

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی علوم ریاضی

محاسبات عددی – گروه‌های 1 تا 4

حل تمرین سری چهارم

1. (الف)

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$x_n \rightarrow l$$

$$l = \frac{l^k + kal}{kl^{k-1} + a} \Rightarrow kl^k + al = l^k + kal \Rightarrow (k-1)l^k = (k-1)al \Rightarrow l^{k-1} = a$$

$$\Rightarrow l = a^{\frac{1}{k-1}}$$

(ب)

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$$l = a^{\frac{1}{k-1}}$$

$$g'(l) = ?$$

$$g'(x) = \frac{(kx^{k-1} + ka)(kx^{k-1} + a) - k(k-1)(x^k + kax)x^{k-2}}{(kx^{k-1} + a)^2}$$

$$g'(l) = \frac{2k(k+1)a^2 - k(k-1)(a^2 + ka^2)}{(ka + a)^2} = \frac{(k(k+1)a^2)(2-k+1)}{(k+1)^2 a^2} = \frac{k(k+1)(3-k)}{(k+1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$k = 3, \quad p = 2 \quad (g''(l) \neq 0)$$

2. (الف)

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$$

$$p(0) = 4$$

$$p(-2) = 16$$

$$p(-1) = 0$$

$$p'(-1) = 0$$

```

function xs=rootNEWTON(x0)
xold=x0;
xnew=xold-(xold^4-2*xold^3-3*xold^2+4*xold+4)/(4*xold^3-6*xold^2-6*xold+4);
e= norm(xnew-xold);
while e>10^(-6)
    xold=xnew;
    xnew=xold-(xold^4-2*xold^3-3*xold^2+4*xold+4)/(4*xold^3-6*xold^2-6*xold+4);
    e= norm(xnew-xold);
end

```

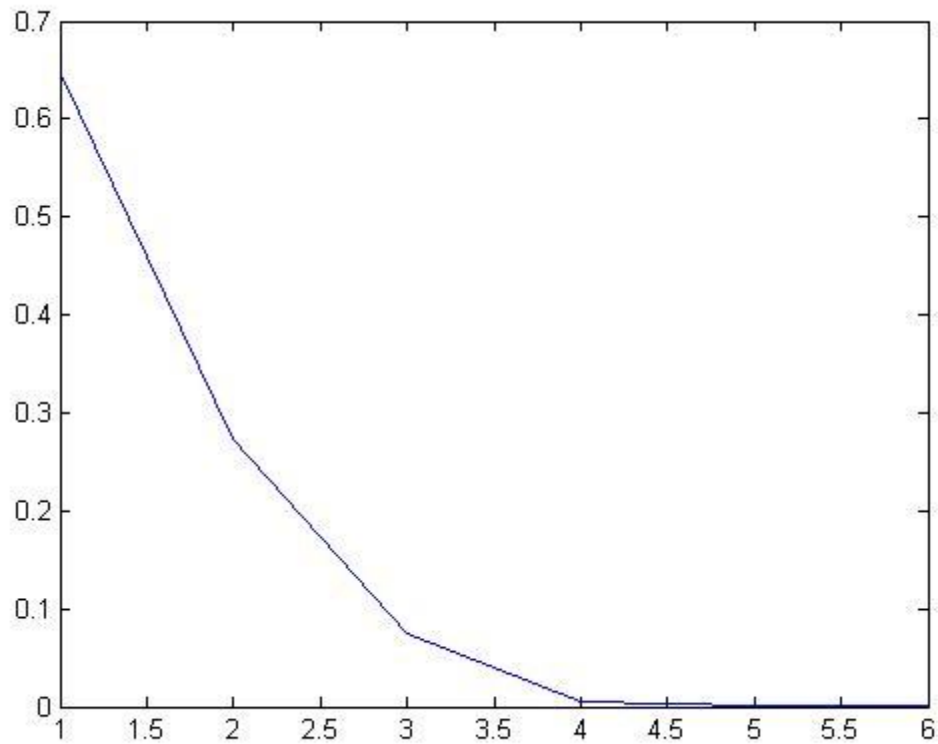

 $k \rightarrow +\infty$

```

function xs=rootNEWTON2(x0)
xold=x0;
xnew=xold-(4*xold^3-6*xold^2-6*xold+4)/(12*xold^2-12*xold-6);
e= norm(xnew-xold);
while e>10^(-6)
    xold=xnew;
    xnew=xold-(4*xold^3-6*xold^2-4*xold+4)/(12*xold^2-12*xold-4);
    e= norm(xnew-xold);
end

```


 $x_{\circ} = -2 \quad k = 6$



نمودار کاهش خطا طی 6 تکرار از الگوریتم نیوتن اصلاح شده

نتیجه: اگر x^* ریشه‌ی مرتبه‌ی k معادله‌ی $f(x) = 0$ باشد، آنگاه روش نیوتن اصلاح شده با جمله‌ی عمومی

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^{(k-1)}(x_k)}{f^{(k)}(x_k)}$$

در صورت همگرایی به x^* دارای مرتبه‌ی همگرایی حداقل 2 است. زیرا، x^* ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی

$$f^{(k-1)}(x) = 0 \quad \text{است و روش نیوتن برای این معادله دارای مرتبه‌ی همگرایی حداقل 2 است. روش نیوتن را برای معادله‌ی}$$

$$f^{(k-1)}(x) = 0 \quad \text{می‌نویسیم:}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^{(k-1)}(x_k)}{(f^{(k-1)})'(x_k)} = x_k - \frac{f^{(k-1)}(x_k)}{f^{(k)}(x_k)}.$$

توجه کنید که برای محاسبه‌ی مشتق می‌توان از مجموعه‌ی symbolic نرم‌افزار MATLAB استفاده کرد. در این صورت برنامه‌ی دوم به صورت زیر تغییر می‌کند:

```
function xs=rootNEWTON22(x0)
xold=x0;
syms x;
f=x^4-2*x^3-3*x^2+4*x+4;
fp=diff(f);
fp2=diff(fp);
```

```

yp=subs(fp,x,xold);
yp2=subs(fp2,x,xold);
xnew=xold-yp/yp2;
e= norm(xnew-xold);
while e>10^(-6)
    xold=xnew;

    yp=subs(fp,x,xold);
    yp2=subs(fp2,x,xold);
    xnew=xold-yp/yp2;
    e= norm(xnew-xold);
end
xs=vpa(xnew);

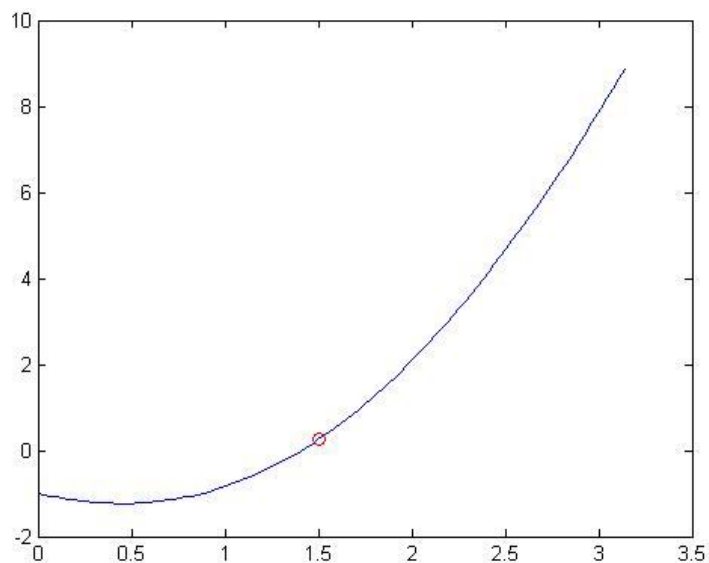
```

3. برنامه‌ی زیر را ببینید:

```

function y=f(x)
y=x^2-sin(x)-1;
>>x=linspace(0,pi);
>>y=feval('f',x);
>>plot(x,y)

```



$$x_0 = 1.5$$

>> xs=fzero(@f,1.5)

xs =

1.4096

4. با توجه به توضیحات مساله داریم

$$AX = 2X$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow 4x - 3y = 0 \quad (1)$$

$$\|X\| = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = X_0 - J(X_0)^{-1} F(X_0)$$

$$F(X_0) = F\left(\begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 14 - 10.5 \\ 12.25 \times 2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$J(X) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$$J_0(X) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow J_0(X)^{-1} = \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 - J_0(X)^{-1} F(X_0) = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix} - \frac{1}{49} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{23}{49} \\ -\frac{26.5}{49} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0306 \\ 4.0408 \end{bmatrix}$$

$$X^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

موفق باشی