1/5

۲ بررسی معادلات دیفرانسیل [illegible]
بررسی معادلات دیفرانسیل [illegible]

ریاضی مهندسی ۹۳/۱۱/۱۲

تمرین ها : ee.sharif.edu/~banai

پسورد سوالات . ۲۵۷۳۵

آلبرت زاشتاین فصل ۶و۷ روی سایت نگرشی بر معادلات دیفرانسیل معمولی
ص ۴۲۷ تا پایان

مباحث درسی : مسائل مقدار ویژه . توابع متعامد

سری فوریه

انتگرال فوریه

معادلات با مشتقات جزئی ( BVP )

توابع مختلط

- ریاضیات مهندسی انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۹۱ جلیل راشد محصل

- چرچیل نشر دانشگاهی

- توابع مختلط

- Kreyszig Advanced Engineering Mathimatics

«مهم» ۲- متن روی سایت و کتاب «ریاضی مهندسی جلیل راشد» کافی است.

$$A = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} = \sum c_i \hat{e}_i$$

$$\|\vec{A}\|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum a_i b_i$$

$$\|a\| = 1$$

$$\therefore A_x = \hat{x} \cdot A$$

مفهوم تعامد $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow A \perp B$

$$[M] \vec{\underline{A}} = \lambda A$$

عملگر M ← $[M]$، بردار ویژه ← $\vec{A}$، مقدار ویژه ← $\lambda$

۷ هر ماتریس A ای تعداد خاصی

عملگر M دارد.

فرکیب بر توابع تک بعدی:

$f(x), g(x), h(x)$

$x \in [a, b]$

ضرب داخلی $\langle f, g \rangle \stackrel{\Delta}{=} \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

$$\int w(x)\, f g\, dx$$

تابع وزن ← $w(x)$

$\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$

$\langle f,g+h\rangle=\langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle$

$\langle \alpha f,g\rangle=\alpha\langle f,g\rangle$

$f\perp g \longleftrightarrow \langle f,g\rangle=0$

دو تابع متعامد

$\longleftrightarrow \|f\|^2=\langle f,f\rangle$ اندازه تابع

مثال: $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ در بازه $[-\pi,\pi]$ مجموعه متعامد
اما کامل نیست

$$\langle \sin mx,\sin nx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin nx\,dx=\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x-$$

$$-\frac{1}{n+m}\sin(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}=0 \qquad \|\sin nx\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi$$

$$\rightarrow \|\sin nx\|=\sqrt{\pi}$$

مثال مجموعه $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ . $[0,\pi]$ مجموعه متعامد کامل

مثال ۳ : $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad [-\pi, \pi]$

متعامد کامل

$\langle 1, \cos nx \rangle = 0$

$\langle 1, \sin nx \rangle = 0$

$\langle \cos nx, \sin mx \rangle = 0$

$\langle \cos nx, \cos mx \rangle = 0$

$\langle \sin mx, \sin nx \rangle = 0$

مثال ۱ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$[0, c]$ $\quad \mathcal{L}y = -\lambda y$

$$\mathcal{L} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$y(0) = 0$

$y(c) = 0$

۳ حالت

$\lambda > 0 \longrightarrow \lambda = k^2 \quad k > 0 \quad y'' + k^2 y = 0$

$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$\lambda = 0$

$\lambda < 0$

$y(0) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$

$y(c) = 0 \longrightarrow c_2 \sin kc = 0 \qquad c_2 \neq 0$ ?

$\sin kc = 0 \longrightarrow kc = n\pi \qquad k_n = \frac{n\pi}{c}$ توابع ویژه

با توجه به $y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ و صفر شدن $c_1$ ?

مقادیر ویژه $\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2c}\right)^2} \qquad y_n = c_n \sin \frac{n\pi}{c} x \qquad n = 1, ۲, \ldots$

$\lambda = 0$ $\quad y = c_1 + c_2 x$

$y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

$\rightarrow y = 0$ trivial

$y(c) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

بدرد نخور

$\lambda < 0$ $\quad \lambda = -k^2$

$k > 0$

$y'' - k^2 y = 0$

$y = c_1 \sinh kx + c_2 \cosh kx$ پ

$y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$

$y(c) = 0 \rightarrow c_1 \sinh kx = 0 \rightarrow kx = n\pi \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{x}$

$\langle \sin \frac{m\pi x}{c}, \sin \frac{n\pi x}{c} \rangle = 0$ منظور چی بوده ؟

$m \neq n$

$[0, c]$

مثال ۳ $\quad y'' + \lambda y = 0$

$y'(0) = 0$

$y'(c) = 0$ $\quad [0, c]$

$\lambda = k^2 , \lambda > 0$ $\quad y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$

$\lambda_n = (\frac{n\pi}{c})^2$

$y_n = c_n \cos \frac{n\pi x}{c}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

$\langle \sin \frac{m\pi x}{c}, \sin \frac{n\pi x}{c} \rangle = 0 \rightarrow \|\hat{x}\| = 1$

$\lambda = 0 \rightarrow y = c$ ?

$\lambda < 0 \rightarrow$ trivial

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{c} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

درسته؟

$$\left\{ \cos \frac{n\pi x}{c} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

مثال ۳ : $y'' + \lambda y = 0$

$[-c, c]$

شرایط متناوب
$$y(-c) = y(c)$$
$$y'(-c) = y'(c)$$

$\lambda = 0$ $\qquad y = c_1 + c_2 x$

$y = 1$

کلاً منظور مقدار ثابت است.

$\lambda > 0 \qquad \lambda = k^2$

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \xrightarrow{y(-c) = y(c)} -c_1 \sin kc + c_2 \cos kc = c_1 \sin kc + c_2 \cos kc \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin kc = 0 \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{c}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2$$

$A_n$ , $B_n$ از کجا اومدن؟

$$y_n = A_n \sin \frac{n\pi x}{c} + B_n \cos \frac{n\pi x}{c}$$

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{c}, \sin \frac{n\pi x}{c} \right\}_{n=1}^{\infty}$$ [illegible]

4/5

۹۳/۱۱/۱۲

ریاضی مهندسی

معادله دیفرانسیل بسل

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda x^2 - \alpha^2) y = 0$$

$$0 \le x \le c$$

$$\left.\begin{array}{l} y, y' \\ x \to 0 \end{array}\right\} \text{متناهی اند} \quad , \quad y(c) = 0$$

$\alpha$ حقیقی

توابع بسل نوع اول و دوم

نیومن

$$\lambda > 0 \ , \ \lambda = k^2 \to y(x) = c_1 J_\alpha(kx) + c_2 Y_\alpha(kx)$$

نفهمیدم!

$$c_1 J_\alpha(kc) = 0 \qquad k_n = \left(\frac{\mu_n}{c}\right)^2$$

$$J_\alpha(\mu_n) = 0 \qquad \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{c}\right)^2 \qquad y_n(x) = J_\alpha(k_n x)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda = -k^2 \qquad \lambda < 0$$

$$x^2 y'' + x y' - (k^2 x^2 + \alpha^2) y = 0$$

Modified Bessel

بسل پیراسته

$\{1, \sin nx, \cos nx\}$ توضیح؟

$[-\pi, \pi]$

$$y(x) = c_1 I_\alpha(kx) + c_2 K_\alpha(kx)$$

توابع بسل پیراسته نوع اول

و نوع دوم از مرتبه ی $\alpha$

$$c_1 I_\alpha(kc) = 0$$

لژاندر

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \longrightarrow y_n(x) = P_n(x)$$

$[-1,1]$ چند جمله‌ای های لژاندر

$x \to -1$

$x \to +1$ $y, y'$ متناهی باشد $\to \lambda = n(n+1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$P_0 = 1$

$P_1 = x$

$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$\vdots$

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0$$

$$\langle P_m, P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_m^2\, dx = \frac{2}{2m+1}$$

$$[p(x)y']' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0 \quad x \in [a,b]$$

معادلات دیفرانسیل اشتورم-لیوویل:

$p, q$ حقیقی

$r$ حقیقی مثبت

$\lambda$ پارامتر

$$Ly = \lambda r y$$

$$Ly = -\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = 0$$

یا

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0$$

| $[a,b]$ | $r$ | $\lambda$ | $q$ | $p$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $[-1,1]$ | $1$ | $\alpha(1+\alpha)$ | $0$ | $1-x^2$ | لژاندر |
| $[-1,1]$ | $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ | $n^2$ | $0$ | $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ | چبی‌چف |
| $x>0$ | $x$ | $\alpha^2$ | $-\frac{n^2}{x}$ | $x$ | بسل |
| $-\infty<x<\infty$ | $e^{-x^2}$ | $\alpha$ | $0$ | $e^{-x^2}$ | هرمیت |
| $x>0$ | $e^{-x}$ | $\alpha$ | $0$ | $xe^{-x}$ | لاگر |

$$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$$

سری فوریه

یک عملگر خودالحاق

Self-adjoint $\rightarrow \langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle$

$$Ly=\lambda r y$$

$$[a,b]$$

شرایط مرزی جداشدنی $\begin{cases}\alpha y(a)+\beta y'(a)=0\\ \gamma y(b)+\delta y'(b)=0\end{cases}$

- مقادیر ویژه مسئله خودالحاق اشتورم لیوویل حقیقی هستند.
- تعداد نامتناهی مقدار ویژه وجود دارد.

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

تعداد مقادیر ویژه منفی متناهی است.

$\frac{1}{3}$ ۱۴/۱۱/ ریاضی مهندسی

قضیه: اگر $\lambda_1$ و $\lambda_2$ دو مقدار ویژه‌ی متمایز باشند توابع ویژه متناظر با این دو مقدار ویژه بر هم عمودند $y_1$ و $y_2$

$Ly = -\lambda r y$

مسئله خود الحاق $[a,b]$

(اشتورم لیوویل + خود الحاق)

$L y_1 = -\lambda_1 r y_1$

$L y_2 = -\lambda_2 r y_2$

$\boxed{\text{خود الحاق: } \langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle}$

عملگر هرمیتی

$$y_2 L y_1 - y_1 L y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) r y_1 y_2$$

$$\underbrace{\int_a^b (y_2 L y_1 - y_1 L y_2)\,dx}_{\text{"از خود الحاق بودن"}} = (\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b r y_1 y_2\, dx = 0$$

قضیه: مقادیر ویژه مسئله اشتورم لیوویل خود الحاق حقیقی هستند.

مسئله اشتورم لیوویل چنانچه دارای شرایط مرزی جدا شدنی باشد، مسئله خود الحاق است

$x \in [a,b]$

شرایط مرزی جدا شدنی
$$\begin{cases} \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 & \rightarrow \text{فقط وابسته به } a \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 & \rightarrow \text{فقط وابسته به } b \end{cases}$$

$u, v$ دو تابع که در شرایط مرزی صدق می‌کنند

$$\begin{cases} \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 \\ \alpha v(a) + \beta v'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(a)v'(a) - v(a)u'(a) = 0 \\ u(b)v'(b) - v(b)u'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\langle Lu, v\rangle \overset{?}{=} \langle u, Lu\rangle}$$

$$\begin{cases} \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0 \\ \gamma v(b) + \delta v'(b) = 0 \end{cases}$$

معادله‌ای که تعریف شده بود:

$$(Py')' + (q + \lambda r) y = 0$$

$$\int (uLv - vLu)\,du =$$

$$= \int \left[ v(Pu')' - u(Pv')' \right] du = \int_u (Pu'v - Puv')' du = \left[ P(u'v - uv') \right]_a^b = 0$$

توضیح؟

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_a^b f^2\,du$$

نُرم

$$\{\psi\}_{n=1}^{\infty} \qquad \|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\psi_n = P_n$$

توابع پایه

$$\phi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$$

$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ مجموعه متعامد یکه

$$\|\phi_n\|^2 = \langle \phi_n,\phi_n\rangle = \left\langle \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}, \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}\right\rangle = \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\langle \psi_n,\psi_n\rangle = 1$$

$$\phi_n = \frac{2n+1}{2} P_n(x)$$

مثال: $\left\{\sin\frac{n\pi x}{c}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$[0,c]$

$$\int_0^c \sin^2\frac{n\pi x}{c}\,dx = \frac{c}{2}$$

$$\phi_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} = \sqrt{\frac{2}{c}}\sin\frac{n\pi x}{c}$$

مفهوم سری فوریه:

آیا این تساوی برقرار است؟ $[a,b]$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \underbrace{\phi_k}_{\text{متعامد یکه}}(x)$$

تساوی یعنی چه؟

$$f(x)\phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\phi_k\phi_n \qquad ?$$

$$\langle f,\phi_n\rangle = \left\langle \sum C_k\phi_k,\phi_n\right\rangle =$$

$$= C_n\langle \phi_n,\phi_n\rangle$$

$$C_n = \langle f,\phi_n\rangle$$

چنانچه توابع پایه ($\phi_k$ ها) یکه نباشند:

$$C_n = \langle f,\phi_n\rangle / \langle \phi_n,\phi_n\rangle$$

هرگاه مجموعه ما یک کامل باشد یعنی جواب انتگرال لژاندر باشد

مثال: $0 \le x \le 1$ , $f(x)=x$ $\quad \phi_n = \sin n\pi x$ $\boxed{\text{متعامد کامل}}$

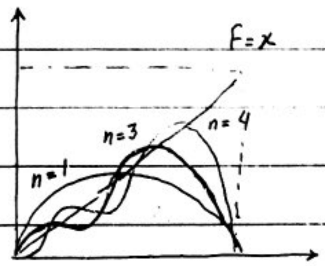
$n=1,2,3,\dots$

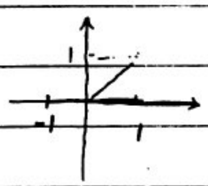
بسط سری فوریه ؟

$$C_n = \frac{\langle f,\phi_n\rangle}{\|\phi_n\|} = 2\int x \sin n\pi x\,dx = 2\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x - \frac{1}{n\pi}x\cos n\pi x\right]_0^1 =$$

یا

$$= \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \rightarrow \text{سری فوریه} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$$




مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} 0 & -1\le x\le 0 \\ x & 0\le x\le 1\end{cases}$

بسط تابع برحسب لژاندر

$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک کامل متعامد

$-1 \le x \le 1$

$P_0 = 1$

$P_1 = x$

$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$C_n = \frac{\langle f,P_n\rangle}{\|P_n\|^2} = \frac{2n+1}{2}\int_0^1 x P_n(x)\,dx$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{4} \ , \ C_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \ , \ C_2 = \frac{5}{2}\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\right)dx = \frac{5}{16}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{5}{16}P_2$$

انواع همگرایی :

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

دنباله به $a$ همگرا است $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$

$x\in[a,b]$

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به $f(x)$ است

$\forall x\in[a,b]\ \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=0$ همگرایی نقطه‌ای

$\epsilon_n=\max_{\forall x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$ $\rightarrow$ قطعاً همگرایی نقطه‌ای داریم

$\lim_{n\to\infty}\epsilon_n=0$

$|f(x)-g(x)|$

فاصله‌ی بین دو تابع $f$ و $g$

$\|f-g\|^2=\int_a^b (f-g)^2dx$

$\|f-g\|=\sqrt{\int_a^b (f-g)^2dx}$

۱) $\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|=0$ دنباله همگرایی ~~در میانگین~~ در میانگین دارد (به $f$) $\leftarrow$ لزوماً همگرایی نقطه‌ای نداریم

۲) اگر همگرایی نقطه‌ای داشته باشیم نیز الزاماً دنباله در میانگین $[a,b]$ همگرایی ندارد

توابع قطعه‌ای پیوسته: تعداد متناهی ناپیوستگی

وجود حدود چپ و راست در نقاط ناپیوستگی

$C_p[a,b]$



قطعه‌ای پیوسته نیست

اگر دو تابع قطعه‌ای پیوسته باشند $f, g$ ، $fg$ و $f+g$ قطعه‌ای پیوسته هستند.

$\|f-g\|^2 = \int_a^b (f-g)^2 dx$ → نامساوی شوارتز $|\langle f, g\rangle| \le \|f\| \cdot \|g\|$

نامساوی مثلث $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

نکته: $\|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g\rangle$

$\|f-g\| = 0 \rightarrow$ $f, g$ برابرند الا در تعداد متناهی از نقاط

دو تابع قطعه‌ای پیوسته

همگرایی در میانگین برای سری فوریه:

$f \in C_p[a,b]$ $[a,b]$ $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$

توابع قطعه‌ای پیوسته

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\|\phi_n\| = 1$

مجموع جزئی سری فوریه $S_n = \sum_{k=1}^{n} C_k \phi_k$ بهترین انتخاب ← $C_k = \langle f, \phi_k\rangle$

دنباله $S_n$ در میانگین به $f$ همگرا است اگر

$\lim_{n\to\infty} \|S_n - f\| = 0$

چون متعامدند $\langle \phi_m, \phi_n\rangle = 0$ $m \neq n$

$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$

$E_n^2 = \|T_n - f\|^2 = \int_a^b \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k\right)^2 dx =$

$E_n = \|T_n - f\|$

$= \int_a^b \left(f^2 - \sum_{k=1}^{n} 2a_k \phi_k f + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \phi_k^2\right) dx =$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

$$E_n^2 = \underbrace{\|f\|^2}_{\text{مقدار ثابت}} + \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}_{\text{مقدار ثابت}} \qquad c_k = (f, \phi_k)$$

کمینه‌ی $E_n$ موقعی است

که $a_k = c_k$

بهترین انتخاب $a_k$ ها برای کمینه شدن فاصله دنباله $T_n$ با $f$ (با تعریف انجام شده برای فاصله) همان ضرایب سری فوریه خواهد بود.

قضیه: هرگاه یک سری به صورت $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ در میانگین در بازه $[a,b]$ به $f$ همگرا باشد آنگاه ضرایب $a_k$ همان ضرایب سری فوریه $f$ می‌باشند

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

$$\|f - T_n\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - c_k)^2$$

$$0 < \|f - S_n\| \leq \|f - T_n\|_{n \to \infty}$$