نیمسال دوم ۹۵-۹۴

بسمه تعالی

تئوری مدارهای الکتریکی

حل سری ۱، ۲

۱- معادلات گره:

$$\frac{v_1}{R_1}+\frac{1}{L}\int_0^t (v_1-v_2)\,dt + i_L(0) = i_s$$

$$\frac{v_2}{R_2}+C\frac{dv_2}{dt}-\frac{1}{L}\int_0^t (v_1-v_2)\,dt - i_L(0)=0$$

با حذف i_L:

$$\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_2}{R_2}+C\frac{dv_2}{dt}=i_s \to v_1=R_1 i_s-\frac{R_1}{R_2}v_2-R_1C\frac{dv_2}{dt}$$

و از نتیجه:

$$\frac{1}{R_2}\frac{dv_2}{dt}+C\frac{d^2v_2}{dt^2}+\frac{1}{L}v_2-\frac{1}{L}\left[R_1 i_s-\frac{R_1}{R_2}v_2-R_1C\frac{dv_2}{dt}\right]=0$$

$v=v_2$

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{R_1C}{L}\right)\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)v=\frac{R_1}{L}i_s$$

شرایط اولیه مورد نیاز: $v(0)$, $\frac{dv}{dt}(0)$:

$$v(0)=v_C(0)=V_0$$

$$\frac{dv}{dt}(0)=\frac{1}{C}i_C(0)=\frac{1}{C}\left[i_L(0)-\frac{v_C(0)}{R_2}\right]=\frac{1}{C}\left[I_0-\frac{V_0}{R_2}\right]$$

۲- معادلات مش:

$$R_1i_1+L\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t(i_1-i_2)\,dt+v_C(0)=v_s$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t(i_2-i_1)\,dt-v_C(0)+R_2i_2=0 \to \frac{1}{C}(i_2-i_1)+R_2\frac{di_2}{dt}=0$$

با حذف v_C:

$$R_1i_1+L\frac{di_1}{dt}+R_2i_2=v_s$$

جایگزینی i_1:

$$R_1i_2+R_1R_2C\frac{di_2}{dt}+L\frac{di_2}{dt}+LR_2C\frac{d^2i_2}{dt^2}+R_2i_2=v_s$$

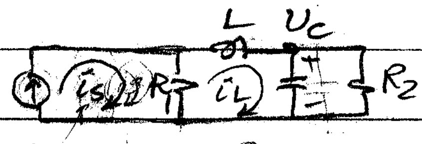
$v=R_2i_2$:

$$\to LC\frac{d^2v}{dt^2}+\left(R_1C+\frac{L}{R_2}\right)\frac{dv}{dt}+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)v=v_s$$

۳- معادلات حالت:

گره KCL: $\frac{v_C}{R_2}+C\frac{dv_C}{dt}-i_L=0$

حلقه KVL: $L\frac{di_L}{dt}+v_C+R_1(i_L-i_s)=0$



$$\to \begin{cases}\frac{dv_C}{dt}=-\frac{1}{R_2C}v_C+\frac{1}{C}i_L\\ \frac{di_L}{dt}=-\frac{1}{L}v_C-\frac{R_1}{L}i_L+\frac{R_1}{L}i_s\end{cases}$$

شرایط اولیه: $i_L(0)=I_0,\ v_C(0)=V_0$

۶- معادلات حالت: گره ۱:

$$\frac{v_1}{1}+\frac{v_1-v_3}{2}+1\times\frac{d}{dt}(v_1-v_2)=i_s$$

گره ۲:

$$\frac{v_2}{1}+\frac{v_2-v_3}{2}+1\times\frac{d}{dt}(v_2-v_1)=0$$

تفریق دو معادله:

(1) $\frac{3}{2}(v_1-v_2)+2\frac{d}{dt}(v_1-v_2)=i_s \to 2\frac{d}{dt}v_C+\frac{3}{2}v_C=i_s$, $v_C(0)=V_0$

جمع دو معادله:

(2) $\frac{3}{2}(v_1+v_2)-v_3=i_s$, $v_3=2\frac{di_L}{dt}$

KCL با گره ۳:

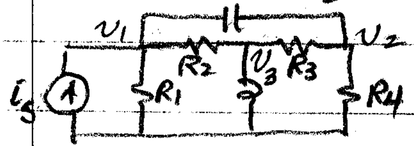
$$\frac{v_3-v_1}{2}+\frac{v_3-v_2}{2}+i_L=0$$

(3) $v_3-\frac{1}{2}(v_1+v_2)+i_L=0$

ادامه 6-

جمع (2)، (3) ← $v_1+v_2+i_L=i_s$ با جایگزینی در (1): $\frac{3}{2}(i_s-i_L)-2\frac{di_L}{dt}=i_s$

ولذا: $2\frac{di_L}{dt}+\frac{3}{2}i_L=\frac{1}{2}i_s$ با شرایط اولیه $i_L(0)=I_0$



نکته: به علت تقارن مدار و اینکه $\frac{R_2}{R_1}=\frac{R_3}{R_4}$ معادله دیفرانسیل مربوط به v_C با i_L تزویج ندارد و فرکانس طبیعی مربوط به v_C برابر $-\frac{1}{R_1C}\times\frac{R_1+R_2}{R_3+R_2}$ است. از طرفی

$$L\left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)\frac{di_L}{dt}+(R_1+R_2)i_L=R_1i_s \rightarrow$$ فرکانس طبیعی i_L $=\frac{R_3}{L}\times\frac{R_1+R_2}{R_3+R_2}$

8- پاسخ به ورودی صفر، یعنی $w=0$ ولذا پاسخ همگن با شرایط اولیه.

$$s^3+4s^2+5s+2=0 \rightarrow (s+1)(s^2+3s+2)=(s+1)^2(s+2)=0$$

فرکانس‌های طبیعی: $s=-2$ و $s=-1$ مکرر از مرتبه 2. لذا

$$y=Ae^{-2t}+Be^{-t}+cte^{-t} \qquad t\geq 0$$

شرایط اولیه: با توجه به اینکه $y(t)$، $\frac{dy}{dt}$، $\frac{d^2y}{dt}$ در $t=0$ پیوسته اند (چون اگر پیوسته نباشند مشتق سوم ∞ و سمت راست $=0$ است) لذا $y(0)=1$، $\frac{d}{dt}y(0)=2$، و $\frac{d^2y}{dt^2}(0)=-1$ ولذا

$A+B=1$ و $-2A-B+C=2$

$4A+B-2C=-1 \longrightarrow -B=3 \rightarrow B=-3, A=4, C=7$

پاسخ پله: $w=u(t)$ و سمت راست $=\delta'(t)+3u(t)$. لذا اگر پاسخ پله سمت راست $=u(t)$ برابر y باشد پاسخ پله برابر $3y+\frac{d^2y}{dt^2}$ خواهد بود. y برابر است با پاسخ همگن (طبیعی) + پاسخ با شرایط اولیه صفر وقتی سمت راست $=u(t)$ یعنی

$$y=Ae^{-2t}+Be^{-t}+cte^{-t}+\frac{1}{2}, \quad y(0)=0, \quad \frac{dy}{dt}(0)=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}(0)=0$$

$\rightarrow A+B+\frac{1}{2}=0, \quad -2A+B+C=0, \quad 4A+B-2C=0$

$\rightarrow B=0, \quad A=-\frac{1}{2}, \quad C=-1$ پاسخ کامل $y=\frac{7}{2}e^{-2t}-3e^{-t}+6te^{-2t}+\frac{1}{2}$

به طریق دیگر: $y=Ae^{-2t}+Be^{-t}+cte^{-t}+\frac{1}{2}, \quad y(0)=1, \quad \dot{y}(0)=2, \quad \ddot{y}(0)=-1$

$\rightarrow A+B+\frac{1}{2}=1, \quad -2A-B+C=2, \quad 4A+B-2C=-1$

$\rightarrow -B=3 \rightarrow B=-3, \quad A=\frac{7}{2}, \quad C=6$

یعنی پاسخ پله برابر عبارت گذرا + پاسخ خصوصی است با اعمال شرایط اولیه

پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله است.

۹- پاسخ به $\omega = \cos t$. کمک ... $-\cos t + 3\cos t = 2\cos t =$ ... چرا که پاسخ به ...

راست برابر $\cos t$، اگر y جواب ... برابر $\frac{d^2y}{dt^2}+3y$ خواهد بود.

$$y = Ae^{-2t} + Be^{-t} + Cte^{-t} + D\cos t + E\sin t$$

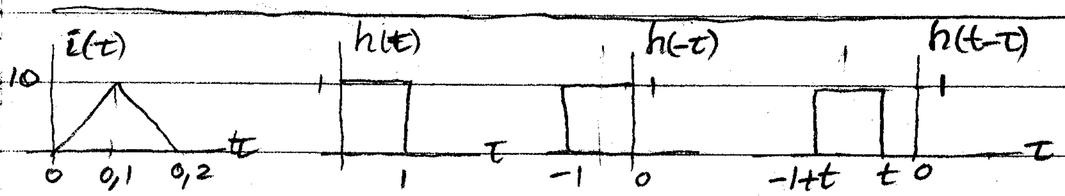
$$\rightarrow D\sin t + E\cos t + 4D\cos t - 4E\sin t - 5D\sin t + 5E\cos t + 2D\cos t + 2E\sin t = 2\cos t$$

$$\rightarrow \begin{cases} D - 4E - 5D + 2E = 0 \\ -E - 4D + 5E + 2D = 2 \end{cases} \rightarrow D = -\frac{1}{5}, E = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow y = Ae^{-2t} + Be^{-t} + Cte^{-t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t \quad , y(0)=1, \dot{y}(0)=2, \ddot{y}(0)=-1$$

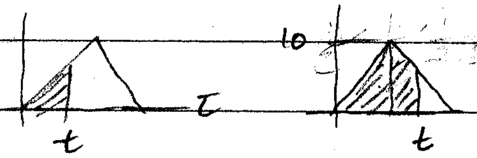
ضرایب A ، B ، C تعیین می‌شوند.

13- (a)



$$y = \int_0^t i(\tau)h(t-\tau)d\tau = $$ سطح زیر حاصل ضرب $h(t-\tau), i(\tau)$

ابتدا: برای $t<0$ ، $y=0$ ؛ و برای $0 \le t \le 0{,}1$: $\text{سطح} = \frac{1}{2} \times t \times 100t$



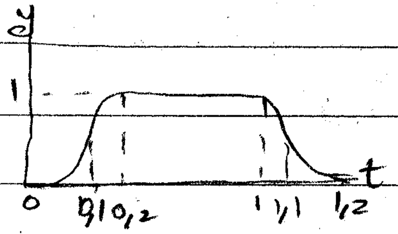
برای $0{,}1 \le t \le 0{,}2$: $\text{سطح} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times [10 + 100t + 20] \times [t - 0{,}1] = \ldots + 20t - 50t^2$

برای $0{,}2 \le t \le 1$: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

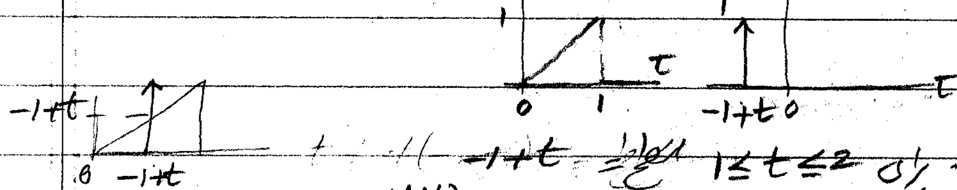
برای $1 \le t \le 1{,}1$: $y = 1 - (t-1) \times 100(t-1) \times \frac{1}{2}$ ، $y = 1 - 50(t-1)^2$

برای $1{,}1 \le t \le 1{,}2$: $y = (1{,}2 - t) \times 100(1{,}2 - t) \times \frac{1}{2}$ ، $y = 50(1{,}2-t)^2$

برای $t > 1{,}2$: $y = 0$

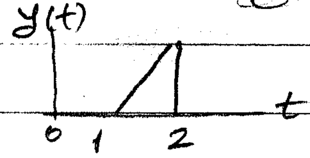


(b) $h(t) = \delta(t-1)$



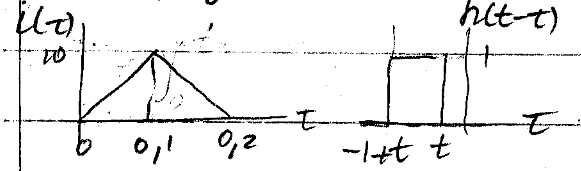
برای $t \le 1$ ، $y=0$. برای $1 \le t \le 2$ ، $-1+t$ برابر ...

برای $t \ge 2$ ، $y = 0$.



14 - a)

$$y=\int_0^t i(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \qquad y=0 \qquad t<0 \text{ است}$$



$0\le t\le 0{,}1$ است

$$y=\int_0^t 100\tau\,d\tau = 50t^2$$

$0{,}1\le t\le 0{,}2$ است

$$y=\int_0^{0,1}100\tau\,d\tau+\int_{0,1}^{t}(-100\tau+20)\,d\tau=\frac{1}{2}+(20\tau-50\tau^2)\Big|_{0,1}^{t}$$

$$y=\frac{1}{2}+20t-2-50t^2+\frac{1}{2}=-1+20t-50t^2$$

$0{,}2\le t\le 1$ است

$$y=\int_0^{0,1}100\tau\,d\tau+\int_{0,1}^{0,2}(-100\tau+20)\,d\tau=1$$

$1\le t\le 1{,}1$ است

$$y=\int_{-1+t}^{0,1}100\tau\,d\tau+\int_{0,1}^{0,2}(20-100\tau)\,d\tau=1-\int_0^{-1+t}100\tau\,d\tau=1-50(t-1)^2$$

$1{,}1\le t\le 1{,}2$ است

$$y=\int_{-1+t}^{0,2}[-100\tau+20]\,d\tau=-50\tau^2\Big|_{t-1}^{0,2}+20\tau\Big|_{t-1}^{0,2}$$

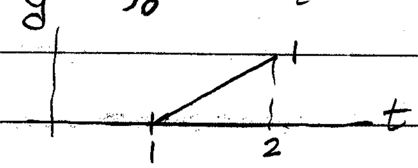
$$=-2+50(t-1)^2+4-20(t-1)=50t^2-120t+72=50(1{,}2-t)^2$$

$y=0\ :\ t>1{,}2$ است

b)

$$y=\int_0^t \tau[u(\tau)-u(\tau-1)]\,\delta(t-\tau+1)\,d\tau$$

$$=\int_0^t (t-1)[u(t-1)-u(t-2)]\,\delta(t-\tau+1)\,d\tau=(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$$



---

18 - برای تغییرپذیر با زمان (خطی)

$$y=\int_0^t x(\tau)\,h(t,\tau)\,d\tau$$

که $h(t,\tau)=t-\tau^2$ پاسخ به تحریک $\delta(t-\tau)$ است، $h(t)=t$ پاسخ به تحریک $\delta(t)$

$$y=\int_0^t[\tau u(\tau)+2u(\tau)-\delta(\tau)](t-\tau^2)\,d\tau$$

$$=t\int_0^t[\tau+2-\delta(\tau)]\,d\tau+\int_0^t[-\tau^3-2\tau^2+0]\,d\tau$$

$$=t\left[\frac{1}{2}t^2+2t-1\right]+\left[-\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3\right]=-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3+2t^2-t$$

-22

a)

$$v_s = \frac{di}{dt} + 2i + \frac{1}{0{,}2}\int_0^t i\,dt + v_c(0)$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + 5i = \frac{dv_s}{dt}$$

می‌بینیم پاسخ ضربه = (شرایط اولیه صفر)

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \rightarrow s = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm j2$$

$$i = \left[e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)\right]u(t)$$ پاسخ ضربه : ورودی $\delta(t) =$

$$i(0) = 0 \rightarrow A = 0$$ با فرض $i_L(0) = 0$, $v_c(0) = 0$ داریم :

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{1}{L}\left[v_s(0) - Ri(0) - v_c(0)\right] = \frac{1}{L}v_s(0) = 1$$

لذا

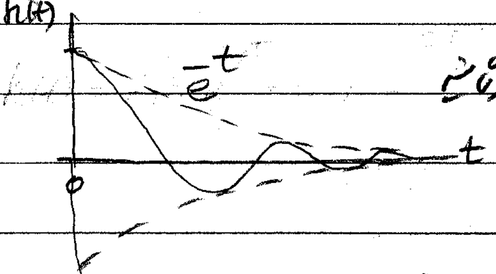
$$\frac{di}{dt} = \left[-e^{-t}\times B\sin 2t + e^{-t}\times 2B\cos 2t\right]u(t) + \cancel{A}^{\,0}\,\delta(t)$$

$$\frac{di}{dt}(0) = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \left[e^{-t}\times B\sin 2t - e^{-t}\times 2B\cos 2t - e^{-t}\times 2B\cos 2t - e^{-t}\times 4B\sin 2t\right]u(t) + 2B\,\delta(t)$$

$$= e^{-t}\left[-3B\sin 2t - 4B\cos 2t\right)u(t) + \delta(t)$$ که صحیح است .

$$h(t) = e^{-t}\left(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)u(t)$$ پاسخ ضربه مطلوب این است .



فرکانس نوسان = 2 ، ثابت میرایی

b) پاسخ کامل شامل پاسخ به ورودی صفر و پاسخ به شرایط اولیه صفر است یعنی

$$i = \int_0^t v_s(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau + i_1(t)$$ $i_1(t)$ پاسخ ورودی صفر است .

$$i_1(t) = \left[e^{-t}(C\cos 2t + D\sin 2t)\right]u(t)$$

$$i_1(0) = I_0 \quad , \quad \frac{di_1}{dt}(0) = v_s(0) - RI_0 - V_0$$

$$\rightarrow C = I_0 \quad , \quad -C + 2D = v_s(0) - RI_0 - V_0 \rightarrow D = \frac{1}{2}v_s(0) - \frac{1}{2}RI_0 - \frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}I_0$$