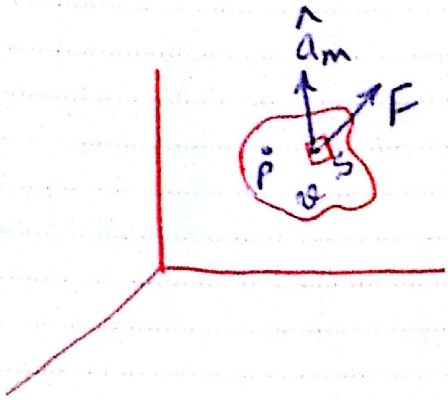
الکترومغناطیس

Se 4 Dr. Rajayi

تمرین سری 1 eecourses → eleetromgnetics_bs

دیورژانس :



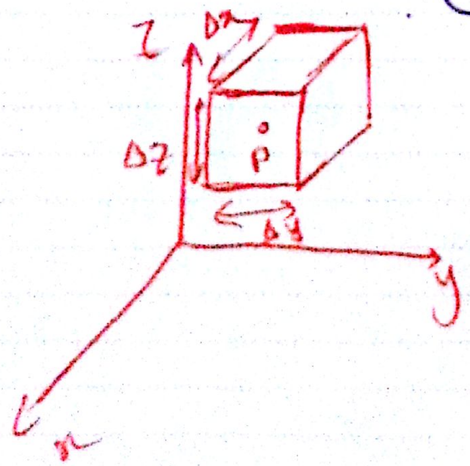
$\vec{F} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{F} \rightarrow$ دیورژانس F

$$\lim_{s \to p} \frac{1}{V} \oint_s \vec{F}\cdot\vec{d_s}$$

$$* \quad \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

← می‌خواهیم نشان دهیم که عبارت دیورژانس که همان حد بالاست

با * در مختصات کارتزین برابر است.

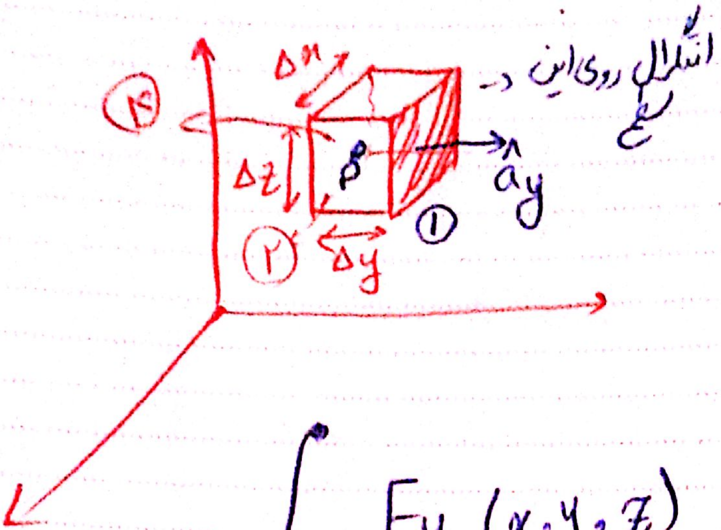


← این مکعب را در مختصات کارتزین در نظر گرفته و نقطه‌ی P را دقیقاً در مرکز آن فرض می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

* مفهوم حد صفحه‌ی قبل این است که ما سطح بسته‌ای را کوچک و کوچک کرده تا به نقطه‌ی P برسیم.

برای مکعب داریم:



$$\int F_y(x, y_0 + \tfrac{1}{2}\Delta y, z)\, dx\, dz$$

$$\int_{(1)} F_y(\underbrace{x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z}_{\text{در سطح } 1})\, dx\, dz \simeq$$

$$F_y(\underbrace{x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0}_{\text{نقطه‌ی } P})\, \Delta x\, \Delta z \Rightarrow$$ تقریب انتگرال در روی سطح

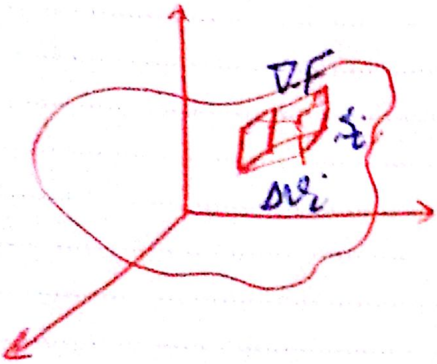
$$\Rightarrow \frac{1}{v}\oint_{(1)} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \frac{F_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)}{\Delta y}$$

$$(4) \to -\frac{F_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)}{\Delta y} \Rightarrow (1),(4) = \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

به همین صورت برای سایر سطوح $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ هم تولید می‌شود. که مجموعاً عبارت دیورژانس است.

← این مدل برای به صورت مکعب حالت خاص نیست چون هر حجم دیگری قابل احاطه درون مکعب است.

← برای محاسبه‌ی عبارت دیورژانس برای سطوح کوچک داریم:
(فرض می‌کنیم درون سطح بسته از تعداد بسیار زیادی مکعب کوچک تشکیل شده است)



$$(\nabla\cdot\vec{F})_i \sim \frac{\oint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{s}}{v_i}$$

قضیه‌ی دیورژانس

پس برای اشکال کوچک:

$$\boxed{\int_v \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dv = \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{s}}$$

→ چون سطوح داخلی مکعب‌ها همدیگر را خنثی می‌کنند و تنها سطح خارجی باقی می‌ماند.

دیورژانس در مختصات‌های دیگر:

استوانه‌ای : $\dfrac{\partial F_r}{\partial r} + \dfrac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 F_3)\right]$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{-\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial F_z}{\partial z}\right]$$

$$\boxed{\nabla \cdot F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

کروی :

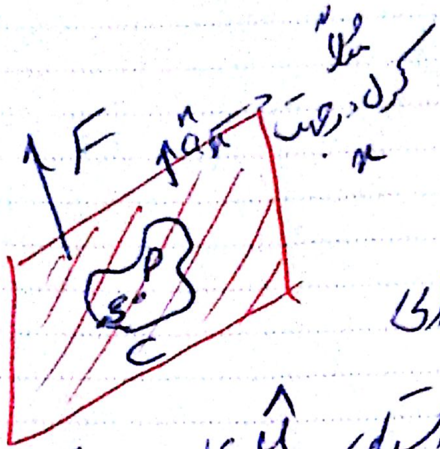
$$\frac{1}{R^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}(R^2 \sin\theta F_R) + \frac{\partial}{\partial \theta}(R \sin\theta F_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(R F_\varphi)\right]$$

$$\boxed{\nabla \cdot F = \frac{1}{R^2}\,\theta\,\frac{\partial (R^2 F_R)}{\partial R} + R\,\frac{\partial (\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + R\,\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}}$$

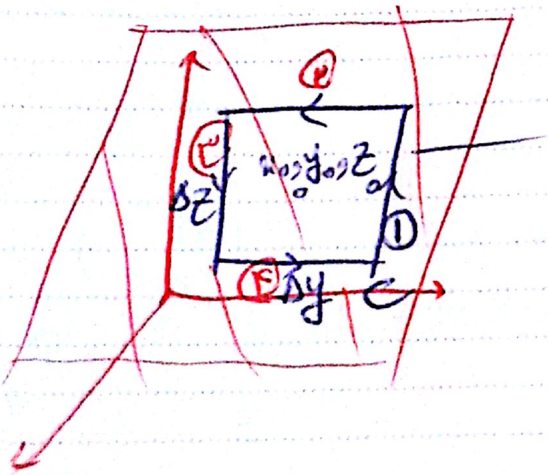
مثال $\quad F = \dfrac{\hat{a}_R}{R^2} \Rightarrow \nabla \cdot F = 0$

کرل curl :

← برای بدست آوردن کرل در هر یک از جهات مختلف صفحه را هربار به گونه‌ای قرار می‌دهیم تا جهت بردارش در راستای $\hat{u}$ های که جهتهای مختلف اند قرار بگیرند و سپس عبارت زیر را حساب کنیم.



$$\lim_{s \to p} \frac{1}{s} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$ ← عبارت کرل



← جهت طبق قانون دست راست.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_{\text{ضلع } 1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{1} \vec{F} \cdot \hat{a}_z \, dz = \int F_z \, dz =$$

$$\int_{1} F(x_0, y_0 + \Delta y/2, z) \, dz \overset{\text{در حد کوچک}}{\approx} \boxed{F_z(x_0, y_0 + \tfrac{\Delta y}{2}, z_0) \times \Delta z}$$

→ برای ضلع ۳ $\quad -F_z\left(x_0, y_0-\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)$

⇐ مجموع عبارت کل برای ضلع ① و ③ $\frac{\partial F_z}{\partial y}$ را تولید می‌کند.

⇐ مجموع " " " " " ② و ④ $-\frac{\partial F_y}{\partial z}$ را تولید می‌کند.

⇐ تداخلی کل در جهت x برابر $\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}$ می‌شود.