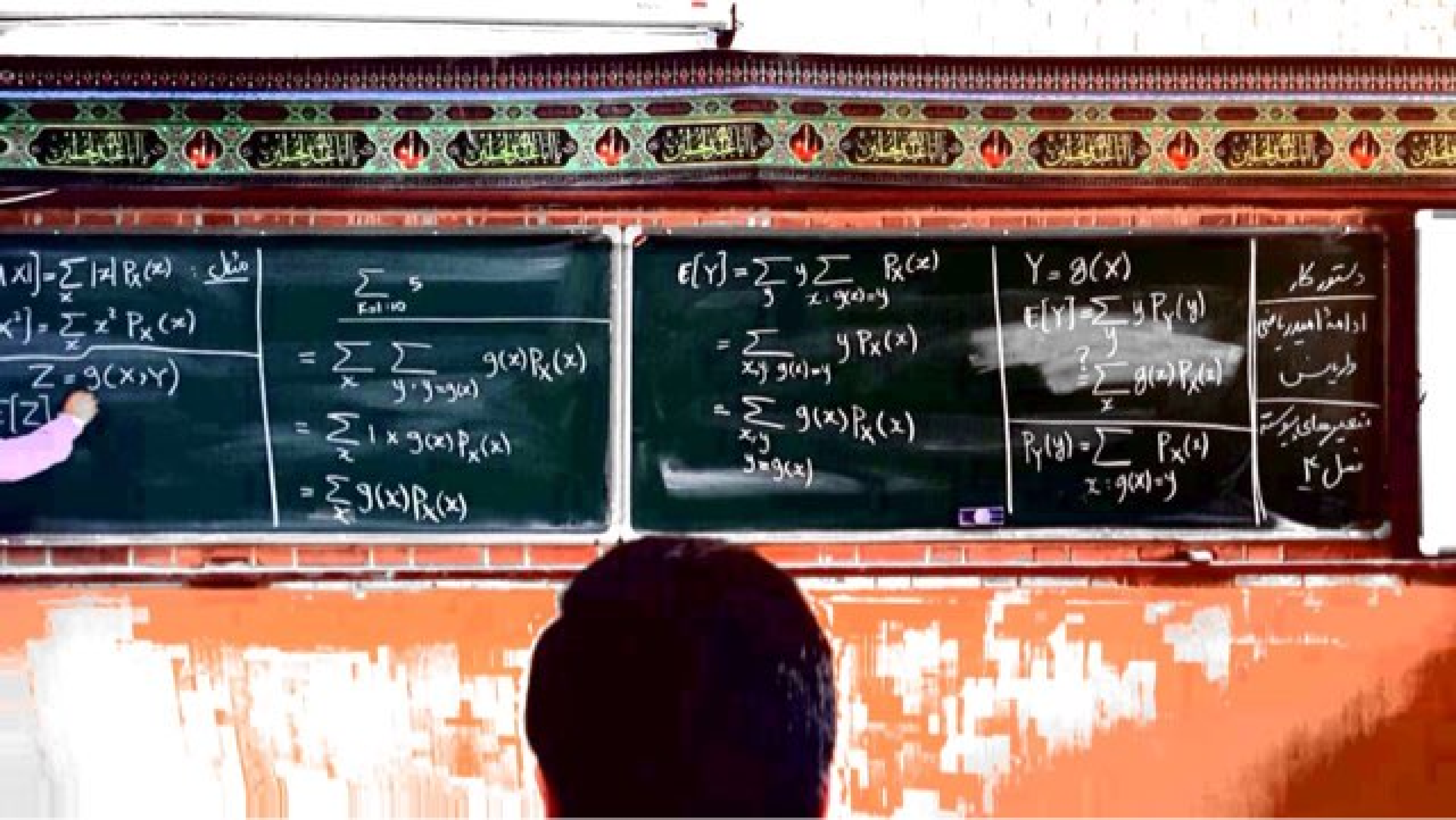

مثال :
Σ_x |x| P_X(x)
Σ_x x² P_X(x)
Z = g(X,Y)
E[Z]
Σ_{k=1}^{10} 5
= Σ_x Σ_{y: y=g(x)} g(x)P_X(x)
= Σ_x 1 × g(x)P_X(x)
= Σ_x g(x)P_X(x)
E[Y] = Σ_y y Σ_{x: g(x)=y} P_X(x)
= Σ_{x,y: g(x)=y} y P_X(x)
= Σ_{x,y, y=g(x)} g(x)P_X(x)
Y = g(X)
E[Y] = Σ_y y P_Y(y)
?= Σ_x g(x)P_X(x)
P_Y(y) = Σ_{x: g(x)=y} P_X(x)
دستور کار
ادامهٔ امید ریاضی
واریانس
متغیرهای پیوسته
فصل ۴

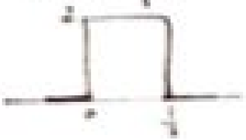
Subject
Date

$X \sim \text{Unif}(0,1)$

$f_X(x)$ 

$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

$Y = \frac{X}{2}$ $\quad [0, \frac{1}{2}]$ unif

$f_Y(y)$ 

$f_Y(y) = \begin{cases} 2 & 0 \le y \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$

PaPCO

Subject
Date

گسسته $E[X] = \sum x\, p_X(x)$ پیوسته $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

گسسته

$$X = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ x_3 & p_3 \end{cases} \qquad f(x) = p_1\delta(x-x_1) + p_2\delta(x-x_2) + p_3\delta(x-x_3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[p_1\delta(x-x_1) + p_2\delta(x-x_2) + p_3\delta(x-x_3)\right]$$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p(x_i) \quad ✓$$

گسسته $E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$

$\rightarrow$ پیوسته $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$

$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$ ✓

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ ✓

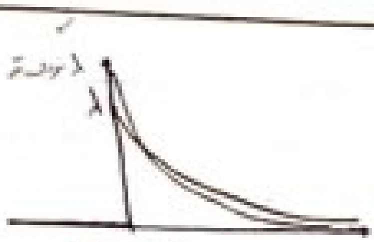
مثال

$$X = \begin{cases} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases} \qquad Y = \frac{X}{2} \qquad Y = \begin{cases} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Y = g(X) \qquad P(Y=y) = \sum_{x:\, g(x)=y} p_X(x)$$

PAPCO

نمایی (معادل پیوسته هندسی) $X \sim Exp(\lambda)$

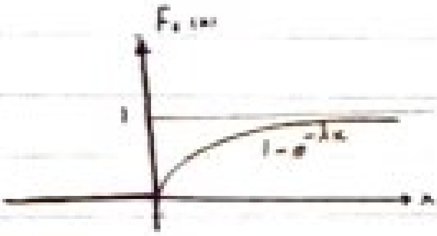


$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 \checkmark$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx \qquad x < 0 \rightarrow F_X(x) = 0 \qquad x \geq 0 \rightarrow F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \rightarrow \boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0}$$



$$1 - F_X(x) = P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

هندسی $\quad P(X > n) = (1-p)^n \quad x \in \mathbb{N}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad dy = \frac{dx}{\sigma} \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = A$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right)$$

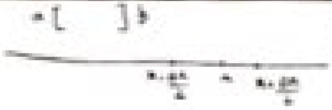
$$A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \underbrace{dx\,dy}_{r\,dr\,d\theta} = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{A = 1}$$

PCO

Subject:
Date:



چگالی احتمال ... $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{[illegible]}}{\Delta x}$

$P(x \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$

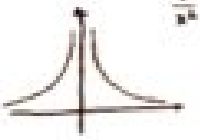
تابع چگالی احتمال

$f_X(x) = \lim \frac{P(X \in [x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}])}{\Delta x}$ $\qquad P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$

$X = \begin{cases} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases}$

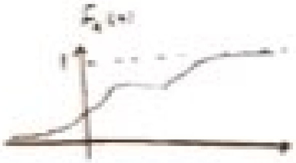
$x \neq 0, 1 \quad f_X(x) = 0$ $\qquad x = 0$ $\qquad f_X(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}}{\Delta x} = \infty$

[illegible]



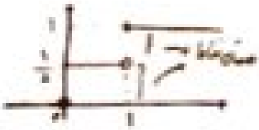
$f_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$

$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = F_X(x)$



$F_X(-\infty) = 0 \qquad F_X(+\infty) = 1$ $\qquad F_X(x)$ صعودی

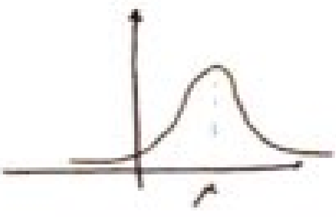
$X = \begin{cases} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases}$



$\frac{\partial F}{\partial x} = f$

متغیرهای پیوسته مهم

گوسی (معمول پیوسته [illegible])

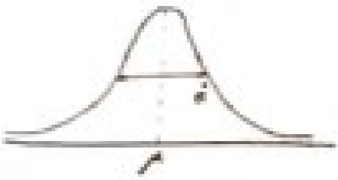


$\propto e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

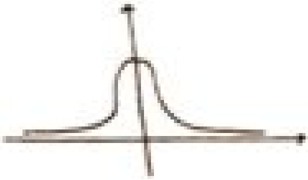
[illegible] دارد.

گوسی:



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$\mu=0,\ \sigma=1 \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad f_X(x) = f_X(-x)$



$\mu=0,\ \sigma \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx \quad \begin{cases} y = \frac{x}{\sigma} \\ dy = \frac{dx}{\sigma} \end{cases}$$

8 ,9 ,1

مستمر کار

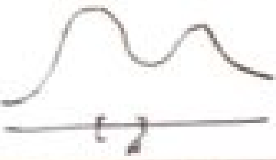
• اولین متغیرهای تصادفی پیوسته • pdf , cdf • متغیرهای پیوسته مهم (دادها) • امید ریاضی و واریانس

• تابع یک متغیر پیوسته

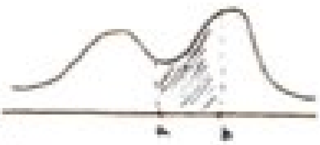
probability density function (pdf)

$\int f(x)dx = 1 \qquad f(x) \geq 0$

$\int_A f(x)dx = P(X \in A)$



متغیرهای تصادفی پیوسته :

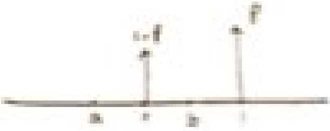


تابع چگالی احتمال $\quad f_X(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$P[X \in (a,b)] = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

$$X = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases}$$



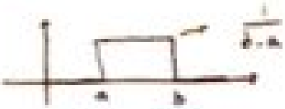
$$f_X(x) = p\,\delta(x-1) + \bar{p}\,\delta(x-0)$$

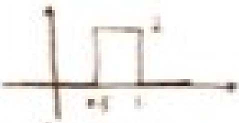
$$P[X \in (a,b)] = \int_a^b f_X(x)\,dx = 1-p$$

تابع های معروف پیوسته

یکنواخت

$U(a,b)$





تابع چگالی می‌تواند از یک بیشتر شود اما انتگرالش حتما یک است.

توزیع سوری دو جمله‌ای

دو تا سکه داریم که اولی با احتمال $\frac{2}{3}$ رو می‌آید و دومی با احتمال $\frac{1}{6}$ رو می‌آید. یکی را به تصادف

انتخاب می‌کنیم و n بار پرتاب می‌کنیم. $X = \#$ روها امید ریاضی و واریانس $X =$ ؟

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{اگر سکه اول انتخاب شود} \\ 2 & \text{اگر دوم} \end{cases}$$

$$E[X] = P[Y=1]E[X \mid Y=1] + P[Y=2]E[X \mid Y=2]$$

$$E[X] = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}n = \frac{5}{12}n$$

$$E[X^2] = P[Y=1]E[X^2 \mid Y=1] + P[Y=2]E[X^2 \mid Y=2]$$

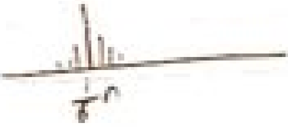
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2n}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}n\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{n}{6} \times \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}n\right)^2\right]$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 \qquad P_X(x) = P(Y=1)P_{X|Y}(x \mid Y=1) + P(Y=2)P_{X|Y}(x \mid Y=2)$$

$Y=1$

$\times \frac{1}{2}$

$Y=2$



$\times \frac{1}{2}$

$\oplus \rightarrow$

$$Var(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{5n}{12} - \frac{1}{6}n\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{5n}{12} - \frac{2}{3}n\right)^2$$

واریانس توزیع پواسون

$n \to \infty \qquad p \to 0 \qquad np = \lambda$

$B(\frac{\lambda}{p}, p) \rightarrow$ واریانس $= \frac{\lambda}{p} \times p \times \bar{p} = \lambda(1-p) \rightarrow$ واریانس $= \lambda$

امید ریاضی $= \lambda$

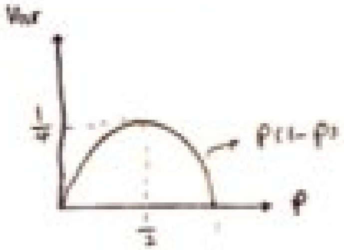
Subject:
Date: [illegible]

[illegible]

واریانس توزیع‌های مهم ـ متغیرهای تصادفی برنولی:

$X \sim$ برنولی $\begin{cases} 1 \to p \\ 0 \to 1-p \end{cases}$ $\qquad E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

$E[X^2] = E[X] = p \qquad Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = p(1-p)$



$X \sim B(n,p)$ (دوجمله‌ای)

راه 1: $Var(X) = E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_{(np)^2} \qquad X = I_1 + I_2 + \dots + I_n \qquad I_j = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \end{cases}$

$X^2 = (I_1 + I_2 + \dots + I_n)^2 = I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} I_i I_j$

$E[X^2] = E[I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2] + 2E[\sum_{i<j} I_i I_j] = np + 2\binom{n}{2}p^2$

$Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n(p-p^2)$ $\qquad I_i, I_j$ متغیرهای مستقل هستند

راه 2: I_i, I_j مستقل‌اند $\Rightarrow Var(X) = Var(I_1) + \dots + Var(I_n)$

$= n\,Var(I_1) = np(1-p)$

PAPCO

Subject
Date

مثل ... ناحیه

$E[(V - rZ - c)^2]$

$c = E[V - rZ] = E[V] - rE[Z]$

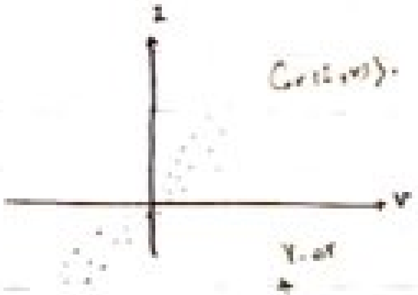
$V = rZ + E[V] - rE[Z]$

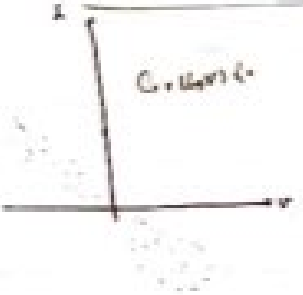
$\frac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} = \frac{r\sqrt{Var(Z)}\,(Z - E[Z])}{\sqrt{Var(V)}\,\sqrt{Var(Z)}}$

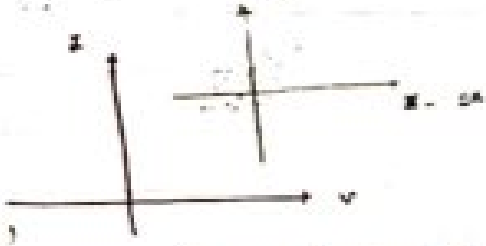
$\Rightarrow E\left[\left(\frac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} - \underbrace{\frac{r\sqrt{Var(Z)}}{\sqrt{Var(V)}}}_{K} \cdot \frac{Z - E[Z]}{\sqrt{Var(Z)}}\right)^2\right]$

ضریب همبستگی V, Z

$\frac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} = K \cdot \frac{Z - E[Z]}{\sqrt{Var(Z)}} \Rightarrow K = \boxed{\frac{Cov(Z,V)}{\sqrt{Var(Z)\,Var(V)}}}$







در نتیجه: $-1 \le K \le 1$

اثبات:

$Cov^2(X,Y) \le Var(X)\,Var(Y)$ $\quad E[X] = E[Y] = 0$

$\left(\sum_{x,y} xy\,p(x,y)\right)^2 \le \left(\sum_x x^2 p(x)\right)\left(\sum_y y^2 p(y)\right)$

$\Rightarrow \left(\sum_{x,y} xy\,p(x,y)\right)^2 \le \left(\sum_{x,y} x^2 p(x,y)\right)\left(\sum_{x,y} y^2 p(x,y)\right)$

$\sum_{x,y} x^2 p(x,y) = \sum_x x^2 \sum_y p(x,y) = \sum_x x^2 p(x)$

$\tilde{X} = X - E[X] \quad \Rightarrow \quad Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) \le Var(\tilde{X})\,Var(\tilde{Y})$

$\tilde{Y} = Y - E[Y]$

Subject
Date

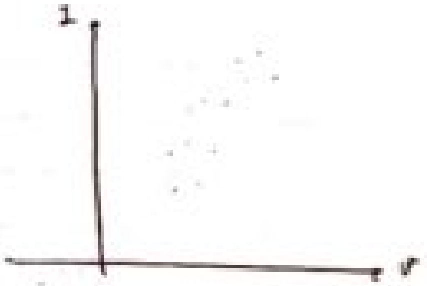
• ضریب همبستگی متغیرها :

$X \perp Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

$\not\Leftarrow$

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy\, P_{X,Y}(x,y) = \left(\sum_x x P_X(x)\right)\left(\sum_y y P_Y(y)\right)$$

دو متغیری که $Cov(X,Y)=0$ باشد آن‌ها را غیرهمبسته گویند (uncorrelated)



متغیر مستقل

$V = rI$ ثابت

کمینه $E[(V-rI)^2]$ مینیمم

$E[V^2 - 2rVI + r^2 I^2]$

$\Rightarrow -2E[VI] + 2r[I^2] \Rightarrow r = \frac{E[VI]}{E[I^2]}$

$$V = E[VI]\left\{\frac{I}{E[I^2]}\right\} \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{E[V^2]}} = \underbrace{\frac{E[VI]}{\sqrt{E[V^2]E[I^2]}}}_{\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}} \cdot \frac{I}{\sqrt{E[I^2]}}$$

$Var(aX) = a^2 Var(X)$

$Var(aX) = 1$ استاندارد $a = \sqrt{\frac{1}{Var(X)}}$

$E[V] = 0 \qquad Var[X] = E[X^2] = \sum p(x) x^2$ متقارن

$V = rI + C$ تعریف همبستگی خطی V, I

$V = rI + C$ یعنی : $\frac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} = K \frac{I - E[I]}{\sqrt{Var(I)}}$

Subject
Date

می‌خواهیم متغیر تصادفی X را با عدد c تقریب بزنیم به طوری که خطای تقریب $E|X-c|^2$

اندازه بهترین c یعنی $c=E[X]$ در مورد خطای تقریب را کمینه می‌شود.

$$E[(X-c)^2] = E[X^2-2cX+c^2] = E[X^2]-2cE[X]+c^2$$

مشتق به c تابع درجه ۲. $\quad -2E[X]+2c=0$

$$c=E[X]$$

تمرین: $E[|X-c|]$ را کمینه کنید.

$$f(x)=|x-c| \qquad E[f(X)]=\sum_x f(x)p_X(x)$$

$$E[|X-c|]=\underbrace{\sum_x |x-c|\,p_X(x)}_{\text{کمینه کنید}}$$

$$E[X]=\sum_x x\,p_X(x)$$

$$Var[X]=E[X^2]-E[X]^2=E[(X-E(X))^2]$$

$$Var[X+Y]=Var(X)+Var[Y]+2Cov(X,Y)$$

Covariance $\quad Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E[XY]-E[X]E[Y]$

Subject

Date

• کوواریانس متغیرهای مستقل هم صفر است.

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right) = E\left(XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y\right)$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

X, Y مستقل $\Rightarrow$ $X-\mu_X , Y-\mu_Y$ هم مستقل باشند

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right) = E(X-\mu_X)E(Y-\mu_Y) = 0 \times 0 = 0$$

* به طور کلی اگر X, Y مستقل باشند، $h(X)$ و $g(Y)$ هم مستقل اند برای هر دو تابع دلخواه $h(x)$, $g(y)$

x^3 , 3 , $2x$

دستکار

امید واریانس - ضریب همبستگی - متغیرهای پیوسته

$$X \perp\!\!\!\perp Y \rightarrow Z = f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y) = W$$

$$P(Z=z, W=w) = \sum_{\substack{x,y \\ z=f(x) \\ w=g(y)}} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{\substack{x,y \\ z=f(x) \\ w=g(y)}} p_X(x)\, p_Y(y)$$

$$= \left[\sum_{x:\, z=f(x)} p_X(x)\right]\left[\sum_{y:\, w=g(y)} p_Y(y)\right] = p_Z(z)\, p_W(w)$$

$$\left(\sum_x x^2 p_X(x)\right) \geq \left(\sum_x x\, p_X(x)\right)^2$$

شوارتز $$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) \geq \left(\sum a_i b_i\right)^2$$

$$\to \left(\sum_x x^2 p_X(x)\right)\left(\underbrace{\sum_x p_X(x)}_{1}\right) \geq \left(\sum_x x\, p_X(x)\right)^2$$

$$\to E(X^2) \geq E(X)^2$$

خواص واریانس

$$Var(X+c) = E\left(((X+c)-(\mu+c))^2\right) = Var(X)$$

$$Var(aX) = E\left((aX-a\mu)^2\right) = a^2 Var(X)$$

$$Var(aX+c) = a^2 Var(X)$$

$Var(X+Y)$ $\square$ $Var(X)$, $Var(Y)$ $<$ $Y=-X$ $>$ $Y=X$

$$\to Var(X+Y) = E\left((X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2\right) = E\left((X-\mu_X+Y-\mu_Y)^2\right)$$

$$= E\left((X-\mu_X)^2\right) + E\left((Y-\mu_Y)^2\right) + 2E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

ject

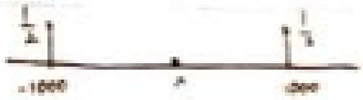
e

$X = Y \Rightarrow E[X^2] \stackrel{?}{=} E[X]^2$

$X \sim B(\frac{1}{2})$ $\quad E[X^2] = E[X] = \frac{1}{2}$ $\quad X^2 = X$ $\quad E[X]^2 = \frac{1}{4}$

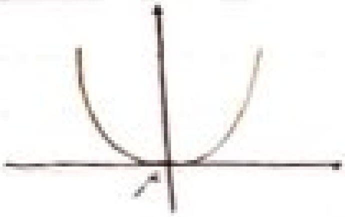
واریانس

$E[X] = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$



واریانس میزان پراکندگی حول امید ریاضی

$X \sim P_X(x)$ $\quad \mu = E[X]$ $\quad$ واریانس $= E(X-\mu)^2$



$E(X-\mu)^2 = \sum P_X(x)(x-\mu)^2$

$E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 =$

✓ $\boxed{Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E((X-\mu)^2) \geq 0}$

$E[X^2] \geq E[X]^2$

Subject
Date

$Y = X^2$

$X = \begin{cases} a & \frac{1}{2} \\ b & \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \downarrow & \downarrow & \frac{n}{2} \to a & \frac{n}{2} \to b \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \end{array}$$

$\frac{n}{2} \to a^2 \qquad \frac{n}{2} \to b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{n}{2} a^2 + \frac{n}{2} b^2}{n} = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$

33 , 3 , 22

مشترک، امید ریاضی - واریانس - متغیرهای پیوسته مستقل

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ خطی بودن

$E[XY] = E[X]E[Y]$ مستقل باشند

$E[XY] = \sum_{x,y} xy \, P_{X,Y}(x,y) \xrightarrow[\text{مستقل}]{\text{چون}} = \sum_{x,y} xy \, P_X(x) P_Y(y) = \sum_x x P_X(x) \sum_y y P_Y(y)$

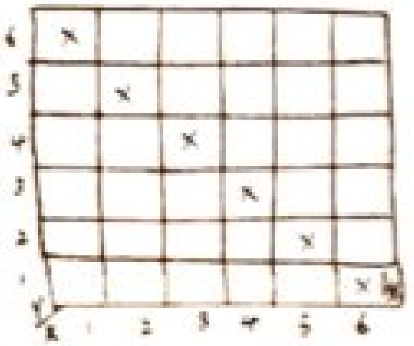
$= E[X] E[Y]$

$E[X \mid X+Y=7] = ?$ [illegible]

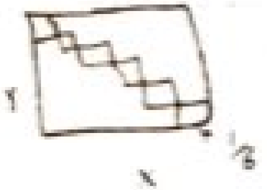
$$\sum_{y=1}^{6} P(Y=y \mid X+Y=7)\, \underbrace{E[X \mid Y=y, X+Y=7]}_{7-y} = \sum_{y=1}^{6} P(Y=y \mid X+Y=7)(7-y)$$

[illegible] $a = E[X \mid X+Y=7] = E[Y \mid X+Y=7]$ [illegible] $\rightarrow 2a = E[X+Y \mid X+Y=7] = 7$

$\rightarrow \quad a = 3.5$



$\rightarrow$



[illegible]

[illegible]

$E[f(X)]$ $\quad Y = f(X)$ $\quad E[Y]$ $\quad Y(\omega) = f(X(\omega))$

X, Y $\quad E[f(X,Y)] = ?$ $\quad f(X,Y) = aX + bY$

① [illegible] $Y = f(X)$, $E[Y] = \sum_y y\, P_Y(y)$

② $E[f(X)] = \sum_x f(x)\, p(x)$

$\rightarrow \quad E[f(X,Y)] = \sum_{x,y} f(x,y)\, P_{X,Y}(x,y)$

Subject
Date

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$X = X_1 + X_2 + X_3$

$E[X \mid N=3] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3\lambda$

$E[X \mid N=n] = n\lambda \quad \rightarrow \quad E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n)\, \underbrace{E[X \mid N=n]}_{n\lambda} = \lambda E[N]$

$\Rightarrow \quad \boxed{E[X] = \lambda^2}$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$
$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \quad \longrightarrow \quad X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

مشابها داشتیم [illegible]

ثابت [illegible] با استفاده [illegible] توزیع دوجمله‌ای

$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \sim B(\overset{n}{\frown}\frac{\lambda_1}{p}, p)$

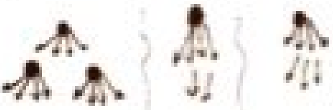
$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \sim B(\frac{\lambda_2}{p}, p) \quad \Rightarrow X+Y \sim B(n_1+n_2, p) = B(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{p}, p) \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

مسئله [illegible] (Y) [illegible] ؟

$E[Y] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n)\, E[Y \mid N=n]$

[illegible]

$N=3$



$Y = W_1 + W_2 + W_3$
$E[Y] = 3\lambda^2$

$\Rightarrow \quad E[Y] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n)\, \underbrace{E[Y \mid N=n]}_{n\lambda^2} = \lambda^3$

دستور کار

قوانین امیدریاضی - امیدریاضی تابع یک متغیر - امیدریاضی شرطی

$$E[X] = \sum_x x P_X(x)$$

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

$$p(X=x \mid Y=y) \quad \text{شناخته} \rightarrow \quad E[X \mid Y=y] \triangleq \sum_x x\, p(X=x \mid Y=y)$$

$$p(X=x) = \sum_y p(X=x \mid Y=y)\, p(Y=y)$$

$$\rightarrow \sum_y p(Y=y) E[X \mid Y=y] = \sum_y P_Y(y) \sum_x x P_{X|Y}(x|y)$$

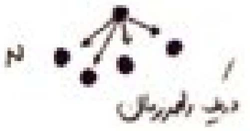
$$\sum_{x,y} x P_Y(y) P_{X|Y}(x|y) = \sum_{x,y} x P_{X,Y}(x,y) = \sum_x x \sum_y P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_x x P_X(x) = E[X]$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_y p(Y=y) E[X \mid Y=y] = E[X]}$$

مثال: یک باکتری در هر واحد زمان توزیع پواسن دارد برای تقسیم شدن به باکتری های دیگر

$N \sim$ توزیع پواسن با پارامتر λ



اگر در واحد زمانی همه را لحاظ کنیم چقدر می‌شود؟ امیدریاضی؟

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n) \underbrace{E[X \mid N=n]}_{\text{یعنی اول n تا باکتری داریم}}$$

Subject
Date

[illegible] $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ [illegible] X [illegible]

```
Input n, p .

for i = 1 : n

Z[i] = Random Coin(p);

end
```

$$x = \sum_{i=1}^{n} Z[i]$$

[illegible]

$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n}$

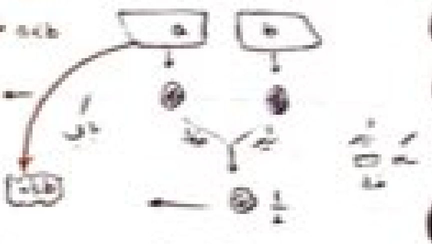
```
Input [illegible]   [illegible]
(π(1) , π(2) ,   , π(n))
for ( i = 1  : n )
   if π(i) == i
    Z(i) = 1
   else Z(i) = 0
   end
  end
  x = Σ Z(i)
```

Subject

Date 15, 8, 15

[illegible]

[illegible]



$p(\text{[illegible]}) = \frac{1}{2}$

[illegible]

$p(\text{[illegible]}) = f(x)$ [illegible]

x		
44	[illegible]	[illegible]
56	[illegible]	[illegible]
	0.7	0.3

$x = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$

$\frac{1}{2}$ — [illegible] — $f(a)$

$\frac{1}{2}$ — [illegible] — $1 - f(a)$

$\frac{1}{2}$ — [illegible] — $f(b)$

$\frac{1}{2}$ — [illegible] — $1 - f(b)$

$$p(\text{success}) = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2}(1 - f(b)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{(f(a) - f(b))}_{>0} > \frac{1}{2}$$

$$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i]$$ [illegible]

PaPCO

Subject
Date

حل: [illegible]

0 1 0 0 1 0

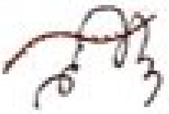
حل: [illegible] x [illegible]

سپس [illegible] : امید ریاضی x را بیابید

x = [illegible]

$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_k \end{bmatrix}$ → $\boxed{\text{[illegible]}}$ → [illegible]

$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \\ \vdots \\ r'_k \end{bmatrix}$

```
for i=1 to n
  for j=1 to k
    if( r[i] == r'[j])
      I(i,j) = 1
    else
      I(i,j) = 0
  end
end
X = Σ_{i,j} I(i,j)
```

$I(i,j) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ [illegible]

$1 \le i \le n$

$1 \le j \le k$

$$X = \sum_{i,j} I(i,j)$$

$$E[X] = \sum_{i,j} E[I(i,j)] = \sum_{i,j} P[I(i,j)=1]$$

$$= \underbrace{nk}\, P[I(1,1)=1]$$

[illegible]

PAPCO

Subject
Date

مسئله: یک جایگشت تصادفی از بین اعداد 1, 2, 3 انتخاب می‌کنیم (یکنواخت) $\qquad X = \#$ اعدادی که جایشان درست است

$X=3 \rightarrow 1, 2, 3$

$X=1 \rightarrow 1, 3, 2$

$X=1 \rightarrow 2, 1, 3$

$X=0 \rightarrow 2, 3, 1$

$X=0 \rightarrow 3, 1, 2$

$X=1 \rightarrow 3, 2, 1$

$$X = \begin{cases} 0 & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{3}{6} \\ 3 & \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{3}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 3 = 1$$

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ 1 & \text{[illegible]} \end{cases} \qquad X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$E[I_j] = 0 \times P(I_j = 0) + 1 \times P(I_j = 1) = 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \underline{E[X] = 1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 3 = \underbrace{\frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}_{\text{جمع روی سطرها}} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{جمع روی ستون‌ها}} = 1$$

مسئله: مقدار متوسط [illegible] را بیابید: $\qquad E[X] = ?$

$X = \#$ [illegible] $\qquad 0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \Rightarrow X \rightarrow 3$

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ 1 & \text{[illegible]} \end{cases}$$

[illegible] $(n-1)$ $\qquad X = I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}$

$$E[X] = \sum E[I_j] = \sum_{j=1}^{n-1} P(I_j = 1) = \frac{n-1}{4}$$

$$P(I_j = 1) = \frac{1}{4}$$

PaPCO

Subject

Date 25 / 8 / 1400

[illegible] امید ریاضی

$$X \quad \begin{matrix} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & p_n \end{matrix} \qquad E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$Y = aX + b \quad \rightarrow \quad Y(w) = aX(w) + b$$

مقادیر Y است $\left\{ \begin{matrix} ax_1 + b & p_1 \\ ax_2 + b & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ ax_k + b & p_k \end{matrix} \right.$ $\quad E[Y] = \sum_{i=1}^{k} p_i (ax_i + b) = a\sum_{i=1}^{k} x_i p_i + b\sum_{i=1}^{k} p_i$

$$\Rightarrow E[Y] = aE[X] + b$$

$$Z = X + Y \qquad E[Z] = \sum_{z} z \cdot p(Z = z) \qquad p(Z = z) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} p(X = x, Y = y)$$

$$\Rightarrow E[Z] = \sum_{z} z \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} p(X = x, Y = y) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} z\, p(X = x, Y = y) = \sum_{x,y} (x+y)\, p(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x,y} x\, p(X = x, Y = y) + \sum_{x,y} y\, p(X = x, Y = y) = \sum_{x} x\, p(X = x) + \sum_{y} y\, p(Y = y)$$

$$\boxed{= E[X] + E[Y]}$$

$X \sim B(n, p)$ تعداد موفقیت‌ها $\qquad E[X] = np$

$I_i = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ 1 & \text{اگر i ام موفق باشد} \end{matrix} \right.$ $\qquad X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = np \qquad E[I_i] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

پواسن

$$X = \{0, 1, 2, \dots\} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \qquad r = k-1$$

$$= \lambda \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} = \lambda$$

سؤال. [illegible] $\frac{1}{4}$ [illegible]

[illegible] ؟

امید ریاضی توزیع‌ها

ثابت: $X = c \qquad E[X] = c$

برنولی: $X = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases} \qquad E[X] = p$

دوجمله‌ای: $X = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \bar{p}^{\,n-k}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \bar{p}^{\,n-k} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k \bar{p}^{\,n-k} k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad n \geq k \geq 1 \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} n p^k q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \bar{p}^{\,n-k} \qquad k-1 = r$$

$$\Rightarrow np \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r \bar{p}^{\,n-1-r} = np(p+\bar{p})^{n-1} = \underline{np}$$

$$\begin{matrix} \bullet & 1 \\ \circ & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow E \quad \frac{\ldots}{n} + \frac{\ldots}{n} + \cdots + \frac{\ldots}{n}$$

اگر توزیع دوجمله‌ای را [illegible] = nk [illegible]

$$E[X] = \frac{nkp}{k} = np$$

هندسی: $X = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad P(X=k) = p\bar{p}^{\,k-1}$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p \bar{p}^{\,k-1} = \frac{1}{p} \qquad |x| < 1 \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + kx^{k-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E[X] = \frac{1}{p}}$$

Subject
Date

متغیر X داده شده است. $F_X(x) = P(X \le x)$ چه خواصی دارد؟

① $F_X(-\infty) = 0$ ② $F_X(\infty) = 1$ ③ غیر نزولی

④ پیوسته از راست ⑤ برای توزیع های گسسته [illegible]

[illegible]

نتیجه ⑥ اگر CDF [illegible] PMF [illegible] توزیع گسسته [illegible] $1 - F_X(x) = P(X > x)$

امید ریاضی

X = متغیر تصادفی = هزینه روزانه

X	احتمالات
5000	0.05
7500	0.10
10000	0.20
12500	0.30
15000	0.35

[illegible] 1000 [illegible]

خرج کل سالانه = $5000 \times (365 \times 0.05) + 7500(365 \times 0.1) + 10000(365 \times 0.2) + 12500(365 \times 0.3) + 15000(365 \times 0.35)$

خرج متوسط روزانه = $\frac{\text{خرج کل}}{365}$

$$X = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & p_n \end{cases}$$

(مقدار متوسط) امید ریاضی X = $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$

Expected Value = $E[X]$

مثال تاس: $x \in \{1, 2, \dots, 6\}$

$$E[X] = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \dots + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{1}{6}\left(\frac{6 \times 7}{2}\right) = 3.5$$

n بار تاس را انداختیم

$$\frac{1 \times 3 + 2 \times 6 + \dots + \dots 1}{n} = ? \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{n}{6} \times 1 + \frac{n}{6} \times 2 + \dots + \frac{n}{6} \times 6}{n} = 3.5$$

$1 : \frac{n}{6}$ $2 : \frac{n}{6}$ $6 : \frac{n}{6}$

PAPCO

$E[(V - rZ - c)^2]$

$c = E[V - rZ] = E[V] - rE[Z]$

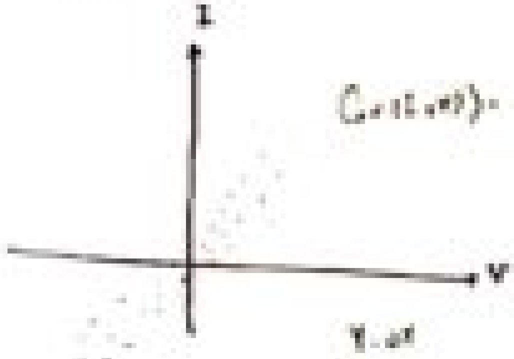
$V = rZ,\quad E[V] = rE[Z]$

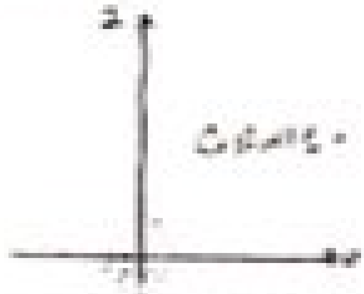
$\Rightarrow E\left[\left(\frac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} - \frac{r\sqrt{Var(Z)}}{\sqrt{Var(V)}} \cdot \frac{Z - E[Z]}{\sqrt{Var(Z)}}\right)^2\right]$

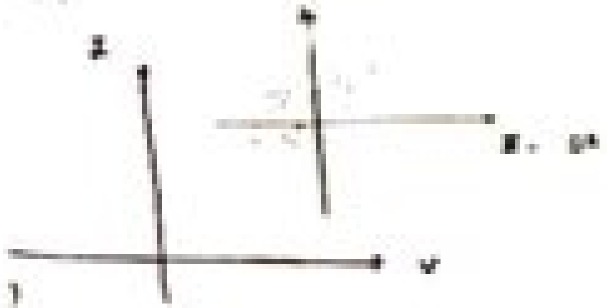
$\frac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} = \frac{r\sqrt{Var(Z)}\,(Z - E[Z])}{\sqrt{Var(V)}\,\sqrt{Var(Z)}}$

V, Z

$\frac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} = K \cdot \frac{Z - E[Z]}{\sqrt{Var(Z)}} \Rightarrow K = \frac{Cov(Z,V)}{\sqrt{Var(Z)\,Var(V)}}$







$-1 \leq K \leq 1$

$Cov^2(X,Y) \leq Var(X)Var(Y) \qquad E[X] = E[Y] = 0$

$\left(\sum_{x,y} xy\, p(x,y)\right)^2 \leq \left(\sum_x x^2 p(x)\right)\left(\sum_y y^2 p(y)\right)$

$\Rightarrow \left(\sum_{x,y} xy\, p(x,y)\right)^2 \leq \left(\sum_{x,y} x^2 p(x,y)\right)\left(\sum_{x,y} y^2 p(x,y)\right)$

$\sum_{x,y} x^2 p(x,y) = \sum_x x^2 \sum_y p(x,y) = \sum_x x^2 p(x)$

$\tilde{X} = X - E[X] \Rightarrow Cov(\tilde{X},\tilde{Y}) \leq Var(\tilde{X})\,Var(\tilde{Y})$

$\tilde{Y} = Y - E[Y]$

Subject
Date

$X \perp Y \implies Cov(X,Y)=0$

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy\, P_{X,Y}(x,y) = \left(\sum_x x P_X(x)\right)\left(\sum_y y P_Y(y)\right)$$

دو متغیر که $Cov(X,Y)=0$ باشد آن ها را غیرهمبسته گویند (uncorrelated)

متغیر تصادفی

$V = rZ$ ضریب ثابت

min $E[(V-rZ)^2]$ کمینه

$E[V^2 - 2rVZ + r^2Z^2]$ کمینه

$\Rightarrow -2rE[VZ] + 2r[Z^2] \Rightarrow r = \dfrac{E[VZ]}{E[Z^2]}$

$$V = E[VZ]\left\{\frac{Z}{E[Z^2]}\right\} \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{E[V^2]}} = \underbrace{\frac{E[VZ]}{\sqrt{E[V^2]E[Z^2]}}}_{\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}} \cdot \frac{Z}{\sqrt{E[Z^2]}}$$

$Var(aX) = a^2 Var(X)$

$Var(aX) = 1$ نرمالیزه $\quad a = \sqrt{\dfrac{1}{Var(X)}}$

$E[X]=0 \quad Var[X] = E[X^2] = \sum p(x)x^2$ مستقل

تعریف همبستگی خطی V, Z

$V = rZ + c$

$V = rZ + c \quad$ یا $\quad \dfrac{V - E[V]}{\sqrt{Var(V)}} = K\dfrac{Z - E[Z]}{\sqrt{Var(Z)}}$

PAPCO

$E|X-c|^2$

می‌خواهیم متغیر تصادفی X را با c تقریب بزنیم که میانگین مربع خطا مینیمم شود

ادعا: بهترین c یعنی $c = E[X]$ در مورد میانگین مربع خطا داشته باشیم.

$$E[(X-c)^2] = E[X^2 - 2cX + c^2] = E[X^2] - 2cE[X] + c^2$$

مشتق به c می‌گیریم برای درجه 2.

$$-2E[X] + 2c = 0$$

$$c = E[X]$$

تمرین: $E[|X-c|]$ را مینیمم کنید.

$$f(x) = |x-c| \qquad E[f(X)] = \sum_x f(x) p_X(x)$$

$$E[|X-c|] = \underbrace{\sum_x |x-c| p_X(x)}_{\text{مینیمم کنید}}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x)$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[(X-E(X))^2]$$

$$Var[X+Y] = Var(X) + Var[Y] + 2Cov(X,Y)$$

Covariance $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E[XY] - E[X]E[Y]$

• کوواریانس متغیرهای مستقل از هم صفر است.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big) = E\big(XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y\big)$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

X,Y مستقل ← $X-\mu_X$ ، $Y-\mu_Y$ هم مستقل اند

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big) = E(X-\mu_X)E(Y-\mu_Y) = 0 \times 0 = 0$$

■ مثال: اگر X, Y مستقل باشند، $h(X)$ ، $g(Y)$ هم مستقل اند برای هر دو تابع دلخواه $h(x)$ ، $g(y)$

x^2, 3, ...

درس تمام

ادامه کوواریانس - ضریب همبستگی - متغیرهای پیوسته

$$X \perp Y \quad \rightarrow \quad Z = f(X) \perp g(Y) = W$$

$$P(Z=z, W=w) = \sum_{\substack{x,y \\ z=f(x) \\ w=g(y)}} P_{X,Y}(x,y) = \sum_{\substack{x,y \\ z=f(x) \\ w=g(y)}} P_X(x)P_Y(y)$$

$$= \Big[\sum_{x:\, z=f(x)} P_X(x)\Big]\Big[\sum_{y:\, w=g(y)} P_Y(y)\Big] = P_Z(z)P_W(w)$$

Subject
Date

$Y = X^2$

$X = \begin{cases} a & \frac{1}{2} \\ b & \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\underbrace{x_1 \quad x_2}_{\frac{n}{2} \to a} \quad \cdots \quad \underbrace{\quad x_n}_{\frac{n}{2} \to b}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\underbrace{x_1^2 \quad x_2^2}_{\frac{n}{2} \to a^2} \quad \cdots \quad \underbrace{\quad x_n^2}_{\frac{n}{2} \to b^2} \Rightarrow \frac{\frac{n}{2}a^2 + \frac{n}{2}b^2}{n} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

P4PCO

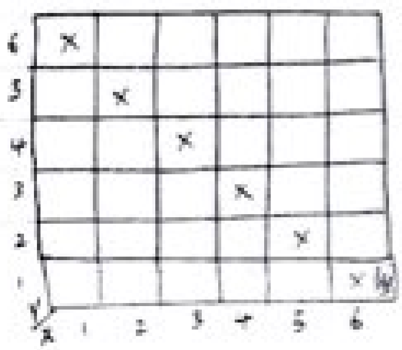
Subject
Date

$E[X \mid X+Y=7] = ?$ [illegible]

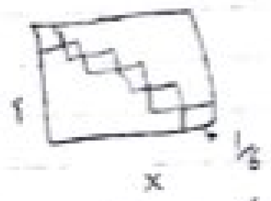
$$\sum_{y=1}^{6} P(Y=y \mid X+Y=7)\, \underbrace{E[X \mid Y=y, X+Y=7]}_{7-y} = \sum_{y=1}^{6} P(Y=y \mid X+Y=7)(7-y)$$

[illegible] $a = E[X \mid X+Y=7] = E[Y \mid X+Y=7]$ [illegible] $\rightarrow 2a = E[X+Y \mid X+Y=7] = 7$

$\rightarrow \underline{a = 3.5}$



$\rightarrow$



[illegible]

$E[f(X)]$ $\quad Y = f(X)$ $\quad E[Y]$ $\quad Y(\omega) = f(X(\omega))$

X, Y $\quad E[f(X,Y)] = ?$ $\quad f(x,y) = ax + by$

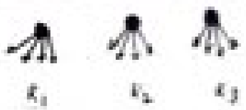
① [illegible] $Y = f(X)$, $E[Y] = \sum_y y\, P_Y(y)$

② $E[f(X)] = \sum_x f(x)\, P(X=x)$

$\rightarrow E[f(X,Y)] = \sum_{x,y} f(x,y)\, P_{X,Y}(x,y)$

Subject

Subject
Date



$X = X_1 + X_2 + X_3$

$E[X \mid N=3] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3\lambda$

$E[X \mid N=n] = n\lambda \quad \rightarrow \quad E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n) \underbrace{E[X \mid N=n]}_{n\lambda} = \lambda E[N]$

$\Rightarrow \quad \boxed{E[X] = \lambda^2}$

نتیجه

$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$
$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$
$\rightarrow \quad X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

شهودا داشتیم [illegible]

اثبات نوشتیم با استفاده از [illegible] توزیع دوجمله‌ای

$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \sim B(\frac{\lambda_1}{p}, p)$

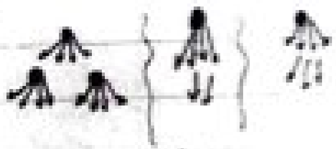
$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2) \sim B(\frac{\lambda_2}{p}, p)$

$\Rightarrow X+Y \sim B(n_1+n_2, p) = B(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{p}, p) \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$

مسئله قبل اگر [illegible] (Y) امید ریاضی؟

$E[Y] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n) E[Y \mid N=n]$

$N=3$ [illegible]



[illegible]

$Y = W_1 + W_2 + W_3$

$E[Y] = 3\lambda^2$

$\Rightarrow E[Y] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n) \underbrace{E[Y \mid N=n]}_{n\lambda^2} = \lambda^3$

Subject
Date 95, 8, 17

دستورکار

ویژگی امید ریاضی - امید ریاضی تابع یک متغیر - امید ریاضی شرطی

$$E[X] = \sum_x x P_X(x)$$

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

$p(X=x \mid Y=y)$: شرطی $\rightarrow$ $E[X \mid Y=y] \triangleq \sum_x x\, p(X=x \mid Y=y)$

$$p(X=x) = \sum_y p(X=x \mid Y=y)\, p(Y=y)$$

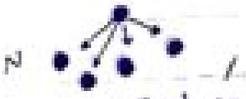
$$\rightarrow \sum_y p(Y=y) E[X \mid Y=y] = \sum_y P_Y(y) \sum_x x P_{X|Y}(x|y)$$

$$\sum_{x,y} x P_Y(y) P_{X|Y}(x|y) = \sum_{x,y} x P_{X,Y}(x,y) = \sum_x x \sum_y P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_x x P_X(x) = E[X]$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_y p(Y=y) E[X \mid Y=y] = E[X]}$$

مثال: یک باکتری در هر واحد زمان توزیع پواسون داره
می‌شکند تقسیم می‌شود به باکتری‌های دیگر



درخت واحد زمان

$N \sim$ توزیع پواسون با پارامتر λ

اگر در دو واحد زمانی چند باکتری خواهیم داشت؟ امید ریاضی؟

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} p(N=n) \underbrace{E[X \mid N=n]}_{\text{در واحد اول n تا باکتری داریم}}$$

Subject
Date

[illegible] $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ [illegible]

```
Input n,p

for j = 1:n

  Z[j] = Random Coin(p);

end
```

$$x = \sum_{j=1}^{n} Z[j]$$

[illegible]

$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ n}$

```
Input [illegible]   [illegible]
(Z(1), Z(2), ..., Z(n))
for( j=1 : n)
  if Z(j)==j
    Z(j)=1
  else Z(j)=0
  end
end
```

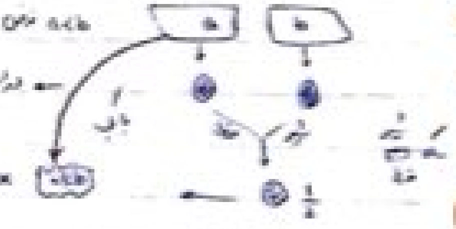
$$x = \sum Z(j)$$

Subject

Date 95,3,15

[illegible]

[illegible] - [illegible] - [illegible] - [illegible]



$P(\ldots) = \frac{1}{2}$ — [illegible]

[illegible] = [illegible]

$P(\ldots) = f(a)$ [illegible]

[illegible] → [illegible] [illegible] → [illegible]

K		
	[illegible]	0.7
[illegible]	[illegible]	[illegible]
56	[illegible]	[illegible]
	0.3	0.3

$x = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$

$\frac{1}{2}$	[illegible]	[illegible]	$f(a)$
	K	[illegible]	$1 - f(a)$
$\frac{1}{2}$	K	[illegible]	$f(b)$
	[illegible]	[illegible]	$1 - f(b)$

$P(\ldots) = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2}(1 - f(b)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\underbrace{f(a) - f(b)}_{>0}) > \frac{1}{2}$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ [illegible]

Subject
Date

مسئله: یک جایگشت تصادفی از اعداد ۱، ۲، ۳ انتخاب می‌کنیم (یکنواخت) $X = \#$ اعدادی که جایشان درست است

$X=3 \leftarrow 1, 2, 3$

$X=1 \leftarrow 1, 3, 2$

$X=1 \leftarrow 2, 1, 3$

$X=0 \leftarrow 2, 3, 1$

$X=0 \leftarrow 3, 1, 2$

$X=1 \leftarrow 3, 2, 1$

$$X = \begin{cases} 0 & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{3}{6} \\ 3 & \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{3}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 3 = 1$$

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ 1 & \text{اگر } j \text{ امین عدد سر جای خودش باشد} \end{cases} \qquad X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$E[I_j] = 0 \times P(I_j = 0) + 1 \times P(I_j = 1) = 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow \underline{E[X] = 1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 3 = \underbrace{\frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}_{\text{جمع روی سطرها}} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{جمع روی ستون‌ها}} = 1$$

مسئله: تعداد متوسط ۰۱ها را بیابید

$E[X] = ?$

$X = \#$ [illegible] ۰۱ را بطول n

$0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 \Rightarrow X \to 3$

[illegible]

$$I_j = \begin{cases} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ 1 & \text{[illegible]} \end{cases}$$

[illegible] $(n-1)$

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}$$

$$E[X] = \sum E[I_j] = \sum_{j=1}^{n-1} P(I_j = 1) = \frac{n-1}{4}$$

$$P(I_j = 1) = \frac{1}{4}$$

P4PCO

Subject

Subject
Date [illegible]

[illegible] امید ریاضی

$$X \quad \begin{matrix} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & p_n \end{matrix} \qquad E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$Y = aX + b \rightarrow Y(w) = aX(w) + b$$

مقادیر Y برابر : $\left\{ \begin{matrix} ax_1 + b & p_1 \\ ax_2 + b & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ ax_k + b & p_k \end{matrix} \right.$ $\qquad E[Y] = \sum_{i=1}^{k} p_i (ax_i + b) = a \sum_{i=1}^{k} x_i p_i + b \sum_{i=1}^{k} p_i$

$$\rightarrow E[Y] = aE[X] + b$$

$$Z = X + Y \qquad E[Z] = \sum_{z} z \cdot p(Z = z) \qquad p(Z = z) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} p(X = x, Y = y)$$

$$\Rightarrow E[Z] = \sum_{z} z \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} p(X = x, Y = y) = \sum_{\substack{x,y,z \\ x+y=z}} z\, p(X = x, Y = y) = \sum_{x,y} (x+y)\, p(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x,y} x\, p(X = x, Y = y) + \sum_{x,y} y\, p(X = x, Y = y) = \sum_{x} x\, p(X = x) + \sum_{y} y\, p(Y = y)$$

$$= E[X] + E[Y]$$

$X \sim B(n,p)$: توزیع دوجمله‌ای $\qquad E[X] = np$

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{در غیر این صورت} \\ 1 & \text{اگر آزمایش } i \text{ ام موفق} \end{cases} \qquad X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = np \qquad E[I_i] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

P4PCO

Subject
Date

پواسن:

$X = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \qquad r = k-1$$

$$= \lambda \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} = \lambda$$

سوال. [illegible] احتمال بیشتر از $\frac{1}{2}$ [illegible]

[illegible] ؟

Subject
Date

Subject
Date

امید ریاضی توزیع‌ها

ثابت

$X = c \qquad E[X] = c$

برنولی

$X = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases} \qquad E[X] = p$

دوجمله‌ای

$X = \{0, 1, 2, \dots, n\} \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \bar{p}^{\,n-k}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \bar{p}^{\,n-k} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k \bar{p}^{\,n-k} k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad n \geq k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} n p^k \bar{p}^{\,n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \bar{p}^{\,n-k} \qquad k = 1, \dots$$

$$\Rightarrow np \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r \bar{p}^{\,n-1-r} = np(p+\bar{p})^{n-1} = np$$

$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow E = \underbrace{0+1+1+\dots+1}_{n} + \underbrace{0+0+\dots+1+1}_{n} + \dots$

[illegible]

$E[X] = \frac{nkp}{k} = np$

هندسی

$X = \{1, 2, 3, \dots\} \qquad P(X=k) = p\bar{p}^{\,k-1}$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p \bar{p}^{\,k-1} = \frac{1}{p} \qquad |x| < 1 \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + kx^{k-1} \Rightarrow \boxed{E[X] = \frac{1}{p}}$$

PAPCO

Subject
Date

متغیر X [illegible] است. $F_X(x) = P(X \le x)$ چه خواهد بود؟

① $F_X(-\infty) = 0$ ② $F_X(\infty) = 1$ ③ غیرنزولی

④ [illegible] ⑤ [illegible]

[illegible]

$1 - F_X(x) = P(X > x)$ نتیجه ⑤ [illegible] CDF [illegible] PMF [illegible]

امید ریاضی

X = متغیر [illegible] [illegible]

X	احتمالات
5000	0.05
7500	0.10
10000	0.20
12500	0.30
15000	0.35

[illegible]

درآمد کل سالانه $= 5000(365 \times 0.05) + 7500(365 \times 0.1) + 10000(365 \times 0.2) + 12500(365 \times 0.3) + 15000(365 \times 0.35)$

درآمد [illegible] روزانه $= \dfrac{[illegible]}{365}$

$$X = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & p_k \end{cases}$$

امید ریاضی X $= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k$

Expected value $= E[X]$

مثال: تاس

$X \in \{1, 2, \dots, 6\}$

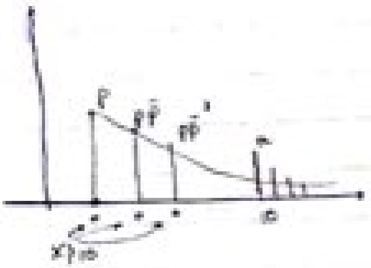
$$E[X] = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \dots + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{1}{6}\left(\frac{6 \times 7}{2}\right) = 3.5$$

$$\frac{1 \times 3 + 2 \times 6 + \dots + \dots}{n} = ? \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{n}{6} \times 1 + \frac{n}{6} \times 2 + \dots + \frac{n}{6} \times 6}{n} = 3.5$$

[illegible]

PAPCO

Subject
Date

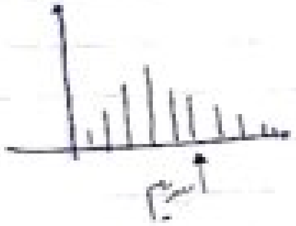


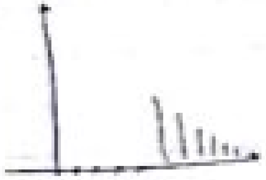
$\bar{p} = 1-p$

$a, a\bar{p}, a\bar{p}^2, \dots$

$a + a\bar{p} + a\bar{p}^2 + \dots = 1 \to a = p$

[illegible]





$\forall n > m \qquad P(X=n \mid X>m) = P(X=n-m) \to P(X=n) = p\bar{p}^{n-1}$

$\frac{P(X=n)}{P(X>m)} = P(X=n-m) \qquad m=1 \to \frac{P(X=n)}{P(X=n-1)} = P(X>1)$

مستقل $X \sim p$, $Y \sim p$ $\qquad Z = \min(X, Y) \qquad P(Z \geq z) = P(X \geq z, Y \geq z)$

$= P(X \geq z) P(Y \geq z) = (1-p)^{z-1} (1-p)^{z-1} = (1-p)^{2z-2}$

$P(Z = z) = P(Z \geq z) - P(Z \geq z+1) = (1-p)^{2z-2} - (1-p)^{2z}$

$q = 1-(1-p)^2 \qquad 1-q = (1-p)^2 \qquad P(Z=z) = (1-q)^{z-1} - (1-q)^{z}$

$= q(1-q)^{z-1}$ هندسی

PAPCO

Subject
Date

$$f(n+1) = \left(\tfrac{1}{2}(1-p)\right)^{n+1} \binom{n+1}{n-9} = f(n)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-p)(n+1)}{(n-9)}$$

$\max$ [illegible] : $f(n^*) \geq f(n^*+1),\ f(n^*-1)$

$$\frac{1}{2}(1-p)\frac{n^*+1}{n^*-9} \leq 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2}(1-p)\frac{n^*}{n^*-10} = 1$$

$$\frac{1}{2}(1-p)\frac{n^*}{n^*-10} \geq 1$$

5, 8, 3

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\overbrace{\text{[illegible]}}^{10}\ ,\ 10$$

$X \geq 10$

$X > 10$

[illegible] $P(X=n \mid X>10) = P(X=n)$

[illegible]

[illegible]

$$P(X=x \mid X>10) \begin{cases} 0 & x \leq 10 \\ P(X=x-10) & x \geq 11 \end{cases}$$

$$P(X=x \mid X>10) = \frac{P(X=x,\ X>10)}{P(X>10)} \qquad x>10 \rightarrow P(X=x \mid X>10) = \frac{P(X=x)}{P(X>10)}$$

$$= \frac{p(1-p)^{x-1}}{(1-p)^{10}} = p(1-p)^{x-1-10} = p(1-p)^{x-11} = P(X=x-10)$$

$$EX = \sum_{j=1} E[I_j] = \sum_j P(I_j=1) = \frac{n-1}{4}$$

$$P(I_j=1) = \frac{1}{4}$$

تمرین

00–0

متوسط X ؟

010010

✓ ✓ ✓
✓ ✓ ✓
✓ ✓ ✓
✓ ✓ ✓

کره‌ای در نظر بگیرید. روی این کره یک بار ره حلقه داریم
سپس به طول L را در نظر بگیرید. کره‌ای را هر جا بخواهیم قطع کنیم
سیم به کره بچسبه. $E(X) = ?$

$X = \#$ تقاطع‌ها

مسیر یا سیم ربطی به شکل ندارد

$I_j \begin{cases} 1 & \text{اگر j امین عدد سر جایش باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$

احتمال j امین [illegible] عدد j باشد
چون اگر [illegible] [illegible] باشد
[illegible] است.

$$E(I_j) = 0 \times P(I_j = 0) + 1 \times P(I_j = 1) = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} E\, I_j = n \times \frac{1}{n} = 1$$

$$E\,X = \frac{3}{6} \times 1 + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{\#\ \text{کل}\ \checkmark}{6}$$

ماتریس را در هر ستون چند تا تیک دارد که امید ریاضی هم جمع [illegible] تیک های
همه ستون ها: جمع [illegible] تقسیم بر ۶.

فرض کنید رشته ای تصادفی از ۰ و ۱ تولید می‌کنیم.

$X = \#$ ۰۰ متوالی در رشته به طول n

دو تا ۰۰ متوالی

$0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1$

طول n

$E\,X = ?$

$I_j = \begin{cases} 0 & \text{در غیر اینصورت} \\ 1 & \text{j امین زوج ۰۰ باشد} \end{cases}$

$$E[X] = E[I_1] + E[I_2] + \cdots + E[I_n] =$$

$$\sum_{j=1}^{n} E\, I_j = np$$

$$E[I_1] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

$$E[I_2] = p$$

$$E[I_n] = p$$

۳، ۲ و ۱ را در نظر بگیرید:

یک جایگشت تصادفی (با احتمالات مساوی) یکنواخت انتخاب می‌کنیم

$1, 2, 3$

۶ جایگشت

$$\boxed{\begin{array}{ll} 3,1,2 & \to X=0 \\ 3,2,1 & \to X=1 \\ 1,2,3 & \to X=3 \\ 1,3,2 & \to X=1 \\ 2,1,3 & \to X=1 \\ 2,3,1 & \to X=0 \end{array}}$$

X = تعداد اعدادی که جایشان عوض نشده است

هیچ‌وقت $X=2$ نمی‌شود چون اگر دو تا سر جایشان باشند سومی هم سر جای خودش است.

$$X = \begin{cases} 0 & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{3}{6} \\ 3 & \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$E\,X = \frac{3}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 3 = 1$$

[illegible] متوسط [illegible] است.

$$\sum_x x P(X=x) + \sum_y y P(Y=y) =$$

$$E[X] + E[Y]$$

$$x(1) \longrightarrow a x(1) + b \qquad Y(\omega) = aX(\omega) + b$$
$$x(2) \longrightarrow a x(2) + b$$
$$\vdots \qquad\qquad a\,\frac{\text{جمع xها}}{n} + b$$
$$x(n) \longrightarrow a x(n) + b$$

$$Z = X + Y$$

$$x(1) + y(1) \longrightarrow x(1) + y(1)$$
$$x(2) + y(2) \longrightarrow x(2) + y(2)$$
$$\vdots$$
$$x(n) + y(n) \longrightarrow x(n) + y(n)$$

متوسط Z ← به ترتیب عددها

$$\frac{\text{جمع xها} + \text{جمع yها}}{n}$$

$X \sim B(n, p)$ = تعداد شیرها در پرتاب n سکه

$$E[X] = np$$

$I_1 \begin{cases} 1 & \text{پرتاب اول شیر بیاید} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$, ... $I_j \begin{cases} 1 & \text{پرتاب jام شیر بیاید} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$$Y \begin{cases} ax_1+b & p_1 \\ ax_2+b & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ ax_k+b & p_k \end{cases} \qquad p_1+p_2+\cdots+p_k=1$$

$$Z = X+Y$$

$$E[Z] = \sum_z z \cdot P(Z=z)$$

$$P(Z=z) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} P(X=x, Y=y)$$

$$E[Z] = \sum_z z \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} P(X=x, Y=y) =$$

$$\sum_{\substack{x,y,z \\ x+y=z}} z \, P(X=x, Y=y) = \sum_{x,y} (x+y) P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x,y} x \, P(X=x, Y=y) + \sum_{x,y} y \, P(X=x, Y=y) =$$

دستورکار

ادامهٔ امید ریاضی

$$X \quad \begin{matrix} x_1 & p_1 \\ x_2 & p_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & p_k \end{matrix}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

خواص امید ریاضی:

$$Y=aX+b \rightsquigarrow Y(\omega)=aX(\omega)+b$$

$$E[Y]=\sum_{i=1}^{k} p_i(ax_i+b)=$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i a x_i+\sum_{i=1}^{k} p_i b=aE[X]+b$$