SS Se 10 Dr. Behrouzi ۹۳,۱۲,۱۱

رابطه‌ی پارسوال:
برای سیگنال‌های گسسته زمان متناوب

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|a_k|^2$$

مثال ۱: اطلاعات زیر درباره‌ی سیگنال $x[n]$ داده شده است:

1) $x[n+4l]=x[n] \quad \forall l\in \mathbb{Z}$

2) $\sum_{n=-1}^{2} x[n]=2$

3) $\sum_{n=-1}^{2} (-1)^n x[n]=4$

4) $\sum_{n=-1}^{2} x[n]\cos(n\frac{\pi}{2})=\sum_{n=-1}^{2} x[n]\sin(n\frac{\pi}{2})=0$

(1) $N=4 \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$a_0=\frac{1}{N}\sum_{n=-1}^{2}x[n]=\boxed{\frac{1}{2}}$

$a_1=\frac{1}{N}\sum_{n=-1}^{2}x[n]e^{-j\times 1\times\frac{\pi}{2}n}=$

$\frac{1}{4}\left[\sum_{n=-1}^{2}x[n]\cos(n\frac{\pi}{2})-j\sum x[n]\sin(n\frac{\pi}{2})\right]=0$

$a_{-1}=\boxed{0} \quad a_2=\frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{2}x[n]e^{-j2\times\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{2}x[n](-1)^n=\frac{4}{4}=\boxed{1}$

$x[n]=\sum_{n=-1}^{2}a_k e^{jk(2\pi/4)n}=\frac{1}{2}+e^{jn\pi}=\boxed{\frac{1}{2}+(-1)^n}$ + رسم

---

مثال ۲: (مهم)

$x_1[n]=\left(\cos\frac{34n\pi}{14}\right)^2 \leftrightarrow a_k \quad x_2[n]=e^{j\frac{n\pi}{2}}\leftrightarrow b_k$

الف) $a_0$ و $b_0$ را بیابید.

ب) $\sum_{k=-17}^{42}|b_k|^2$

ج) $w[n]=\begin{cases}x_1[n/2] & \text{زوج } n\\ x_1[\frac{n-1}{2}] & \text{فرد } n\end{cases}$ ضرایب سری فوریه؟

ضرایب سری فوریه‌ی $w[n] \leftrightarrow d_k$ را بیابید.

$$\left(\frac{e^{j\frac{17n\pi}{8}}+e^{-j\frac{17n\pi}{8}}}{2}\right)^2 = 1/4\left(2+e^{j\frac{17n\pi}{4}}+e^{-j\frac{17n\pi}{4}}\right)$$

$$= 1/2 + 1/2\cos\frac{17n\pi}{4} = 1/2 + 1/2\cos n\pi/4 \rightarrow \boxed{a_0 = 1/2}$$

$$x_2[n] = e^{jn\pi/2} = \cos(n\pi/2) + j\sin(n\pi/2) \Rightarrow \boxed{b_0 = 0} \quad \boxed{N_2 = 4}$$

ب) $$\sum_{n=-17}^{42} |b_k|^2 \underset{\text{پارسوال}}{=} 20 \cdot \sum_{k=\langle N_2\rangle} |b_k|^2 = 20\left(|b_0|^2+|b_1|^2+|b_2|^2+|b_3|^2\right)$$

$$\sum_{k=\langle N_2\rangle} |b_k|^2 = 1/4 \sum |x[n]|^2 = 1/4 \times 4 = 1 \Rightarrow \sum_{k=-17}^{42} |b_k|^2 = 20$$

ج) $$x_1[n] = x[n]\,x[n] \Rightarrow a_k = \sum c_l c_{k-l} \;,\; a_0 = \sum_l c_l c_{-l} = c_1 c_{-1} + c_{-1} c_1$$

$$\boxed{d_k = \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2} a_k e^{-jk\pi/8}}$$

---

# فصل ۴ تبدیل فوریه:

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های پیوسته‌زمان:

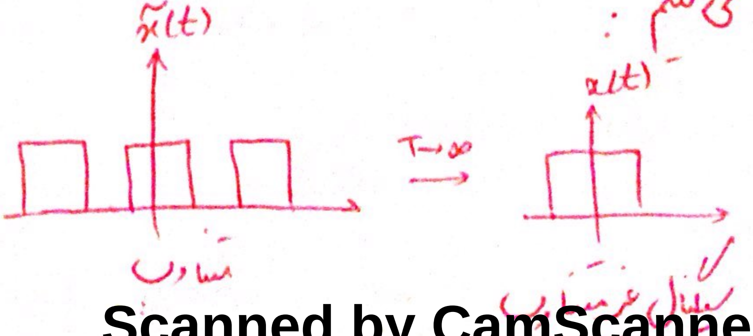
$$x(t),\ x[n] \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t),\ y[n]$$

$$\sum a_k e^{j\omega_0 k t} \longrightarrow y(t) = \sum a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

اثبات می‌کنیم:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$



$$\tilde{x}(t) = x(t) \qquad -T/2 < t < T/2$$

سری فوریه $\tilde{x}(t)$ را می‌نویسیم :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t}$$

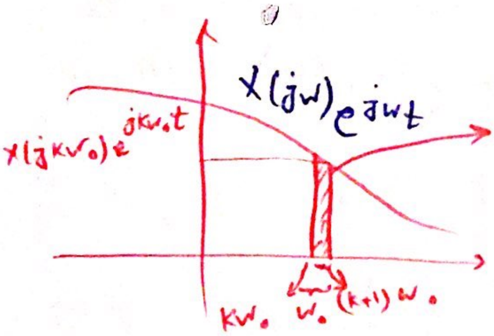
$$x_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t) e^{-j\omega_0 t k} dt = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\Rightarrow T x_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

تعریف می‌کنیم :

$$X(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \longrightarrow x_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum x_t e^{jk\omega_0 t} = \sum \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \underset{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$




$$\text{ع} = X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \times \omega_0$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$T \to \infty$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = x(t)}_{\text{عکس تبدیل فوریه}}$$

$$x(t) \overset{f}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$x(t=0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega \qquad X(j\omega=0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

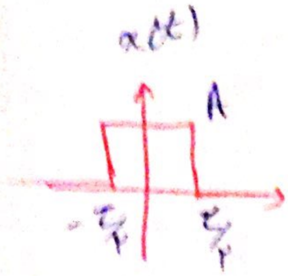
$X(j\omega)$ : طیف سیگنال یا spectrum گفته شود.

Second notation: $f = \frac{w}{2\pi}$ $\quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, dt$$

---

مثال: تبدیل فوریه ی پالس مستطیلی :

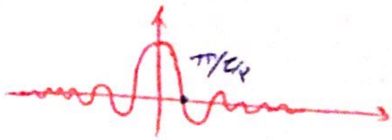



$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jwt}\, dt$$

$$= \frac{A}{-jw} e^{-jwt}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A \sin(w\tau/2)}{w/2} = (A\tau)\, \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\frac{w\tau}{2\pi}\right)}_{\frac{\sin(w\tau/2)}{w\tau/2}}$$

$$= A\tau\, \mathrm{sinc}(f\tau)$$

$$\boxed{A\,\mathrm{rect}(t/\tau) \xleftrightarrow{f} A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)}$$




** :

۱) $x(t)$ حقیقی و زوج $\Leftarrow$ $X(jw)$ حقیقی و زوج

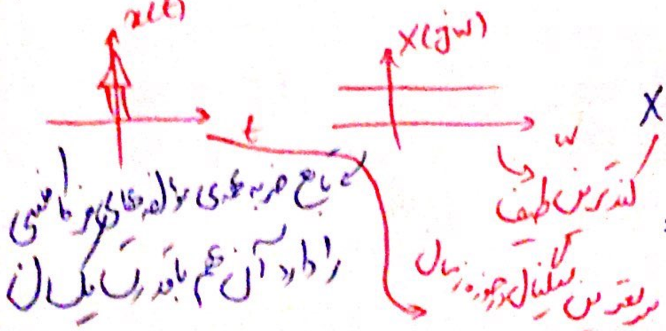
۲) هرچقدر پالس در حوزه ی زمان پهن تر باشد ، sinc که طیف پالس است فشرده تر می گردد و بالعکس

۳) بدست آوردن $X(jw)\big|_{w=0}$ بدون محاسبه ی $X(jw)$ به راحتی قابل حصول است.

$$X(jw = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = A\tau$$

$$x(t=0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A\tau\, \mathrm{sinc}\left(\frac{w\tau}{2\pi}\right) = A \xRightarrow{\frac{w}{\pi}\frac{\tau}{2} = x} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(x)\, dx = 1}$$ ۴)

۵) اگر $A = \frac{1}{\tau}$ , $\tau \to 0$




$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jwt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$