باسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: پیام دلگشا	شماره دانشجویی: ۸۶۱۰۳۶۷۳	رشته: مهندسی برق
گروه: ۲۹ زیر گروه: A	تاریخ انجام آزمایش: ۲۳ آبان ۱۳۸۶	ساعت: ۸ صبح
دستیار آموزشی: خانم علیپور		

آزمایش شماره: ۵

عنوان آزمایش: تعادل اجسام

هدف: در این آزمایش قانون جمع بردارها و شرط تعادل اجسام مورد مطالعه قرار می گیرد.

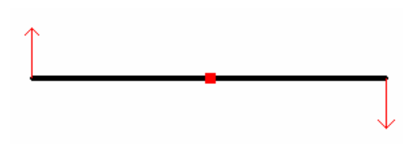
وسایل مورد نیاز: میز نیرو، چهار قرقره، خط کش یک متری چوبی، نیرو سنج، دو پایه ی فلزی همراه گیره های آن، چهار جاوزنه ای (کفه)، وزنه های کوچک، ترازو، تراز

نظریه:

بردارها درواقع مدل ریاضی برای کمیت های فیزیک هستند که به ما کمک می کند روابط بین دسته ای از کمیت های فیزیکی به نام کمیت های برداری که می توان آنها را با یک بردار با طول و جهت مشخص متناظر کرد (مانند نیرو، مکان، سرعت، شتاب ...) به دست آوریم.

همان طور که می دانیم می توان بردارها را با هم جمع، تفریق و حتی ضرب کرد.

در این آزمایش می خواهیم تعادل اجسام را بررسی کنیم و بفهمیم اجسام یا سیستم ها در حالت کلی تر، در چه شرایطی به حالت تعادل هستند، یعنی پس از گذشت زمان به همان حالت اولیه ی خود باقی می مانند. اولین شرطی که برای تعادل به نظر می رسد، این است که برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، چون در غیر اینصورت مرکز جرم سیستم و به تبع آن کل سیستم شروع به حرکت خواهد کرد. اما پس از کمی دقت می فهمیم این شرط برای تعادل کافی نیست، چون مثلا برای میله ی زیر که در نقطه ی وسطش ثابت شده است، دو نیروی مساوی و خلاف جهت هم بر آن وارد شده که جمع آنها صفر است، ولی می بینیم که جسم حول نقطه ی ثابت شروع به دوران می کند و در حال تعادل نیست.



شکل ۱

برای حل این مشکل شرط دیگری به نام شرط تعادل دورانی تعریف می کنیم تا با اعمال شرط تعادل انتقالی (صفر شدن جمع نیروها) و این شرط جدید بتوانیم مطمئن شویم که جسم در حال تعادل است.

برای این منظور کمیت جدیدی به نام گشتاور تعریف می کنیم؛ گشتاور برداری است که به ازای هر نیروی وارد بر سیتم و نسبت به یک نقطه به نام محور تعریف می شود. گشتاور نیروی $\vec{F}$ که به نقطه ی $\vec{x}$ وارد می شود نسبت به محور $\vec{A}$ به صورت $(\vec{x}-\vec{A})\times\vec{F}$ تعریف می شود و با علامت $\vec{\tau}$ نشان داده می شود. شرط تعادل دورانی این است که جمع گشتاورهای همه ی نیروها صفر شود؛ یعنی:

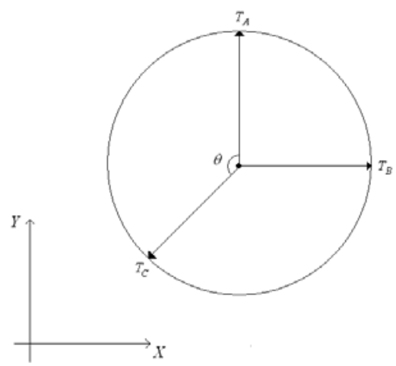
$$\sum(\vec{x}_i-\vec{A})\times\vec{F}_i=0$$

با اعمال این دو شرط می توان مطمئن بود که جسم در حال تعادل است.

روند انجام آزمایش

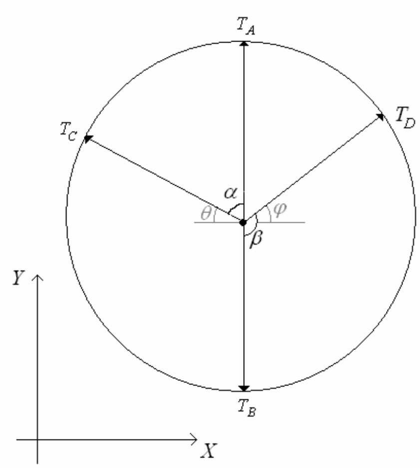
۱- جمع بردارها و تعادل انتقالی

(۱- الف) برآیند دو بردار: به میز نیرو سه قرقره A, B, C متصل می کنیم به طوری که A و B ثابت باشند و با هم زاویه ی قائم بسازند. مکان قرقره ی C و همچنین جرم آویزان شده از سه قرقه را طوری تغییر می دهیم که حلقه ی واقع در وسط میز نیرو در حالت تعادل و بدون اتصال به میله ی وسط قرار بگیرد. در این حالت برآیند نیروهای کشش نخ ها باید صفر شود.



شکل ۲

(۱- ب) تعادل انتقالی: در این قسمت با چهار قرقره کار می کنیم. قرقره های A و B را دقیقا مقابل هم قرار می دهیم و قرقره های C و D را در طرفین آنها جابجا می کنیم؛ همچنین جرم های متصل به چهار قرقره را طوری تغییر می دهیم که حلقه ی میان میز نیرو در حال تعادل قرار گیرد. در این حالت هم برآیند نیروهای وارد بر حلقه باید صفر باشد:



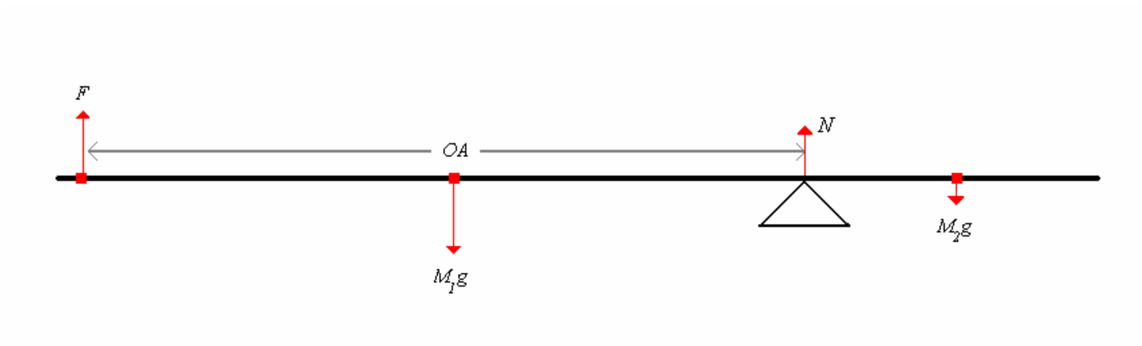
شکل ۳

۲- جمع بردارها و تعادل دورانی:

در این قسمت از یک خط کش یک متری که در ۲۵ سانتیمتری اش روی یک تکیه گاه قرار داده شده استفاده می کنیم.

(۲- الف) تعیین چگالی طولی خط کش:

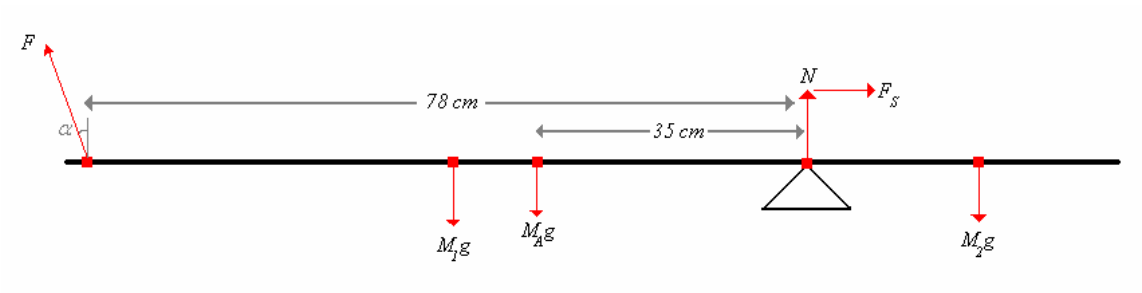
نیروسنجی را از ۱ سانتی متری قسمت طولانی تر خط کش به آن آویزان می کنیم و سعی می کنیم کشش آن را آنقدر زیاد کنیم تا اولا نیروسنج کاملا عمودی باشد و ثانیا خط کش کاملا افقی باشد. در این حالت با نوشتن معادلات تعادل، جرم واحد طول خط کش را حساب می کنیم.



شکل ۴

(۲- ب) تعادل خط کش ۱

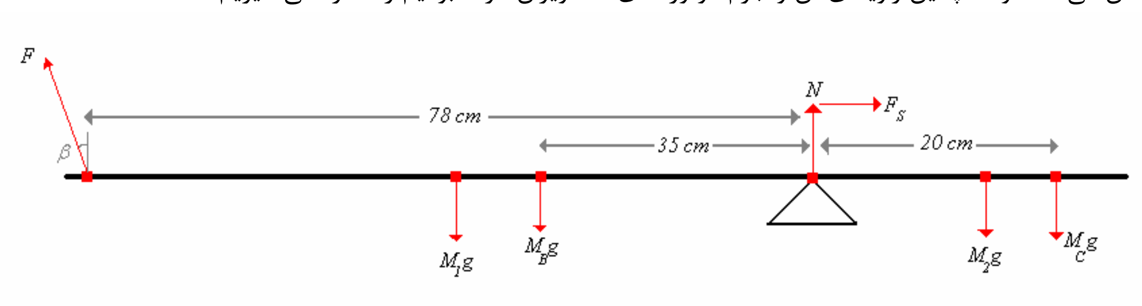
وزنه ای به را به فاصله ی ۳۵ سانتی متری سمت چپ تکیه گاه آویزان می کنیم. با حرکت دادن پایه ی دوم که نیروسنج به آن متصل است، سعی می کنیم تعادل خط کش را در حالت افقی برقرار کنیم. در این حالت نیروی نیروسنج و زاویه ای که با راستای عمودی می سازد و همچنین جرم وزنه ای که آویزان کردیم را اندازه می گیریم.



شکل ۵

(۲- ج) تعادل خط کش ۲

وزنه ای را در فاصله ی ۲۰ سانتیمتری سمت راست خط کش و وزنه ای را به ۳۵ سانتیمتری سمت چپ تکیه گاه آویزان می کنیم. با حرکت پایه ی دوم دوباره سعی می کنیم خط کش به حالت افقی درآید. در این حالت نیرویی که نیروسنج نشان می دهد و همچنین زاویه ی آن و جرم دو وزنه ای که آویزان کرده بودیم را اندازه می گیریم.



شکل ۶

جداول

جدول ۱ - برآیند دو بردار (نیرو)

T_A (grf)	T_B (grf)	T_C (grf)	θ
150	270	310	121

جدول ۲ - تعادل انتقالی

T_A (gfr)	T_B (grf)	T_C (grf)	T_D (grf)	α	β
150	245	90	95	65	127

جدول ۳ - تعیین جرم خط کش

F (N)	OA (cm)
1	78

جدول ۴ - تعادل خط کش (۱)

M_A (gr)	F (N)	α
384.4	2.6	11.3

جدول ۵ - تعادل خط کش (۲)

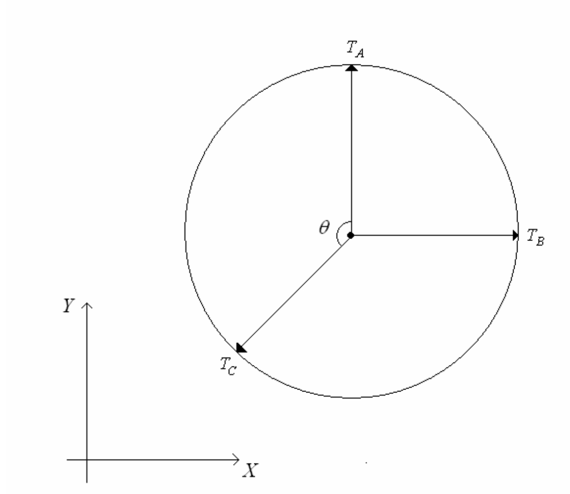
M_B (gr)	M_C (gr)	F (N)	β
200.5	298.7	1	2.9

خواسته ها

خواسته ی ۱ تحلیل داده های جدول ۱

جدول ۱ - برآیند دو بردار (نیرو)

T_A (grf)	T_B (grf)	T_C (grf)	θ
150	270	310	121

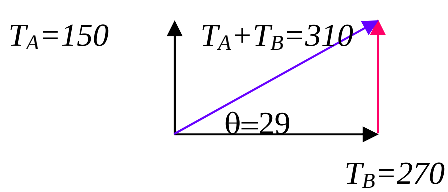


شکل ۷

شرط تعادل این است که $T_A+T_B+T_C=0$ پس $T_C=-(T_A+T_B)$ پس برای بدست آوردن T_C باید T_A+T_B را بدست آوریم.

$$T_A+T_B=150\hat{j}+270\hat{i}$$
$$\Rightarrow T_C=-150\hat{j}-270\hat{i}$$
$$90+\theta=180+\arctan(\frac{-150}{-270})=180+29=209$$
$$\Rightarrow \theta=119$$
$$|T_C|=\sqrt{150^2+270^2}=310grf$$

با استفاده از روش ترسیمی خواهیم داشت: (در شکل زیر هر 100 grf معادل 1 cm است.)



شکل ۸

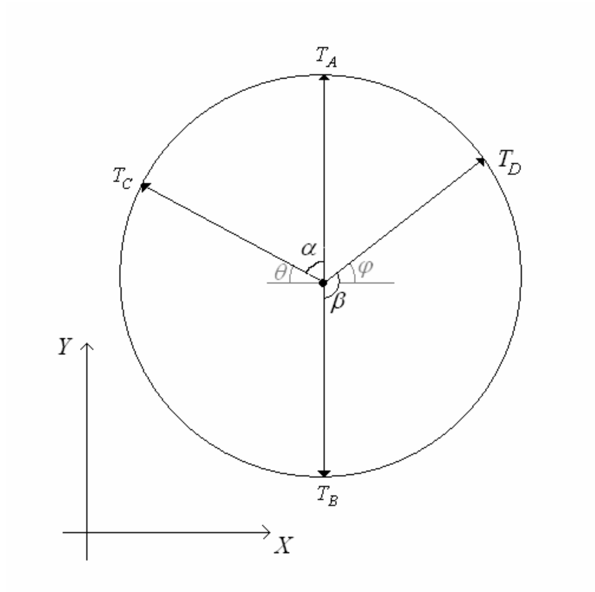
پس کشش نخ C باید جمع این دو کشش نخ را خنثی کند یا منفی برآیند آن دو باشد، پس طول آن باید 310 باشد و زاویه ی آن هم نسبت به A باید ۱۱۹ درجه باشد.

که با دقت خوبی با نتایج آزمایش یکی شده است.

خواسته ی ۲، تحلیل داده های جدول ۲

جدول ۲ - تعادل انتقالی

T_A (gfr)	T_B (grf)	T_C (grf)	T_D (grf)	α	β
150	245	90	95	65	127



شکل ۹

برای ساده تر شدن محاسبات $\begin{cases}\theta \equiv 90-\alpha \\ \varphi \equiv \beta - 90\end{cases}$

برای داشتن تعادل در راستای افقی داریم:

$$T_D \cos\varphi = T_C \cos\theta$$
$$\Rightarrow 95.\cos\varphi = 90.\cos\theta$$

و برای داشتن تعادل در راستای عمودی داریم:

$$T_A + T_D \sin\varphi + T_C \sin\theta = T_B$$
$$150 + 95\sin\varphi + 90\sin\theta = 245$$

که با حل کردن این دو معادله دو مجهول می توان دو زاویه را بدست آورد:

$$\sin\varphi = \frac{95 - 90\sin\theta}{95} = 1 - 0.94\sin\theta$$

$$\cos\varphi = \frac{90}{95}\cos\theta = 0.94\cos\theta$$

از طرفی داریم $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ که با جاگذاری خواهیم داشت:

$$1 + 0.88\sin^2\theta - 1.88\sin\theta + 0.88\cos^2\theta = 1$$

پس داریم:

$$0.88 = 1.88\sin\theta$$

یا:

$$\sin\theta = 0.47 \Rightarrow \theta = 28$$

از طرفی:

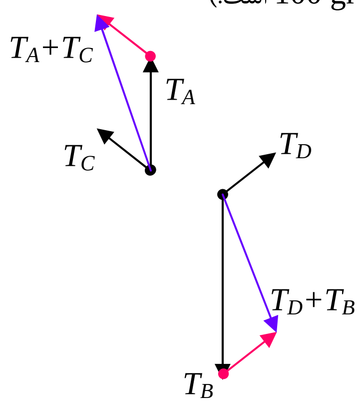
$$\sin\varphi = 1 - 0.94\sin\theta = 0.56$$
$$\Rightarrow \varphi = 34$$

و با جاگذاری خواهیم داشت:

$$\alpha = 62$$
$$\beta = 124$$

که تقریبا همان اعداد بدست آمده از آزمایش هستند.

با استفاده از روش ترسیمی: (هر 1 cm معادل 100 grf است.)



شکل ۱۰

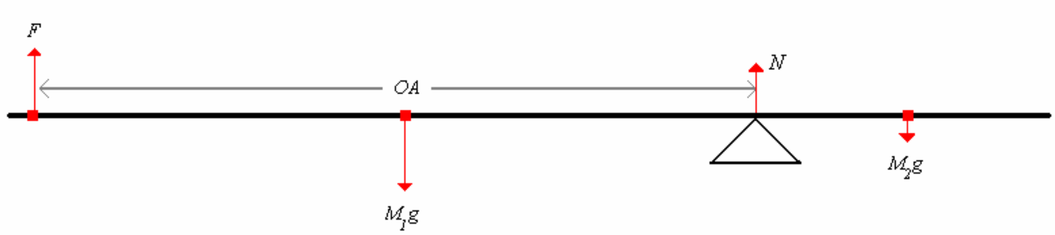
همان طور که دیده می شود، در شکل، دو بردار آبی رنگ همدیگر را خنثی می کنند، بنابراین چهار نیرو هم را خنثی می کنند.

خواسته ی ۳، تحلیل داده های جدول ۳

جدول ۳ - تعیین جرم خط کش

F (N)	OA (cm)
1	78

اگر فرض کنیم جرم واحدو طول خط کش μ بر حسب کیلوگرم بر متر باشد، و با توجه به دیاگرام زیر از خط کش خواهیم داشت:



شکل ۱۱

$$M_1 g = 0.75\mu.g$$
$$M_2 g = 0.25\mu.g$$

که در آن نیروی M_1g به مرکز جرم قسمت چپی خط کش که در 37.5 سانتی متری سمت چپ تکیه گاه قرار دارد و نیروی M_2g به مرکز جرم قسمت راستی خط کش که در 12.5 سانتی متری سمت راست تکیه گاه قرار دارد وارد می شود. چون جسم در تعادل است، مجموع گشتاورها باید صفر باشد پس داریم: (چون نیروی N در تکیه گاه قرار دارد، گشتاور آن صفر است و در معادله ظاهر نمی شود.)

$$|F|.OA - M_1 g \times 0.375 + M_2 g \times 0.125 = 0$$

پس:

$$1 \times 0.78 - 0.75\mu \times 9.8 + 0.25\mu \times 9.8 = 0$$
$$\Rightarrow 0.78 - 7.4\mu + 2.4\mu = 0$$
$$\Rightarrow \mu = 0.16\frac{kg}{m} = 1.6\frac{gr}{cm}$$

خواسته ی ۴، تحلیل داده های جدول ۴ و ۵

الف)

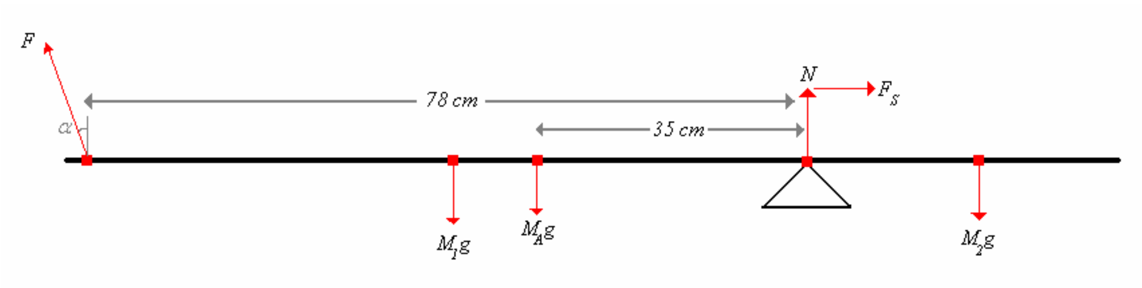
جدول ۴ - تعادل خط کش (۱)

M_A (gr)	F (N)	α
384.4	2.6	11.3

جدول ۵ - تعادل خط کش (۲)

M_B (gr)	M_C (gr)	F (N)	β
200.5	298.7	1	2.9

در حالت ۲ - ب (جدول ۴) داریم:



شکل ۱۲

شرط تعادل انتقالی:

$$\begin{cases} y: N + F\cos\alpha = M_1 g + M_A g + M_2 g \\ x: F\sin\alpha = F_S \end{cases}$$

شرط تعادل دورانی: (نسبت به مرجع تکیه گاه)

$$|\vec{F}| \times 0.78 \times \cos\alpha - M_1 g \times 0.375 - M_A g \times 0.35 + M_2 g \times 0.125 = 0$$

که با جاگذاری $\begin{cases} M_1 = 0.75\mu = 0.12kg \\ M_2 = 0.25\mu = 0.04kg \end{cases}$ و بقیه موارد از جدول داریم:

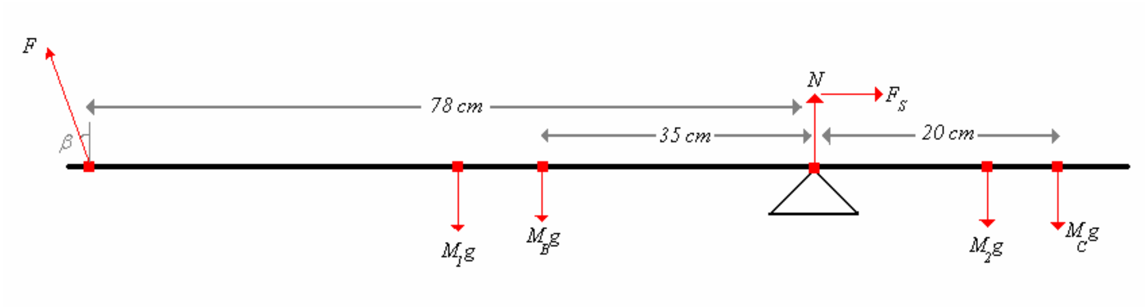
$$2.6\times 0.78\times \cos\alpha - 0.12\times 0.375\times 9.8 - 0.3844\times 9.8\times 0.35 + 0.04\times 0.125\times 9.8 = 0$$

$$2.0\times \cos\alpha - 0.44 - 1.3 + 0.05 = 0$$

$$2.0\times \cos\alpha = 1.8 \Rightarrow \cos\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 25.8$$

که با مقدار بدست آمده در خود آزمایش متفاوت است، البته باید توجه داشت که برای بدست آوردن زاویه ی 11.3 خود آزمایش باید می داشتیم $\cos\alpha = 0.98$ پس اختلاف اعداد بدست آمده از نیروها در مرتبه 0.1 با مقداری که ما بدست آوردیم باید فرق می کرد. که این هم اصلا بعید نیست، چون ما چهار نیرو داریم که دقت اندازه گیری خود F 0.2N و دقت اندازه گیری بقیه بین 0.01 و 0.1 است، پس نباید از بدست آوردن این جواب خیلی تعجب کنیم!

در حالت ۲ - ج (جدول ۵) داریم:



شکل ۱۳

شرط تعادل انتقالی:

$$\begin{cases} y: N + F\cos\beta = M_1 g + M_B g + M_2 g + M_C g \\ x: F\sin\beta = F_S \end{cases}$$

شرط تعادل دورانی: (نسبت به مرجع تکیه گاه)

$$|\vec{F}|\times 0.78\times \cos\beta - M_1 g\times 0.375 - M_B g\times 0.35 + M_2 g\times 0.125 + M_C g\times 0.20 = 0$$

که با جاگذاری خواهیم داشت:

$$1\times 0.78\times \cos\beta - 0.12\times 9.8\times 0.375 - 0.2005\times 9.8\times 0.35$$
$$+ 0.04\times 9.8\times 0.125 + 0.2987\times 9.8\times 0.20 = 0$$
$$\Rightarrow 0.8\cos\beta - 0.44 - 0.69 + 0.05 + 0.58 = 0$$
$$\Rightarrow 0.8\cos\beta = 0.50 \Rightarrow \cos\beta = 0.6 \Rightarrow \beta = 53.1$$

اگر قرار بود $\beta = 2.9$ باشد، در طرف راست اولین معادله در خط آخر به جای 0.5 باید 0.7 می داشتیم، یعنی اعداد ما باید حدود 0.2 خطا داشته باشند، که این موضوع هم با این دانسته که دقت نیروسنج 0.2 نیوتون است، خیلی دور از ذهن نیست.

ب)

در حالت ۲ - ب:

با نوشتن دوباره ی شرط تعادل انتقالی:

$$\begin{cases} y: N + F\cos\alpha = M_1 g + M_A g + M_2 g \\ x: F\sin\alpha = F_S \end{cases}$$

داریم:

$$N=\frac{M_1g+M_Ag+M_2g}{F\cos\alpha}=\frac{0.12\times9.8+0.3844\times9.8+0.04\times9.8}{2.6\times0.98}=\frac{1.2+3.9+0.40}{2.5}=2.2N$$

$$F_S=2.6\times0.04=0.1$$

که اگر μ مینیمم ضریب اصطکاک ایستایی برای نلغزیدن خط کش باشد، داریم:

$$\mu=\frac{F_S}{N}=\frac{0.1}{2.2}=0.04$$

در حالت ۲ - ج:

با نوشتن دوباره ی شرط تعادل انتقالی:

$$\begin{cases} y: N+F\cos\beta=M_1g+M_Bg+M_2g+M_Cg \\ x: F\sin\beta=F_S \end{cases}$$

داریم:

$$N=\frac{M_1g+M_Bg+M_2g+M_Cg}{F\cos\beta}=\frac{0.12\times9.8+0.2005\times9.8+0.04\times9.8+0.2987\times9.8}{1\times0.99}$$

$$=\frac{1.2+2.0+0.40+2.9}{0.99}=6.6N$$

$$F_S=1\times0.05=0.05$$

که اگر μ مینیمم ضریب اصطکاک ایستایی برای نلغزیدن خط کش باشد، داریم:

$$\mu=\frac{F_S}{N}=\frac{0.05}{6.6}=0.008$$

سوالات

۱- تفریق دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را چگونه تعریف می کنیم؟

تفریق این دو بردار را جمع دو بردار $\vec{A}$ و $-\vec{B}$ تعریف می کنیم که $-\vec{B}$ برداری است که اگر با بردار $\vec{B}$ جمع شود، حاصل صفر شود. در واقع $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$ و مولفه های آن از تفریق مولفه های $\vec{A}$ و مولفه های $\vec{B}$ بدست می آید.

۲- آیا در مرحله ی اول آزمایش تحقیق رابطه ی $\sum\vec{\tau}=\vec{0}$ لزوی دارد؟ چرا؟

خیر، لزومی ندارد. چون نیروهایی که به حلقه وارد می شوند (کشش نخ ها) در راستای شعاع حلقه هستند و از مرکز حلقه می گذرند. پس اگر رابطه ی تعادل دورانی را نسبت به مرجع مرکز حلقه بنوسیم، از آنجا که نیروها و بردار $\vec{r}$ آنها هم راستا هستند، ضرب خارجی آنها مسلما صفر خواهد شد و رابطه ی فوق مسلم است و نوشتن آن اطلاعات جدیدی به ما نمی دهد.

۳- چرا در تمام مراحل آزمایش (خصوصا مرحله ی دوم، جمع بردارها و تعادل دورانی) خط کش را افقی قرار می دهیم؟

چون اگر این کار را نکنیم، باید زاویه ی خط کش با افق را اندازه بگیریم و آن را هم در معادلات خود تاثیر دهیم که موجب پیچیدگی معادلات و سخت تر شدن (نه غیر ممکن شدن) حل آن می شود.

۴- در مرحله ی دوم آزمایش، آیا تحقیق رابطه ی $\sum\vec{\tau}=\vec{0}$ فقط در مورد محور دوران O (تکیه گاه) باید صورت گیرد؟ (در دستور کار نوشته شده مرحله ی اول آزمایش، که می دانیم در مرحله ی اول تکیه گاه نداریم و تکیه گاه مربوط به مرحله ی دوم آزمایش (خط کش) است، پس احتمالا منظور مرحله ی دوم است)

می توانیم این رابطه را نسبت به هر مرجع یا محور دیگری بنویسیم، ولی ثابت می کنیم که برقراری این رابطه برای تنها یک محور، برقراری آن برای تمام محور های دیگر را نتیجه می دهد، پس کافی است آن را نسبت به یک محور دلخواه بنویسیم.

فرض کنید رابطه ی فوق برای محور $\vec{A}$ برقرار باشد، ثابت می کنیم برای محور $\vec{B}=\vec{A}+\vec{R}$ هم برقرار است.
از برقراری نسبت به مرجع A داریم:

$$\sum(\vec{x}_i-\vec{A})\times\vec{F}_i=0$$

که در آن $\vec{x}_i$ بردار مکان نیروی i ام است. از طرفی داریم:

$$\sum\vec{F}_i=0\Rightarrow(-\vec{R})\times\sum\vec{F}_i=0\Rightarrow\sum-\vec{R}\times\vec{F}_i=0$$

با جمع دو رابطه ی اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\sum(\vec{x}_i-\vec{A}-\vec{R})\times\vec{F}_i\\&\Rightarrow\sum(\vec{x}_i-\vec{B})\times\vec{F}_i=0\end{aligned}$$

که این یعنی برقراری رابطه ی تعادل دورانی برای محور $\vec{B}$.