Se 7 electromagnetics Dr.Rajayi

طبق روابط بدست آمده در جلسه قبل

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\nabla v \Rightarrow \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = v_{(A)}-v_{(B)} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

مثال:

در نقطه‌ی A خارج کره برای محاسبه‌ی $v(A)$ نسبت به $v(\infty)=0$ داریم:

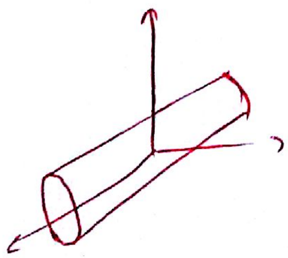
$$\int_{R_A}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,dR = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_A}}$$

اگر A در داخل بود $\vec{E}=\frac{\frac{1}{3}R\rho_0\hat{a}_R}{\varepsilon_0}$ و سپس سؤال را حل می‌کردیم.

---

* همواره نمی‌توانیم مرجع $v=0$ را ∞ در نظر بگیریم. درصورتیکه که منابع ما محدود باشند و بتوان آن‌ها را در یک حجم محدود کرد ∞ می‌تواند مرجع باشد ولی برای منابع نامحدود این موضوع لزوماً برقرار نیست.

مثال: همان استوانه



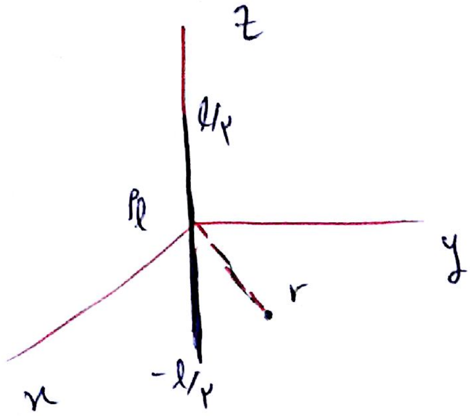
$$\int_A^{\infty} \frac{\pi a^2\rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr \rightarrow$$ درصورت ∞ گرفتن سطح نقاط دیگر نیز ∞ می‌شوند.

---

* پتانسیل را معمولاً با محاسبه‌ی E می‌خواهیم حساب کنیم.

$$v(\vec R) = \int_{v} \frac{\rho(\vec R')\, dv'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec R - \vec R'|} \Rightarrow$$ به صورت عددی است

مثال:



$$v(r) = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}}\, dz' = v(r,\alpha,0)$$

این تابع تنها برای $Z=0$ نوشته می‌شود.

* در این سوال رابطه‌ی $\vec E = -\nabla \vec v$ برای مؤلفه‌ی $\vec Z$ میدان برقرار نیست زیرا تابع برای $Z=0$ نوشته شده است و $\frac{\partial v}{\partial z}$ بی‌معناست.

← می‌خواهیم از رابطه‌ی $\vec\nabla \cdot \vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ برای حل سوالات استفاده کنیم.

$$\nabla \cdot E = -\nabla \cdot \nabla v = -\nabla^2 v \rightarrow$$ نمای لاپلاسین

در کارتزین $\rightarrow$ $$\nabla^2 v = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v$$

در کروی $$A = \frac{\partial v}{\partial R}\hat a_R + \frac{\partial v}{R\,\partial\theta}\hat a_\theta + \frac{\partial v}{R\sin\theta\,\partial\alpha}\hat a_\alpha$$

در کروی داریم (برای این مثال):

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla v = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial v}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\alpha} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}}$$

در این مثال خاص با توجه به تقارن متوجه می‌شویم که پتانسیل باید تنها به R بستگی داشته باشد پس term هایی که $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ دارند حذف می‌شوند.

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}\ \xrightarrow{R>a}\ 0 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{R<a}\ \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

(1) معادله همگن $\boxed{V(R)=A_1+\frac{B_1}{R}}$

(2) معادله ناهمگن $\xRightarrow{\text{برای بدست آوردن پاسخ خصوصی}}$ $\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial V}{\partial R}\right)=-\frac{R^2\rho}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow R^2\frac{\partial V}{\partial R}=-\frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{V=\frac{-\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(R)=A_2+\frac{B_2}{R}-\frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0}}$$

بدست آوردن ضرایب:

← اگر در ∞ $V=0$ باشد پس $A_1=0$ است.

اگر $B_2\neq 0$ باشد تناقض به وجود می‌آید و آن این است که اگر بر روی دایره‌ای با شعاع δ حول مرکز قانون سطح بستهٔ گاوسی را در نظر بگیریم با تقلیل δ باید بار به صفر میل کند مگر اینکه بار نقطه‌ای داشته باشیم در حالیکه بار نقطه‌ای نداریم و چون $B_2\neq 0$ فرض شده مقدار بار صفر نمی‌شود که غلط است.

$$\frac{D}{R}\ \xrightarrow{\text{میدان}}\ \frac{D}{R^2}\hat{a}_R$$

$$\oint E\cdot ds=4\pi D=\frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{Q\overset{cte}{=}4\pi D\varepsilon_0}$$