به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی علوم ریاضی

محاسبات عددی – گروه‌های 1 تا 4

حل تمرین سری دوم

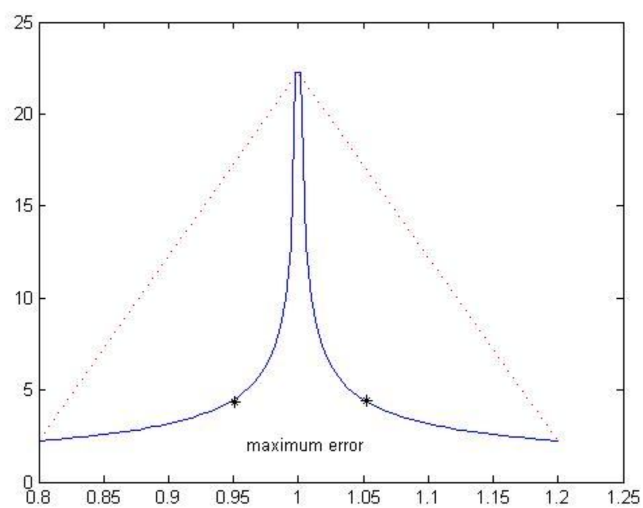
1- (الف) با توجه به ناپیوستگی تابع در نقطه‌ی 1 قرار می‌دهیم:

$$f(1) \approx f\left(1+10^{-6}\right)=1000$$

$$M_2=\max_{[0.8,1.2]} f''(x)=\max_{[0.8,1.2]} \frac{3}{4}|x-1|^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times 10^{15}$$

$$E<0.01 \Rightarrow \frac{M_2 h^2}{8}<0.01 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}\times 10^{15}\left(\frac{1.2-0.8}{n-1}\right)^2}{8}<0.01 \Rightarrow \quad n \geq 38729835 \quad (!!!)$$

(ب) با فرض اولیه‌ی $n=3$ محاسبات را شروع می کنیم. با توجه به شکل زیر، به نظر می رسد که بیشترین مقدار خطا در نقطه‌ی یک اتفاق نمی افتد و به همین دلیل برای بهبود کران بهتر است M_2 را در اطراف نقاط مشخص شده انتخاب کنیم.

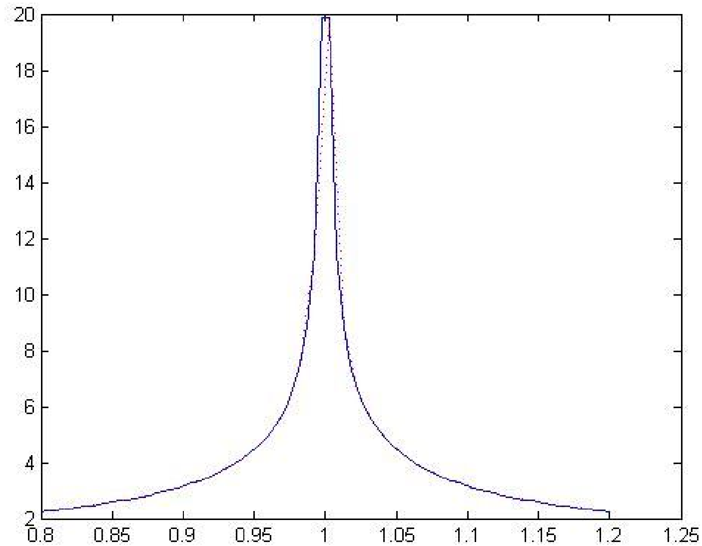


بنابراین در زیر بازه های اول و دوم داریم:

$$M_2=1341.6$$

$$[0.8,1]: \quad \frac{1341.6\left(\frac{1-0.8}{n-1}\right)^2}{8}<0.01 \Rightarrow \quad n_1 \geq 27, \quad n_2 \geq 27 \Rightarrow n=n_1+n_2=54>>3$$

یعنی انتخاب اولیه‌ی $n=3$ مناسب نبوده و با مقدار $n=54$ محاسبات را تکرار می کنیم:



بنابراین با انتخاب نقاط ناپیوستگی به عنوان نقطه‌ی شکست و حذف آنها از محدوده‌ی محاسبه‌ی ماکزیمم مشتق می توان کران خطا را بهبود و تعداد نقاط شکست لازم را کاهش داد.

-2

```
function [a,b,c,d]=myspline(X,Y,alpha,betta)
dX=diff(X);
dY=diff(Y);
n=length(X);
a=Y(1:n-1);
Yp=dY./dX;
A=zeros(n-2);
% i=1 dx2*s1+2(dx1+dx2)*s2+dx1*s3=3(yp2*dx1+yp1*dx2)
2(dx1+dx2)*s2+dx1*s3=3(yp2*dx1+yp1*dx2)-dx2*alpha
% i=n-2 dxn-1*sn-2+2(dxn-1+dxn-2)*sn-1+dxn-2*sn=3(ypn-1*dxn-2+ypn-2*dxn-1)
% dxn-1*sn-2+2(dxn-1+dxn-2)*sn-1=3(ypn-1*dxn-2+ypn-2*dxn-1)-dxn-2*betta
A(1,1:2)=[2*(dX(1)+dX(2)),dX(1)];
A(n-2,n-3:n-2)=[dX(n-1),2*(dX(n-2)+dX(n-1))];
for i=2:n-3
    A(i,i-1:i+1)=[dX(i+1),2*(dX(i)+dX(i+1)),dX(i)];
end
d=3*(Yp(2:n-1).*dX(1:n-2)+dX(2:n-1).*Yp(1:n-2));
d(1)=d(1)-dX(2)*alpha;
d(n-2)=d(n-2)-dX(n-2)*betta;
s=[alpha;A\d;betta];
b=s(1:n-1);
c=(Yp-s(1:n-1))./dX;
d=(s(1:n-1)+s(2:n)-2*Yp)./(dX.^2);
```

3- تابع $f(x)=\sin(\pi x)$ انتخاب شده‌است.

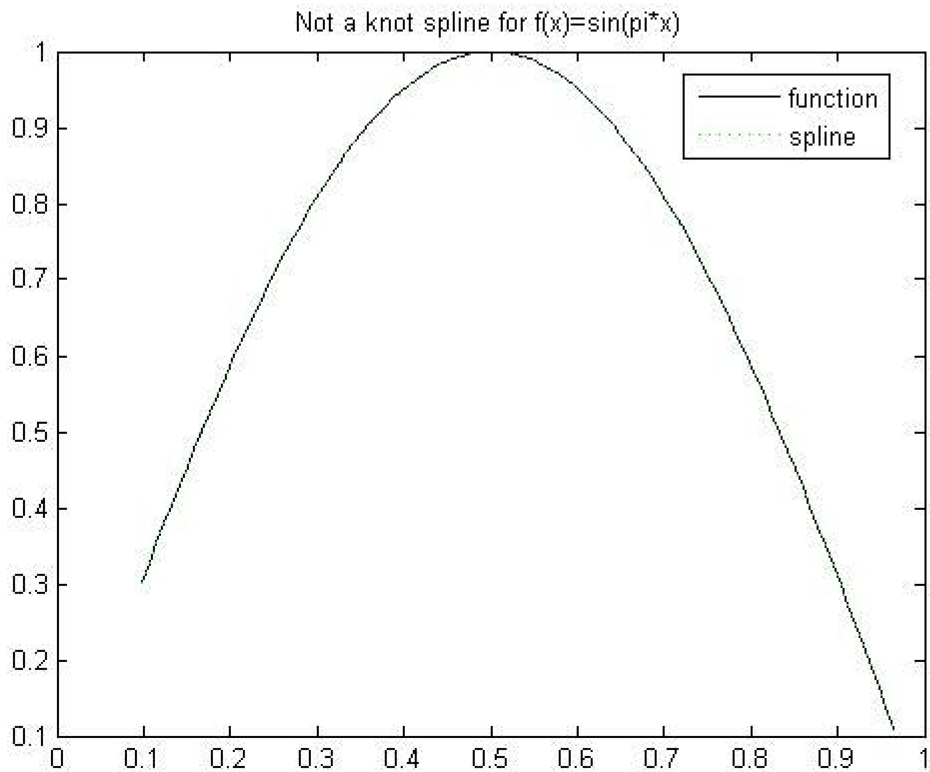
```
>> x=sort(rand(10,1));

>> y=sin(pi*x);

>> s=spline(x,y);

>> [x,c]=unmkpp(s)
```

ماتریس ضرایب

نقاط شکست

```
x =

  Columns 1 through 6

   0.097540404999410   0.126986816293506   0.278498218867048   0.546881519204984
0.632359246225410   0.814723686393179

  Columns 7 through 10

   0.905791937075619   0.913375856139019   0.957506835434298   0.964888535199277


c =

  -4.657185662418400  -1.481164754507860   2.994823746422347   0.301658985220702
  -4.657185662417501  -1.892576967973525   2.895479160062108   0.388442581550345
  -1.377577170285317  -4.009427163248328   2.001258236145843   0.767497321824629
   2.164480432689148  -5.118583285542434  -0.448547333619780   0.989173504616477
   3.207969084485719  -4.563538682843062  -1.276153112211902   0.914785867483535
   5.102675577468165  -2.808480224339816  -2.620547213126518   0.549748146000369
   3.699651242326586  -1.414405008419649  -3.005117984106637   0.291661458442598
   5.084287051460014  -1.330231441665994  -3.025933084802543   0.268791149970275
   5.084287051473263  -0.657107741868152  -3.113636309163790   0.133100055471049
```

```
>> xc=linspace(min(x),max(x));
>> yc=sin(pi*xc);
>> sc=ppval(s,xc);
>> plot(xc,yc,xc,sc,':b')
>> plot(xc,yc,xc,sc,':g')
>> plot(xc,yc,'k',xc,sc,':g')
>> legend('function','spline')
>> title('Not a knot spline for f(x)=sin(pi*x)')
```



درونیابی با اسپلاین برای این تابع دقت خوبی داشته است و نمودار تابع و اسپلاین تقریبا بر هم منطبق هستند.

4- (الف)

$$Q=(1-0)\left(\frac{1}{6}\sin(0)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{6}\sin(\pi)\right)=\frac{2}{3}$$

$$E<\frac{M_4(1-0)^5}{2880}$$

$$f^{(4)}(x)=\pi^4\sin(\pi x)\Rightarrow\quad M_4=\pi^4\Rightarrow\quad E<\frac{97.4090}{2880}=3.3823\times10^{-2}$$

(ب)

$$E<10^{-4}$$

$$d=3$$

$$E<\frac{M_4(1-0)^5}{2880}\frac{1}{n^4}<10^{-4}$$

$$\frac{3.3823\times10^{-2}}{n^4}<10^{-4}\Rightarrow\quad n\geq5$$

$$z_1=0\quad z_2=0.2\quad z_3=0.4\quad z_4=0.6\quad z_5=0.8\quad z_6=1$$

$$Q=0.2\left(\frac{1}{6}\sin(0)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{4\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{4\pi}{10}\right)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{6\pi}{10}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{6\pi}{10}\right)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{8\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin\left(\frac{8\pi}{10}\right)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)+\frac{1}{6}\sin(\pi)\right)=0.636654$$

$$Q=0.636654\quad I=0.636620$$

5- کوادراتور نیوتن کوته مرتبه‌ی m دارای مرتبه دقت حداقل یک است (به ازای $m=2$). بنابراین هر کوادراتور نیوتن کوته‌ی مرتبه‌ی m به ازای توابع $f(x)=1$ و $f(x)=x$ دقیق است، یعنی،

$$f(x)=1$$

$$\left.\begin{array}{l} I=Q \\ I=b-a \\ Q=(b-a)\sum_{i=1}^{m}w_i\underbrace{f(x_i)}_{1}=(b-a)\sum_{i=1}^{m}w_i \end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}w_i=1$$

$$f(x) = x$$

$$\left.\begin{aligned} & I = Q \\ & I = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ & Q = (b-a)\sum_{i=1}^{m} w_i \underbrace{f(x_i)}_{x_i} = (b-a)\sum_{i=1}^{m} w_i x_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} w_i x_i = \frac{a+b}{2}$$

موفق باشید