$\frac{1}{2}$,۱۱,۱۹ ریاضی مهندسی

قضیه اشتورم لیوویل خودالحاق

$\|f - S_n\| \to 0$, $n \to \infty$ $\quad f \in C_p[a,b]$

$\lim_{k \to \infty} |c_k| \to 0$

مثال: $f \in C_p[0, \pi]$

$$\left\{ \cos nx \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} \qquad \langle f, \phi_n \rangle = \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

طبق قضیه $\longrightarrow \lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$

$$\lim_{k \to \infty} c_k = \langle f, \cdots \rangle$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2 & \text{نامساوی بسل} \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 & \text{تساوی پارسوال} \end{cases}$$

سری های مثلثاتی

$[0, c] \qquad \left\{ \cos \frac{n\pi x}{c} \right\}_{n=0}^{\infty}$

$[0, C] \qquad \left\{ \sin \frac{n\pi x}{C} \right\}_{n=0}^{\infty}$

$[-C, C] \qquad \left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{C}, \sin \frac{n\pi x}{C} \right\}_{n=1}^{\infty}$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{C} + b_n \sin \frac{n\pi x}{C} \right)$$

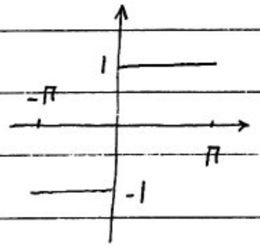
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n$$

سری مثلثاتی کلی

$$a_n = \frac{1}{C} \int_{-C}^{C} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} \, dx$$

نصف پریود

$$b_n = \frac{1}{C} \int_{-C}^{C} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} \, dx$$



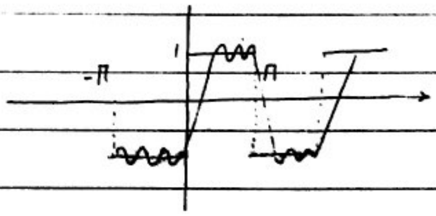
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

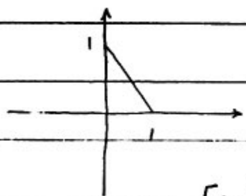
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{4}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin(2m-1)x}{\pi (2m-1)}$$



مثال :



$[0,1]$

$$f(x) = 1 - x \qquad 0 < x < 1$$

$$\left\{ \sin n\pi x \right\}_{n=1}^{\infty}$$ استفاده از توابع متعامد

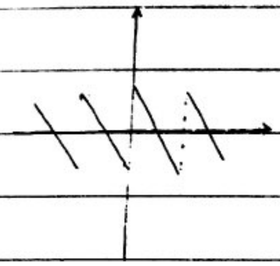
$$2 \int_0^1 (1-x) \sin n\pi x = \frac{2}{n\pi}$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$$ سری فوریه سینوسی

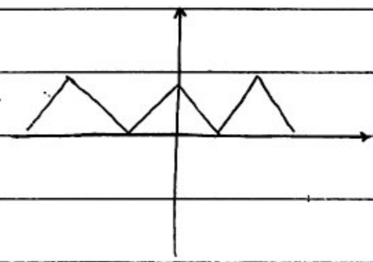
$$[0,1] \qquad \left\{ \cos n\pi x \right\}_{n=0}^{\infty} \longrightarrow F(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)\pi x}{(2m-1)^2}$$

سری فوریه کسینوسی

در داخل بازه



سینوسی



کسینوسی

همگرایی نقطه‌ای سری فوریه مثلثاتی:

نکته: در سری‌های فوریه‌ی مثلثاتی به صورت نقطه‌ای هم همگرایی داریم اگر ۲ قضیه زیر برقرار باشد.

تابع قطعه‌ای هموار: به توابعی گفته می‌شود که F و F' قطعه‌ای پیوسته باشند.

قضیه: چنانچه تابع پریودیک F در بازه‌ی $[a,b]$ (در یک پریود) قطعه‌ای هموار باشد در آن صورت همگرایی نقطه‌ای به $F(x_0)$ وجود خواهد داشت. در نقاط ناپیوستگی، سری به میانگین حد چپ و حد راست تابع همگرا خواهد بود.

قضیه: شرط دیریکله F {
۱. F کراندار باشد $|F|<M$
۲. تعداد نقاط کمینه و بیشینه در یک بازه‌ی تعریف شده محدود باشد
۳. تعداد نقاط ناپیوستگی محدود باشد

$X \sin\frac{1}{x}$

چنانچه تابع پریودیک F شروط دیریکله را برآورده سازد آنگاه همگرایی نقطه‌ای سری به $F(x_0)$ وجود دارد و در نقاط ناپیوستگی سری به میانگین حد چپ و راست همگرا است.

ریاضی مهندسی ،۱۱،۱۲

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{c} + b_n \sin\frac{n\pi x}{c} \right] \qquad [-c, c]$$

$T = 2\pi$

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{c} + \theta_n\right)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\theta_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$[-\pi, \pi] \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

$$\sin nx = \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j} \qquad \cos nx = \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n - jb_n)e^{jnx} + (a_n + jb_n)e^{-jnx}\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jnx}\,dx$$

T: پریود $\quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2n\pi x}{T}} = \sum c_n e^{jn\omega_0 x} \qquad T = 2c$

$\sin\frac{n\pi x}{c}$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(x)e^{-j\frac{2n\pi x}{T}}\,dx$$

برای توابع حقیقی f $\quad c_{-n} = c_n^*$

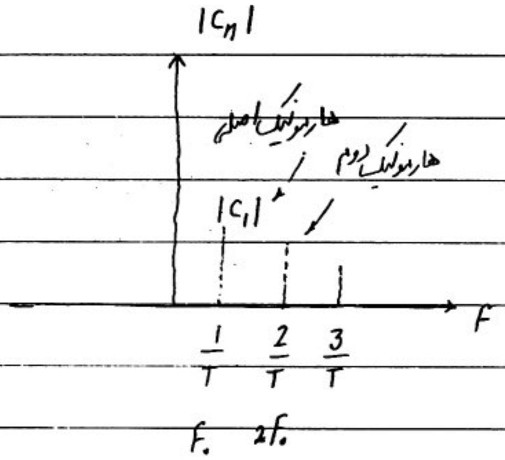
$w_0 = \frac{2\pi}{T}$ $\quad F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0 t}$ $\quad F(t) \longrightarrow t$

$|C_n| e^{j\angle C_n}$

$w_0 = 2\pi f_0$

فرکانس تکرار

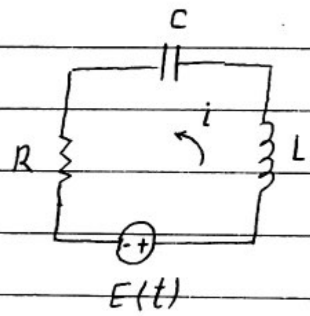
بنیادی



$$a_0 = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\cos 0\, dx$$

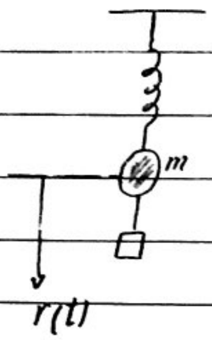
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T F(x)\,dx$$

$$\sum_{K=-n}^{n} |C_K|^2 \leq \|F\|^2$$

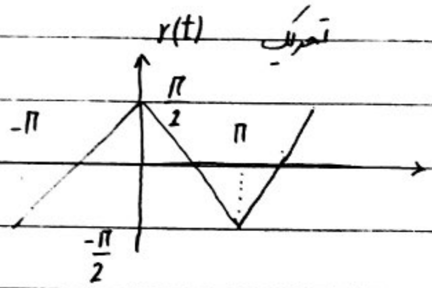


$$L\frac{di^2}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{dE}{dt}$$

مثال :



$$my'' + cy' + Ky = r(t) \qquad y(t) = ?$$



$$y = y_p(t) + y_h(t)$$

$$y_h(t) \to 0$$

$$m = 1g \ , \ C = 0.05\ g/s \ , \ k = 25\ g/s^2 \qquad y(t) = y_p(t)$$

$$y'' + 0.05y' + 25y = r(t)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{3^2}\cos 5t + \cdots\right]$$

$$y'' + 0.05y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad n = 1,3,5,\ldots$$

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{4(25-n^2)}{n^2\pi\left[(25-n^2)^2 + (0.05)^2\right]} \\ B_n = \dfrac{\cancel{0.2}\ \ 0.2}{n^2\pi\left[(25-n^2)^2 + (0.05)^2\right]} \end{cases}$$

$$y(t) = \sum y_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nt + \gamma_n)$$

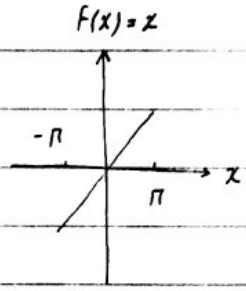
$c_1 = 0.053 \qquad c_3 = 0.0088 \qquad c_5 = 0.2037$

$c_7 = 0.0011 \qquad c_9 = 0.0003 \ , \ \ldots$

قضیه: سری فوریه (مثلثاتی) هر تابع متناوب که در شرایط دیریکله صدق کند می توان با انتگرال گیری جمله به جمله به سری فوریه ی همان تابع دست یافت که تابع اولیه تابع ابتدایی خواهد بود (مواظب ΔC باشید!)

.. متوسط

مثال:



$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

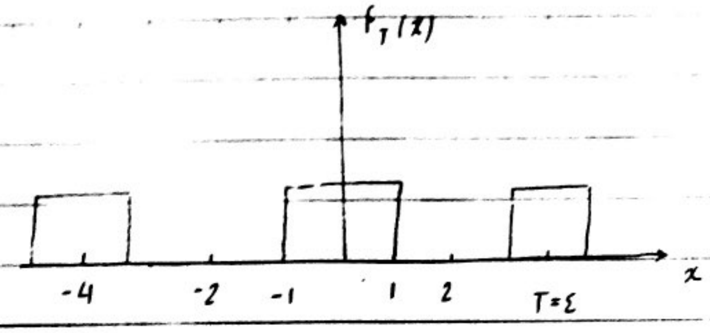
$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx$$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos\frac{n\pi x}{c} + \sum b_n \sin\frac{n\pi x}{c}$$

قضیه: برای تابع متناوب f که در شرایط دیریکله صدق می کند و همه جا پیوسته باشد f' نیز در شرایط دیریکله صدق کند سری فوریه مثلثاتی f' را می توان از مشتق گیری جمله به جمله سری فوریه f بدست آورد

انتگرال فوریه و تبدیل فوریه:

تبدیل لاپلاس:



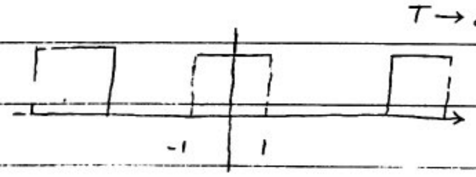
$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < x < -1 \\ 1 & |x| < 1 \\ 0 & 1 < x < \frac{T}{2} \end{cases} \qquad (T > 2)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}, \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} \cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx = \frac{4}{T}\,\frac{\sin\frac{2n\pi}{T}}{\frac{2n\pi}{T}}$$

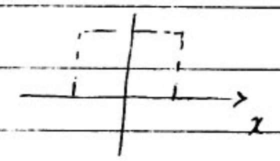
$$\frac{a_0}{2} + \sum\left[a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right]$$

$T \to \infty$



توصیف سیگنال پریودیک — در حوزه x

ضرایب فوریه + پریود — در حوزه طیف



$$f_T(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T} \right]$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$$

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\overset{t}{\cancel{x}})\,dx + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos\omega_n x \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)\cos\omega_n t\,dt}_{a_n} +$$

$$+ \sin\omega_n x \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin\omega_n t\,dt}_{b_n}\Big]$$

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow \frac{2}{T} = \frac{\Delta\omega}{\pi}$$

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos(\omega_n x)\,\Delta\omega\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos\omega_n t\,dt +$$

$$+ \sin(\omega_n x)\,\Delta\omega\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin\omega_n t\,dt\Big]$$