

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری سوم محاسبات عددی

تاریخ تحویل: 93/10/03

* لطفاً برگه‌های تحویلی شامل حل دستی تمرینات و پرینت متن برنامه‌ها باشد. (به برنامه‌های دست‌نویس نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد).

* ترجیحاً تمرین را به صورت حضوری تحویل دهید. اما در صورتی که تمرین را ایمیل می‌کنید، لطفاً همه‌ی تمرینات شامل اسکن صفحات دست‌نویس و فایل برنامه‌ها، در یک پوشه با نام StudentID.rar قرار گیرند. (به جای StudentID شماره‌ی دانشجویی خود را بنویسید). این پوشه را به آدرس

nc.1393.1@gmail.com

ایمیل کنید.

1. (20 نمره) می‌دانیم برای حل یک دستگاه خطی با استفاده از تجزیه‌ی LU نیاز به محاسبه‌ی وارون ماتریس نیست. اما در بعضی مسایل، دقیقاً هدف محاسبه‌ی وارون ماتریس دلخواه $A \in R^{n \times n}$ است.

(الف) الگوریتمی پیشنهاد کنید که با استفاده از آن بتوان با در اختیار داشتن تجزیه‌ی LU وارون ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را محاسبه کرد. (راهنمایی: از رابطه‌ی $AB = I$ برای هر یک از ستون‌های $B = A^{-1}$ استفاده کنید).

(ب) تعداد محاسبات لازم را در این الگوریتم محاسبه کنید.

2. (15 نمره) در برنامه‌ی myLU ی جزوه توجه کنید که با به‌هنگام کردن ماتریس A ، این ماتریس در بخش بالامثلثی A قرار می‌گیرد و بخش زیر قطر بدون استفاده باقی مانده است. برنامه را به گونه‌ای تغییر دهید که مقادیر m_{lk} در ناحیه‌ی زیر قطر ماتریس A ذخیره شوند. با جداکردن بخش‌های لازم از ماتریس A می‌توان ماتریس‌های L و U را به دست آورد.

3. (20 نمره) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ و بردار $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

(الف) تجزیه LU با محورگزینی سطری را برای ماتریس A محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از این تجزیه دستگاه $Ax = b$ را حل کنید.

4. (25 نمره) m نقطه‌ی متمایز (x_i, y_i) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی k را

محاسبه کنیم که از همه‌ی این نقاط عبور می‌کند. چندجمله‌ای را به صورت $p(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_{k+1}x^k$ در نظر بگیرید.

(الف) رابطه‌ی بین m و k را طوری تعیین کنید که این مساله دارای جواب باشد. با توجه به تمایز نقاط می‌دانیم معادلات مستقل‌اند و نیازی به اثبات استقلال نیست.

(ب) در حالتی که دستگاه دارای جواب نیست مساله‌ی کمترین مربعات متناظر با این مساله را تشکیل دهید.

به این مساله، مساله‌ی **برازش** (جایگزین مساله‌ی درونیابی) می‌گوییم. در واقع به جای محاسبه‌ی چندجمله‌ای که همه‌ی نقاط از آن عبور می‌کنند، هدف محاسبه‌ی چندجمله‌ای با کم‌ترین خطای ممکن نسبت به نقاط (x_i, y_i) است.
 $i = 1, \dots, m$

(پ) با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از تجزیه‌ی QR مساله‌ی کمترین مربعات متناظر را حل کند. توجه کنید که ورودی‌های این برنامه بردارهای X و Y شامل نقاط (x_i, y_i) و مقدار k است و خروجی این برنامه بردار a، جواب مساله‌ی کمترین مربعات و شامل ضرایب ضرایب چندجمله‌ای $p(x)$ است. برای محاسبه‌ی تجزیه‌ی QR از دستور qr در MATLAB کمک بگیرید.

5. (20 نمره) مساله‌ی کم‌ترین مربعات

$$\min_{x \in R} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right\|^2$$

(الف) این مساله را با استفاده از تجزیه‌ی QR برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ حل کنید.

(ب) با مشتق‌گیری از تابع $f(x) = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right\|^2$ مساله را حل کنید.

موفق باشید