Electromagnetics Se10 Dr. Rajaei

Matin Barekatain

← در جلسه‌ی قبل مشاهده کردیم که می‌توان یک عایق را به صورت تقریب دوقطبی در نظر گرفت.

$$\Rightarrow V(\vec{R}) = \sum \frac{\vec{P_i}\cdot(\vec{R}-\vec{R_i})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R_i}|^3}$$

← برای یک المان کوچک حجم داریم:

$$\Delta V(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{P_i}\,(\vec{R}-\vec{R'})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R'}|^3} =$$

$$\frac{\vec{R}-\vec{R'}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R'}|^3}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{v} P_i}{\Delta v'}$$

$$\Rightarrow V(\vec{R}) = \int_v \underbrace{\frac{(\vec{R}-\vec{R'})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R'}|}}_{*}\cdot\vec{P}(\vec{R'})\,dv'$$

⇐ این تابع * را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع نوشت:

$$\nabla'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|R-R'|}\right) = +\frac{(\vec{R}-\vec{R'})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{R}-\vec{R'}|^3}$$

نسبت به R'

$$V(\vec{R}) = \int_v \nabla'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|R-R'|}\right)\cdot\vec{P}(\vec{R'})\,dv' =$$

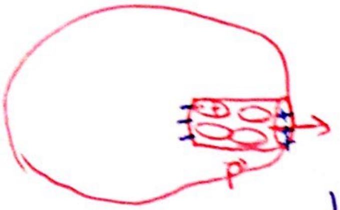
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \nabla'\cdot\left[\frac{1}{|\vec{R}-\vec{R'}|}\vec{P}(R')\right]dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{1}{|\vec{R}-\vec{R'}|}\left(-\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{R'})\right)dv'$$

این ترم شبیه چگالی حجمی است

$$\nabla' g\cdot\vec{F} = \nabla'\cdot(g\vec{F}) - g\,\nabla'\cdot\vec{F}$$

$$v(\vec R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\left[\frac{\vec P(\vec R')\cdot\hat a_n}{|\vec R-\vec R'|}\right]ds'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v\frac{1}{|\vec R-\vec R'|}-\nabla'\cdot\vec P(\vec R')\,dv'$$

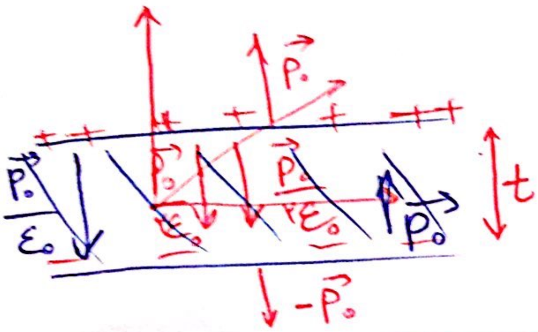
← برای تقریب بهتر داریم:



$$\vec P\cdot\Delta v=\sum_i\vec P_i=6\Delta v$$

← اگر P را بردار دو قطبی معادل این شکل (کل شکل) در راستای عمود به سطح درنظر بگیریم به صورت اسکالر چگالی بار بدست می آید.

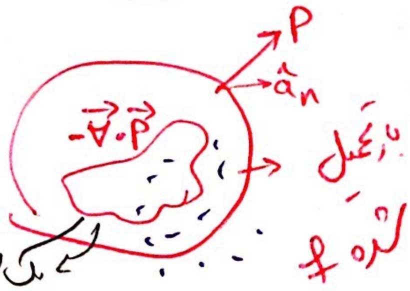
مثال:



$$\vec P_0=P_0\hat a_z$$

$$\vec\nabla\cdot\varepsilon_0\vec E=-\vec\nabla\cdot\vec P+\rho_f$$

$$\vec\nabla\times\vec E=0\longrightarrow\nabla\cdot[\varepsilon_0\vec E+\vec P]=\rho_f$$



$$\begin{cases}\vec\nabla\cdot\vec D=\rho_f\\ \vec\nabla\times\vec E=0\end{cases}$$

$$\oint_S\varepsilon_0\vec E\cdot\hat a_m\,ds=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho_f\,dv=\frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S\vec P\cdot\vec a_n\,ds$$

$$\Rightarrow\boxed{\oint_S(\varepsilon_0\vec E+\vec P)\cdot\hat a_n\,ds=Q_f}$$