Trước hết, ta nhận thấy rằng thể tích khối vật thể 1 = thể tích khối tạo bởi mặt cong z= -r.cosr và mặt phẳng z = 0 + thể tích khối tạo bởi z = $-\sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - r^2}$ và mặt phẳng z = 0

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.dr. \int_0^{-r.\cos r} dz + \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.dr. \int_{-\sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - r^2}}^{0} dz$$

Đặt:

- $I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.dr. \int_0^{-r.\cos r} dz$
- $I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.dr. \int_{-\sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - r^2}}^{0} dz$

Ta cần tính: V = $I_1 + I_2$

- Tiến hành tính I_1:

I_1: $= \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -r.r.\cos r = -\int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\frac{3\pi}{2}} r^2.\cos r.dr$

Để tính $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} r^2.\cos r.dr$ ta xử lí như sau:

- Tích phân từng phần lần 1:

Đặt:

$$\begin{cases} u = r^2 \\ dv = cosr.dr \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} du = 2.r.dr \\ v = sinr \end{cases}$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ta được:

$$r^2.\sin r \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin r\,.\,2r.\,dr = \frac{-9\pi^2}{4} - \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin r\,.\,2r.\,dr$$

- Tích phân từng phần lần 2 để tính $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin r\,.\,2r.\,dr$:

$$\begin{cases} u = 2r \\ dv = \sin r\,.\,dr \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} du = 2dr \\ v = -\cos r \end{cases}$$

Suy ra:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin r\,.\,2r.\,dr$$

$$= -2r.\,cosr \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2.\cos r\,.\,dr = 0$$

$$+ 2.\sin r \Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = 2.(-1) = -2$$

Tóm lại: $I_1 = \int_0^{2\pi} (-\frac{9\pi^2}{4} - (-2)).\,d\varphi = 2\pi.(-\frac{9\pi^2}{4} + 2) = -\frac{9\pi^3}{2} + 4\pi$

- Tiến hành tính I_2:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,.\int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.\,dr.\int_{-\sqrt{\frac{9\pi^2}{4}-r^2}}^{0} .\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi\,.\int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.\sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - r^2}.\,dr$$

- Để tính $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.\sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - r^2}.\,dr$, ta đặt: u = $\sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - r^2}$, và đổi cận (ghi sẵn ở tích phân dưới)

Suy ra: $u^2 = \frac{9\pi^2}{4} - r^2$

suy ra: 2.u.du = -2.r.dr

suy ra:-u.du=r.dr

Ta có:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} r.\sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - r^2}dr = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} u.(-u).du = -\frac{u^3}{3}\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{0} = \frac{27.\pi^3}{8}.\frac{1}{3} = \frac{9}{8}\pi^3$$

Tóm lại: $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{9\pi^3}{8} d\varphi = \frac{9\pi^3}{8}.\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{9\pi^3}{8}.2\pi = \frac{9\pi^4}{4}$

Vậy chốt lại: V = $I_1 + I_2 = -\frac{9\pi^3}{2} + 4\pi + \frac{9\pi^4}{4} = \frac{9\pi^4 - 18\pi^3 + 16\pi}{4}$