# GIẢI TÍCH 2 (CALCULUS 2)

Vũ Nhật Huy

Ngày 9 tháng 1 năm 2024

# ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN NHIỀU BIẾN

## 1 Đạo hàm riêng cấp một.

Đạo hàm riêng cấp một của $f(x, y)$ theo biến $x$ tại $(x_0, y_0)$:

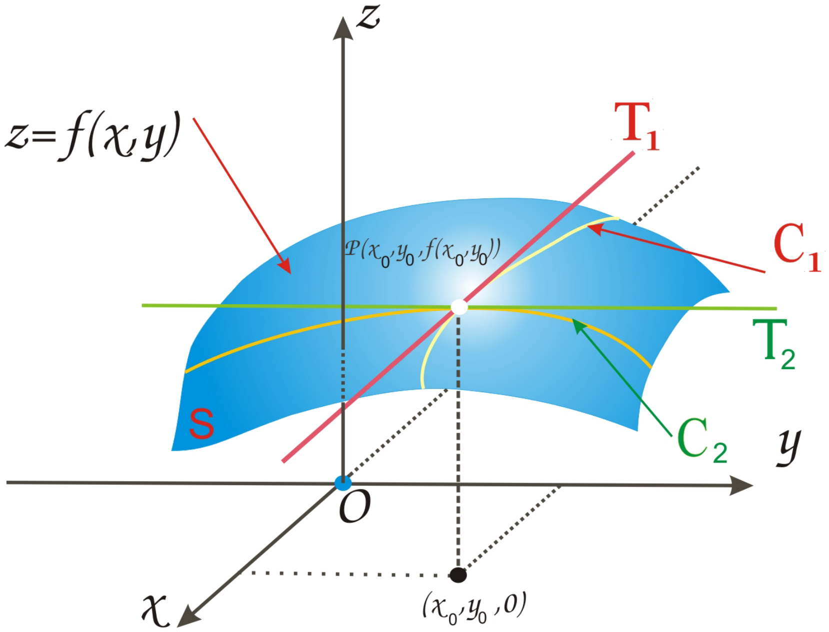
$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Đạo hàm riêng cấp một của $f(x, y)$ theo biến $y$ tại $(x_0, y_0)$:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta y, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Cố định $y_0$, biểu thức là hàm một biến theo $x$, tính đạo hàm của hàm này tại $x_0$.

## 2 Ý nghĩa hình học.




Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ tại điểm $(x_0, y_0)$ là

1. $f'_x(x_0, y_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến $T_1$v với đường cong $C_1$ (trong đó $C_1$ là giao tuyến của mặt cong $S$ với mặt phẳng $y = y_0$)

2. $f'_y(x_0, y_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến $T_2$v với đường cong $C_2$ (trong đó $C_2$ là giao tuyến của mặt cong $S$ với mặt phẳng $x = x_0$)

# 3 Đạo hàm riêng cấp cao.

Với hàm hai biến $z = f(x,y)$ thì đạo hàm riêng $f'_x$ và $f'_y$ cũng là những hàm hai biến, do đó những đạo hàm riêng của chúng $(f'_x)'_x$, $(f'_x)'_y$, $(f'_y)'_x$, $(f'_y)'_y$ được là đạo hàm riêng cấp hai của hàm $f$. Như vậy:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx};\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx};\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

***Định lý Clairaut (Schwartz).*** Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trên miền $D$. Khi đó nếu $f''_{xy}$ và $f''_{yx}$ là những hàm liên tục trên $D$ thì với mọi $(x_0, y_0) \in D$ ta có $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

# 4 Sự khả vi và vi phân cấp một

$f$ khả vi tại $(x_0, y_0)$ nếu tồn tại hai hằng số $A, B$ sao cho:

$$f(x_0, \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Điều kiện cần của khả vi:

1. $f$ khả vi tại $(x_0, y_0)$ thì $f$ liên tục tại $(x_0, y_0)$.
2. $f$ khả vi tại $(x_0, y_0)$ thì $f$ có các đạo hàm riêng tại $(x_0, y_0)$.

Vi phân của hàm hai biến thường viết dưới dạng:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

Điều kiện đủ của khả vi: Cho $f$ xác định trong miền mở chứa $(x_0, y_0)$, nếu các đạo hàm riêng $f'_x, f'_y$ liên tục tại $(x_0, y_0)$ thì $f$ khả vi tại $v(x_0, y_0)$.

# 5 Vi phân cấp cao.

Vi phân cấp hai của $f$ là vi phân của $df(x,y)$ khi xem $dx, dy$ là các hằng số. Cách viết: $d^2 f(x,y) = d(df(x,y))$.

$$d^2 f(x,y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

Công thức trên áp dụng khi $x, y$ là các biến độc lập.
Công thức tổng quát cho vi phân cấp cao.

$$d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

# 6 Đạo hàm và vi phân của hàm hợp.

Cho $z = f(x,y)$ và $x = x(u,v), y = y(u,v)$. Nếu $z, x, y$ khả vi:

$$z'_u = f'_x.x'_u + f'_y.y'_u \qquad z'_v = f'_x.x'_v + f'_y.y'_v$$

$$\begin{aligned}
dz &= z'_u du + z'_v dv \\
df &= f'_x du + f'_y dv = (f'_x.x'_u + f'_y.y'_u)du + (f'_x.x'_v + f'_y.y'_v)dv \\
df &= f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv)
\end{aligned}$$

**Trường hợp riêng 1.** Cho $z = f(x)$ và $x = x(u, v)$ (hợp của 1 biến và 2 biến).

$$z'_u = f'(x)x'_u \qquad z'_v = f'(x)x'_v$$

$$\begin{aligned}
dz &= z'_u du + z'_v dv \\
\Longrightarrow dz &= f'(x)dx = f'(x)(x'_u du + x'vdv)
\end{aligned}$$

**Trường hợp riêng 2.** $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t)$ (hợp 2 biến và 1 biến).

$$z'(t) = f'_x.x'(t) + f'_y.y'(t)$$

$$\begin{aligned}
dz &= z'(t)dt \\
dz &= f'_x dx + f'_y dy = f'_x.x'(t)dt + f'_y.y'(t)dt
\end{aligned}$$

**Trường hợp riêng 3.** $z = f(x, y), y = y(x)$ (hợp 2 biến và 1 biến).

$$z'(x) = f'_x + f'_y.y'(x)$$

$$dz = z'(x)dx$$

**Lưu ý:** Khi tính đạo hàm hàm hợp, luôn bắt đầu từ đạo hàm của $f$ theo biến chính. Sau đó, tùy thuộc vào yêu cầu, nhân thêm đạo hàm của biến chính vào cạnh đạo hàm của $f$.

# 7 Đạo hàm và vi phân hàm ẩn.

$G = F(x, y) = 0$, với $y = y(x)$. Đạo hàm của hàm ẩn 1 biến $y = y(x)$ (Xem $x, y$ là hai biến độc lập khi lấy đạo hàm của $F$):

$$y'(x) = \frac{-F'_x}{F'_y}$$

Xét hàm ẩn 2 biến $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình $F(x, y, z) = 0$ ($x, y, z$ là các biến độc lập khi tính $F'_x, F'_y, F'_z$)

$$z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z}$$

## 7.1 Phương trình tiếp tuyến.

Cho đường cong $C$ được xác định bởi $F(x, y) = 0,\ P(x_0, y_0) \in C$. Khi đó phương trình tiếp tuyến với đường cong $C$ tại điểm $P$ là:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

## 7.2 Mặt phẳng tiếp diện.

Cho mặt cong $S$ được xác định bởi $F(x, y, z) = 0,\ P(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt cong $S$ tại điểm $P$ là:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

# 8 Đạo hàm theo hướng.

Cho $f(x,y)$ là hàm khả vi và có đạo hàm theo hướng của véc-tơ đơn vị $u=(a,b),(a^2+b^2=1)$. Khi đó:

$$f'_{\vec{u}}(x,y) = f'_x(x,y).a + f'_y(x,y).b$$

Ý nghĩa hình học: Đạo hàm theo hướng là hệ số góc của tiếp tuyến đối với đường cong tại 1 điểm.

## 8.1 Véc-tơ Gradient.

Cho $z=f(x,y)$, khi đó véc-tơ gradient của hàm số $f$ được xác định như sau:

$$\bigtriangledown f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y))$$

Cho $z=f(x,y), u=(a,b),(a^2+b^2=1)$. Khi đó:

$$f'_{\vec{u}}(x,y) =< \bigtriangledown f(x,y), u > \qquad \text{(tích vô hướng)}$$

## 8.2 GTLN, GTNN của đạo hàm theo hướng.

Cho $f$ là hàm khả vi 2 hoặc 3 biến. GTLN của đạo hàm theo hướng $\vec{u}$: $f'_{\vec{u}}$ là $|\bigtriangledown f|$ đạt được khi $\vec{u} \uparrow\uparrow \bigtriangledown f$. GTNN của đạo hàm theo hướng $\vec{u}$: $f'_{\vec{u}}$ là $-|\bigtriangledown f|$ đạt được khi $\vec{u}$ ngược hướng $\bigtriangledown f$.