

بسمه تعالی

ادامه فصل دوم

ترانسفورماتورها

سیستم پریونیت برای ترانسفورماتور سه فاز

معمولا کل ولت-آمپر سه فاز به عنوان مبنا انتخاب می شود. در این صورت مقدار مبنای هر یک از ترانسفورماتورها:

$$S_{1\phi,b} = \frac{S_b}{3}$$

$$I_{\phi,b} = \frac{S_{1\phi,b}}{V_{\phi,b}} = \frac{S_b}{3V_{\phi,b}}$$

$$Z_b = \frac{V_{\phi,b}^2}{S_{1\phi,b}} = \frac{3V_{\phi,b}^2}{S_b}$$

کمیت‌های خط را هم به صورت پریونیت می توان نمایش داد. رابطه بین ولتاژ مبنای خط و ولتاژ مبنای فاز به نوع اتصال سیم پیچی ها بستگی دارد:

$$\Delta : \quad V_{L,b} = V_{\phi,b}$$

$$Y : \quad V_{L,b} = \sqrt{3}V_{\phi,b}$$

$$I_{L,b} = \frac{S_b}{\sqrt{3}V_{L,b}}$$



A 50 kVA 13800/208 V Δ -Y distribution transformer has a resistance of 1 percent & a reactance of 7 percent per unit

(a) what is transformer's phase impedance referred to H.V. side?

(b) Calculate this transformer's voltage regulation at full load and 0.8 PF lagging using the calculated high-side impedance

(c) Calculate this transformer's voltage regulation under the same conditions, using the per-unit system



Solution

(a) The high-voltage side of this transformer has a base line voltage of 13,800 V and a base apparent power of 50 kVA. Since the primary is Δ -connected, its phase voltage is equal to its line voltage. Therefore, its base impedance is

$$\begin{aligned} Z_{\text{base}} &= \frac{3(V_{\phi, \text{base}})^2}{S_{\text{base}}} \\ &= \frac{3(13,800 \text{ V})^2}{50,000 \text{ VA}} = 11,426 \Omega \end{aligned}$$

The per-unit impedance of the transformer is

$$Z_{\text{eq}} = 0.01 + j0.07 \text{ pu}$$

so the high-side impedance in ohms is

$$\begin{aligned} Z_{\text{eq}} &= Z_{\text{eq,pu}} Z_{\text{base}} \\ &= (0.01 + j0.07 \text{ pu})(11,426 \Omega) = 114.2 + j800 \Omega \end{aligned}$$



(b) To calculate the voltage regulation of a three-phase transformer bank, determine the voltage regulation of any single transformer in the bank. The voltages on a single transformer are phase voltages, so

$$VR = \frac{V_{\phi P} - aV_{\phi S}}{aV_{\phi S}} \times 100\%$$

The rated transformer phase voltage on the primary is 13,800 V, so the rated phase current on the primary is given by

$$I_{\phi} = \frac{S}{3V_{\phi}}$$

The rated apparent power $S = 50$ kVA, so

$$I_{\phi} = \frac{50,000 \text{ VA}}{3(13,800 \text{ V})} = 1.208 \text{ A}$$



The rated phase voltage on the secondary of the transformer is $208 \text{ V} / \sqrt{3} = 120 \text{ V}$. When referred to the high-voltage side of the transformer, this voltage becomes $V'_{\phi S} = aV_{\phi S} = 13,800 \text{ V}$. Assume that the transformer secondary is operating at the rated voltage and current, and find the resulting primary phase voltage:

$$\begin{aligned} V_{\phi P} &= aV_{\phi S} + R_{eq}I_{\phi} + jX_{eq}I_{\phi} \\ &= 13,800 \angle 0^{\circ} \text{ V} + (114.2 \, \Omega)(1.208 \angle -36.87^{\circ} \text{ A}) + (j800 \, \Omega)(1.208 \angle -36.87^{\circ} \text{ A}) \\ &= 13,800 + 138 \angle -36.87^{\circ} + 966.4 \angle 53.13^{\circ} \\ &= 13,800 + 110.4 - j82.8 + 579.8 + j773.1 \\ &= 14,490 + j690.3 = 14,506 \angle 2.73^{\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \text{VR} &= \frac{V_{\phi P} - aV_{\phi S}}{aV_{\phi S}} \times 100\% \\ &= \frac{14,506 - 13,800}{13,800} \times 100\% = 5.1\% \end{aligned}$$



(c) In the per-unit system, the output voltage is $1 \angle 0^\circ$, and the current is $1 \angle -36.87^\circ$. Therefore, the input voltage is

$$\begin{aligned} V_P &= 1 \angle 0^\circ + (0.01)(1 \angle -36.87^\circ) + (j0.07)(1 \angle -36.87^\circ) \\ &= 1 + 0.008 - j0.006 + 0.042 + j0.056 \\ &= 1.05 + j0.05 = 1.051 \angle 2.73^\circ \end{aligned}$$

The voltage regulation is

$$VR = \frac{1.051 - 1.0}{1.0} \times 100\% = 5.1\%$$

Of course, the voltage regulation of the transformer bank is the same whether the calculations are done in actual ohms or in the per-unit system.

تبدیل سه فاز یا استفاده از دو ترانسفورماتور

❖ گاهی بجای استفاده از سه ترانسفورماتور تکفاز برای ایجاد توان سه فاز فقط از دو ترانسفورماتور استفاده می شود.

❖ در محلهایی که سه خط توان در دسترس نیست. مثل مناطق روستایی دورافتاده که میزان تقاضا آنقدر نیست که هزینه کشیدن خط سوم توجیه اقتصادی داشته باشد.

❖ در تمام روشهایی که برای تولید توان سه فاز از خط دوفاز استفاده می شود، توانایی ترانسفورماتور از لحاظ توان کاهش می یابد.

❖ بعضی از اتصالات مهم دو ترانسفورماتوری:

➤ اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

➤ اتصال ستاره باز - مثلث باز

➤ اتصال اسکات T

➤ اتصال سه فاز T

اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

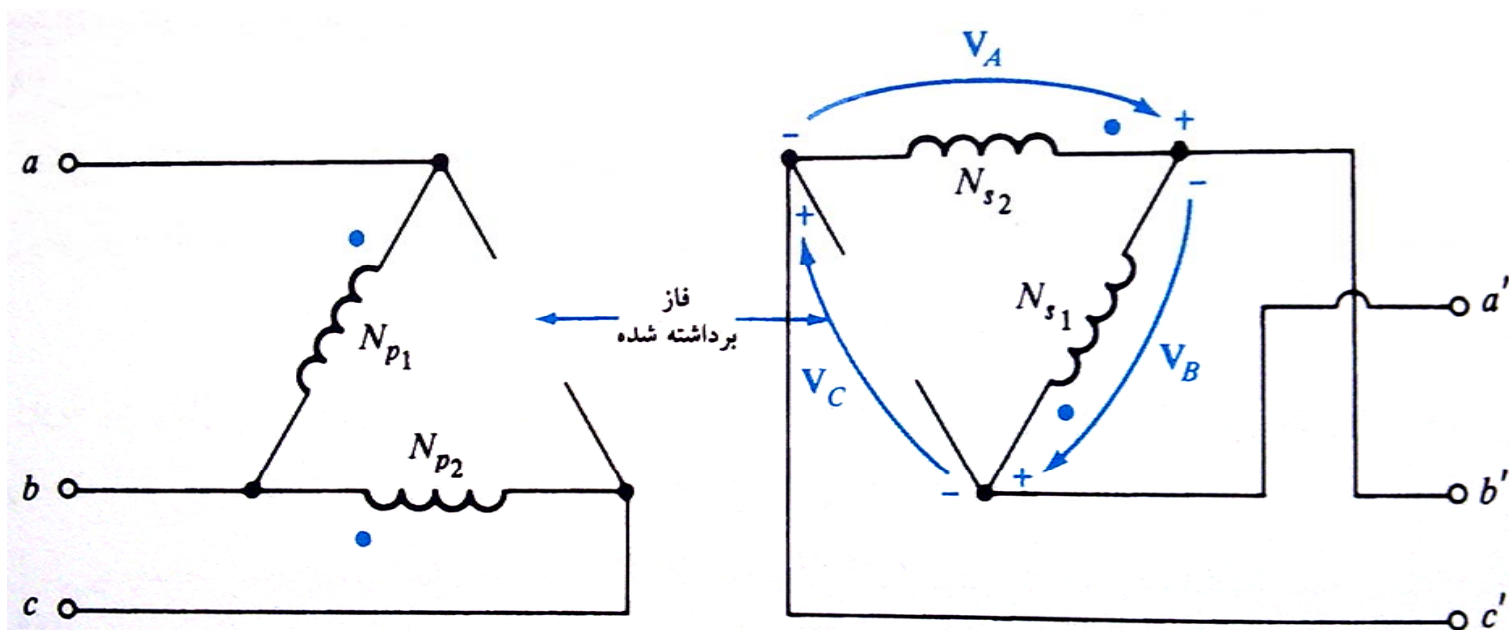
در ترانسفورماتوری که **مثلث - مثلث** بسته شده:

❖ در صورت بروز خطا در یک فاز

❖ در صورت نیاز به تعمیر در یک فاز

❖ در صورت عدم نیاز به استفاده از سه ترانس تکفاز

از اتصال **مثلث باز** استفاده می شود.

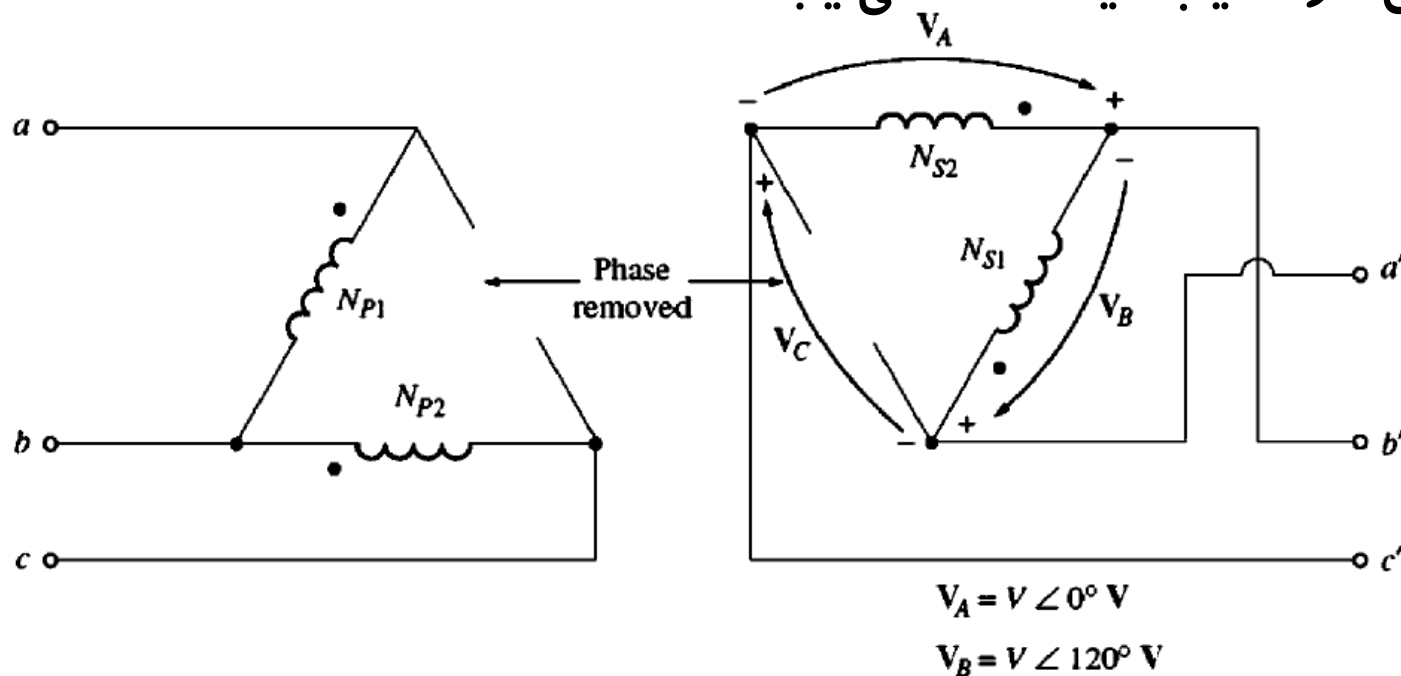


اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

اگر ولتاژهای باقیمانده V_A و V_B باشند، ولتاژ دو سر فاصله خالی متعلق به سیم پیچی سوم:

$$V_C = -V_A - V_B = -V \angle 0^\circ - V \angle -120^\circ = V \angle 120^\circ$$

این دقیقاً همان ولتاژی است که در صورت وجود ترانسفورماتور سوم باید وجود می داشت. فاز C را گاهی **فاز شبج** می نامند. بنابراین اتصال مثلث باز، شکل گرفتن یک ترانسفورماتور سه فاز با دو ترانسفورماتور تنها را ممکن می سازد و انتقال مقداری توان حتی با برداشتن فاز آسیب دیده ادامه می یابد.

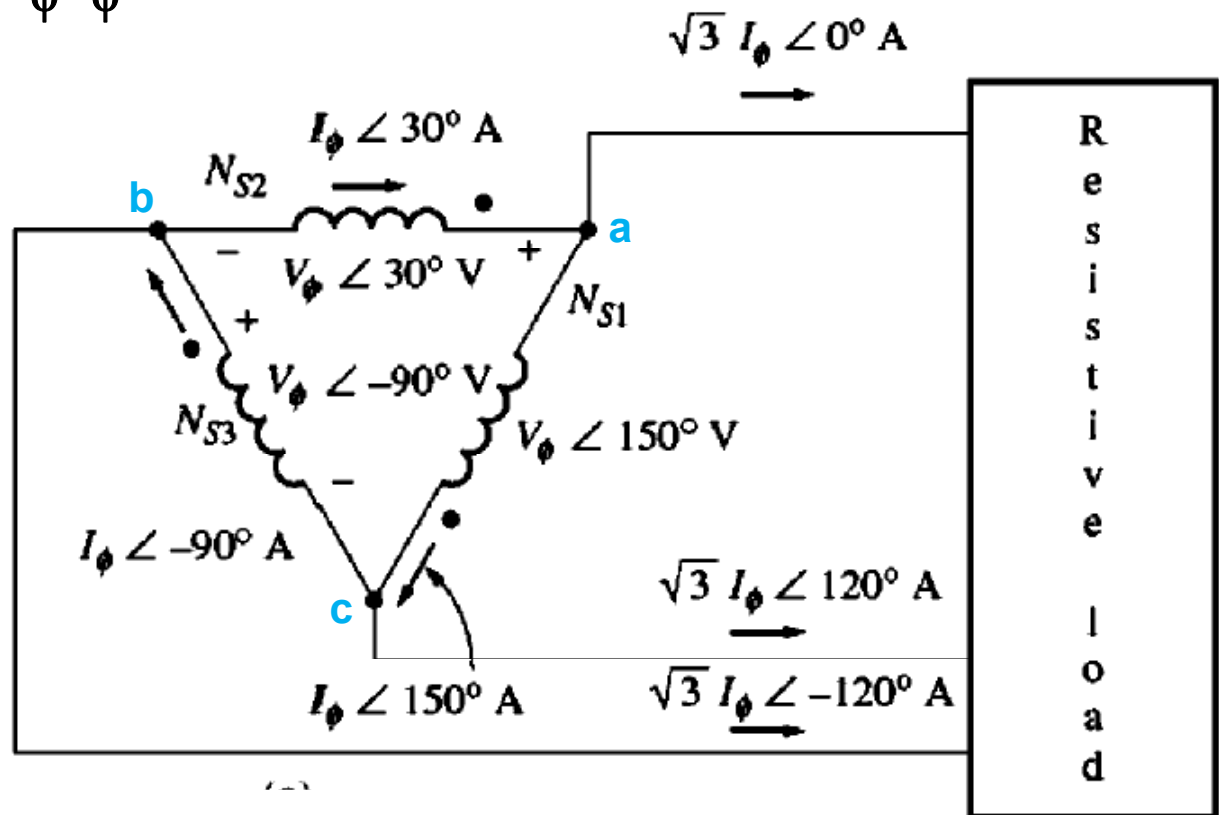
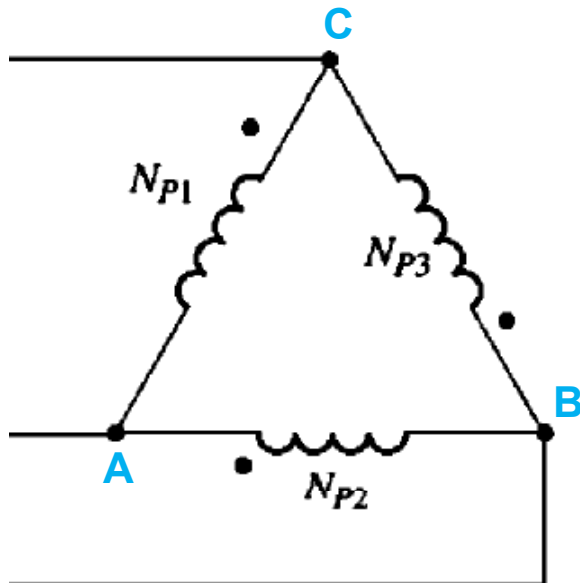


اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

با برداشتن یکی از سه ترانسفورماتور، این مجموعه چه توانی را می تواند فراهم کند؟

در اتصال مثلث - مثلث با فرض بار اهمی خالص حداکثر توانی که به بار منتقل می شود:

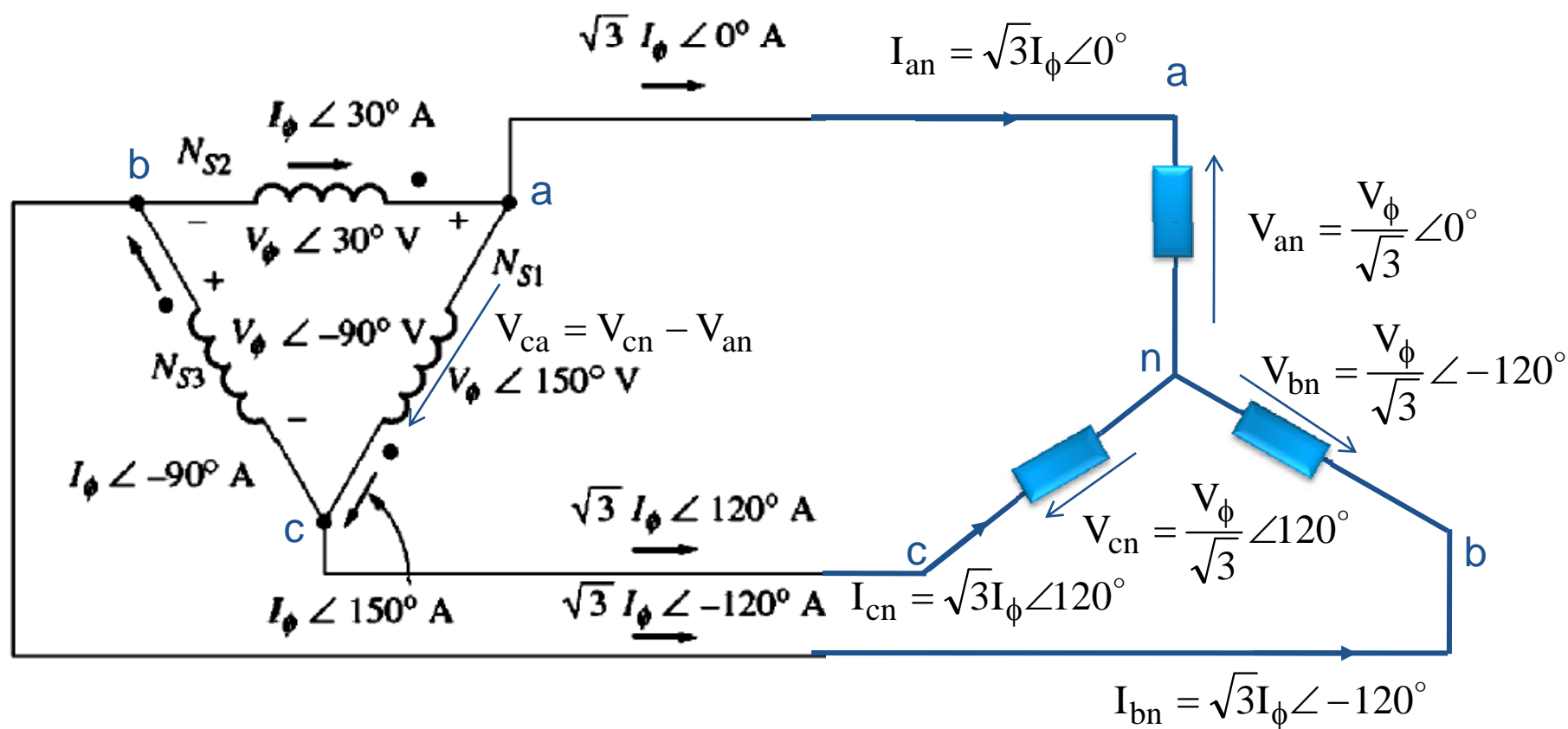
$$P = 3V_{\phi}I_{\phi} \cos \theta = 3V_{\phi}I_{\phi}$$



اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

دامنه ولتاژ فاز ترانس: V_ϕ

دامنه جریان فاز ترانس: I_ϕ



$$P_{3\phi} = 3V_\phi I_\phi \cos 0^\circ = 3V_\phi I_\phi$$

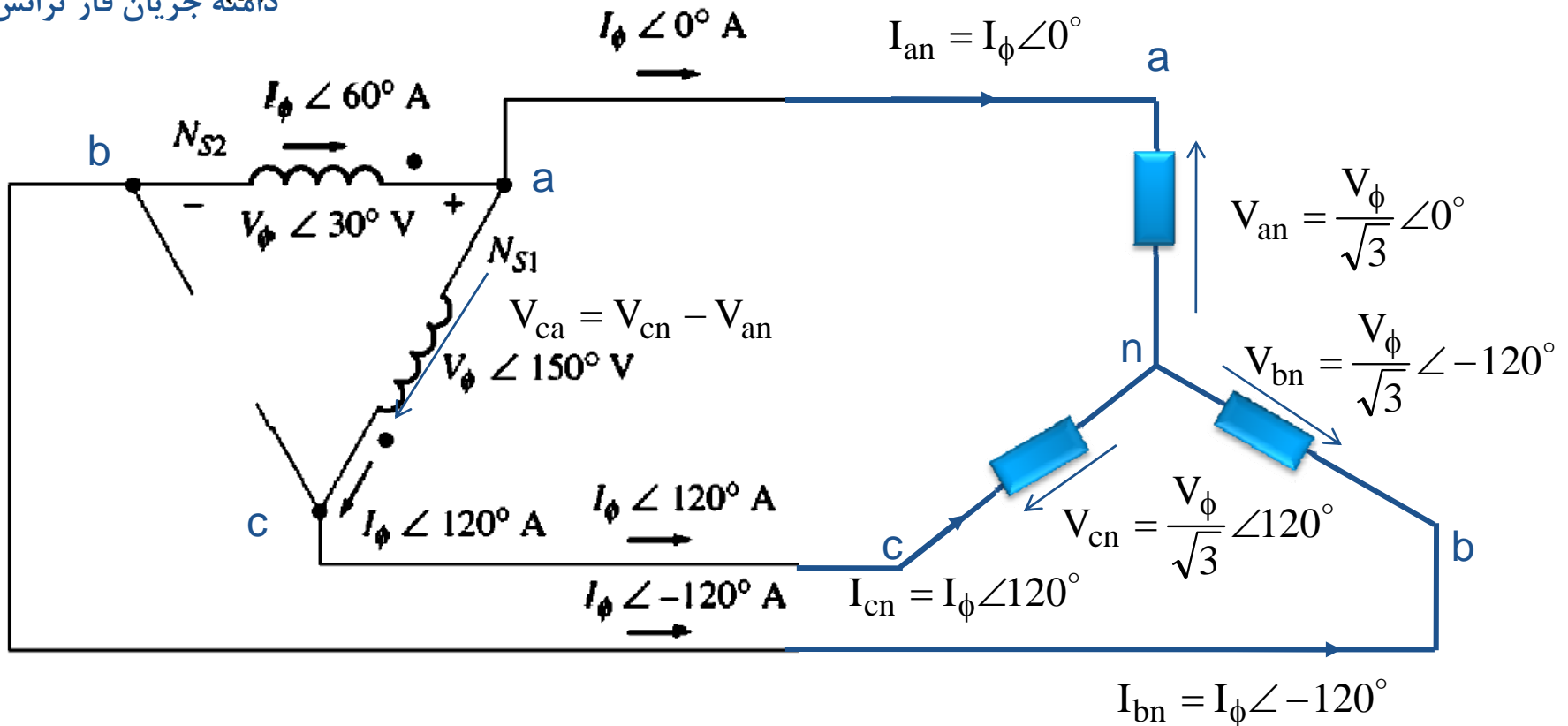
اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

با برداشتن یکی از سه ترانسفورماتور، این مجموعه چه توانی را می تواند فراهم کند؟

در اتصال مثلث باز با فرض بار اهمی خالص، برای محاسبه حداکثر توانی که به بار منتقل می شود؛ باید زاویه ولتاژها و جریانه‌ها در هر فاز مشخص شود:

دامنه ولتاژ فاز ترانس: V_ϕ

دامنه جریان فاز ترانس: I_ϕ

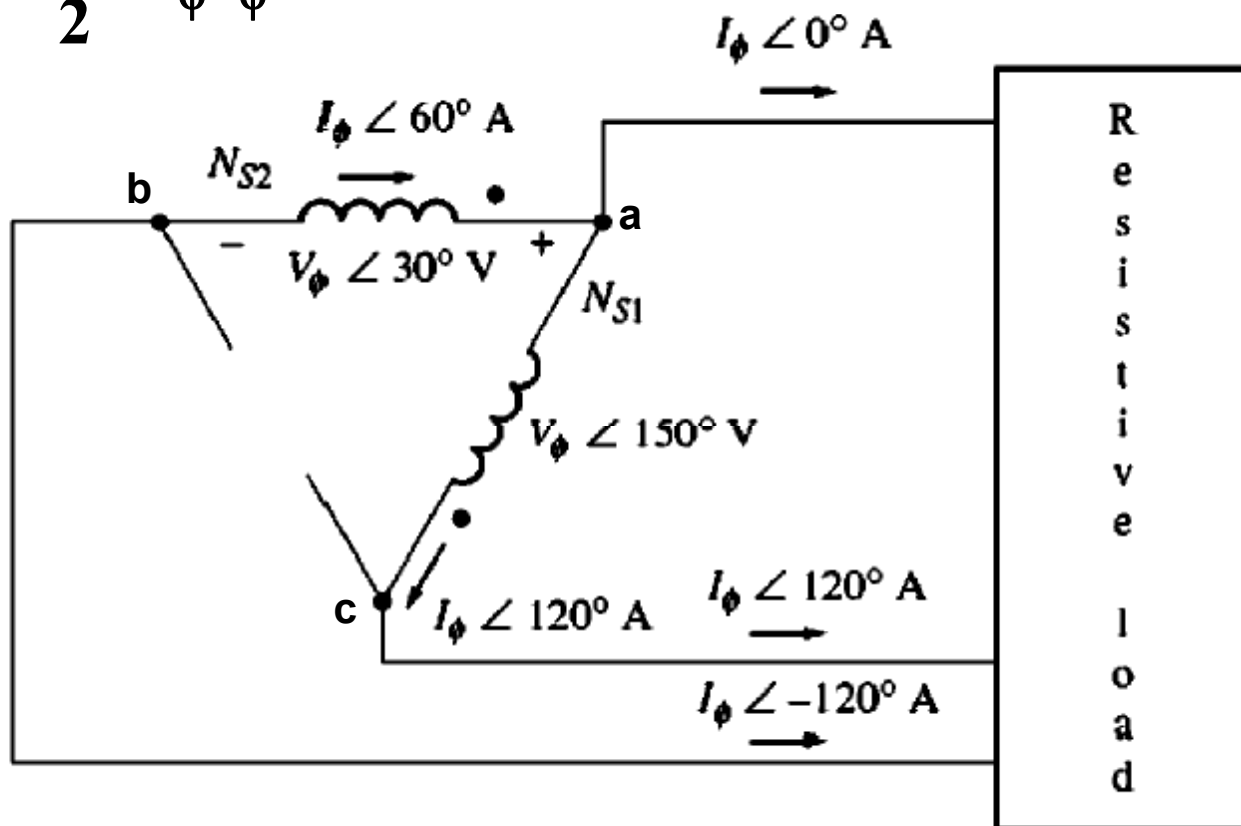
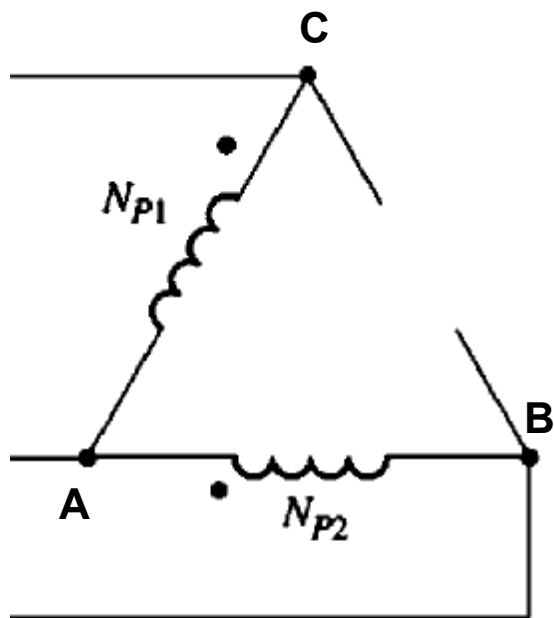


اتصال مثلث باز (V-V) (V-V)

برای ترانس ۱:

$$P_1 = V_\phi I_\phi \cos(150 - 120)$$

$$= V_\phi I_\phi \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} V_\phi I_\phi$$

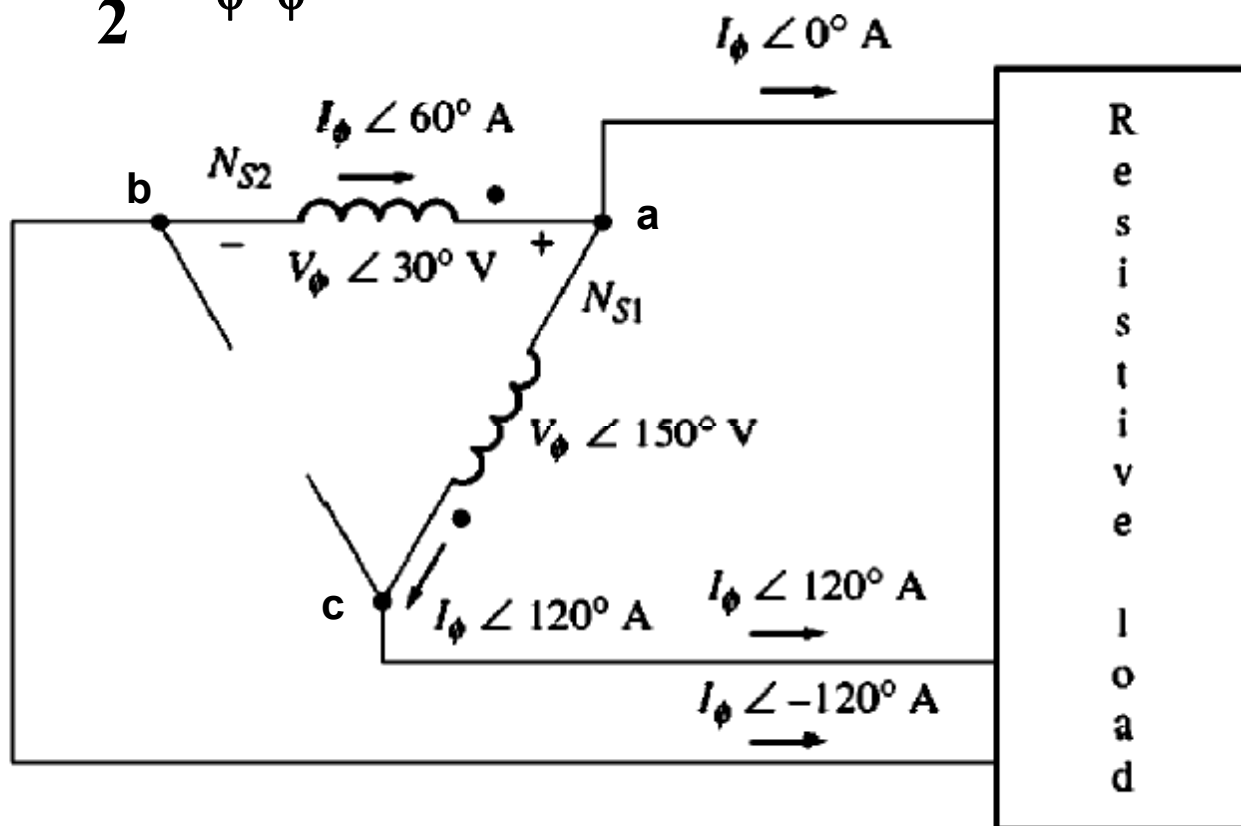
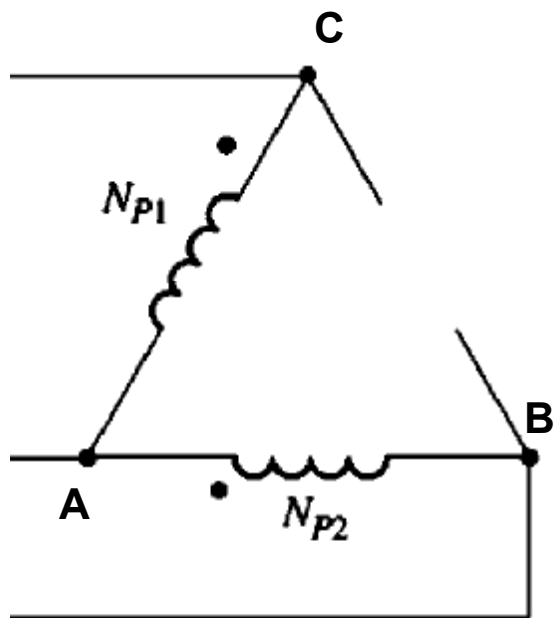


اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

برای ترانس ۲:

$$P_2 = V_\phi I_\phi \cos(30 - 60)$$

$$= V_\phi I_\phi \cos(-30) = \frac{\sqrt{3}}{2} V_\phi I_\phi$$



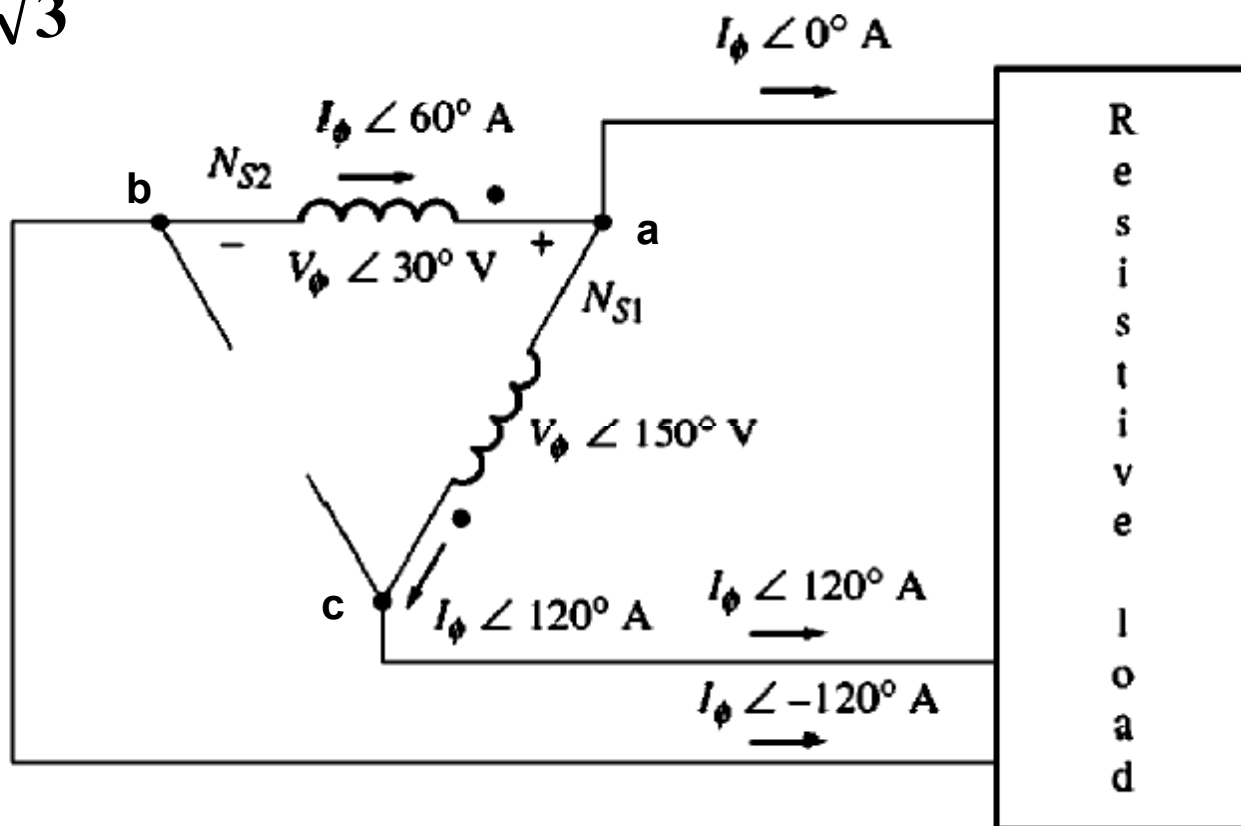
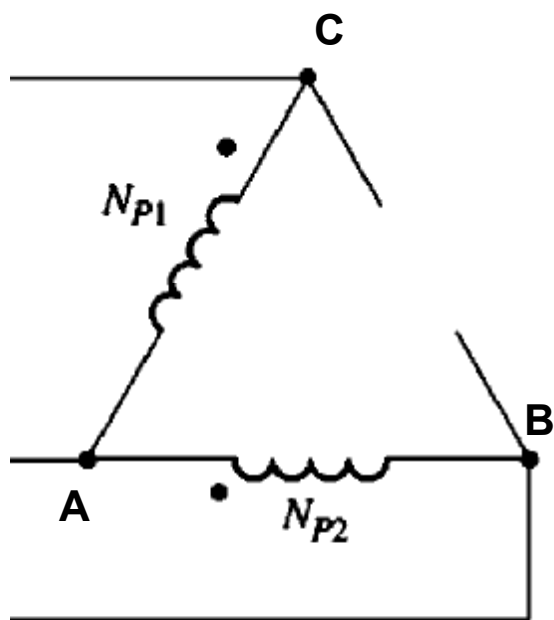
اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

حداکثر توان در اتصال مثلث باز:

$$P_{VV} = P_1 + P_2 = \sqrt{3} V_{\phi} I_{\phi}$$

$$\frac{P_{VV}}{P_{Dd}} = \frac{\sqrt{3} V_{\phi} I_{\phi}}{3 V_{\phi} I_{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$$

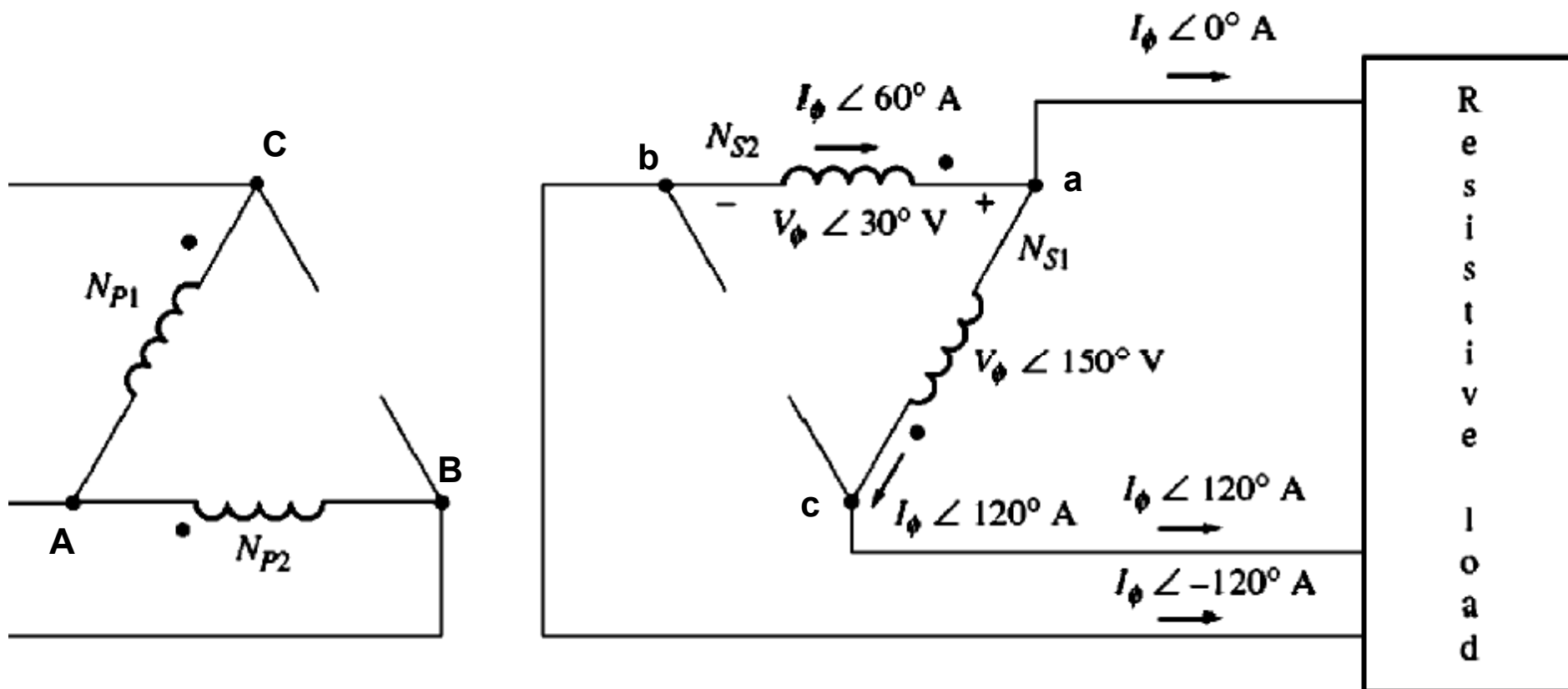
چه بر سر بقیه توان نامی آمده؟



اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

توان راکتیو در اتصال مثلث باز برای ترانسفورماتور اول:

$$Q_1 = V_\phi I_\phi \sin(150 - 120) = 0.5 V_\phi I_\phi$$

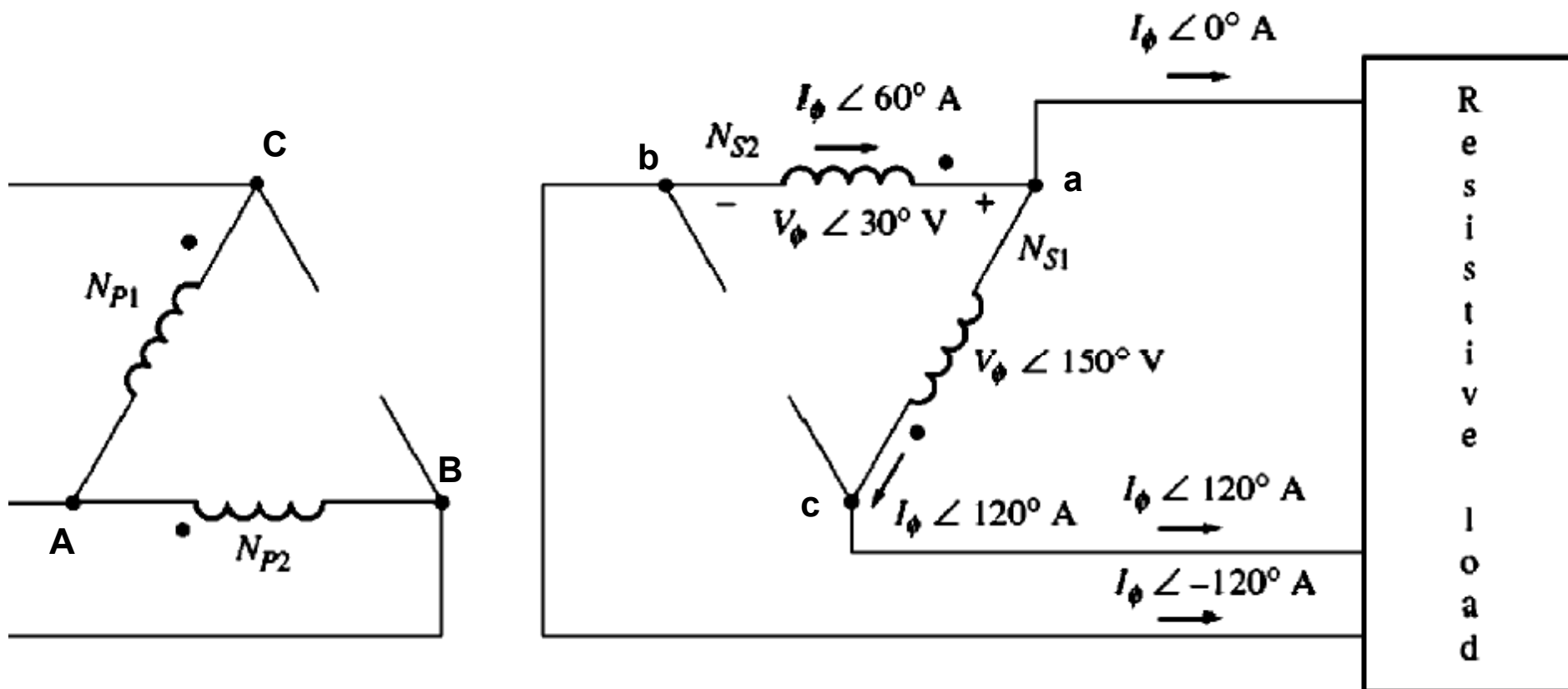


اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

توان راکتیو در اتصال مثلث باز برای ترانسفورماتور دوم:

$$Q_2 = V_\phi I_\phi \sin(30 - 60) = -0.5 V_\phi I_\phi$$

توان راکتیوی که در یک ترانسفورماتور مصرف می شود در دیگری تولید می شود.

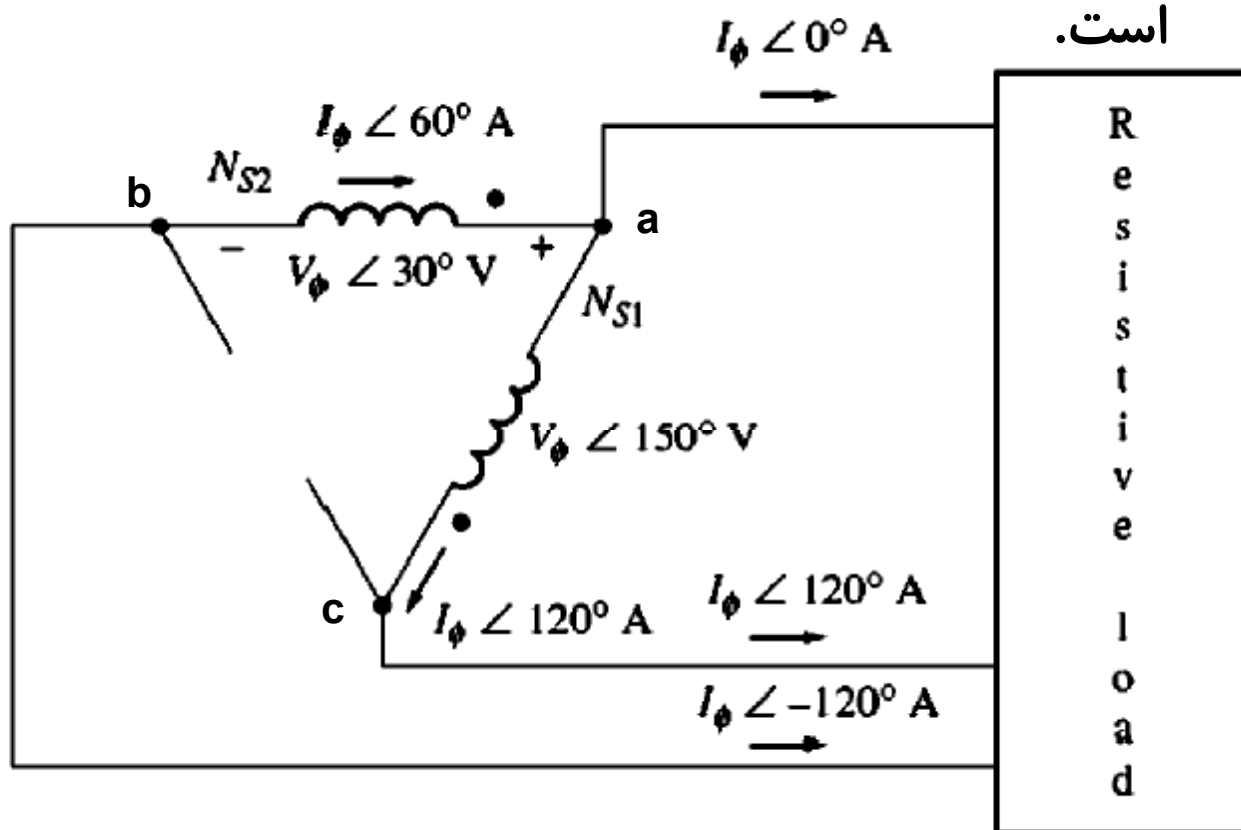
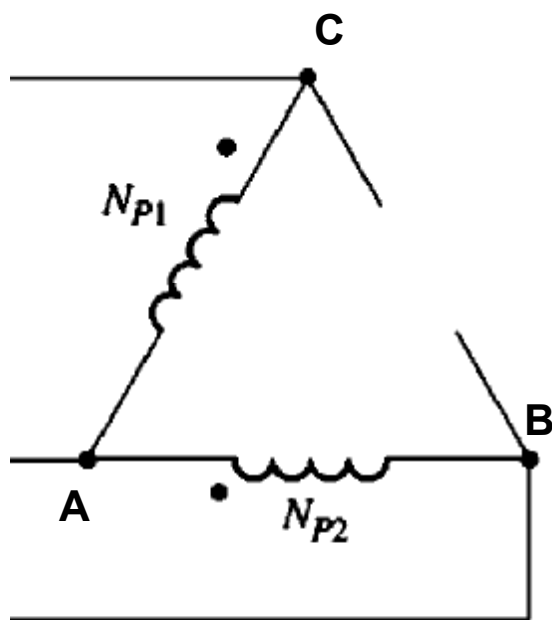


اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

❖ توان راکتیوی که در یک ترانسفورماتور مصرف می شود در دیگری تولید می شود.

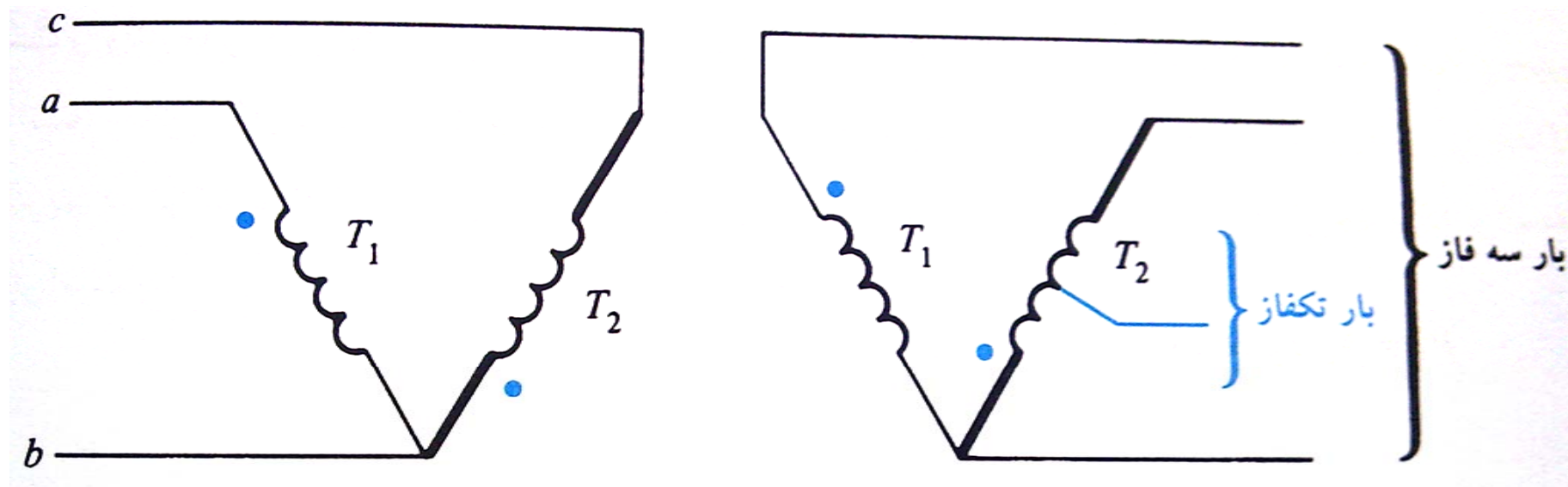
❖ جابجایی توان راکتیو بین سیم پیچها باعث می شود توان خروجی به جای $7/66\%$ توان نامی مجموعه اصلی به $7/57\%$ محدود شود.

❖ توان نامی ترانسفورماتور مثلث باز $6/86\%$ توان نامی دو ترانسفورماتور باقیمانده است.



اتصال مثلث باز (اتصال V-V)

❖ اتصال مثلث باز گاهی برای تامین یک توان سه فاز کوچک، همراه با یک بار تکفاز بزرگ بکار می رود. در این حالت ترانسفورماتور T_2 بسیار بزرگتر از ترانسفورماتور T_1 است.



کمیات نامی ترانسفورماتور و مسائل مربوط به آن

❖ ترانسفورماتورها ۴ کمیت نامی اصلی دارند:

۱: توان ظاهری KVA یا MVA

۲: ولتاژهای اولیه و ثانویه V

۳: فرکانس Hz

۴: مقاومت و راکتانس سری پریونیت

ولتاژ و فرکانس نامی ترانسفورماتور

❖ ولتاژ نامی دو محدودیت را در ترانسفورماتور نشان می دهد:

۱: حفاظت عایق سیم پیچی در برابر شکست الکتریکی ناشی از اعمال اضافه ولتاژ

۲: محدودیت مربوط به منحنی مغناطیس شونده و جریان مغناطیس کننده
ترانسفورماتور

ولتاژ و فرکانس نامی ترانسفورماتور

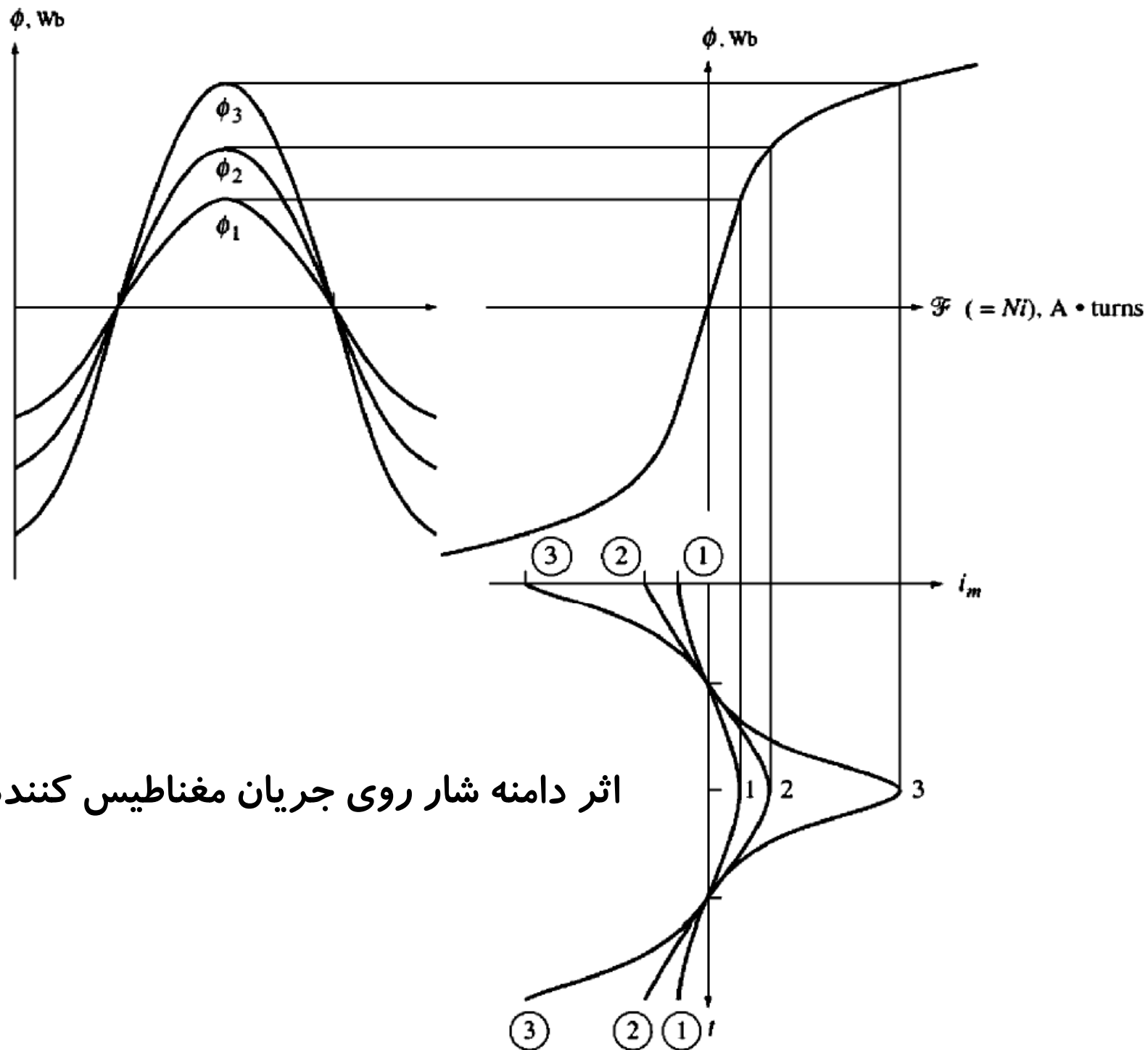
❖ اگر در حالت پایدار ولتاژ $v(t) = V_M \cos \omega t$ به سیم پیچی اولیه اعمال شود، شار ترانسفورماتور:

$$\phi(t) = \frac{1}{N_P} \int v(t) dt = \frac{1}{N_P} \int_0^t V_M \cos \omega t dt$$

$$\phi(t) = \frac{V_M}{\omega N_P} \sin \omega t$$

❖ اگر ولتاژ بکار رفته ۱۰ درصد افزایش یابد، شار ماکزیمم هسته نیز ۱۰ درصد افزایش می یابد.

❖ روی منحنی مغناطیس شوندگی از یک نقطه به بعد برای افزایش ۱۰ درصدی شار، جریان مغناطیس کننده باید بسیار بیشتر از ۱۰ درصد زیاد شود.



اثر دامنه شار روی جریان مغناطیس کننده

ولتاژ و فرکانس نامی ترانسفورماتور

❖ اگر شار هسته را ثابت در نظر بگیریم:

$$\phi_{\max} = \frac{V_{\max}}{\omega N_P}$$

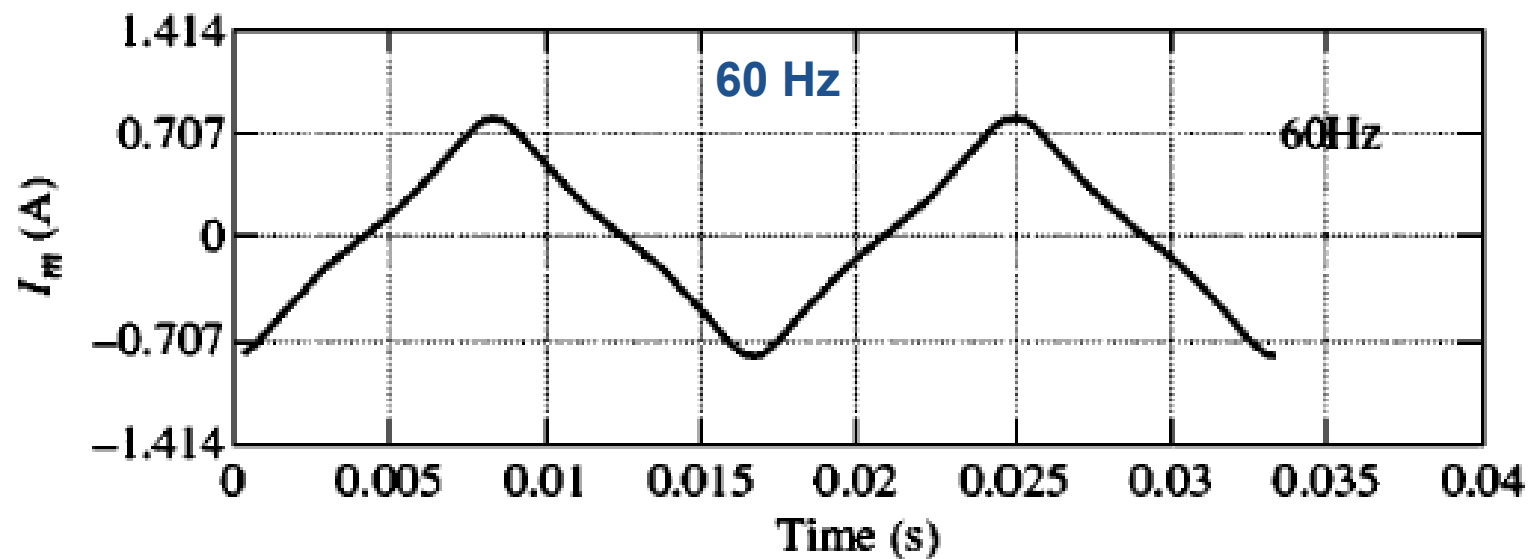
❖ ولتاژ و فرکانس با هم رابطه مشخصی خواهند داشت.

❖ اگر بخواهیم ترانسفورماتور ۶۰ هرتز را در ۵۰ هرتز استفاده کنیم، باید ولتاژ را به اندازه یک ششم کاهش دهیم وگرنه جریان مغناطیس کننده بسیار بزرگ می شود.

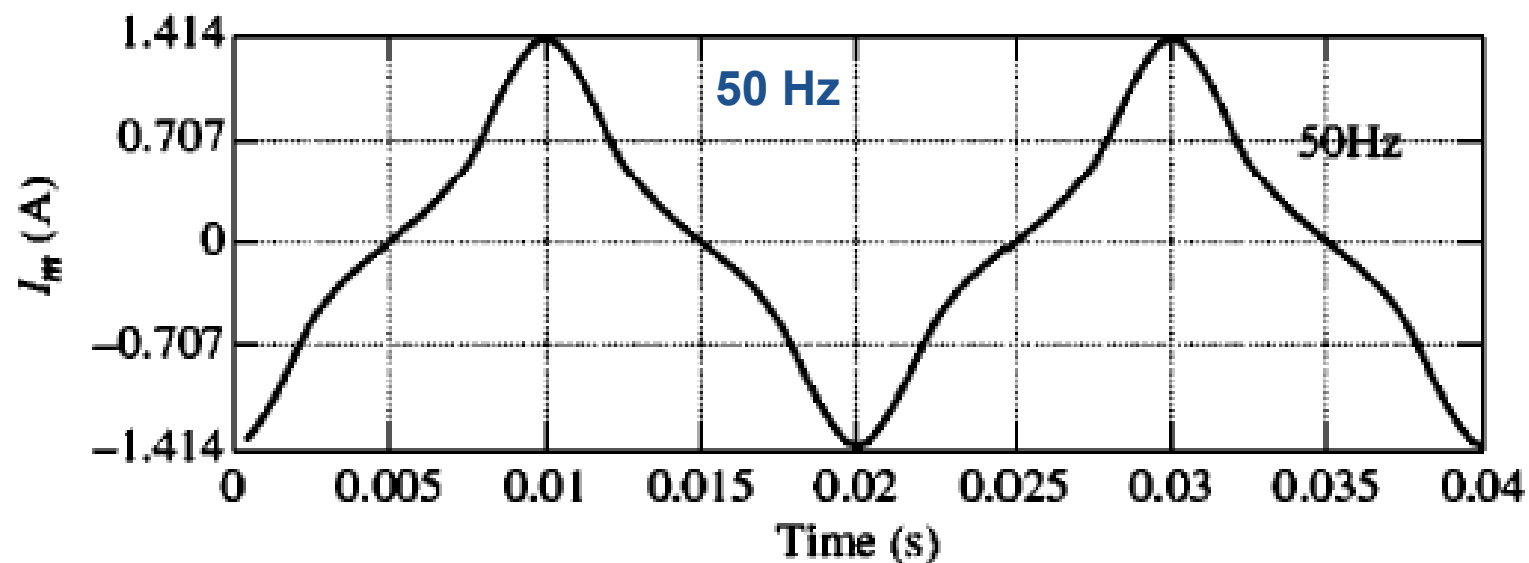
❖ اگر بخواهیم ترانسفورماتور ۵۰ هرتز را در ۶۰ هرتز استفاده کنیم، باید ولتاژ را به اندازه ۲۰٪ افزایش دهیم به شرطی که ولتاژ اضافه مشکل عایقی نداشته باشد.

ولتاژ و فرکانس نامی ترانسفورماتور

در ولتاژ ثابت



(a)



توان ظاهری نامی ترانسفورماتور

- ❖ حد مجاز توان ظاهری نامی، همراه با محدودیت ولتاژ نامی، محدودیت جریان نامی را برای سیم پیچ های ترانسفورماتور مشخص می کند.
- ❖ مقدار جریان از نظر تلفات I^2R اهمیت دارد. این تلفات گرم شدن عایق و کاهش شدید عمر آن را در پی دارد.
- ❖ مفهوم کلیدی توان نامی تعیین ماکزیمم دمای کاری ترانسفورماتور است به نحوی که عمر آن کاسته نشود.
- ❖ اگر ولتاژ ترانسفورماتور کاهش یابد، باید ولت آمپر نامی هم کاهش یابد تا جریان سیم پیچها از مقدار ماکزیمم بیشتر نشود و سیم پیچ ها داغ نشوند.

جریان هجومی ترانسفورماتور

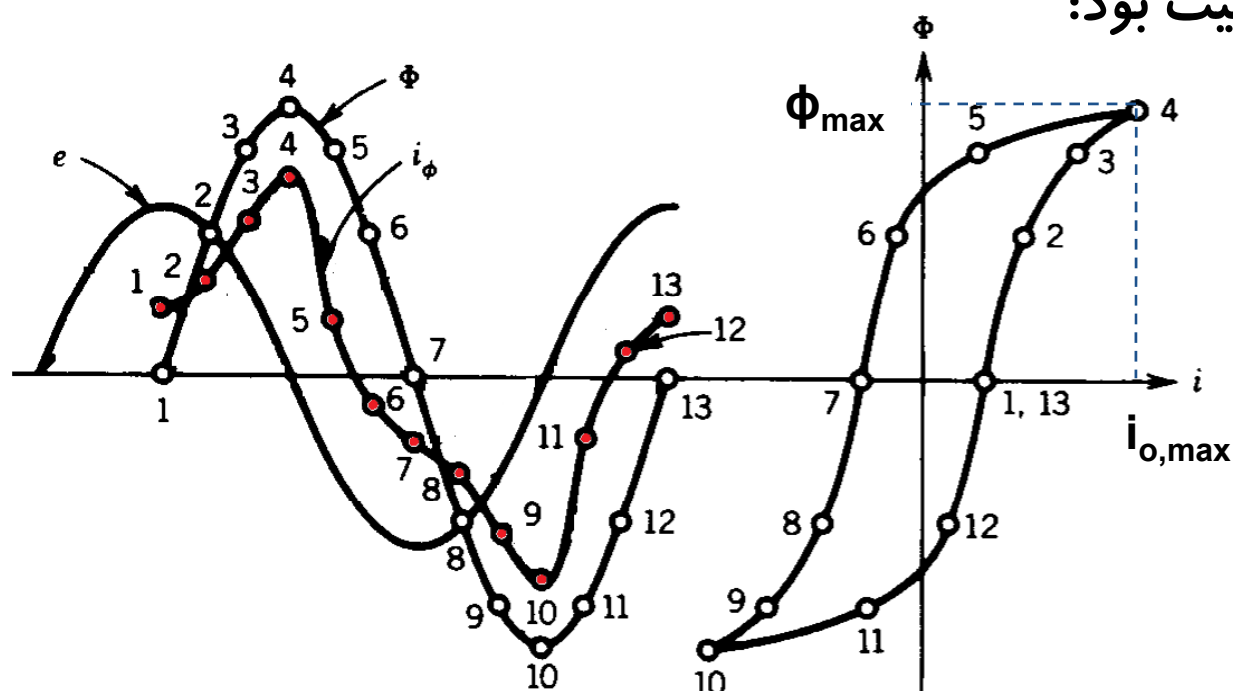
❖ تا اینجا جریان تحریک ترانسفورماتور را در **حالت ماندگار** بدست آوردیم.

❖ فرض کردیم ولتاژ و شار هر دو سینوسی اند و شار به اندازه 90° درجه با ولتاژ

اختلاف فاز دارد. در این حالت جریان تحریک در حالت عادی بدست آمد که

مقدار آن در ترانسفورماتوری که به ازای حداکثر چگالی شار $1/4$ تسلا طراحی

شده در حدود $0.5/0$ پریونیت بود:



وقتی ولتاژی به ترانسفورماتور اعمال می شود، شار و جریان تحریک متناظر با آن قبل از رسیدن به حالت ماندگار، حالت گذرای را طی می کنند. شدت این حالت گذرای کلیدزنی وابسته به لحظه اعمال ولتاژ است.

جریان هجومی ترانسفورماتور

- ❖ وقتی ولتاژی به ترانسفورماتور اعمال می شود، شار و جریان تحریک متناظر با آن قبل از رسیدن به حالت ماندگار، حالت گذرای را طی می کنند.
- ❖ شدت این حالت گذرای کلیدزنی وابسته به لحظه اعمال ولتاژ است.
- ❖ اگر ولتاژ در لحظه وصل به ترانسفورماتور حداکثر مقدار خود را داشته باشد:

$$v(t) = V_{\max} \sin(\omega t + \theta)$$

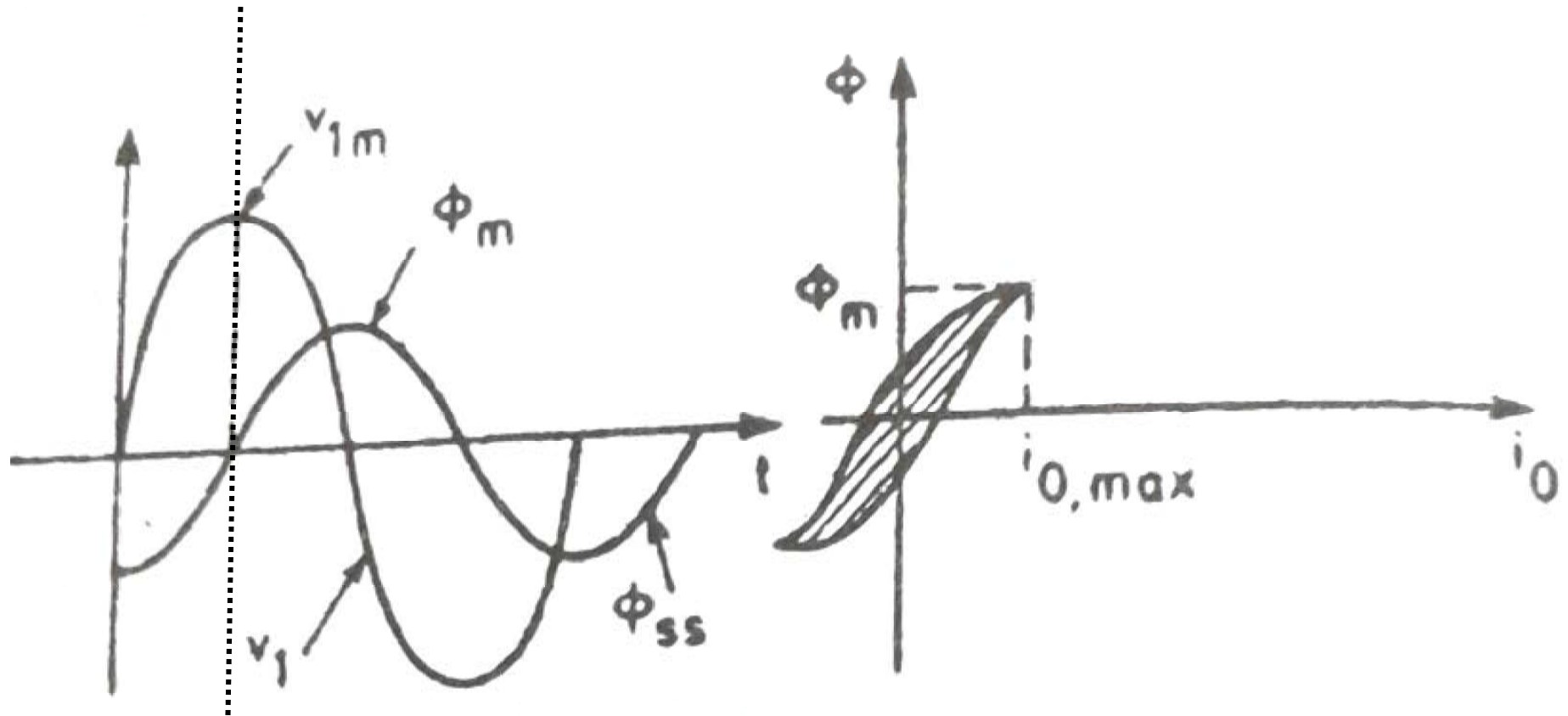
$$v(t) = V_{\max} \sin(\omega t + 90) = V_{\max} \cos \omega t$$

و شار اولیه هسته صفر باشد، شار ماکزیمم با شار ماکزیمم در حالت ماندگار برابر است و مشکلی ایجاد نمی شود:

$$\phi(t) = \frac{1}{N_P} \int_0^t V_{\max} \cos \omega t \, dt = \frac{V_{\max}}{\omega N_P} \sin \omega t \qquad \phi_{\max} = \frac{V_{\max}}{\omega N_P}$$

جریان هجومی ترانسفورماتور

لحظه کلیدزنی

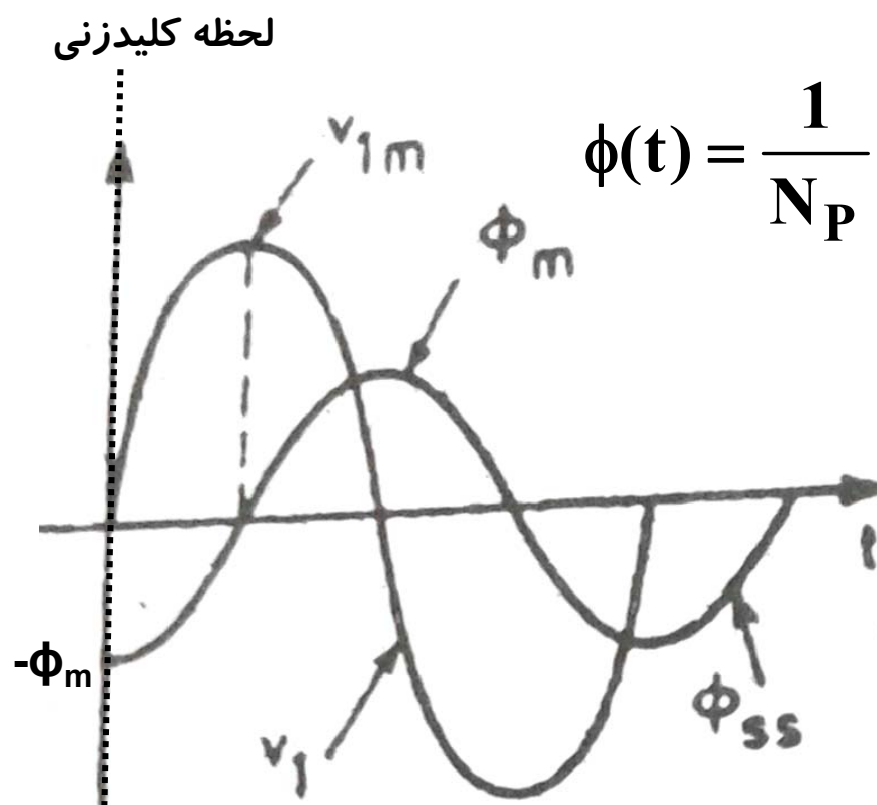


جریان هجومی ترانسفورماتور

❖ اگر ولتاژ در لحظه وصل به صورت زیر باشد یعنی ترانسفورماتور در گذر از صفر ولتاژ برق دار شود:

$$v(t) = V_{\max} \sin \omega t$$

❖ با فرض اینکه شار پسماند صفر باشد:



$$\phi(t) = \frac{1}{N_P} \int_0^t V_{\max} \sin \omega t \, dt = \frac{V_{\max}}{\omega N_P} (1 - \cos \omega t)$$

❖ بنابراین حداکثر مقدار شار :

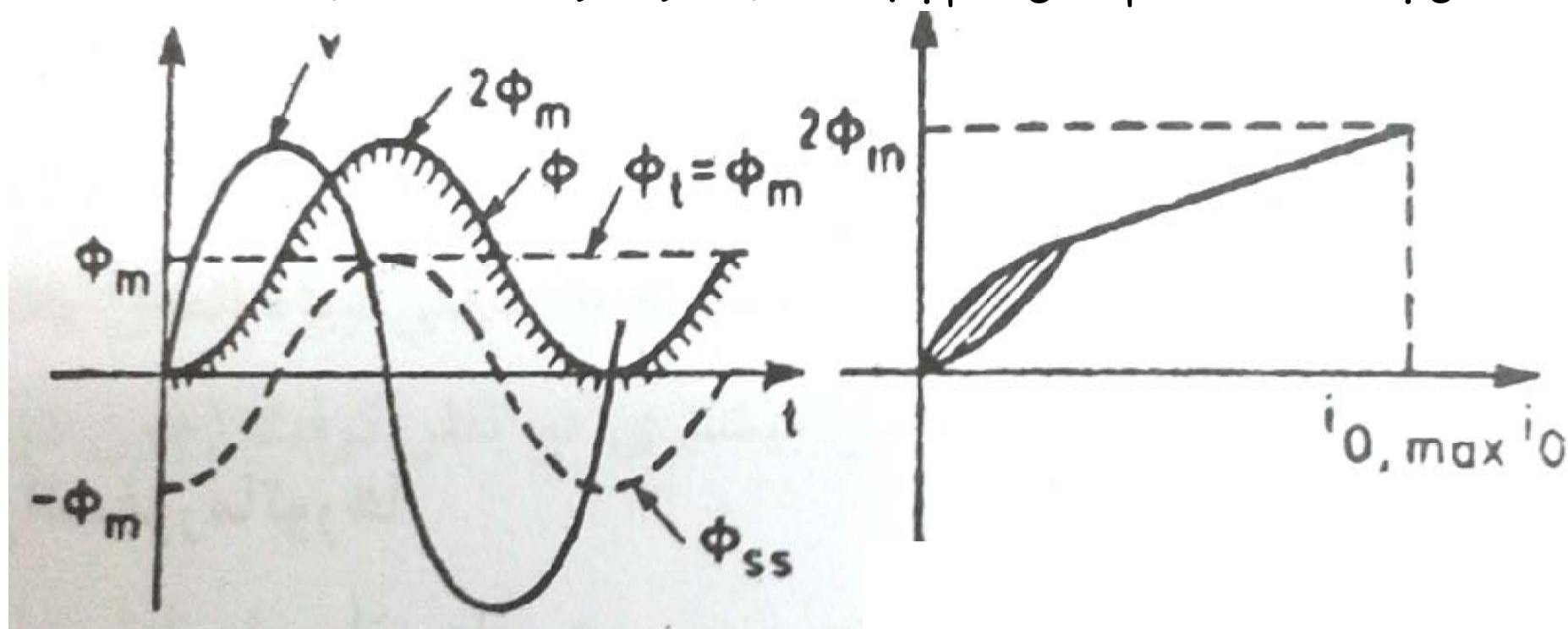
$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{V_{\max}}{\omega N_P} (1 - \cos \omega t) \\ &= \phi_{\max} - \phi_{\max} \cos \omega t \\ \phi'_{\max} &= 2\phi_{\max} \end{aligned}$$

جریان هجومی ترانسفورماتور

❖ حداکثر شار به $2\Phi_m$ می رسد لذا جریان تحریک متناظر با این شار بسیار بزرگ است و هسته در ناحیه اشباع مغناطیسی خواهد بود.

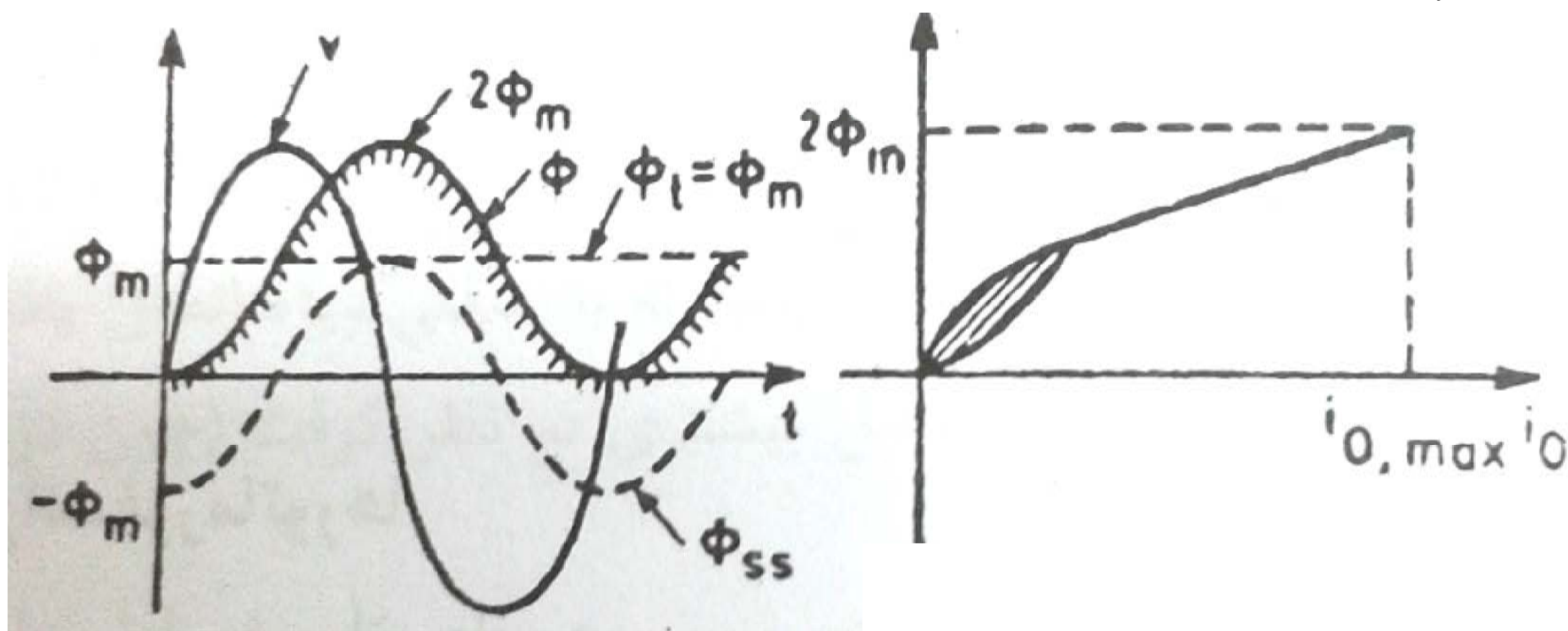
❖ دامنه جریان حاصل حدود ۱۰۰ برابر جریان تحریک در حالت عادی ترانسفورماتور است یعنی حدود ۵ پریونیت و سبب تولید نیروی الکترومغناطیسی بسیار شدیدی می شود.

❖ این پدیده علت محکم بستن سیم پیچهای ترانسفورماتورهای قدرت بزرگ است.



جریان هجومی ترانسفورماتور

- ❖ در پریودهای بعدی شار گذرا به تدریج کاهش می یابد و از بین می رود و شار منتهی به شار حالت ماندگار برابر می شود (چرا؟).
- ❖ به دلیل ثابت زمانی کوچک مدار ترانسفورماتور اثرات اعوجاجی این شار گذرا ممکن است **چندین ثانیه** طول بکشد.
- ❖ به جریان ناشی از حالت گذرای کلیدزنی ترانسفورماتور، **جریان هجومی** گفته می شود.

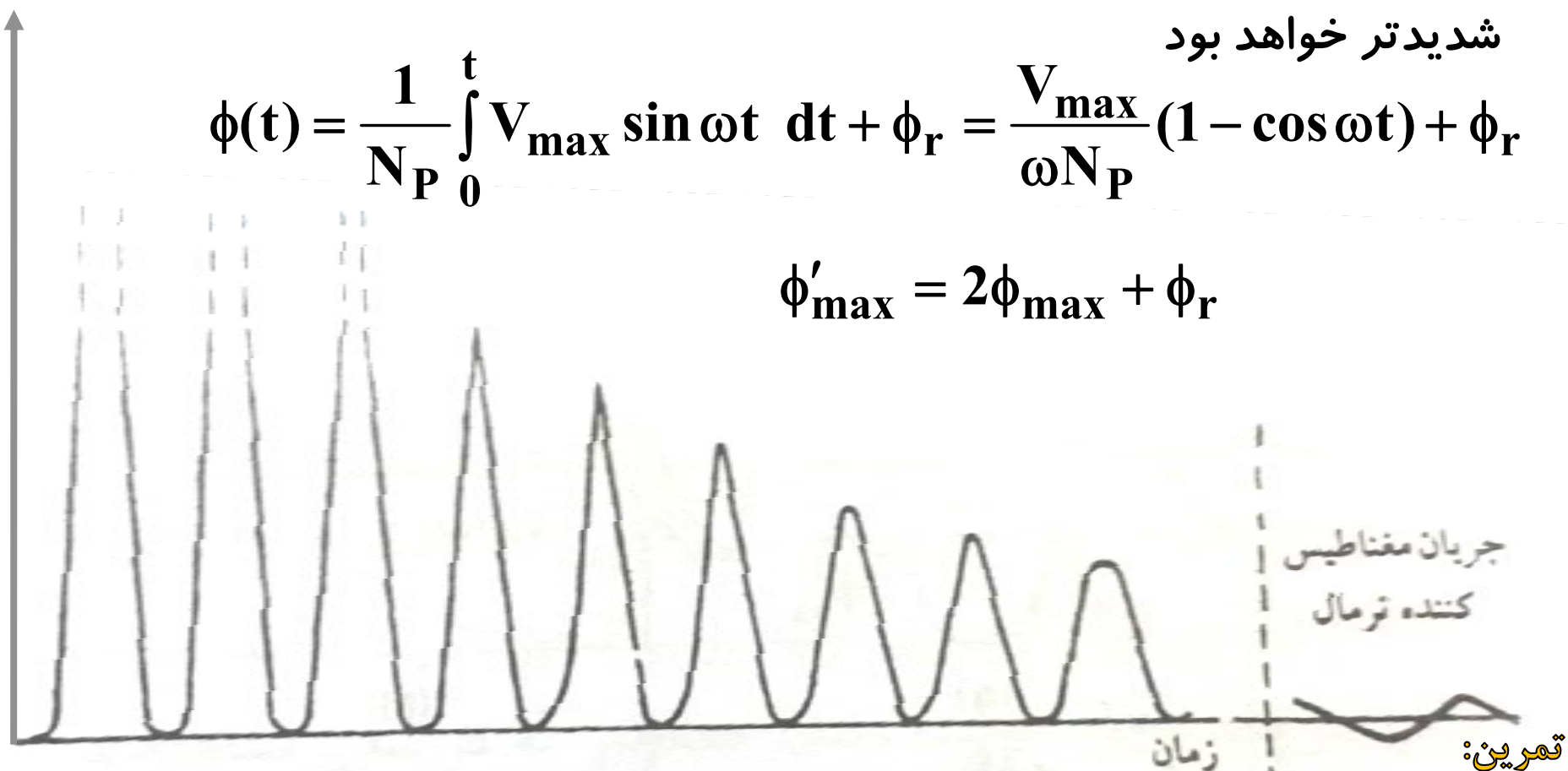


جریان هجومی ترانسفورماتور

❖ در تحلیلهای قبل فرض کردیم، شار پسماند هسته صفر است در حالیکه به هر حال به علت تحریک قبلی مقدار شار پسماند وجود دارد. در این شرایط حالت گذرا شدیدتر خواهد بود

$$\phi(t) = \frac{1}{N_P} \int_0^t V_{\max} \sin \omega t \, dt + \phi_r = \frac{V_{\max}}{\omega N_P} (1 - \cos \omega t) + \phi_r$$

$$\phi'_{\max} = 2\phi_{\max} + \phi_r$$



رابطه جریان هجومی را برای ترانسفورماتور قدرت سه فاز محاسبه کنید (اثر زمان کلیدزنی ولتاژ را نشان دهید)

جریان هجومی ترانسفورماتور

❖ به ازای زاویه های ولتاژ بین ۹۰ درجه (که مشکلی ایجاد نمی کند) و صفر درجه (بدترین حالت) مقداری جریان اضافی داریم. معمولاً فاز ولتاژ در لحظه وصل کنترل نمی شود بنابراین در چند تناوب اول بعد از وصل ترانسفورماتور به خط، جریان هجومی بزرگی وجود خواهد داشت.

❖ ترانسفورماتور و سیستم قدرتی که به آن متصل است باید بتوانند این جریان را تحمل کنند.

❖ مشکلات جریان هجومی:

۱: سیستم حفاظتی ممکن است آن را با اتصال کوتاه اشتباه بگیرد و فرمان قطع دهد و ترانس زیر بار نرود.

۲: نیرویی که سیم پیچهای ترانسفورماتور به هم وارد می کنند در این حالت بسیار زیاد است و می تواند باعث آسیب بشود.

GENERAL ELECTRIC

3 PHASE	CLASS 0 A	CAUTION—BEFORE OPERATING READ INSTRUCTIONS GEI-79025				65°C RISE	60 HERTZ
SER		KVA	HV	LV	MPG DATE		

BASIC IMPULSE LEVEL

HV WINDING KV

LV WINDING KV

WEIGHTS IN POUNDS

INTERIOR

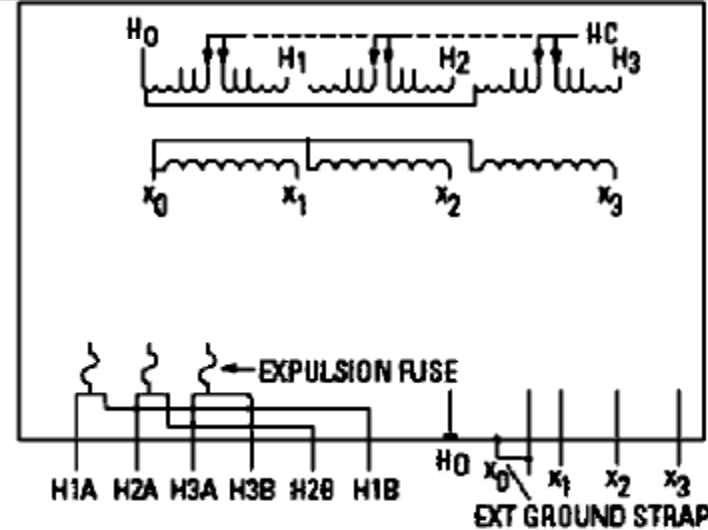
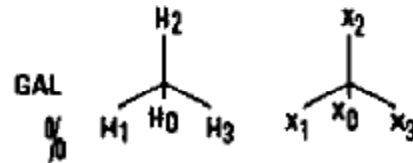
TANK

LIQUID

TOTAL

OH
IMPEDENCE 85°C
RATED VOLTS

VOLTS	TAP
14400	1
14100	2
13800	3
13500	4
13200	5
AT RATED KVA	



DISTRIBUTION TRANSFORMER

CONTAINS NON-PCB AT TIME OF
MANUFACTURE-CERTIFICATION AVAILABLE

NOTES
1. FOR MATERIAL AND NOTES USE A214K01P2.3
2. MUST BE MAINTAINED FROM EDGE OF BAND
TO EDGE OF PLATE

TITLE NAMEPLATE
FIRST MADE FOR DT&D

A6481E718P00

HICKORY, NC MADE IN USA

پلاک مشخصات ترانسفورماتور

ترانسفورماتورهای اندازه گیری

❖ ترانسفورماتور ولتاژ

- ولتاژ اولیه زیاد و ولتاژ ثانویه کم دارد و توان نامی آن بسیار کم است (معمولا 50 KVA و حداکثر 100 KVA).
- هدف آن فراهم کردن نمونه ای از ولتاژ سیستم قدرت برای دستگاههای اندازه گیری و حفاظتی است.
- لازم است بسیار دقیق باشد تا موجب اعوجاج ولتاژهای واقعی نشود.
- از نظر دقت دارای کلاس های مختلفی است که بر اساس کاربرد انتخاب می شود.
- باید $1/2$ برابر ولتاژ نامی را به صورت طولانی مدت تحمل کند و افزایش دمای آن کمتر از 10 درجه باشد.
- در شبکه های زمین نشده $1/9$ ولتاژ نامی را 8 ساعت، در شبکه های زمین شده با مقاومت بزرگ (غیر موثر) 30 ثانیه همین ولتاژ را و در شبکه های زمین شده موثر $1/5$ برابر ولتاژ نامی را 30 ثانیه باید تحمل نماید.

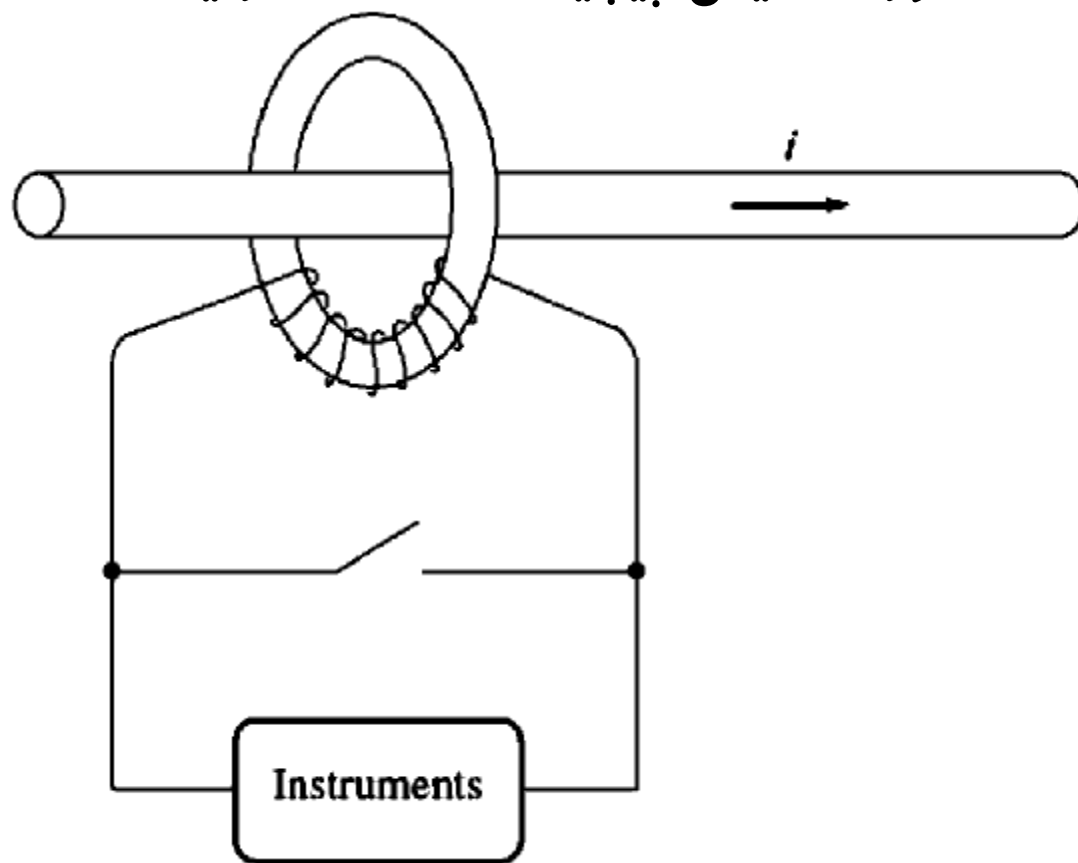
ترانسفورماتورهای اندازه گیری

❖ ترانسفورماتور جریان

➤ از جریان خط نمونه می گیرد و آن را تا سطح ایمن و قابل سنجش پایین می آورد.

➤ یک سیم پیچ ثانویه دارد که حول حلقه فرومغناطیس پیچیده شده است و یک

خط اولیه از وسط آن می گذرد.



➤ حلقه فرومغناطیس نمونه کوچکی از

شار ناشی از خط اولیه را گرفته، آن را

متمرکز می کند. این شار در سیم پیچی

ثانویه ولتاژ و جریانی القا می کند.

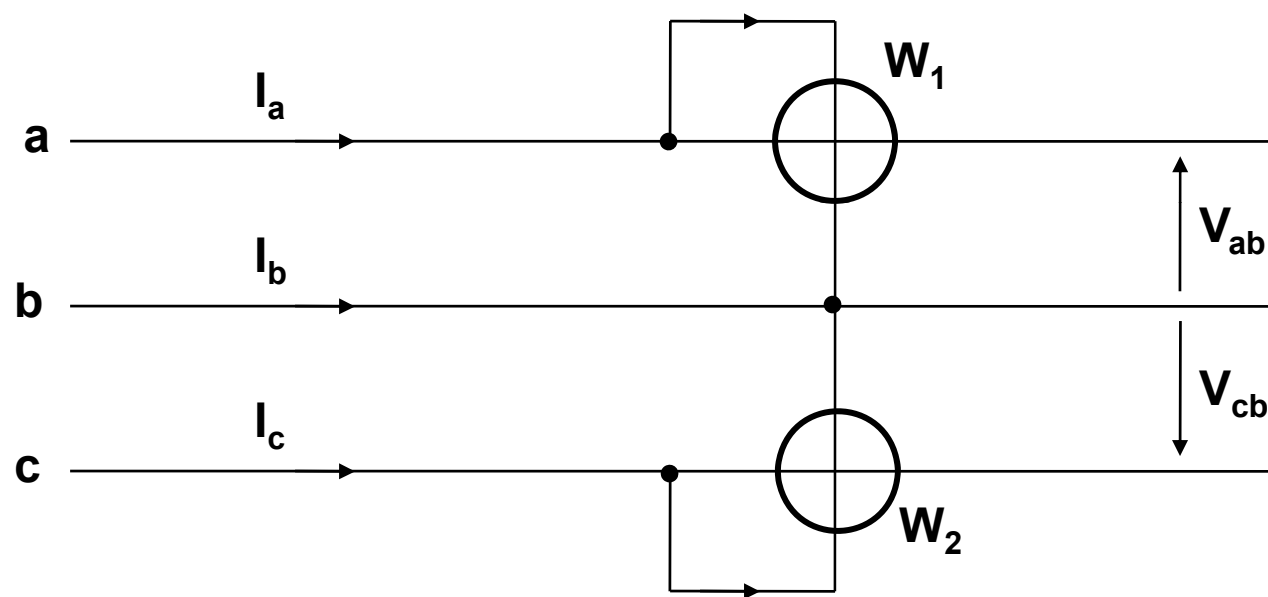
ترانسفورماتورهای اندازه گیری

❖ ترانسفورماتور جریان

- سیم پیچی های ترانسفورماتور جریان تزویج ضعیفی دارند.
- شار متقابل در ترانسفورماتورهای جریان کوچکتر از شار ناشی است.
- همچنان بین جریان بسیار بزرگ اولیه و جریان ثانویه رابطه مستقیمی وجود دارد و CT می تواند نمونه دقیقی از جریان خط را برای مقاصد اندازه گیری یا حفاظتی فراهم کند.
- جریان ثانویه ترانسفورماتورهای جریان معمولا ۵ یا ۱ آمپر است.
- ثانویه ترانسفورماتور جریان همیشه باید اتصال کوتاه باشد چون در صورت باز شدن ثانویه ولتاژ بسیار بزرگی دو سر ثانویه ظاهر می شود (چرا؟)

روش اندازه گیری دو واتمتری

با استفاده از دو واتر می توان توان سه فاز را اندازه گیری کرد:

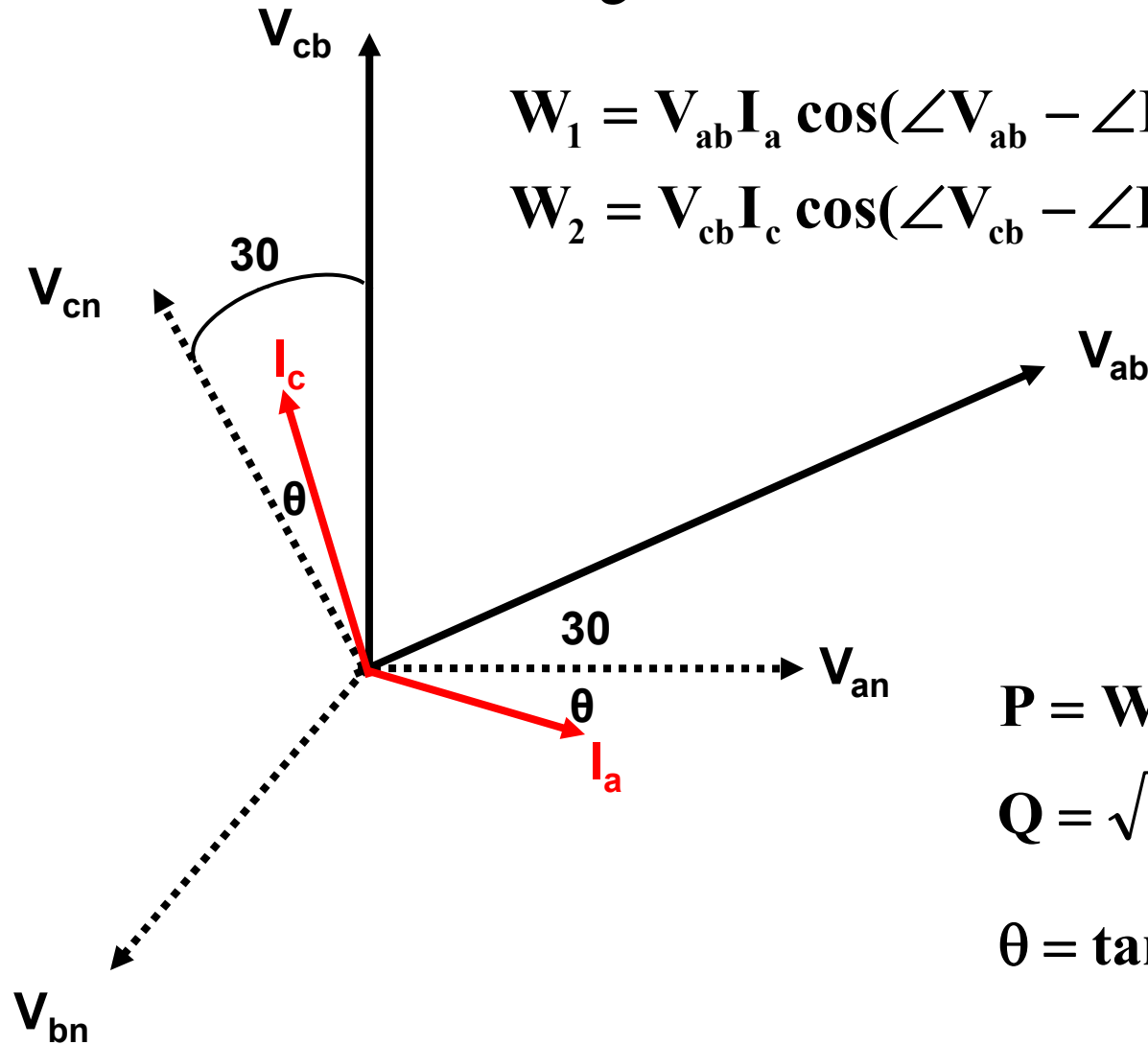


$$W_1 = V_{ab} I_a \cos(\angle V_{ab} - \angle I_a)$$

$$W_2 = V_{cb} I_c \cos(\angle V_{cb} - \angle I_c)$$

روش اندازه گیری دو واتمتری

دیاگرام فازوری ولتاژهای فاز و خط برای یک بار القایی:



$$W_1 = V_{ab} I_a \cos(\angle V_{ab} - \angle I_a) = V_L I_L \cos(\theta + 30)$$

$$W_2 = V_{cb} I_c \cos(\angle V_{cb} - \angle I_c) = V_L I_L \cos(\theta - 30)$$

$$P = W_1 + W_2 = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

$$Q = \sqrt{3} (W_2 - W_1)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{Q}{P} \right)$$