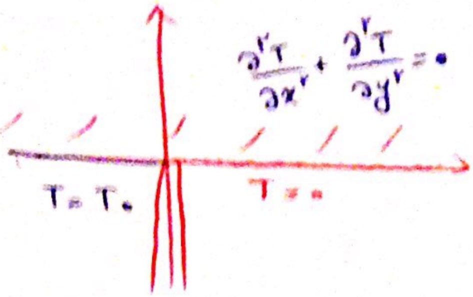
EM Se25 Dr. Hashemi

مثال ۱:

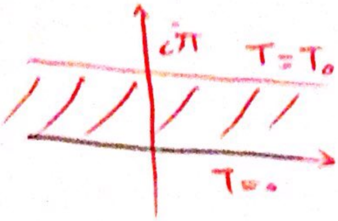


$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$\begin{cases} T(x,0)=0 & 0<x \\ T(x,0)=T_0 & x<0 \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$$

$w=\log z$



$$T = A\arctan\frac{y}{x}$$

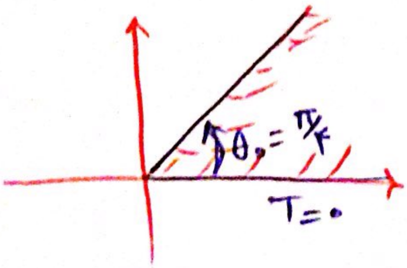
$$T(x,0)=\operatorname{Arctan}\frac{0}{x}=0 \Rightarrow \checkmark$$

$0<x$

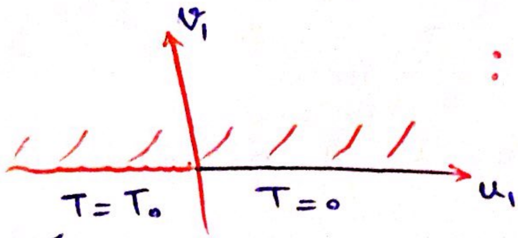
$$T(x,0)\Big|_{x<0}=\overbrace{A\arctan\frac{0}{x}}^{0<x}\Big|_{x<0}=T_0 \Rightarrow A\pi=T_0 \rightarrow \boxed{A=\frac{T_0}{\pi}}$$

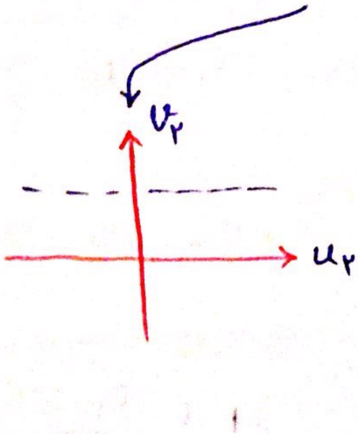
$$\boxed{T=\frac{T_0}{\pi}\operatorname{Arc\,tan}\, y/x}$$

مثال ۲:



$w_1 = z^4 \rightarrow$





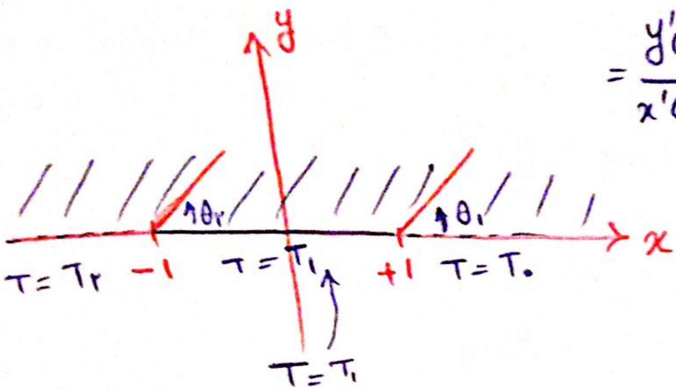
۱

$$T=\frac{T_0}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{v_1}{u_1}\Rightarrow w_1=z^4=(x+iy)^4$$

$$\Rightarrow \boxed{T=\frac{T_0}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{4x^3y-4xy^3}{x^4-4x^2y^2+y^4}}$$

مثال ۳:

$$\nabla^2 T=0$$



شیب خط مماس جهتدار $=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=$

(زاویه‌ی میل خط مماس جهتدار) tan

$=$ شیب $z'(t)$

$$\begin{cases} w_1=\log(z-1)=\ln\sqrt{(x-1)^2+y^2}+i\operatorname{Arctan}\frac{y}{x-1} \\ w_2=\log(z+1)=\ln\sqrt{(x+1)^2+y^2}+i\operatorname{Arctan}\frac{y}{x+1}\end{cases}$$

$$w=A+B\underbrace{\operatorname{Arctan}\frac{y}{x-1}}_{\theta_1}+C\underbrace{\operatorname{arctan}\frac{y}{x+1}}_{\theta_2}\Rightarrow w=A+B\theta_1+C\theta_2$$

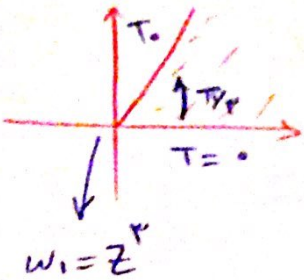
$$\left.\begin{matrix}\theta_1=0\\ \theta_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow T=A+B\times 0+C\times 0=T_0\Rightarrow \boxed{A=T_0}$$

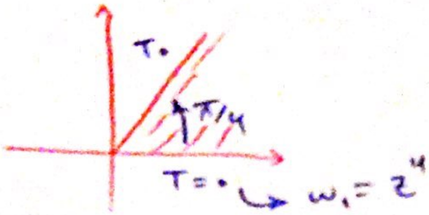
$$\left.\begin{matrix}\theta_1=\pi\\ \theta_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow T=T_0+B\pi+C\times 0=T_1\Rightarrow \boxed{B=\frac{T_1-T_0}{\pi}}$$

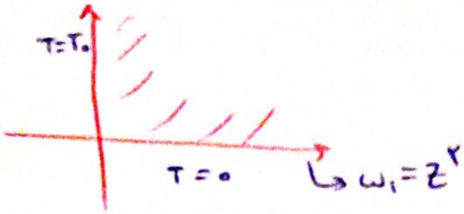
$$\left.\begin{matrix}\theta_1=\pi\\ \theta_2=\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow T=T_0+\frac{T_1-T_0}{\pi}\times\pi+C\times\pi=T_2\Rightarrow \boxed{C=\frac{T_2-T_1}{\pi}}$$

$$\boxed{T=A+\frac{T_1-T_0}{\pi}\theta_1+\frac{T_2-T_1}{\pi}\theta_2}$$

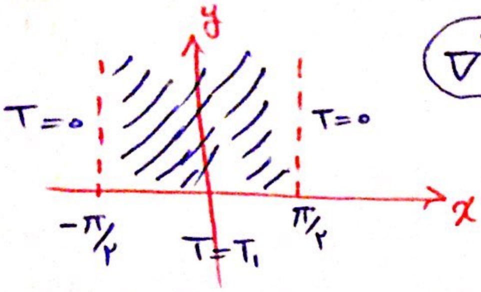
تمرین:





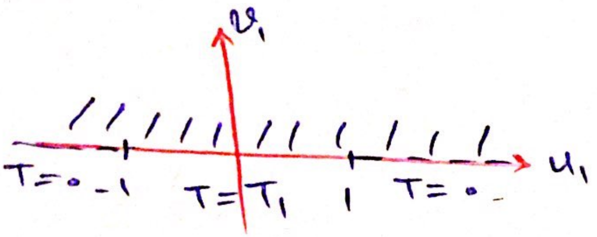


مثال ۴:



$\nabla^2 T=0$

$$\rightarrow w_1=\sin z=\underbrace{\sin x\cosh y}_{u_1}+i\underbrace{\cos x\sinh y}_{v_1}$$



$$T=0+\frac{T_1-0}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{v_1}{u_1-1}+\frac{0-T_1}{\pi}\arctan\frac{v_1}{u_1+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{T=\frac{T_1}{\pi}\arctan\frac{\cos x\sinh y}{\sin x\cosh y-1}-\frac{T_1}{\pi}\times\operatorname{Arctan}\frac{\cos x\sinh y}{\sin x\cosh y+1}}$$

انتگرال مختلط : $Z=x(t)+iy(t)$

۱) انتگرال معین : $w=u(t)+iv(t)$

$: v(t),\ u(t)$

توابع قطعه‌قطعه پیوسته (p.c.)

$t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ از

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \Rightarrow$$ شرایط فوق تضمین وجود انتگرال

ویژگی‌های شبیه انتگرال‌های حقیقی :

۱) $$\int_a^b \gamma\, w(t)\,dt = \gamma \int_a^b w(t)\,dt$$

۲) $$\int_a^b \mathrm{Re}\,(w(t))\,dt = \mathrm{Re}\int_a^b w(t)\,dt$$

۳) $$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|\,dt$$

اثبات ۳ :

$$r_0 e^{-i\theta_0} = \int_a^b w\,dt$$

$$r_0 = e^{i\theta_0}\int_a^b w\,dt \overset{(1)}{=} \underbrace{\int_a^b e^{i\theta_0} w\,dt}_{\text{حقیقی}} = \mathrm{Re}\int_a^b e^{i\theta_0} w\,dt \overset{(2)}{=} \int \mathrm{Re}(e^{i\theta_0} w(t))\,dt$$

$$\mathrm{Re}\,(e^{i\theta} w(t)) \leq \left|(e^{i\theta} w(t))\right| = \underbrace{|e^{i\theta_0}|}_{1}\,|w(t)| = |w(t)|$$

$$\int_a^b \mathrm{Re}(e^{i\theta_0} w(t))\,dt \leq \int_a^b |w(t)|\,dt$$

$$|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(x)^2} \Longrightarrow$$ طول قوس هموار $= L = \int_a^b |z'(t)|\,dt$

$t = \varphi(r)$

$\varphi(r)$ پیوسته و مشتق‌پذیر

$\varphi'(r) > 0 \rightarrow$ اکیدا صعودی

$t\uparrow \leftarrow r\uparrow$

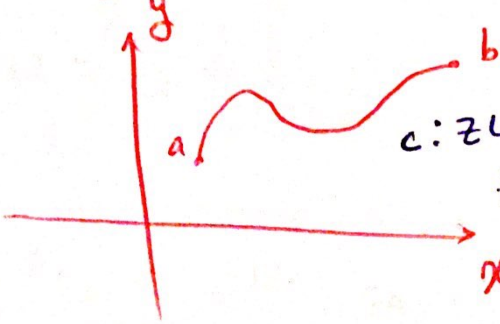
$$L = \int_a^b \left| z'(\varphi(r)) \right| \underbrace{\varphi'(r)\,dr}_{dt} = \int_a^b |z'(r)|\,dr$$

$$\int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b |z'(r)|\,dr$$ پایاست.

← قوس قطعه به قطعه هموار ($\triangleq$ مرز) متشکل از تعداد متناهی قوس هموار که انتهای هر یک، ابتدای بعدی باشد

← اگر انتهای آخری با ابتدای اولی یکی باشد = مرز بسته

صفحه را به سه قسمت تقسیم می‌کند. $\Big\{$ درون کراندار ، برون بی‌کران



$c: z(t) = x(t) + iy(t)$

$t \in I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \alpha = z(a) \\ \beta = z(b) \end{cases}$$

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_c f(z)\,dz \qquad f(z) = u + iv$$

I روی $\text{P.C.} \begin{cases} u(t) \\ v(t) \end{cases}$

$$\int_z f(z)\,dz = \int_c (u+iv)\,\underbrace{(dx + i\,dy)}_{dz = z'dt} =$$

$$\int_c \left[u(t) + iv(t)\right]\left[x' + iy'\right] dt =$$ ادامه صفحه بعد

$$= \underbrace{\int_C (ux' - vy')\,dt}_{\text{انتگرال حقیقی}} + i \underbrace{\int_C (uy' + vx')\,dt}_{\text{انتگرال حقیقی}}$$

قرارداد:
تا جایی که به صراحت خلاف آن گفته باشیم:

۱) مسیرهای انتگرالگیری: ساده
۲) تابع p.c.

* اثبات (...):

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$$

از b به a (مسیر عکس): $-C$

ویژگی های انتگرال:

۱) ویژگی خطی را دارد:

$$\int_C (af+bg)\,dz = a\int_C f\,dz + b\int_C g\,dz$$

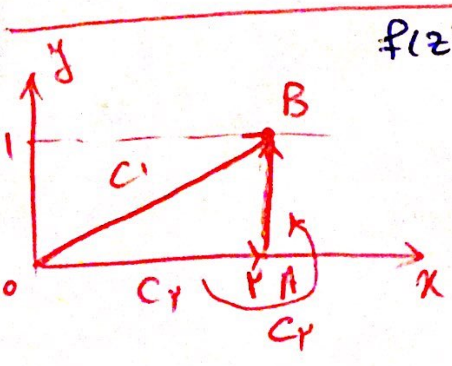
۲)

$$\left|\int_C f\,dz\right| \leq \int_C \underbrace{|f(z)|}_{\leq M}\,|z'(t)|\,dt \leq M\int_C |z'|\,dt = ML$$

کراندار است $\Leftarrow \exists M\ \forall t \in I : |f(z(t))| \leq M$

مثال:

$f(z) = z^2$



$C_1 = OB \to x = 2y$

$C_2 = OA + AB$

$y = 0$, $x = 2$

$$OB \to x=۲y \Rightarrow z=x+iy=۲y+iy \Rightarrow dz=۲dy+idy$$

$$C_۲:\begin{cases} OA \to y=۰ \Rightarrow ۰\le x\le ۲ \quad z=x \Rightarrow dz=dx \Rightarrow f(z)=(x)^۲ \\ AB \to \quad x=۲ \quad z=۲+iy \quad dz=idy \quad f(z)=(۲+iy)^۲ \end{cases}$$

$$\int_{C_۱} f(z)dz=\int_{C_۱} y^۲(۲+i)^۲(۲+i)dy$$

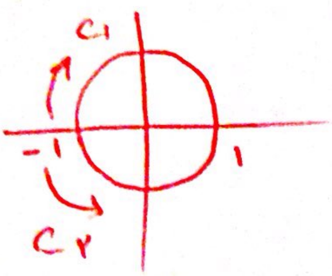
$$\int_{C_۱} y^۲(\underbrace{۴+۴i-۱}_{۳+۴i})(۲+i)dy=\cdots=\frac{۱}{۳}(۲+۱۱i)$$

$$\int_{C_۲} f(z)dz=\underbrace{\int_{OA} f(z)dz}_{I_۱}+\overbrace{\int_{AB} f(z)dz}^{I_۲}$$

$$I_۱=\int_{x=۰}^{۲} x^۲dx=\frac{۱}{۳}x^۳\Big|_۰^۲=\frac{۸}{۳}$$

$$I_۲=\int_{y=۰}^{۱}(۲+iy)^۲(idy)=\cdots=?$$

مثال ۲:



$$f(z)=z^*$$

۱) روی نیم‌دایره‌ی بالا $(C_۱)$

از ۱- به ۱

$$\int_{C_۱} f(z)dz \Rightarrow z=e^{i\theta} \Rightarrow z^*=e^{-i\theta}$$

$$I_۱=\int_{\pi}^{۰} e^{-\cancel{i}\theta}(\underbrace{i\cancel{e}^{\cancel{i}\theta}d\theta}_{dz})=i\theta\Big|_{\pi}^{۰}=-i\pi$$

۲) روی نیمدایره‌ی پایین : (از ۱- به ۱) (C_2)

$$I_2 = \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\theta}\left(ie^{i\theta}\right)d\theta =$$

$$i\theta\Big|_{\pi}^{2\pi} = i\pi \Rightarrow \boxed{I_1 + I_2}$$

۳) روی کل دایره : (از ۱ به ۱ در جهت مثلثاتی) (C_3)

$$\int_{C_3} f(z)\,dz \overset{(3)}{\Longrightarrow} -I_1 + I_2 = i\pi + i\pi = i(2\pi)$$