SS Dr. Behrouzi Se2

۷) سیگنال $\text{sinc}(t)$

$$\text{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

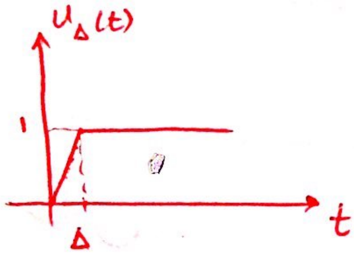
$$\lim_{t\to 0} \text{sinc}(t) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)\,dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(t)\,dt = 1$$

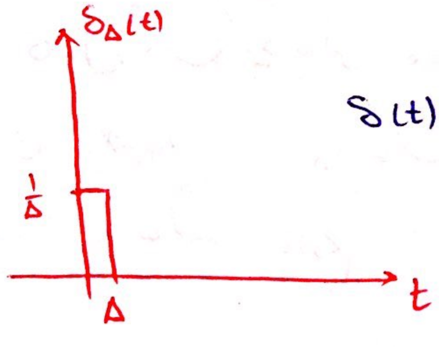
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(t)|\,dt \longrightarrow \infty$$

dirac delta func.

۸) سیگنال ضربه :



$$\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt} u_\Delta(t)$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{نامعین} & t = 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1 \end{cases}$$

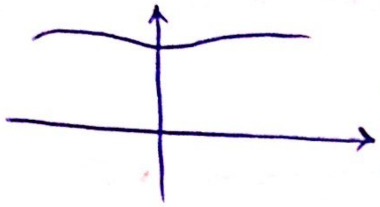
خاصیت غربالی تابع دلتا :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

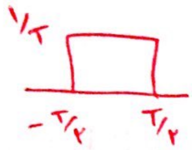
خاصیت نمونه‌برداری تابع ضربه :

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$



تعاریف مختلف حدی برای تابع ضربه :

1) $\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T}\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$



2) $\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T}\, \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$

3) $\delta(t) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

4) $\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T}\, sinc\left(\frac{t}{T}\right)$

خواص :

خاصیت زوج بودن $\delta(-t) = \delta(t)$

خاصیت مقیاس کردن $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

← می‌توان ثابت کرد که اگر $f(x)=0$ دارای ریشه‌های مجزای x_1 و x_2 و ... و x_n باشد بطوریکه ریشه‌های تکراری و مضاعف نباشند. داریم :

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_1)}{|f'(x_1)|} + \frac{\delta(x-x_2)}{|f'(x_2)|} + \cdots + \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|}$$

خاصیت هم‌ارزی: (equivalent property)

← فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ روابطی شامل تابع $\delta(t)$ و دیگر توابع باشند می‌گوییم $f_1(t) \equiv f_2(t)$ اگر و تنها اگر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) f_1(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) f_2(t)\, dt$$

← برای تمام توابع $\phi(t)$ که برای آن‌ها انتگرال وجود دارد.

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\int \delta(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\,\varphi(-u)\,du = \varphi(0)$$

مثال :

$$\delta(t^2 - 4) = ? = \frac{1}{4}\delta(t-2) + \frac{1}{4}\delta(t+2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta(2t-1)\,dt = ? = 1/8$$

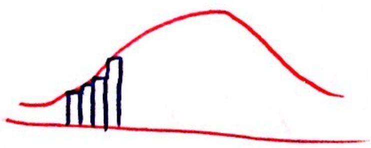
$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta(2t-1)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta(2(t-1/2))\,dt = \frac{1}{2}\int t^2 \delta(t-1/2)\,dt$$

---

* هر تابع را می‌توان بصورت δ نوشت:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda$$

اثبات:



$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\,\Delta$$

$$\Delta \to 0 \to x(t) = \int x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda$$

راه دوم : $t \to \lambda \Rightarrow x(t_0) = \int x(\lambda)\,\delta(\lambda - t_0)\,d\lambda$

$$t_0 \to t \Rightarrow x(t) = \int x(\lambda)\,\delta(\lambda - t)\,d\lambda \xrightarrow{\delta(t)\ \text{زوج}} \boxed{x(t) = \int x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda}$$

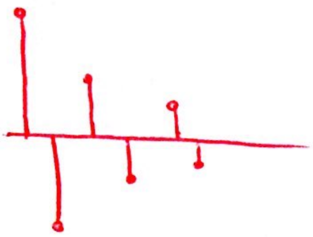
سیگنالهای گسسته : ۱) سیگنال نمایی :

$$x[n] = c\,a^n$$

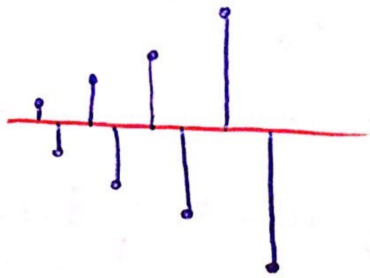
c, a حقیقی

$a>1$

$0<a<1$



$-1<a<0$



$a<-1$

$x[n] = e^{j\omega_0 n}$ ← سیگنال نمایی مختلط :

تناوب در حوزه‌ی زمان :

$e^{j\omega_0 t}$

$x[n+N_0] \overset{?}{=} x[n] \qquad e^{j\omega(n+N_0)} \overset{?}{=} e^{j\omega_0 n} \rightarrow e^{j\omega_0 N_0} = 1$

$\Rightarrow \omega_0 N_0 = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N_0}}$

← اگر $\frac{\omega_0}{2\pi}$ یک عدد گویا باشد سیگنال متناوب است. (فقط به ازای این ω_0 ها سیگنال نمایی مختلط متناوب است.)

مثال : اگر از $\cos(t/3)$ نمونه‌برداری انجام شود: $\cos(\frac{n}{3})$

$e^{j\frac{n}{3}}$

$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{6\pi} \rightarrow N_0 = (\frac{2\pi}{\omega_0}) m \in \mathbb{Z}$

۱) نمونه برداری از هر سیگنال نمایی پیوسته‌ی پریودیک لزوماً منجر به یک سیگنال نمایی پریودیک گسسته نخواهد شد.

۲) نمونه برداری از یک سیگنال پریودیک پیوسته لزوماً به یک سیگنال پریودیک به همان پریود منجر نخواهد شد.

مثال: $\cos\left(\frac{8\pi}{31} t\right)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{31}{4}$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{t}{31} = \frac{m}{N_0}$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{8\pi}{31} n\right)$$

$$x[n+N_0] = x[n]$$

$$N_0 = \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) m = \frac{31}{4} \times m \qquad N_0 = 4 \times \frac{31}{4} = 31$$

تفاوت در حوزه‌ی فرکانس:

$$e^{j2\pi n} = 1$$

$$e^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \qquad e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}$$

← از آنجایی که $e^{j2\pi n} = 1$ است لذا سیگنال نمایی مختلط با فرکانس ω_0 را نمایی مختلط با فرکانس $\omega_0 + 2\pi$ برابر است.

← لذا فقط فرکانس‌های در یک بازه‌ی 2π $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$ باهم متفاوتند و سایر فرکانس‌ها معادلی در این محدوده دارند. $0 \leq \omega_0 < 2\pi$

$$e^{j\omega_0 t}$$

$$\cos(\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{4\pi}{3} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

حد ماکزیمم نوسانات در سیگنال های مختلف :

← در سیگنال های پیوسته با افزایش ω_0 نرخ نوسانات افزایش پیدا می کند ولی در سیگنال گسسته بیشترین نوسانات وقتی است که سیگنال در n های مختلف متوالیاً نوسان کند. لذا بالاترین نوسانات در حوالی مضارب فرد π اتفاق می افتد. زیرا :

$$e^{j\pi n} = (-1)^n$$

← سیگنال با فرکانس کم ω_0 حدود 0 ، $\pm 2\pi$ و $\pm 4\pi$ ، ...

← " " " بالا اگر ω_0 حدود $\pm\pi$ ، $\pm 3\pi$ و ...

هارمونیک ها :

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow e^{j\omega_0 k t}$$

← اگر مجموعه ای از نمایی های متناوب با دوره ی تناوب مشترک N که فرکانس آن ها مضربی از $\frac{2\pi}{N}$ باشد را در نظر بگیریم : $K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $\phi_K[n] = e^{jK\frac{2\pi}{N}n}$

* در این مجموعه ، هارمونیک ها فقط N تا نمایی متناوب مجزا وجود دارد.

$$\phi_{K+N}[n] = e^{j(K+N)(\frac{2\pi}{N})n} = e^{jK(\frac{2\pi}{N})n}e^{j2\pi n} = e^{jK(\frac{2\pi}{N})n} = \phi_K[n]$$

← لذا می توان گفت $\phi_0[n]$ ، $\phi_1[n]$ و ... $\phi_{N-1}[n]$ همگی مجزا هستند و هر $\phi_K[n]$ دیگری مشابه یکی از اینهاست.

سیگنال سینوسی گسسته و سینوسی افزایشی یا کاهشی :

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

← این سیگنال لزوماً متناوب نیست!

← اگر $\omega_0 = 2\pi \frac{K}{N}$ باشد متناوب است با دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{N}{gcd(K,N)}$

یعنی ب.م.م

$x[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{7} n\right) \longrightarrow N_0 = 7$ $\qquad \cos\left(\frac{4\pi}{7} t\right) \rightarrow T = \frac{7}{2} = 3.5$

$x[n] = Ca^n \qquad C = |C|e^{j\theta}$

$a = |a|e^{j\omega_0}$

$$\boxed{x[n] = |C|\,|a|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||a|^n \sin(n\omega_0 + \theta)}$$

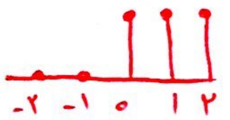
* در حالت سیگنال سینوسی گسسته

$x_1[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \longrightarrow N_0 = 8$

$x_2[n] = \cos\left(n \frac{3\pi}{8}\right) \rightarrow N_0 = 16$

افزایش ω_0 لزوماً به معنای کاهش پریود اصلی نیست!

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

unit sample / kronecker delta function

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \qquad n > 0 \rightarrow \delta[m] = 1 \qquad n < 0 \rightarrow \delta[m] = 0 \qquad \delta[m] = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & \neq \end{cases}$

$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$ $\quad \boxed{x[n]\,\delta[n-k] = x[k]\,\delta[n-k]}$ *

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]}$$