

Review :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \vec{A} = \vec{\nabla}[A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z] =$$

$$(-\nabla^2 A_x \hat{a}_x) + (-\nabla^2 A_y \hat{a}_y) + (-\nabla^2 A_z \hat{a}_z)$$

تنها برای مختصات کارتزین برقرار است

* بردار \vec{A} یکتا نیست و با افزودن یا کم کردن گرادیان یک تابع مانند ϕ باز هم $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \pm \phi)$ باز هم صفر خواهد بود.

برای یافتن \vec{A} یکتا فرض می کنیم دیویرانس آن داده شده باشد. داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla^2 \phi} \Rightarrow$$

کافی است این معادله را
لاپلاس حل شود تا ϕ بدست آید.

← برای راحتی کار $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ را معمولاً صفر در نظر می گیریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} -\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x \\ -\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y \\ -\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0 \Rightarrow$$

با فرض جابجایی های دائم یعنی $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$
با توجه به شرایط فضای توان گفت

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow$$

فصلان برقراری شود.

در میدان الکتریکی ← معادله معادله پواسون برای پتانسیل از بار در اینجا داریم:

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(R')}{|R-R'|} dV' \equiv \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

چگالی بار حجمی

$$\Rightarrow \begin{cases} -\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x \\ -\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y \\ -\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z \end{cases} \equiv \vec{A}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(R')}{|R-R'|} dV'$$

می توان نشان داد این معادله شرط $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ را ارضایی کند.

← جریانی در طولی سطح ضرب داخلی می شود با جریانی راستان دهد.

← سطحی ... طول ... (بردار طول بردار عمود بر سطح)

← اگر در یک لیم قضایات را با فرض کنیم چون در لبه ها \vec{J} تنها مؤلفه عمود بر سطح دارد پس با قضایات ناچیز جهت \vec{J} به جهت لیم میل می کند.

$$\Delta V' = d\vec{l} \times d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \vec{J}(R') \nabla V' = \vec{J} \Delta S \Delta l' = I \hat{e}_l \Delta l$$

در داخل انکزال

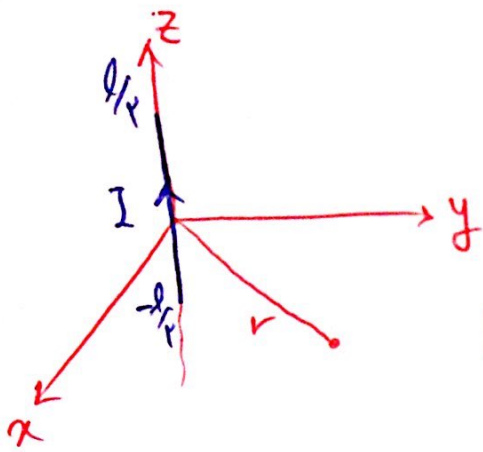
← پس برای یک لیم بیاریانک:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \hat{e}_l' d\ell'}{|R-R'|} \Rightarrow \text{چون جریانی دائمی است پس}$$

I چون قرار است ورودی و خروجی
اگر به یک سطح بسته یکان باشد مجبور است ثابت باشد. (طبق شرط جریانی دائمی)

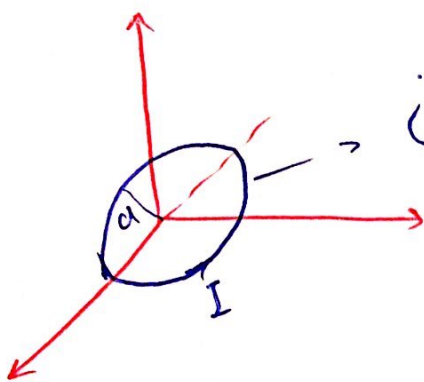
$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{\ell}'}{|R-R'|}$$

مسئله:



$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\hat{z} dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} =$$

$$\frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \ln \frac{l/2 + \sqrt{r^2 + (l/2)^2}}{-l/2 + \sqrt{r^2 + (l/2)^2}}$$



حلقه‌ای جریان $\Rightarrow \vec{A}_z = ?$

روی یک پرده انتقال همفرست

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi \hat{\phi}}{\sqrt{a^2 + z^2}} = 0$$

$\cos\alpha \hat{y} - \sin\alpha \hat{x}$

راه دیگر این بود که $d\vec{l} = a d\phi \hat{\phi}$ که روی سیم همفرست

برای بدست آوردن \vec{B} باید از رابطه‌ی \vec{A} کرل بگیریم

$$\vec{B}(\vec{R}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} d\phi'$$

کرل نسبت به \vec{R} گرفته می‌شود نه \vec{R}'

می‌توان جای کرل و انتقال را عوض کرد \Rightarrow چون متغیرها متفاوت دارد

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right) d\phi' = \int \left(\nabla \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{R}') + \underbrace{\nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right)}_{\text{صفر}} \right) d\phi'$$

نسبت \vec{R} تابع \vec{R} است

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{R}') d\phi'$$