10^{1}	10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
4×10^{2}	0×10^{1}	7×10^{0}	6×10^{-1}	2×10^{-2}	5×10^{-3}
400	0	7	0.6	0.02	0.005

$$400 + 0 + 7 + 0.6 + 0.02 + 0.005 = 407.625$$

b. Số nhị phân (Binary): Cơ số r=2.

1	0	1	0	1	1
2^{2}	2^{1}	2^{0}	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
1×2^2	0×2^1	1×2^0	0×2^{-1}	1×2^{-2}	1×2^{-3}
4	0	1	0	0.25	0.125

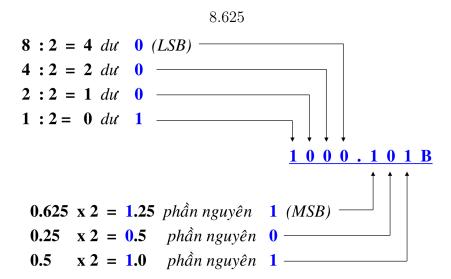
$$4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 + 0.125 = 5.375$$

c. Số thập lục phân (Hexadecimal): Cơ số r = 16

5	A	0	4	D	1
16^{2}	16^{1}	16^{0}	16^{-1}	16^{-2}	16^{-3}
5×16^{2}	10×16^{1}	0×16^{0}	4×16^{-1}	13×16^{-2}	1×16^{-3}
1280	160	0	0.25	0.0508	0.002

$$1280 + 160 + 0 + 0.25 + 0.0508 + 0.0002 = 1440.301$$

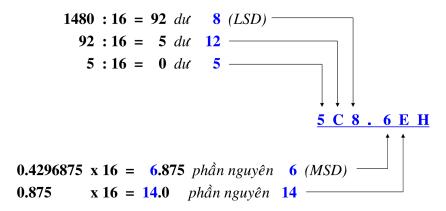
- 1.1.2 Chuyển đổi cơ số:
- a. Từ thập phân sang nhị phân:



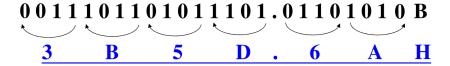
Ta lấy phần nguyên chia cho 2 và dừng khi ta được 0 dư 1, phần không nguyên nhân với cơ số 2 và giữ phần nguyên, tiếp tục cho tới khi có phần không nguyên là 0.

b. Từ thập phân sang thập lục phân:

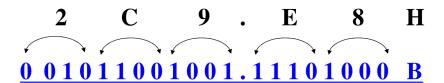
1480.4296875



c. Từ nhị phân sang thập lục phân



d. Từ thập lục phân sang nhị phân



1.2 Số nhị phân (Binary):

1.2.1 Các tính chất của số nhị phân

- Số nhị phân n bit có 2^n giá trị từ 0 đến $2^n - 1$.

- Số nhị phân có giá trị $2^n 1$: $1 \cdot \dots \cdot 1$ (n bit 1) và giá trị 2^n : $1 \cdot \dots \cdot 0$ (n bit 0).
- Số nhị phân có giá trị lẻ là số có LSB = 1; ngược lại giá trị chẵn là số có LSB = 0.
- Các bội số của bit:

1 B (Byte) = 8 bit
1 KB =
$$2^{10}$$
 B
1 MB = 2^{10} KB
1 GB = 2^{10} MB

- 1.2.2 Các phép toán số học trên số nhị phân:
- a. Phép cộng

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ nh\'o} 1$$

b. Phép trừ

$$0 - 0 = 0$$

 $0 - 1 = 1$ mượn 1
 $1 - 0 = 1$
 $1 - 1 = 0$

$$-\frac{1 \quad 1 \quad -1 \quad -1}{1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0} \\ -\frac{1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1}{1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1}$$

c. Phép nhân

d. Phép chia

1.2.3 Mã nhị phân:

Từ mã: là các tổ hợp nhị phân được sử dụng trong loại mã nhị phân.

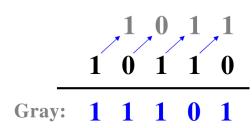
a. Mã nhị phân cho số thập phân (BCD - Binary Coded Decimal)

Số	BCD	BCD	BCD	Mã 1 trong 10
thập phân	$(8\ 4\ 2\ 1)$	$(2\ 4\ 2\ 1)$	quá 3	Mã 1 trong 10
0	0000	0000	0011	0000000001
1	0001	0001	0100	0000000010
2	0010	0010	0101	000000100
3	0011	0011	0110	0000001000
4	0100	0100	0111	0000010000
5	0101	1011	1000	0000100000
6	0110	1100	1001	0001000000
7	0111	1101	1010	0010000000
8	1000	1110	1011	0100000000
9	1001	1111	1100	1000000000

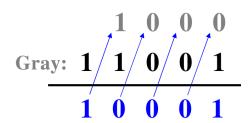
b. Mã Gray: là mã nhị phân mà 2 giá trị liên tiếp nhau có tổ hợp bit biểu diễn chỉ khác nhau 1 bit.

Giá trị	Binary	Gray
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110

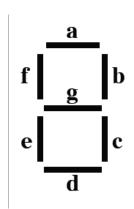
Đổi từ Binary sang Gray



Đổi từ Gray sang Binary



c. Mã LED 7 đoạn



Giá trị	a	b	c	d	e	f	g
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	1
6	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	0	1	1

d. Mã 1 trong n: là mã nhị phân n bit có mỗi từ mã chỉ có 1 bit là 1 (hoặc 0) và n-1 bit còn lại là 0 (hoặc 1).

e. Mã ký tự ASCII:

			(Cột) $b_6b_5b_4$						
(Hàng)		000	001	010	011	100	101	110	111
$b_3b_2b_1b_0$	Hex	0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0	NUL	DLE	SP	0	@	Р	(р
0001	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	2	STX	DC2	"	2	В	R	b	r
0011	3	ETX	DC3	#	3	С	S	c	\mathbf{s}
0100	4	EOT	DC4	\$	4	D	Τ	d	\mathbf{t}
0101	5	ENQ	NAK	%	5	Е	U	е	u
0110	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	7	BEL	ETB	,	7	G	W	g	w
1000	8	BS	CAN)	8	Н	X	h	X
1001	9	HT	EM	(9	I	Y	i	у
1010	A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	Z
1011	В	VT	ESC	+	;	K	[k	{
1100	\mathbf{C}	FF	ES	,	<	L		1	
1101	D	CR	GS	_	=	M]	m	}
1110	\mathbf{E}	SO	RS		>	N	^	n	~
1111	F	SI	US	/	?	О		О	DEL

1.3 Số nhị phân có dấu:

1.3.1 Biểu diễn số có dấu:

Số có dấu theo biên độ (Signed Magnitude):

- Bit MSB là bit dấu: 0 là số dương và 1 là số âm, các bit còn lại biểu diễn giá trị độ lớn.

+13: 01101

-13: 11101

- Phạm vi biểu diễn:

$$-(2^{n-1}-1) \div +(2^{n-1}-1)$$

1.3.2 Số bù 1 (1's Complement):

- Số bù 1 của 1 số nhị phân N
 có chiều dài n
 bit

Bù 1 (N) =
$$2^n - 1 - N$$

VD: Bù 1 (1001) =
$$2^4$$
 - 1 -1001 = 1111-1001 = 0110

- Có thể lấy Bù 1 của 1 số nhị phân bằng cách lấy đảo từng bit của nó (0 thành 1 và 1 thành 0).

Biểu diễn số có dấu bù 1:

- * Số có giá trị dương: bit dấu = 0, các bit còn lại biểu diễn độ lớn.
- * Số có giá trị âm: lấy bù 1 của số dương có cùng độ lớn.

Phạm vi biểu diễn:

$$-(2^{n-1}-1) \div +(2^{n-1}-1)$$

1.3.3 Số bù 2 (2's Complement):

- Số bù 2 của 1 số nhị phân N có chiều dài n bit cũng có n bit

Bù 2 (N) =
$$2^n - N = \text{Bù 1 (N)} + 1$$

VD: Bù 2 (1001) = 2^4 - 1001 = 10000 - 1001 = 0111. Hoặc Bù 2(1001) = Bù 1 (1001) + 1 = 0110 + 1 = 0111.

Biểu diễn số có dấu bù 2:

- * Số có giá trị dương: bit dấu = 0, các bit còn lại biểu diễn độ lớn.
- * Số có giá tị âm: lấy bù 2 của số dương có cùng độ lớn.

Phạm vi biểu diễn:

$$-(2^{n-1}) \div + (2^{n-1} - 1)$$

Giá trị dương	Giá trị âm
000 = 0	100 = -4
001 = +1	101 = -3
010 = +2	110 = -2
011 = +3	111 = -1

- Để tìm được giá trị của só âm: ta lấy bù 2 của nó; sẽ nhận được số dương có cùng biên đô.
- Mở rộng chiều dài bit số có dấu: số dương thêm các bit 0 và số âm thêm các bit 1 vào trước.
- Lấy bù 2 hai lần một số thì bằng chính số đó.
- Giá trị -1 được biểu diễn là 1/cdots11 (n bit 1).
- Giá trị -2^n được biểu diễn là 100/cdots00 (n bit 0).

$$-32 = -2^5 = 100000$$

1.3.4 Các phép toán cộng trừ số có dấu:

- Thực hiện giống như số không dấu.

Thực hiện trên toán hạng có cùng chiều dài bit, và kết quả cũng có cùng số bit.

Kết quả đúng nếu nằm trong phạm vi biểu diễn số có dấu (nếu kết quả sai thì cần mở rộng chiều dài bit).

Trừ với số bù 2: A - B = A + Bù 2 (B)

• Trừ với số không có dấu:

• Trừ với số có dấu:

1.4 Cộng trừ số BCD:

A + B	S =	A + B	Nếu tổng $S_i \ge 10$ hoặc có bit nhớ $C_i = 1$, thì hiệu đính S_i : $\underline{S_i = S_i + 6 \text{ và } S_{i+1} = S_{i+1} + C_i}$
A D	$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$	C _n = 1: kết quả là số dương (A≥B)	Nếu $C_i = 1$ thì không hiệu đính Nếu $C_i = 0$ thì hiệu đính D_i : $\underline{D_i = D_i + 10}$
A - B	(Kết quả là số âm (A <b)< td=""><td>C_n = 0: kết quả là số âm (A<b) Lấy bù kết quả</b) </td><td>Nếu $C_i = 1$ thì hiệu đính D_i: $\underline{D_i = D_i + 6}$ Nếu $C_i = 0$ thì không hiệu đính</td></b)<>	C _n = 0: kết quả là số âm (A <b) Lấy bù kết quả</b) 	Nếu $C_i = 1$ thì hiệu đính D_i : $\underline{D_i = D_i + 6}$ Nếu $C_i = 0$ thì không hiệu đính

2 ĐẠI SỐ BOOLE - CỔNG LOGIC

2.1 Cấu trúc đại số Boole:

Là cấu trúc đại số được định nghĩa trên tập 1 phần tử nhị phân $B = \{0,1\}$ và các phép toán nhị phân: AND(.), OR(+), NOT(').

X	y	x.y (x AND y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	\mathbf{y}	x+y (x OR y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

X	\mathbf{x}' (NOT \mathbf{x} , \overline{x})
0	1
1	0

*Thứ tự phép toán: theo thứ tự dấu ngoặc (), NOT, AND, OR.

2.1.1 Các tiên đề (Axioms):

- a. Tính kín (Closure Property)
- b. Phần tử đồng nhất (Identity Element):

$$x.1 = 1.x = x$$

$$x + 0 = 0 + x = x$$

c. Tính giao hoán (Commutative Property):

$$x.y = y.x$$

$$x + y = y + x$$

d. Tính phân bố (Complement Element):

$$x.(y+z) = x.y + x.z$$

$$x + (y.z) = (x+y)(x+z)$$

e. Phần tử bù (Complement Element):

$$x + \overline{x} = 1$$
 $x.\overline{x} = 0$

- 2.1.2 Các định lý cơ bản (Basic Theorems):
 - a. Định lý 1: $\overline{\overline{x}} = x$
 - **b.** Dinh lý 2: x + x = x x.x = x
 - **c.** Dịnh lý 3: x + 1 = 1 x.0 = 0
 - d. Định lý 4: Định lý hấp thu (Absorption)

$$x + x.y = x$$
 $x.(x + y) = x$

e. Định lý 5: Định lý kết hợp (Associative)

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
 $x.(y.z) = (x.y).z$

f. Đinh lý 6: Định lý De Morgan

$$\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$$
 $\overline{x}.\overline{y} = \overline{x} + \overline{y}$

2.2 Hàm Boole (Boolean Function):

2.2.1 Định nghĩa:

 Hàm Boole là 1 biểu thức được tạo bởi các biến nhị phân và các phép toán nhị phân NOT, AND, OR.

$$F(x, y, z) = x.y + \overline{x}.\overline{y}.z$$

- Với giá trị cho trước của các biến, hàm Boole sẽ có giá trị là 0 hoặc 1.
- Bảng giá tri:

x	y	\mathbf{z}	\mathbf{F}
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2.2.2 Bù của 1 hàm:

- Sử dụng định lý De Morgan:

$$F = x.y + \overline{x}.\overline{y}.z$$

$$\overline{F} = \overline{x.y + \overline{x}.\overline{y}.z} = \overline{(x.y)}.\overline{(\overline{x}.\overline{y}.z)}$$

$$\overline{F} = (\overline{x} + \overline{y}).(x + y + \overline{z})$$

- Lấy biểu thức đối ngẫu và lấy bù các biến: Tính đối ngẫu (Duality): Hai biểu thức được gọi là đối ngẫu của nhau khi thay phép toán AND bằng OR, phép toán OR bằng AND, 0 thành 1 và 1 thành 0.

$$F = x.y + \overline{x}.\overline{y}.z$$

Lấy đối ngẫu: $(x.y)(\overline{x}.\overline{y}.z)$

Bù các biến: $\overline{F} = (\overline{x} + \overline{y}).(x + y + \overline{z})$

2.3 Dạng chính tắc và dạng chuẩn của hàm Boole:

2.3.1 Các tích chuẩn (minterm) và tổng chuẩn (Maxterm):

- Tích chuẩn (minterm): m_i ($0 \le i \le 2^n 1$) là các số hạng tích (AND) của n biến mà hàm Boole phụ thuộc với quy ước biến đó có bù nếu nó là 0 và không bù nếu nó là 1.
- Tổng chuẩn (Maxterm): M_i ($0 \le i \le 2^n 1$) là các số hạng tổng (OR) của n biến mà hàm Boole phụ thuộc với quy ước biến đó có bù nếu nó là 1 và không bù nếu nó là 0.

x	\mathbf{y}	${f z}$	minterm	Maxterm	
0	0	0	$m_0 = \overline{x} \ \overline{y} \ \overline{z}$	$M_0 = x + y + z$	
0	0	1	$m_1 = \overline{x} \ \overline{y} \ z$	$M_1 = x + y + \overline{z}$	
0	1	0	$m_2 = \overline{x} \ y \ \overline{z}$	$M_2 = x + \overline{y} + z$	
0	1	1	$m_3 = \overline{x} \ y \ z$	$M_3 = x + \overline{y} + \overline{z}$	$m_i = \overline{M_i}$
1	0	0	$m_4 = x \ \overline{y} \ \overline{z}$	$M_4 = \overline{x} + y + z$	
1	0	1	$m_5 = x \ \overline{y} \ z$	$M_5 = \overline{x} + y + \overline{z}$	
1	1	0	$m_6 = x \ y \ \overline{z}$	$M_6 = \overline{x} + \overline{y} + z$	
1	1	1	$m_7 = x \ y \ z$	$M_7 = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$	

2.3.2 Dạng chính tắc (Canonical Form):

a. Dạng chính tắc 1: là dạng tổng của các tích chuẩn (minterm) làm cho hàm Boole có giá trị 1.

X		\mathbf{y}	\mathbf{z}	\mathbf{F}	
0)	0	0	0	$F(x,y,z) = \overline{x} \ \overline{y} \ z + \overline{x} \ y \ \overline{z} + x \ \overline{y} \ z + xy \ \overline{z} + xyz$
0)	0	1	1	$= m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7$
0)	1	0	1	$= \Sigma m(1, 2, 5, 6, 7) = \Sigma(1, 2, 5, 6, 7)$
0)	1	1	0	
1		0	0	0	$F(x,y,z) = (x+y+z)(x+\overline{y}+\overline{z})(\overline{x}+y+z)$
1		0	1	1	$= M_0.M_3.M_4$
1		1	0	1	$= \Pi M(0,3,4) = \Pi(0,3,4)$
1		1	1	1	

b. Dạng chính tắc 2: là dạng tích của các tổng chuẩn (Maxterm) làm cho hàm Boole có giá trị 0.

TRƯỜNG HỢP HÀM BOOLE TÙY ĐỊNH (don't care): Hàm Boole n biến có thể không được định nghĩa hết tắt cả 2^n tổ hợp của n biến phụ thuộc. Khi đó tại các tổ hợp không sử dụng này, hàm Boole sẽ nhận giá trị tùy định (don't care), nghĩa là hàm Boole có thể nhận giá trị 0 hoặc 1.

X	y	\mathbf{z}	F
0	0	0	X
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	X

2.3.3 Dạng chuẩn (Standard Form):

a. Dạng chuẩn 1: là dạng tổng các tích (S.O.P - Sum of Product)

$$F(x, y, z) = xy + z$$

$$F(x, y, z) = xy + z$$

$$= xy(\overline{z} + z) + (\overline{x} + x)(\overline{y} + y)z$$

$$= xy\overline{z} + xyz + \overline{x} \overline{y}z + \overline{x} yz + x\overline{y} z + xyz$$

$$= m_6 + m_7 + m_1 + m_5 + m_3$$

$$= \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

$$F(x, y, z) = xy + z$$

$$= (x + z)(y + z)$$

$$= (x + \overline{y} y + z)(\overline{x} x + y + z)$$

$$= (x + \overline{y} + z)(x + y + z)(\overline{x} + y + z)(x + y + z)$$

$$= M_2 \cdot M_0 \cdot M_4$$

$$= \Pi(0, 2, 4)$$

b. Dạng chuẩn 2: là dạng tích các tổng (P.O.S - Product of Sum)

$$F(x,y,z) = (x+\overline{z})\overline{y}$$

$$F(x,y,z) = (x+\overline{z})\overline{y} = x\overline{y} + \overline{y} \overline{z}$$

$$= x\overline{y}(\overline{z}+z) + (\overline{x}+x)\overline{y} \overline{z}$$

$$= x\overline{y} \overline{z} + x\overline{y} z + \overline{x} \overline{y} \overline{z} + x\overline{y} \overline{z}$$

$$= m_4 + m_5 + m_0$$

$$= \Sigma(0,4,5)$$

$$F(x,y,z) = (x+\overline{z})\overline{y}$$

$$= (x+\overline{y}y+\overline{z})(\overline{x}x+\overline{y}+\overline{z}z)$$

$$= (x+\overline{y}+\overline{z})(x+y+\overline{z}z)$$

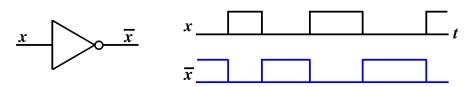
$$= (x+\overline{y}+\overline{z})(x+y+\overline{z}z)$$

$$= (x+\overline{y}+\overline{z})(x+y+\overline{z}z)$$

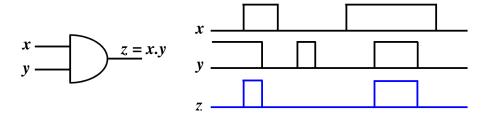
$$= M_3.M_1.M_7.M_6.M_2$$

$$= \Pi(1,2,3,6,7)$$

- 2.4 Cổng logic
- 2.4.1 Cổng NOT:



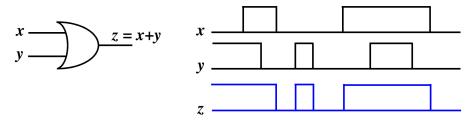
2.4.2 Cổng AND:



X	y	\mathbf{z}
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Với cổng AND có nhiều ngõ vào, ngõ ra sẽ là 1 nếu tất cả các ngõ vào đều là 1

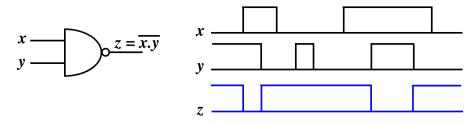
2.4.3 Cổng OR:



3	у	\mathbf{z}
() (0
() 1	. 1
1	. () 1
1	. 1	. 1

Với cổng OR có nhiều ngõ vào, ngõ ra sẽ là 0 nếu tất cả các ngõ vào đều là 0

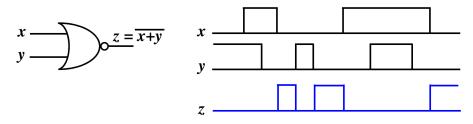
2.4.4 Cổng NAND:



X	\mathbf{y}	\mathbf{Z}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Với cổng NAND có nhiều ngõ vào, ngõ ra sẽ là 0 nếu tất cả các ngõ vào đều là 1

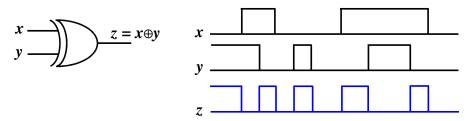
2.4.5 Cổng NOR:



X	y	\mathbf{z}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Với cổng NOR có nhiều ngõ vào, ngõ ra sẽ là 1 nếu tất cả các ngõ vào đều là 0

2.4.6 Cổng XOR:

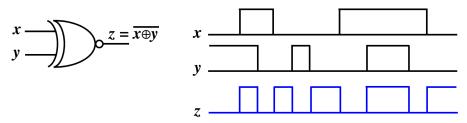


x	\mathbf{y}	\mathbf{z}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Với cổng XOR có nhiều ngõ vào, ngõ ra sẽ là 1 ếu tổng số bit 1 ở các ngõ vào là số lẻ

$$z = x \oplus y = \overline{x} \ y + x \ \overline{y} = (x + y)(\overline{x} + \overline{y})$$

2.4.7 Cổng XNOR:



X	y	\mathbf{z}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Với cổng XNOR có nhiều ngõ vào, ngõ ra sẽ là 1 nếu tổng số bit 1 ở các ngõ vào là số chẵn

$$z = \overline{x \oplus y} = \overline{x} \ \overline{y} + xy = (x + \overline{y})(\overline{x} + y)$$