میان ترم: سه شنبه ۳ آذر ۵-۷ بعد از ظهر

کلاس حل تمرین:

۴ شنبه ۸-۱۰ کلاس الف ۲ و ۱۰-۱۲ کلاس الف ۳

درون یابی نیوتن

اگر $P_{n-1}(x)$ چند جمله ای درون یاب تابع $f(x)$ در نقاط $x_0, \dots, x_{n-1}$ باشد چنان چه $(x_n, f(x_n))$ به جدول اضافه شود، چند جمله درون یاب $P_n(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

خطای درون یابی نیوتن

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x))$$

مثال فرض کنید

$\log 5 = 0/69897$ $\log 6 = 0/77815$

$\log 8 = 0/90309$ $\log 9 = 0/95424$

با استفاده از درون یاب نیوتن $\log 7$ را تخمین بزنید و کران بالایی برای خطا بیابید.

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0 ۵	۰/۶۹۸۹۷			
x_1 ۶	۰/۷۷۸۱۵	۰/۰۷۹۱۸		
x_2 ۸	۰/۹۰۳۰۹	۰/۰۶۲۴۷	۰/۰۰۵۵۷-	
x_3 ۹	۰/۹۵۴۲۴	۰/۰۵۱۵	۰/۰۰۳۷۷-	۰/۰۰۰۴۵

$n=3$

$$P_3(x) = 0.69897 + (x-5)(0.07918) +$$

$$(x-5)(x-6)(-0.00557) + (x-5)(x-6)(x-7)\,0.00045$$

$$\log 7 \simeq P_3(7) = 0.84543. \quad E(x) = f(x) - P_3(x)$$

$$E(7) = |f(7) - P_3(7)| = 0.0002$$

$$E(7) = \frac{(x-5)(x-6)(x-8)(x-9)}{4!}\left(f^{(4)}(\eta(x))\right)$$

$$f(x) = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = 0.43429$$

$$f'(x) = (0.43429)\frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2}(0.43429),$$

$$f''' = \frac{2}{x^3}(0.43429), \quad f^{(4)}(x) = \frac{6}{x^4}(0.43429)$$

$$|E(x)| \leq \frac{1}{۶} \max_{} |f^{(۳)}(\eta(x))| = \frac{1}{۶} \max_{0 \leq x \leq ۹} \left(\frac{-۶}{x^۴} (۰/۴۳۴۲۹) \right)$$

$$= \max_{0 \leq x \leq ۹} \left(\frac{-1}{x^۴} (۰/۴۳۴۲۹) \right) = ۰/۰۰۰\ ۶۹\ ۴۸۶$$

تمرین: روش نیوتن را پیاده سازی کنید.

درون یابی نقاط متساوی الفاصله:

فرض کنید تابع $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته باشد و

$$x_i = a + ih \qquad i = ۰, \dots, n$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

تعریف می کنیم:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \ , \quad i = ۰, ۱, \dots, n-1$$

$$\Delta^۲ f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \ , \quad i = ۰, ۱, \dots, n-۲$$

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i \ , \quad i = ۰, \dots, n-k-1 \ , \quad k = ۰, \dots, n-1$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \ , \quad i = ۱, ۲, \dots, n$$

$$\nabla^۲ f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \ , \quad i = ۲, \dots, n$$

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^{k} f_i - \nabla^{k} f_{i-1}, \quad k=0,1,\dots,n-1, \quad i=k+1,\dots,n$$

جدول تفاضلات پیشرو

x	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	f_0			
x_1	f_1	Δf_0		
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$	
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$

جدول تفاضلات پسرو

x	f_i	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
x_0	f_0			
x_1	f_1	∇f_1		
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$	
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$

مثال) جدول تفاضلات پیشرو $f(x)=2x^3$ در نقاط $x_0=-1$ ، $x_1=0$ ، $x_2=1$ ، $x_3=2$ و $x_4=3$ به دست آورید

x		$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	-1	-2				
x_1	0	0	$2 \to f(x_1)-f(x_0)$			
x_2	1	2	2	0		
x_3	2	16	$14 = f(x_3)-f(x_2)$	12	12	
x_4	3	54	38	24	12	0

تمرین:
$$\frac{\Delta^j f_k}{j!\,h^j} = f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j}]$$

$$j=1 \longrightarrow f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f}{h}$$

فرض استقرا
$$j=m \longrightarrow f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}] = \frac{\Delta^m f_k}{m!\,h^m}$$

حکم
$$j=m+1 \longrightarrow f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m+1}]$$

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m+1}] =$$

$$\frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+m+1}] - f[x_k, \dots, x_{k+m}]}{x_{k+m+1} - x_k}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta^m f_{k+1}}{m!\,h^m} - \dfrac{\Delta^m f_k}{m!\,h^m}}{(m+1)h} = \frac{\Delta^m (f_{k+1} - f_k)/m!\,h^m}{(m+1)h} = \frac{\Delta^{m+1} f}{(m+1)!\,h^{m+1}}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{\Delta f_0}{h}, \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}, \dots,$$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n} \qquad x - x_0 = sh$$

$$x_1 = x_0 + h \longrightarrow (x - x_1) = x - x_0 - h = sh - h = (s-1)h$$

$$x_2 = x_1 + h \longrightarrow (x - x_2) = (x - x_1 - h) = (s-2)h$$

$$x - x_{n-1} = (s-(n-1))h = (s-n+1)h$$

$$p(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)\Delta^n f}{n!}$$

تمرین) درون یاب پیشروی نیوتن را بیابید

خطای چند جمله‌ای درون یاب پیشروی نیوتن

خطای درون یابی (نیوتن و لاگرانژ) به صورت:

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x))$$

با فرض هم فاصله بودن x_i ها و با فرض این که $s = \frac{x-x_0}{h}$ خواهیم داشت

$$E(x) = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\eta(x))$$

مثال) با استفاده از داده‌های جدول $f(0.3)$ را بیابید.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	0	0.199	0.389	0.565	0.717

x	f				
0	0				
0.2	0.199	0.199			
0.4	0.389	0.190	-0.009		
0.6	0.565	0.176	-0.014	-0.005	
0.8	0.717	0.152	-0.024	-0.010	-0.005

$x_0 = 0 \qquad f(0.3) = ? \qquad x = 0.3$

$$S = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.3 - 0}{0.2} = 1.5$$

$$f(0.3) = p(0.3) = 0 + (1.5)(0.199) + \frac{(1.5)\times(0.5)}{2}(-0.009)$$

$$+ \frac{(1.5)(-0.5)(-0.5)}{6}(-0.005) + \frac{(1.5)\times(0.5)\times(-0.5)(-1.5)}{24}(-0.005)$$

$$= 0.295$$