EM Se22 Dr. Hashemi

تبدیل خطی کسر

$$f(z) = w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

$$\begin{cases} c = 0 \rightarrow \text{تبدیل خطی معمولی} \\ c \neq 0 \rightarrow \boxed{w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}} \end{cases}$$

برای $\hat{\mathbb{C}}$ توسعه یافته

$$f(-\tfrac{d}{c}) = \infty$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c}$$

خواص :

۱) از کره‌ی ریمان $(\hat{\mathbb{C}})$ به کره‌ی ریمان ۱-۱ و پوشاست.

۲) روی کره ریمان تحلیلی [و همدیس : بعداً تعریف می‌کنیم.]

۱) تابع وارون :

$$f^{-1}(z) = g(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

۲) ترکیب آنها باز هم تبدیل خطی کسری :

$$h(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

$$h \circ f(z) = h[f(z)] = \frac{a''z+b''}{c''z+d''}$$

← نشان دهید :

$$\begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$g \circ f(z) = f^{-1}[f(z)] = I$$

۳) $z \xrightarrow{\text{نگاشت خطی}} cz+d \xrightarrow[w=1/z]{} \dfrac{1}{cz+d} \to \underbrace{\dfrac{bc-ad}{c}}\dfrac{1}{cz+d} \to w$

دوران + انبساط یا انقباض   تثبیت +   دوران انقباض یا انبساط   تثبیت $\frac{a}{c}$ +

۴) دایره را به دایره می‌نگارد.

(خط راست بی‌نهایت را هم دایره بگیریم.) (چون تک تک تبدیلهای فوق این ویژگی را دارند.)

۵) فقط یک تبدیل موبیوس وجود دارد که سه نقطه‌ی متمایز z_1 و z_2 و z_3 را به سه نقطه‌ی w_1 و w_2 و w_3 می‌نگارد.

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

← اگر یکی از نقاط ∞ باشد می‌نویسیم:

مثلاً $w_2=\infty \longrightarrow w_2 \to 1/w_2 \longrightarrow$ قرار می‌دهیم $w_2=0$

مثال: $\begin{cases} z_1=1 \\ z_2=0 \\ z_3=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ببرید}} \begin{cases} w_1=i \\ w_2=\infty \\ w_3=1 \end{cases}$

$$\left(\frac{1}{w_2}-1\right) = \frac{1}{w_2}(1-w_2)$$

$$\frac{(w-i)(\cancel{w_2}^{\,1/w_2}-1)}{(w-1)(\cancel{w_2}_{\,1/w_2}-i)} = \frac{(z-1)(0-(-1))}{(z-(-1))(0-1)}$$

$$\frac{(w-i)\left(\frac{1}{w_2}\right)(1-w_2)}{(w-1)\left(\frac{1}{w_2}\right)(1-iw_2)} = \text{طرف چپ}$$ → : بنابراین داریم $w_2=0$ قرار می‌دهیم

$$\frac{(w-i)\times 1}{(w-1)\times 1} = \frac{(z-1)\times 1}{(z+1)(-1)} \longrightarrow \boxed{\frac{w-i}{w-1} = \frac{z-1}{-z-1}}$$

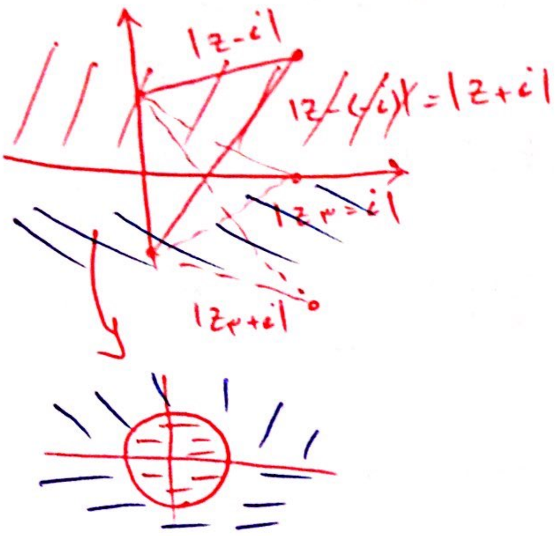
تابع cayley

[redacted]

مثال ۱:

$$f(z) = \frac{z-i}{\underbrace{z+i}_{-(-i)}}$$

نیم صفحه ی بالای صفحه ی مختلط را به درون دایره واحدی نگارد.



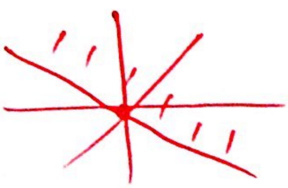
مثال ۳: $w = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_0^*}$

$\alpha > 0$

$\operatorname{Im} z_0 > 0$ (z_0 در نیمه ی بالا)

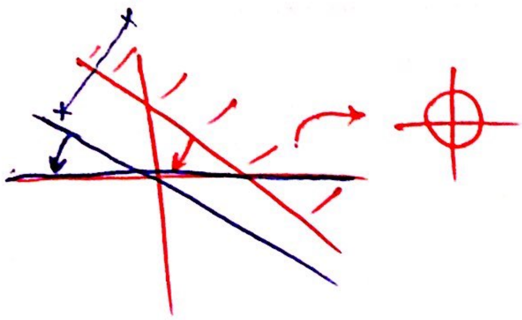
نشان دهید همان کار را انجام می دهد.

تمرین ۱: تنها تابع خطی کسری که $\operatorname{Im}(z) > 0$ را به داخل دایره $|w|<1$ به طور ۱-۱ و پوشا می نگارد، مثال ۳ فوق است.



تمرین ۲: تنها تابع تحلیلی که این کار را انجام می دهد مثال ۳ است.

** می توان به هر نیم صفحه ی دیگر نیز تعمیم داد.



مثال :

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

۱) $\operatorname{Im} z > 0 \longrightarrow \operatorname{Im} w > 0 \longrightarrow$ نیمه‌ی بالای صفحه‌ی z به نیمه‌ی بالای صفحه w

۲) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

۳) $\operatorname{Im} z < 0 \longrightarrow \operatorname{Im} w < 0$

(نیمه‌ی پایین صفحه z به نیمه‌ی پایین صفحه‌ی w)

مثال : نشان دهید : داخل کره‌ی واحد را به داخل کره‌ی واحد می‌نگارد.

$$w = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z_0^* z}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

z_0 داخل کره‌ی واحد ($|z_0| < 1$)

$|z| < 1 \longleftrightarrow |w| < 1 \qquad |z| > 1 \longleftrightarrow |w| > 1$

$|z| = 1 \longleftrightarrow |w| = 1$

تابع z^n

$z = re^{i\theta}, \; w = \rho e^{i\varphi}$

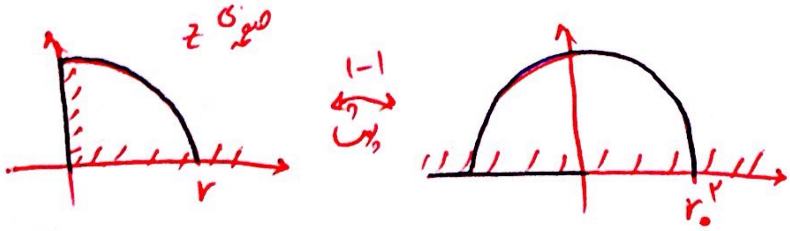
$w = z^n \rightarrow \rho e^{i\varphi} = r^n e^{in\varphi}$

مثال : z^2

$$\begin{cases} \rho = r^2 \\ \varphi = 2\theta \end{cases} \qquad z \text{ رُبع} \longrightarrow w \text{ نیم}$$

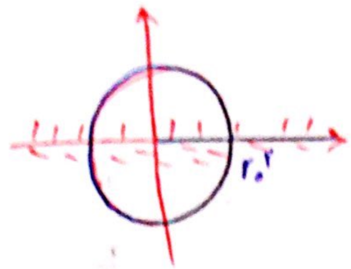
۱) نگاشت ۱-۱ و پوشا : از $\underbrace{\text{ربع اول}}_{\text{صفحه‌ی } z}$ به $\underbrace{\text{نیم صفحه‌ی بالا}}_{\text{صفحه‌ی } w}$

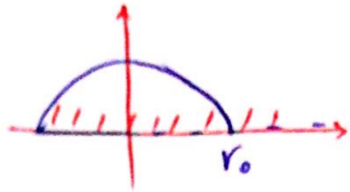
$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ r \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ \rho \geqslant 0 \end{cases}$$



۲) نیم صفحه‌ی بالا به تمام صفحه

$$\begin{cases} (w) \\ 0 \le \theta \le \pi \\ r \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (z) \\ 0 \le \alpha \le 2\pi \\ \rho \ge 0 \end{cases}$$





$w = z^2 \qquad u + iv = (x^2 - y^2) + i(2xy) \rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

خطوط عمودی

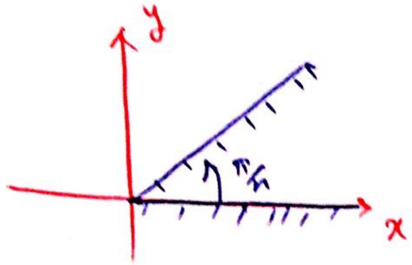
← در صفحه‌ی z : $x^2 - y^2 = c_1 \neq 0 \longrightarrow$ نگاشته به $u = c_1 \rightarrow$ در صفحه‌ی w

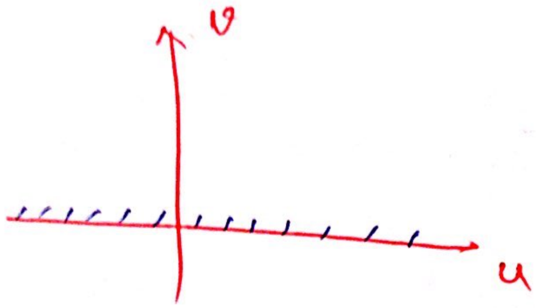
← در صفحه‌ی z : $2xy = c_2 \neq 0 \longrightarrow$ نگاشته به $v = c_2 \rightarrow$ در صفحه‌ی w

خطوط افقی

$w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad \rho e^{i\alpha} = r^n e^{in\theta} \qquad \begin{cases} \rho = r^n \\ \alpha = n\theta \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 0 \le \theta \le \pi/n \\ r \ge 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{w = z^n} \begin{pmatrix} 0 \le \alpha < \pi \\ \rho \ge 0 \end{pmatrix}$$





* اگر تمام صفحه → تمام صفحه

هر نقطه‌ی w_0 در صفحه‌ی w نگاشت n نقطه از صفحه‌ی z است.

مثال: تابع $z^{1/2}$

$w = z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log z}$

$z \neq 0$

$\log z = \ln r + i(\underbrace{\Phi}_{Arg\, z} + 2k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \dots$

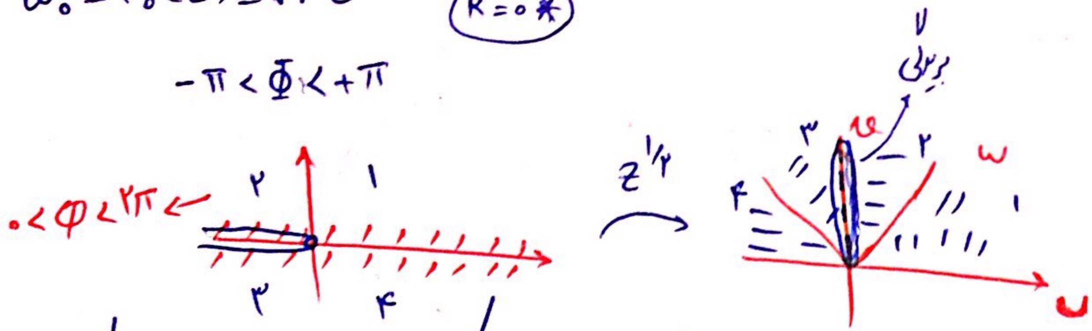
$w = z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\Phi + 2k\pi}{2}}$

$\boxed{k = 0, 1}$, $r > 0$

شاخه‌ی اصلی $\log z \leftarrow \log z$

$w_0 = F_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\Phi}{2}}$ (k=0 *)

$-\pi < \Phi < +\pi$

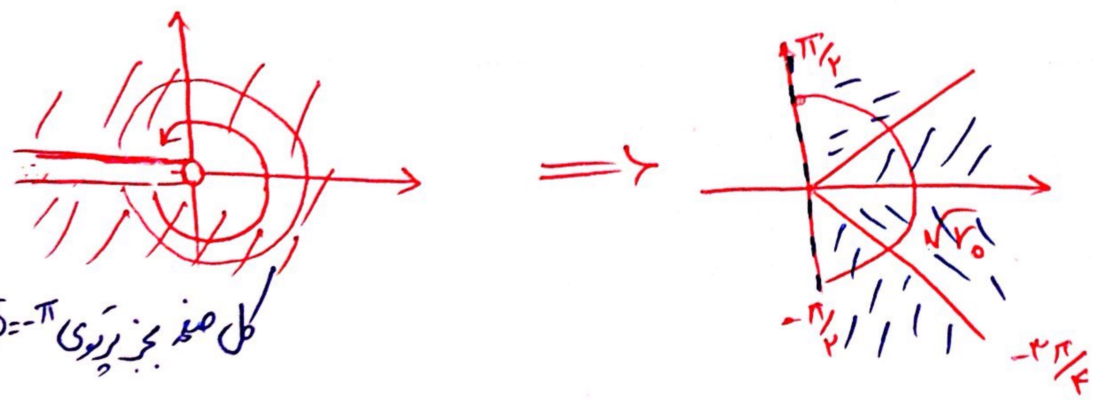


کل صفحه به جز روی $\Phi=+\pi$ (بریدگی شاخه)

$r=0$

این نمایش اشتباه است.

← اگر $-\pi < \Phi < \pi$ باشد مطابق آنچه بالا تعریف کردیم (نه مانند نمودارها) داریم:



کل صفحه بجز روی $\Phi=-\pi$

$r=0$

$-\pi<\Phi<+\pi \longrightarrow -\pi/2<\theta<\pi/2$

$\left.\begin{array}{l} 0<r\le r_0 \\ -\pi<\Phi<\pi \end{array}\right\}$ قرص $\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<r\le \sqrt{r_0} \\ -\pi/2<\theta<+\pi/2 \end{array}\right.$ نیم‌قرص

در * بگیریم $k=1$

$e^{i\pi}=-1$

$F_1(z) = -F_0(z) \Rightarrow$ $\pm F_0(z)$ تمام صفحه را می‌پوشاند (بجز محور قائم)