تعریف نماد O ی بزرگ:

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع برحسب x باشند و x ها به اندازه ی کافی بزرگ باشند. در این صورت می گوییم $f(x)$ برحسب $g(x)$ یا $f(x)$ متعلق به O ی بزرگ $g(x)$ است و به صورت $f(x) = O(g(x))$ یا $f(x) \in O(g(x))$ می نویسیم هرگاه عدد حقیقی x_0 و M وجود داشته باشند طوری که

$$\forall x > x_0 : \ |f(x)| \le M \, |g(x)|$$

مثال $\quad f(x) = 6x^4 - 5x^3 + 6 \qquad g(x) = x^4$

$f(x) \in O(g(x))$ برای $x > 1$ زیرا

$$|f(x)| = |6x^4 - 5x^3 + 6| \le |6x^4 + 5x^4 + 6x^4| = 17|x^4|$$

$$\to M = 17 \qquad x_0 = 1$$

ادامه ی بحث خطای برشی

فرض کنید تابع f در نقطه x مشتق پذیر باشد.

زمانی که h به اندازه ی کافی کوچک باشد،

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad (*)$$

$$(1)\quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1(x)) \quad x < \xi_1(x) < x+h$$

$$(2)\quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_2(x)) \quad x-h < \xi_2(x) < x$$

$$(1)-(2) \rightarrow \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{\cancel{2h}f'(x)}{\cancel{2h}} + \frac{h^3}{12h}\left(f'''(\xi_1(x)) + f'''(\xi_2(x))\right)$$

$$\rightarrow f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = -\frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1(x)) + f'''(\xi_2(x))\right)$$

چون f''' تابعی پیوسته است، پس: $f'''(\xi_1(x)) = f'''(\xi_2(x))$:

$$\forall\, \xi_1(x) < \xi(x) < \xi_2(x) \quad f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{-h^2}{6} f'''(\xi(x)) O(h^2)$$

۲. خطای گرد شده

$$x = \pm 0/\underbrace{d_1 d_2 \ldots d_k \ldots}_{\text{مانتیس}} \times 10^n$$

ذخیره سازی عدد

$$x = \pm 0/d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$$

(۱-۲) برش زدن

(۲-۲) گرد کردن ←
$(d_k+1) \leftarrow d_{k+1} \geq 5$
برش زدن ← $d_{k+1} < 5$

مثال: $x = \frac{8}{3}$ با ۷ رقم مانتیس: $x = 2.6666\ldots = 0.26666\ldots \times 10$

قطع کردن 0.2666666

گرد کردن 0.2666667

تعریف ارقام با معنی:

در نمایش عدد $x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_k \times 10^n$

$d_1 \ldots d_k$ را ارقام با معنی گوییم

d_1 ← با اهمیت ترین رقم با معنی

d_k ← کم اهمیت " " "

دو عامل ایجاد خطای گرد شده

۱. جمع یک عدد خیلی بزرگ با یک عدد خیلی کوچک و یا تفریق یک عدد خیلی کوچک از یک عدد خیلی بزرگ

۲. تفریق دو عدد بسیار نزدیک به هم

مثال: معادله ی زیر را در نظر بگیرید: $x^2 - 20x + 2 = 0$

می خواهیم ریشه ها ۵ رقم با معنی داشته باشند. $x_1, x_2 = \frac{20 \pm \sqrt{392}}{2}$ $\Delta = 392$

$x_1, x_2 = 10 \pm 9/89 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 = \frac{c}{x_1}$

تعریف: اگر x^* مقدار تقریبی x باشد.

خطای مطلق $e = |x - x^*|$

خطای نسبی $Re = \frac{|x - x^*|}{|x|} \quad (x \neq 0)$

تعریف ارقام اعشاری درست: فرض کنید x^* مقدار تقریبی x باشد. در این صورت می‌گوییم x^*، k رقم اعشاری درست دارد (k بزرگترین عدد صحیح نامنفی) هرگاه $|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-k}$

x و x^* در k رقم مطابقت دارند.

تعریف ارقام بامعنی درست: فرض کنید x^* مقدار تقریبی x باشد و s بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد اگر $\frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \times 10^{-s}$

x و x^* در s رقم بامعنی مطابقت دارند.

الگوریتم پایدار روشی که برای حل یک مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد، پایدار گوییم هرگاه خطای کوچکی که در هر مرحله از محاسبات رخ می‌دهد (مثلاً در اثر گرد کردن) در مراحل بعدی رشد نکند. در غیر این صورت الگوریتم را ناپایدار گوییم.

مثال: می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم.

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$$

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx + \int_0^1 \frac{5x^{n-1}}{x+5}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+5)}{x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{n} \qquad \boxed{I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$$

$$\xrightarrow{n=0} \int_0^1 \frac{x^0}{x+5}\,dx = \ln(x+5)\Big|_0^1$$

$$\longrightarrow I_0 = \ln 6 - \ln 5 = 0.182$$

الگوریتم پیشرو

$$I_1 = 1 - 5I_0 = 0.09$$

$$I_2 = \frac{1}{2} - 5I_1 = 0.05$$

$$I_3 = \frac{1}{3} - 5I_2 = 0.083 \longrightarrow I_3 > I_2, \; I_4 < 0$$

$$I_4 = \frac{1}{4} - 5I_3 = -0.165$$

تحلیل ناپایداری: فرض کنید ϵ خطای ناشی از گرد کردن I_0 باشد:

$$I_0 = I_0^* + \epsilon \qquad I_1 = 1 - 5I_0 = 1 - 5(I_0^* + \epsilon) \longrightarrow -5\epsilon$$

$$I_2 = \frac{1}{2} - 5I_1 = \frac{1}{2} - 5(1 - 5I_0^* - 5\epsilon) \longrightarrow 25\epsilon$$

$I_3 = \frac{1}{3} - 5(\dots + 25\epsilon) \longrightarrow -125\epsilon$

الگوریتم پسرو

$I_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{I_n}{5} \qquad n = 10, 9, \dots, 1$

$n = 10 \longrightarrow I_9 = \frac{1}{5 \times 10} - \frac{I_{10}}{5} \qquad (I_9 = I_{10})$

$5I_{10} + I_{10} = \frac{1}{10} \longrightarrow I_{10} = I_9 = \frac{1}{60} \simeq 0.017$

$I_8 = \frac{1}{45} - \frac{I_9}{5} \simeq 0.019$

$I_7 = \frac{1}{40} - \frac{I_8}{5} = 0.021$

$I_6 \simeq 0.025 \qquad I_2 \simeq 0.058$

$I_5 \simeq 0.028 \qquad I_1 \simeq 0.088$

$I_4 \simeq 0.034 \qquad I_0 \simeq 0.182$

$I_3 \simeq 0.043$

$P(x) = (x-20)\dots(x-1) = x^{20} - 210x^{19} + \dots + 20!$

$\begin{cases} x+y=1 \\ 1.1x+y=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=-9 \end{cases}$ تغییر کوچک در جواب $\begin{cases} x+y=1 \\ 1.05x+y=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=-19 \end{cases}$

تعریف: مسأله‌ای را خوش وضع می‌گوییم هرگاه تغییرات کوچک در داده‌ها باعث تغییرات کوچک در جواب شود. در غیر این صورت مسأله را بد وضع گوییم.