به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی علوم ریاضی

محاسبات عددی – گروه‌های 1 تا 4

حل تمرین سری سوم

---

1. (الف) برای محاسبه‌ی b_i، ستون iام ماتریس $B = A^{-1}$ داریم:

$$Ab_i = e_i\ ,$$
$$A = LU$$
$$LUb_i = e_i\ ,$$

که در آن e_i ستون iام ماتریس همانی است. بنابراین برای محاسبه‌ی ماتریس B لازم است n دستگاه خطی حل شود. پس الگوریتم محاسبه ماتریس وارون به صورت زیر است:

به ازای $i = 1, \cdots, n$، محاسبات زیر را انجام ده

۱- y_i را از حل دستگاه پایین مثلثی $Ly_i = e_i$ به دست آور.

۲- b_i را از حل دستگاه بالامثلثی $Ub_i = y_i$ به دست آور.

(ب) هزینه‌ی محاسبه‌ی تجزیه‌ی LU تقریبا برابر با $\frac{n^3}{3}$ و هزینه‌ی هر یک از گام‌های 1 و 2 بالا به ازای هرمقدار i برابر با $\frac{n^2}{2}$است. بنابراین حجم محاسبات لازم برای محاسبه‌ی وارون یک ماتریس $n \times n$ برابر است با:

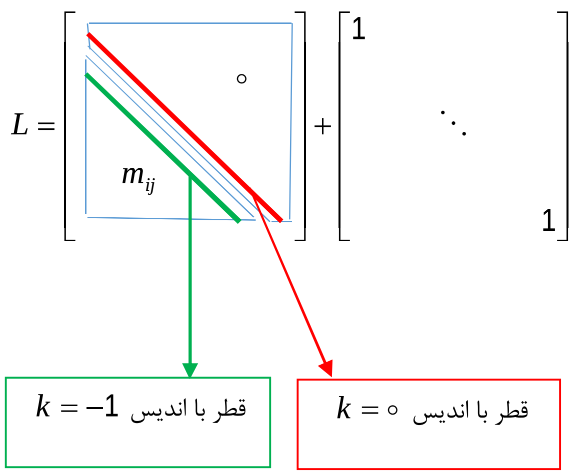
$$\frac{n^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} 2 \times \frac{n^2}{2} = \frac{4n^3}{3}.$$

2. کافی است برنامه‌ی LU به صورت زیر تغییر کند:

```
function [L,U]=myLU(A)
n=length(A);
for k=1:n-1
    A(k+1:n,k)= A(k+1:n,k)/A(k,k);
    A(k+1:n,k+1:n)= A(k+1:n,k+1:n)- A(k+1:n,k)* A(k,k+1:n);
end
U=triu(A);
L=tril(A,-1)+eye(n);
```

در این صورت، در هر تکرار مقادیر $\begin{matrix} m_{ik} \\ i=k+1:n \end{matrix}$ در بخش زیر قطر اصلی A ذخیره می‌شوند و U در بخش بالامثلثی A محاسبه و ذخیره می‌شود.

توجه: برای هر ماتریس، قطرهایی به موازات قطر اصلی تعریف می شوند. به طور کلی، مجموعه‌ی درایه های a_{ij} از ماتریس A که به ازای آن‌ها رابطه‌ی $j-i=k$ برقرار است قطر k ام ماتریس را تشکیل می‌دهند. دستورهای tril، triu و diag در نرم‌افزار MATLAB یک ورودی دوم اختیاری دارند و آن k، اندیس قطر مورد نظر است. می دانیم اگر ورودی دوم به این دستورات داده نشود، به صورت پیش‌فرض قطر با اندیس صفر (یعنی همان قطر اصلی) در نظر گرفته می‌شود. در سطر آخر برنامه‌ی بالا، L برابر خواهد بود با:



3. (الف)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مرحله‌ی اول-

$$k=1 \quad |a_{11}|=0 \quad |a_{21}|=1 \quad |a_{31}|=3 \Rightarrow P_1=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$P_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad M_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{3} & 1 & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

$$M_1P_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad P_2=I$$

مرحله‌ی دوم

$$P_2M_1P_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1\end{bmatrix}$$

$$M_2P_2M_1P_1A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}=U$$

$$\Rightarrow M_2\underbrace{P_2M_1P_2}_{\tilde{M}_1}P_2P_1A=U$$

$$L=\tilde{M}_1^{-1}M_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ \frac{1}{3} & 1 & \\ 0 & \frac{3}{5} & 1\end{bmatrix}\quad P=P_2P_1=\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\Rightarrow PA=LU$$

(ب)

$$Ax = b \Rightarrow \underbrace{PA}_{LU}x = Pb = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$Ly = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ \circ \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. (الف)

$$p(x_i) = y_i \quad i = 1,\dots,m$$

$$a_1 + a_2 x_i + \dots + a_{k+1} x_i^{\,k} = y_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{\,k} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{\,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & & x_m^{\,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

بنابراین معادلات منجر به یک دستگاه خطی با m معادله و $k+1$ مجهول می‌شود و اگر $m = k+1$ آنگاه مساله دارای جواب یکتاست. همچنین اگر $m < k+1$ آنگاه مساله بی‌شمار جواب دارد و اگر $m > k+1$ آنگاه مساله جواب ندارد.

(ب) در حالت $m > k+1$، با تعریف $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{\,k} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{\,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & & x_m^{\,k} \end{bmatrix}$ و بردار $b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$، $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix}$ از حل مساله‌ی کمترین مربعات $\min \|Aa - b\|$ به‌دست می‌آید.

(پ)

```
function a=datafitting(X,Y,k)
m=length(X);
A=ones(m,k+1);
for i=2:k+1
    A(:,i)=X.*A(:,i-1);
end
```

```
[Q,R]=qr(A);
Rt=R(1:k+1,:);
bt=Q'*Y;
b1t=bt(1:k+1);
a=Uppersolve(Rt,b1t);
```

5. (الف)

$$A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$a_{31}\to\circ\Rightarrow i=3\quad i-1=2\Rightarrow Q_1=\begin{bmatrix}1&&\\&c&-s\\&s&c\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = Q_1 A, \quad A^{(2)}(3,1) = \circ \Rightarrow s + c = \circ \Rightarrow c = -s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}{}_{21} \to \circ \Rightarrow i = 2, \quad i - 1 = 1 \Rightarrow Q_2 = \begin{bmatrix} c & -s & \\ s & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = Q_2 A^{(2)} \quad A^{(3)}{}_{21} = \circ \Rightarrow s + \sqrt{2}c = \circ, \; s^2 + c^2 = 1 \Rightarrow 3c^2 = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{3}}, s = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(3)} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \sqrt{3}$$

$$\tilde{b} = Q_2 Q_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = Q_2 \begin{bmatrix} a_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 + a_3) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-a_2 + a_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}}(a_1 + a_2 + a_3) \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}x = \tilde{b}_1 \Rightarrow x = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{3}$$

(ب)

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2$$
$$f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + 2(x - a_3) = \circ \Rightarrow x = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{3}$$
$$f'' = 6 > \circ$$

توجه: تنها در حالتی که ماتریس A دارای یک ستون باشد، حل مساله‌ی کمترین مربعات با مشتق‌گیری ساده امکان پذیر است و نیازی به استفاده از تجزیه‌ی QR نیست.

موفق باشید