

فصل ۳ معادلات غیر خطی - هدف حل معادله‌ی غیر خطی $f(x) = 0$
روش دو بخشی

فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$ در این صورت
 α ای وجود دارد به طوری که $f(\alpha) = 0$ یعنی α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$

است. برای به دست آوردن تقریبی برای α بازه‌ی $[a, b]$ را به قسمتی
انتخاب می‌کنیم که معادله‌ی $f(x) = 0$ در این بازه فقط یک ریشه داشته

باشد.

الگوریتم روش دو بخشی

گام ۱) $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

گام ۲) اگر $f(c) = 0$ آن گاه c دقیقاً یک ریشه‌ی معادله است و توقف
کن.

گام ۳) اگر $|b-a| < \epsilon$ c تقریبی برای معادله‌ی $f(x) = 0$ است و توقف
کن.

گام ۴) اگر $f(a)f(c) < 0$ ریشه ی در بازه ی $[a, c]$ است. قراین دوم
 $b=c$ به گام ۱ برگرد. در غیر این صورت α ریشه ای در بازه ی $[c, b]$ است و
 قراین دوم $a=c$ به گام ۱ برگرد.

گام ۵) c را به عنوان تقریبی برای α چاپ کن.

تقریب ریشه ی α ریشه ی معادله ی $f(x)=0$

$$\frac{|b-a|}{2} \leq |\alpha - c| \rightarrow \text{تم}$$

↑ کران خطا برای تقریب ریشه ی α می یابید.

قضیه: الگوریتم دو بخشی همواره همگرا است. (اثبات برای علاقه مندان در کتاب)

مسال ۱) معادله ی $f(x) = x^5 + x - 1$ را به روش دو بخشی حل کنید.

$$f(0) = -1 \rightarrow [0, 1] \rightarrow f(1) = 1$$

$$c = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} + \frac{1}{2} - 1 < 0$$

$$\rightarrow c = \frac{1}{2}, b = 1 \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

κ	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
1	0	1	$\frac{1}{4}$	-	+	-
2	-10	1	$\frac{1}{10}$	-	+	-
3	$\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{10}$	-	+	-
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
9	$\frac{1}{10^{29}}$	$\frac{1}{10^{29}}$	$\frac{1}{10}$	-	+	-
10	$\frac{1}{10^{29}}$	$\frac{1}{10^{29}}$	$\frac{1}{10}$	-	+	-
11	$\frac{1}{10^{29}}$	$\frac{1}{10^{29}}$	$\frac{1}{10^{29}}$	-	+	-

نکته: شرط توقف $(|b-a| < \frac{1}{10})$

برقراری است c به عنوان

تقریبی برای ریشه $f(x) = 0$

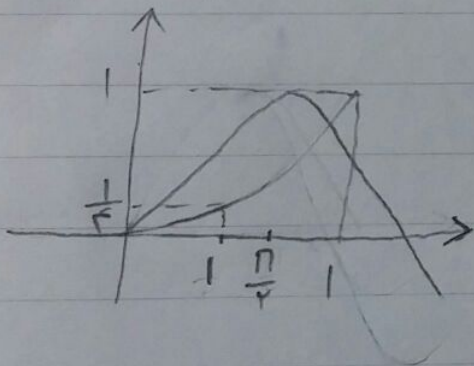
بردارنده می شود

مثال ۲) ریشه یی نسبت به $x^2 - 4 \sin x = 0$ با $f(x)$ رقم عددی

$$y_1 = \frac{x^2}{4}$$

$$y_2 = \sin x = 0$$

محاسبه می باشد



$$f(x) = x^2 - 4 \sin x$$

$$[1, 2] \quad f(1) = 1 - 4 \sin 1 < 0$$

$$f(2) = 4 - 4 \sin 2 > 0$$

$\rightarrow f(1) f(2) < 0 \rightarrow$ ریشه یی نسبت به بازه $[1, 2]$ قرار دارد

$$c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \sin \frac{3}{2} > 0 \rightarrow \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$$

مثال ۳) معادله یی $x^5 + x - 1 = 0$ را با روش بایر

$$x^5 + x - 1 = 0$$

حل نمائے

مرضیٰ لکھتے ہوئے ہم ریسی کے لیے معادلہ دیباڑھی [اے] بہ دست اور ہم

(باروں) اچھی و بلا رقم عدد اسی (دست) حداقل تعداد تکرار کارابیا بہ

$$|x-c| < \frac{|b-a|}{2} < \left[\frac{1}{2} \times 10^{-3} \right], \quad \frac{|b-a|}{2} < \frac{1}{2} k$$

$$\rightarrow \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2} \times 10^{-3} \rightarrow \frac{1}{2^{k-1}} < 10^{-3} \rightarrow 2^{k-1} > 10^3 \rightarrow k > 11$$