

به نام خالق زیبایی

از قرار معلوم، درس الکترومغناطیس همواره ترکیبی خام از معادلات دیفرانسیل و انتگرال هایی بعضا بزرگ و خسته کننده بوده که اگر کمی شهود فیزیکی به آنها اضافه شود، امید می رود که کمی اوضاع بهبود یابد (چیزی که در عمل انجام می شود!). در این پروژه برآنیم تا به کمک نرم افزار **MATLAB** شهود قابل قبولی از حل یک معادله پرکاربرد و بنیادی در الکترومغناطیس، **معادله لاپلاس**، بدست آوریم.

همه شما با معادله لاپلاس در این درس آشنا شده اید. معادله ای که توزیع پتانسیل الکتریکی را در فضای حل آن برای ما معین می کند. این پاسخ، کلیدی است برای شناختن فضا حلمان! زیرا دانستن جواب پتانسیل ما را از توزیع میدان مطلع می سازد.

خوب است بدانیم که معادلات ما همواره منجر به یک پاسخ **تحلیلی (Analytic)** نمی شود. پس باید معادلاتمان را به گونه ای دیگر حل کنیم.

هدف ما در این پروژه آشنایی شما با یکی از روش های حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی است.

و حالا به سراغ روش مورد استفاده در این تمرین می رویم:

مشتق را به صورت عددی تعریف می کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

که به تبع آن برای مشتق دوم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

که عبارت انتها جملاتی از مرتبه h^2 هستند که از آنها صرف نظر می کنیم.

اگر عبارت فوق را برای یک تابع دومتغیره یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y نوشته و معادلات مورد نظر را برای یافتن $u(x, y)$ حل کنید، به رابطه زیر خواهید رسید:

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - h^2 \nabla^2 u(x, y)] + O(h^4)$$

با تعیین شرایط اولیه برای معادله و اعمال حلقه بازگشتی خواهید توانست جواب مطلوبتان را بیابید. به این روش **Relaxation Method** می گویند.

دقت یک روش عددی با معیارهای مختلفی سنجیده می شود که معمول ترین شان **تعداد دفعات تکرار (Number of Iteration)** و **مقدار باقیمانده (Residual Value)** هستند که این اطمینان را به ما می دهند که الگوریتم مان به جواب همگرا خواهد شد.

انجام این پروژه سه مرحله دارد که به شرح زیر هستند:

۱. تهیه یک فایل گزارش که در آن به خواسته های مطرح شده پاسخی دقیق و همراه با ذکر منابع مورد استفاده تان باشد. (Wikipedia یک مرجع Open Source است و مرجع قابل استنادی نیست!)

۲. کد MATLAB که در آن با Comment گذاری مناسب متغیرهایتان را معلوم کرده باشید و در یک فایل متن ضمیمه روند حلتن را توضیح داده باشید.

۳. ارائه حضوری در کلاس حل تمرین (بعد از تحویل دو مورد بالا توسط دستیاران آموزشی زمان مناسب برای هر دانشجو تعیین می گردد).

خواسته ها:

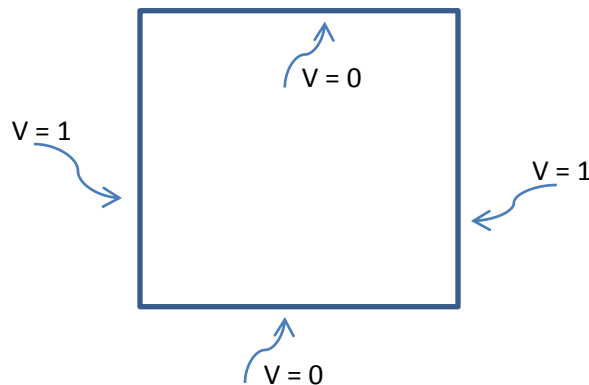
۱. فهرستی از انواع روش های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تهیه کنید.

۲. معیارهای سنجش همگرایی ای که در بالا معرفی شدند را توضیح دهید.

۳. روابط مطرح شده در بالا را به سرانجام رسانده تا به معادله نهایی برسید و روند کلی حل را توضیح دهید.

شبیه سازی:

مسئله را برای یک صفحه مربعی 1×1 در دستگاه دوبعدی $(x - y)$ حل کنید که شرایط مرزی آن مشابه شکل زیر باشند.



روند تکرار را تا مقدار باقی مانده 0.1% ادامه دهید:

۱. توزیع پتانسیل را در یک صفحه سه بعدی که ارتفاع آن معرف پتانسیل هر نقطه است، رسم کنید. پاسختان را با پاسخ حل تحلیلی این ساختار که در درس حل آن را آموخته اید در یک نمودار مقایسه کنید.

۲. خطوط میدان الکتریکی را همراه با مسیر های هم پتانسیل رسم کنید.

۳. مسئله را برای معادله پواسون بررسی کنید و برای چگالی باری دلخواه حل کنید. (این مورد نمره مثبت دارد).