۴. در یک ماتریس سه قطری سطرها به صورت

$$A(1,:) = [A_{11}\ A_{12}\ 0 \cdots 0]$$
$$A(2,:) = [A_{21}\ A_{22}\ A_{23}\ 0 \cdots 0]$$
$$A(i,:) = [0 \cdots 0\ A_{ii-1}\ A_{ii}\ A_{ii+1}\ 0 \cdots 0] \quad i = 2:n-1$$
$$A(n-1,:) = [0 \cdots 0\ A_{n-1n-2}\ A_{n-1n-1}\ A_{n-1n}]$$
$$A(n,:) = [0 \cdots 0\ A_{nn-1}\ A_{nn}]$$

هستند. بنابراین برای تولید این ماتریس با استفاده از قطر ها داریم:

```
>> T=diag(u)+diag(v,1)+diag(w,-1)
```

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & O \\ w_1 & u_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & v_{n-1} \\ O & & w_{n-1} & u_n \end{bmatrix}$$

برای محاسبه تجزیه LU برای ماتریس های سه قطری کافی است در حلقه for مربوط به تجزیه LU درایه های صفر از محاسبات حذف شوند.

محاسبات سطر دوم و سطر n ام به خاطر متفاوت بودن ساختار درایه ها، خارج از حلقه انجام می شود.

```
function [L,U]=LUtdiag(A)

[n,n]=size(A);
L=eye(n);
L(2,1)=A(2,1)/A(1,1);
A(2,2:2)=A(2,2:2)-L(2,1)*A(1,2:2);
% no change in A(2,3) since the corresponding
% number in first row, A(1,3), is zero.
for i=2:n-2
    L(i+1,i)=A(i+1,i)/A(i,i);
    A(i+1,i+1:i+2)=A(i+1,i+1:i+2)-L(i+1,i)*A(i,i+1:i+2);
end
% different computation for last row
L(n,n-1)=A(n,n-1)/A(n-1,n-1);
A(n,n:n)=A(n,n:n)-v(n-1)*A(n-1,n:n);
U=triu(A);
```

به عنوان مثال به ازای ماتریس سه قطری $A = diag(rand(4,1))+diag(rand(3,1),-1)+diag(rand(3,1),1)$ داریم:

.

A =

0.2769	0.0344	0	0
0.6948	0.0462	0.4387	0
0	0.3171	0.0971	0.3816
0	0	0.9502	0.8235

و

L =

1.0000	0	0	0
2.5091	1.0000	0	0
0	-7.8768	1.0000	0
0	0	0.2674	1.0000

و

U =

0.2769	0.0344	0	0
0	-0.0403	0.4387	0
0	0	3.5530	0.3816
0	0	0	0.7214

در حالت کلی با استفاده از تابع [L,U]=LUtdiag(A) تجزیه LU برای ماتریس سه قطری A به صورت

$$A = LU \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & & \\ & u_{22} & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1n} \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

محاسبه می شود.

ب) بنابراین حل دستگاه $Ax = b$ معادل با حل دو دستگاه $Ly = b$ و $Ux = y$ است.

اما هر دو ماتریس L و U دو قطری هستند. پس محاسبات لازم برای حل این دستگاه ها نسبت به دستگاه مثلثی دلخواه کمتر است. به عنوان نمونه برای حل دستگاه بالامثلثی داریم:

$$Ux = b \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & & \\ & u_{22} & \ddots & \\ & & \ddots & u_{n-1n} \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$x_n = b_n / u_{nn}$

for $\quad i = n-1 : -1 : 1$

$\quad x_i = (b_i - U(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / u_{ii} = (b_i - u_{ii+1} x_{i+1}) / u_{ii}$

end

حل دستگاه پایین مثلثی دو قطری

```
function x=lowerbidiag(L,b)
n=length(b);
x=zeros(n,1);
x(1)=b(1)/L(1,1);
for i=2:n
    x(i)=(b(i)-L(i,i-1)*x(i-1))/L(i,i);
```

```
end
```

حل دستگاه بالا مثلثی دو قطری

```
function x=upperbidiag(U,b)
n=length(b);
x=zeros(n,1);
x(n)=b(n)/U(n,n);
for i=n-1:-1:1
    x(i)=(b(i)-U(i,i+1)*x(i+1))/U(i,i);
end
```

بنابراین برای حل دستگاه سه قطری $Ax=b$ داریم:

```
function x=tirDsolve(A,b)
 [L,U]=LUtdiag(A);
y=lowerbidiag(L,b);
x=upperbidiag(U,y);
```

با جایگزین کردن این روش برای حل دستگاه حاصل از مساله اسپلاین داریم:

```
function SS=myspline(x,y,a,b,q)
n=length(x);
SS=zeros(n-1,4);
dx=diff(x);
dy=diff(y)./diff(x);
if q==1
alpha=a;
betta=b;
u=2*(dx(1:n-2)+dx(2:n-1));
v=dx(1:n-3);
w=dx(2:n-2);
A=zeros(n-2);
```

```
for i=1:n-3
A(i,i)=u(i);
A(i,i+1)=v(i);
A(i+1,i)=w(i);
end
A(n-2,n-2)=u(n-2);
B=[3*(dy(1)*dx(2)+dy(2)*dx(1))-dx(2)*alpha;3*((dy(2:n-3)).*dx(3:n-2)+ (dy(3:n-2)).*dx(2:n-3));
3*(dy(n-2)*dx(n-1)+dy(n-1)*dx(n-2))-dx(n-2)*betta];
%% s(2:n-1)=inv(A)*b    s1=alpha   s2=betta
xs=tirDsolve(A,B);
s=[alpha;xs;betta];
elseif q==2
   A=zeros(n);
u=[4;2*(dx(1:n-2)+dx(2:n-1));4];
v=[2;dx(1:n-2)];
w=[dx(2:n-1);2];
for i=1:n-1
    A(i,i)=u(i);
    A(i,i+1)=v(i);
    A(i+1,i)=w(i);
end
A(n,n)=u(n);
B=[6*dy(1)-a*dx(1);3*((dy(1:n-2)).*dx(2:n-1)+ (dy(2:n-1)).*dx(1:n-2));6*dy(n-1)+b*dx(n-1)];
s=tirDsolve(A,B)
end
SS(:,1)=y(1:n-1);
SS(:,2)=s(1:n-1);
SS(:,3)=(dy-s(1:n-1))./(dx);
SS(:,4)=(s(1:n-1)+s(2:n)-2*dy)./(dx.^2);
```