Electromagnetics Se Dr. Rajayi

Review :

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 \qquad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$B = \nabla\times\vec{A} \qquad \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu_0\vec{J}$$

$$\boxed{\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = -\nabla^2\vec{A} + \nabla(\nabla\cdot\vec{A})} \overset{\text{کارتزین}}{\Longrightarrow} -\nabla^2\vec{A} = \nabla^2\left[A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z\right] =$$

$$(-\nabla^2 A_x\hat{a}_x) + (-\nabla^2 A_y\hat{a}_y) + (-\nabla^2 A_z\hat{a}_z)$$

تنها برای مختصات کارتزین برقرار است. $\Leftarrow$

* بردار $\vec{A}$ یکتا نیست و با افزودن یا کم کردن گرادیان یک تابع مانند f بازهم $\nabla\times(A\pm f)$ بازهم صفر خواهد بود.

برای یافتن $\vec{A}$ یکتا فرض می‌کنیم دیورژانس آن داده شده باشد. داریم :

$$\nabla\cdot A' = \nabla\cdot A - \nabla^2 f = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot A = \nabla^2 f} \Rightarrow$$

کافی است این معادله‌ی لاپلاس حل شود تا f بدست آید.

← برای راحتی کار $\nabla\cdot A$ را معمولاً صفر در نظر می‌گیریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x \\ -\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y \\ -\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z \end{cases} \Rightarrow -\nabla^2(\nabla\cdot A) = 0 \Rightarrow$$

با فرض جریان‌های دائم یعنی $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

با توجه به شرایط فضایی توان گفت $\Leftarrow\Leftarrow$

$\nabla\cdot A = 0 \Rightarrow$ فرضمان برقرار می‌شود.

در میدان الکتریکی ← معادله‌ی پواسون برای ناحیه‌ای از بار در اینجا داریم :

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(R')}{|\vec{R}-\vec{R}'|}\, dv \equiv \nabla^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

چگالی جریان حجمی

$$\Rightarrow \begin{cases} -\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x \\ -\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y \\ -\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z \end{cases} \equiv \boxed{\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|}\, dv'}$$

می‌توان نشان داد این معادله شرط $\nabla\cdot A = 0$ را ارضا می‌کند.

← جریان حجمی در مؤلفه‌ی سطح ضرب داخلی می‌شود تا جریان را نشان دهد.

← " سطحی " " طول " " " " " " " " (بردار طول بردار عمود در جریان است)

⇐ اگر در یک سیم ضخامت را ناچیز فرض کنیم چون در رابطه‌ها $\vec{J}$ تنها مؤلفه‌ی مماس بر سیم دارد، پس با ضخامت ناچیز جهت $\vec{J}$ به جهت سیم میل می‌کند.

$\Delta v' = \Delta l \times \Delta S$

$\Rightarrow$ در داخل انتگرال $\Rightarrow \vec{J}(R')\,\Delta v' = \vec{J}\,\Delta S\,\Delta l' = I\,\hat{a}_l\,\Delta l'$

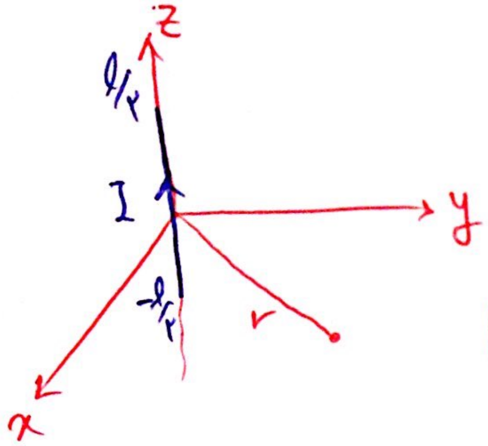
⇐ پس برای یک سیم بسیار نازک :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,\hat{a}_l'\, dl'}{|\vec{R}-\vec{R}'|} \Rightarrow$$ چون جریان دائمی است پس

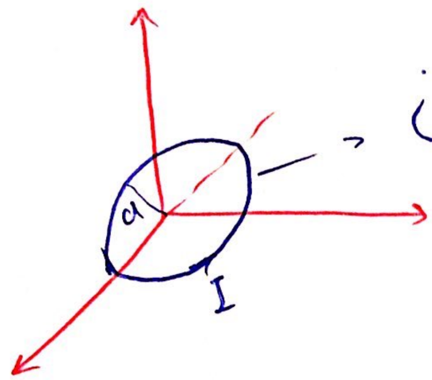
I چون قرار است ورودی و خروجی اش به یک سطح بسته کل آن باشد مجبور است ثابت باشد. (طبق شرط جریان دائمی)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{R}-\vec{R}'|}}$$

مثال:



$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\hat{z}\, dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \ln \frac{l/2 + \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}}{-l/2 + \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2}}}$$



حلقه‌ی جریان $\Rightarrow \vec{A}_z = ?$

روی یک پریود انتگرال صفر است.

$\cos\varphi\,\hat{y} - \sin\varphi\,\hat{x}$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\, \hat{\varphi}}{\sqrt{a^2 + z^2}} = 0$$

$\Leftarrow$ راه دیگر این بود که $d\vec{l} = a\, d\varphi\, \hat{\varphi}$ که روی مسیر بسته صفر است.

$\Leftarrow$ برای بدست آوردن $\vec{B}$ باید از رابطه‌ی $\vec{A}$ کرل بگیریم.

$$B(\vec{R}) = \nabla \times \vec{A}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\nabla \times \int \frac{J(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv'}$$

چون متغیرها تفاوت دارد $\Rightarrow$ می توان جای کرل و انتگرال را عوض کرد.

کرل نسبت به R گرفته می‌شود نه R'

$$B(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{J(\vec{R}')}{|R - R'|} \right) dv' = \int \left[\nabla \left(\frac{1}{|R - R'|} \right) \times \vec{J}(\vec{R}') + \underbrace{\nabla \times (J(\vec{R}'))}_{\text{صفر}} \frac{1}{|R - R'|} \right]$$

J تابع R نیست تابع R' است.

$$\Rightarrow B(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left(\frac{1}{|R - R'|} \right) \times \vec{J}(R')\, dv'$$