سید بردیا رائی نژاد ۹۹۱۰۱۶۶۹

۱:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+6}\,dx = I_n \qquad I_n + 6I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+6}dx + 6\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{x+6}$$

$$= \int_0^1 (x^{n-1})\frac{\cancel{(x+6)}}{\cancel{x+6}}\,dx = \frac{1}{n}x^n \Big|_0^1 = \frac{1}{n}$$

پیشرو

$$I_n = \frac{1}{n} - 6I_{n-1} \qquad I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{x+6}\,dx = \ln(x+6)\Big|_0^1$$

$$= \ln\frac{7}{6} \simeq 0.154 \qquad I_1 = 1 - 6I_0 \approx 0.076$$

$$I_2 = \frac{1}{2} - 6I_1 = 0.044 \qquad I_3 = \frac{1}{3} - 6I_2 = 0.069$$

$$I_4 = \frac{1}{4} - 6I_3 = -0.164 \qquad I_0 > I_1 > I_2 < I_3 > I_4$$

$$I_0 = 1 - 6(I_0^* + \epsilon)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} - 6(1 - 6I_0 - 6\epsilon) = -5.5 + 36I_0 + 36\epsilon \rightarrow$$

هر بار ϵ ۶ برابر می‌شود.

$\Rightarrow$ ناپایدار است

پسرو

$$\frac{1}{6n} - \frac{I_n}{6} = I_{n-1} \qquad I_{10} \approx I_9$$

$$I_9 + 6I_9 \approx \frac{1}{10} \longrightarrow I_9 \approx 0.014$$

DATE / / SUBJECT:

$$I_{۸} = \frac{۱}{۴۸} - \frac{۰/۰۱۴}{۶} = ۰/۰۱۸$$

$$I_{۷} = \frac{۱}{۴۲} - \frac{۰/۰۱۸}{۶} = ۰/۰۲۱$$

$$I_{۶} = \frac{۱}{۳۶} - \frac{۰/۰۲۱}{۶} = ۰/۰۲۴$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{۶n} - \frac{I_n^* + \epsilon}{۶} = I_{n-1}$$

$$I_{n-۲} = \frac{1}{۶(n-1)} - \frac{1}{۶}\left(\frac{1}{۶n} - \frac{I^* + \epsilon}{۶}\right)$$

پایدار است

۹۲۱.۱۶۶۹ سید بردیا برانی نژاد

DATE / / SUBJECT: تمرین های کتاب - کرانه جبان

۱.

$$(8-x)^{\frac{1}{3}} = f(x) \qquad f(1) = f(0) + 1 \times f'(0) + \frac{1^2}{2!} f''(0) + \frac{1^3}{3!} f'''(0) + \ldots$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(8-x)^{-\frac{2}{3}} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(8-x)^{-\frac{5}{3}} \quad f'''(x) = -\frac{10}{27}(8-x)^{-\frac{8}{3}}$$

$$f(1) = 8^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} 8^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}(8)^{-\frac{5}{3}} - \frac{5}{81} 8^{-\frac{8}{3}} - \ldots = 2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{288} - \frac{5}{20736} - \ldots \approx 1/9129\ldots$$

۵.

براساس قضیه ی مقدار متوسط $c \in (x,y) \rightarrow$ با فرض $(x<y)$

$$\sin x - \sin y = (x-y)\cos c \rightarrow \frac{|\sin x - \sin y|}{|x-y|} = |\cos c| \leq 1$$

$$\rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

برای $y=0$ $\leftarrow$ $|\sin x| \leq |x|$

۶.

$$\underset{0}{f(0)} + x\,\underset{1}{f'(0)} + \frac{x^2}{2!}\underset{0}{f''(0)} + \frac{x^3}{3!}\underset{-1}{f'''(0)} + \frac{x^4}{4!}\underset{0}{f^{(4)}(0)} + \frac{x^5}{5!}\underset{1}{f^{(5)}(0)} + \ldots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sin x \rightarrow \sin x - P_3(x) = \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

به ازای هر مرحله صورت کسر دو بار در $\frac{\pi}{2}$ ضرب می شود اما مخرج ۲ بار بر اعدادی بزرگتر تقسیم می شود. پس هر مرحله در بسط $\sin\frac{\pi}{2}$ عددی اضافه (یا کم می شود) و در مرحله ی بعد عددی

/ / /

$$\frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!} - \frac{(\frac{\pi}{2})^7}{7!} + \dots < \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!} = \frac{\pi^5}{3840} \approx 0.0797$$

توجه: کم از اضافه‌ای می‌شود.

۹.

$$\ln 2 = \sum_{i=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{i}$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} = 0 \longrightarrow \lim_{i \to \infty} a_i = 0 \ , \ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \longrightarrow a_{i+1} \leq a_i$$

$$\Longrightarrow \ln 2 - \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} \leq \frac{1}{N+1}$$

$$0.5 \times 10^{-3} \geqslant \frac{1}{N+1} \longrightarrow N \geqslant 1999$$

از جمله ۱۹۹۹ به بعد خطا کمتر از 0.5×10^{-3} می‌شود

$$e^{x} \sin x = 1 \longrightarrow e^{-x} = \sin x \longrightarrow e^{-x} - \sin x = 0 \quad (1)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e^{-a} - \sin a = 0 \\ e^{-b} - \sin b = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ وجود دارد c عضو (a,b) ، $f'(c) = 0$ $\Longrightarrow -e^{-c} - \cos c = 0$

$$\longrightarrow -e^{-c} = \cos c \longrightarrow e^{c} \cos c = -1$$

DATE / / SUBJECT:

$$O(h^m)O(h^n) = O(h^{m+n}) \qquad h \to$$

$$O(h^m) = h^m \leftarrow |h^m| \leq |h^m|$$

$$O(h^n) = h^n \leftarrow |h^n| \leq |h^n|$$

$$O(h^m)O(h^n) = h^m h^n = \underbrace{h^{m+n} = O(h^{m+n})}$$

$$|h^{m+n}| \leq |h^{m+n}|$$

$\left|\frac{x - x^*}{x}\right| =$ خطای نسبی $= \left|\frac{e^{-۱۶} - ۰}{e^{-۱۶}}\right| = ۱$

خطای مطلق $= |e^{-۱۶} - ۰| = ۱/۱۲۵۳۵۱۷۴ \times ۱۰^{-۷}$

DATE / / SUBJECT:

۲۸.

با توجه به $\int_a^b f'(x)g(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)$

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx^n}{dx} e^{x-1}\,dx$$

$$= 1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1}\,dx = 1 - n I_{n-1}$$

$I_0 = I_0^* + \epsilon$ — ϵ خطای گرد کردن است

$I_1 = 1-(I_0^*+\epsilon)$ $\quad I_2 = 1-2(1-I_0^*-\epsilon) = -1+I_0^*+2\epsilon$

$I_3 = 1-3(-1+I_0^*+2\epsilon) = 4-3I_0^*-6\epsilon$

و همین طور ادامه بدیم به خطا 24ϵ و بعد از آن $-120.\epsilon$ خطا خواهیم داشت

پس خطا رشد دارد و ناپایدار است