2/9

ریاضی مهندسی ۱۷, ۱۲,

توابع مختلط :

تعریف عدد مختلط : $z=(x,y)$:

$x = Re\{z\}$

$y = Im\{z\}$

تعریف :

$z_1+z_2=(x_1+x_2\,,\,y_1+y_2)$

$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2\,,\,x_1y_2+x_2y_1)$

به خصوص :

$(x,0)+(0,y)=(x,y)$

$(0,1)(y,0)=(0,y)$

$\rightarrow (x,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)$

$z_1=(x_1,0)$

$z_2=(x_2,0)$

$z_1+z_2=(x_1+x_2\,,0)$

$z_1z_2=(x_1x_2\,,0)$

قرارداد ۱)

$(0,1)=i$ یا j

۱۲ عدد مختلط با بخش موهومی صفر را این چنین نمایش می‌دهیم

$(x,0) = x$

موهومی خالص : $\rightarrow (0,y)$

نمایش

$Z \cdot Z = Z^2$

$Z \cdot Z \cdot Z = Z^3$

از جمله :

$(0,1) \times (0,1) = i \times i = i^2 = (-1,0) = -1 \qquad i^2 = -1$

$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2 \,,\, y_1 + y_2)$

$x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$Z_1 Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1 \qquad (Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3) = Z_1 + Z_2 + Z_3$

$Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1 \qquad (Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3) = Z_1 Z_2 Z_3$

$Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$

ریاضی مهندسی ۱۲, ۱۷ ,

عضو خنثی جمع :

$$Z_1 + (0,0) = Z_1$$

$$Z_1 + 0 = Z_1$$

عضو خنثی ضربی $(1,0)$:

$$Z(1,0) = Z$$

$$Z \times 1 = Z$$

معکوس جمع :

$Z + (-Z) = 0$ معکوس جمع

$Z \cdot (Z^{-1}) = 1$ معکوس ضربی

معکوس ضربی
برای عدد مختلط صفر
$(0,0)$ تعریف
نمی‌شود.

$$Z = (x,y)$$

$$(x,y) \times (u,v) = (1,0) = 1$$

$$\begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases} \rightarrow (u,v) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

برای $Z \neq 0$

تعریف تقسیم دو عدد مختلط :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = ? = Z_1 (Z_2^{-1}) = (x_1, y_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{Z_2} = Z_2^{-1}$$

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} = \frac{1}{Z_1} \cdot \frac{1}{Z_2}$$

$$\frac{Z_1 + Z_2}{Z_3} = \frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3}$$

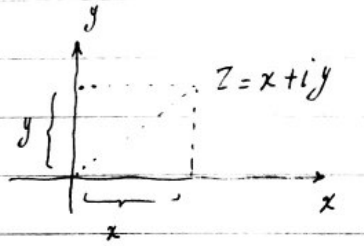
$$\frac{1}{1+i} \times \frac{1}{2+i} = \frac{1}{(1+i)(2+i)} = \frac{1}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} =$$

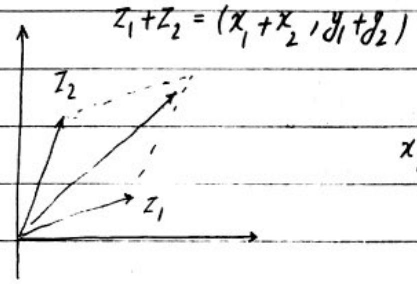
$$= \frac{1-3i}{1+9} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10} i$$

$Z_1 Z_2 = 0$ لااقل یکی از آنها صفر است

$Z_1 > Z_2$: بی معنی است

نمایش عدد مختلط :





$$x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

هنگ یا اندازه یا قدر مطلق تعریف می‌شود :

$$|Z| \triangleq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|Z|^2 = Re^2\{Z\} + Im^2\{Z\}$$

$$|Z_1| < |Z_2|$$

$$|Z| \geq |Re\{Z\}| \geq Re\{Z\}$$

$$|Z| \geq |Im\{Z\}| \geq Im\{Z\}$$

تعریف مزدوج یک عدد مختلط

$$Z = (x, y)$$

$$\bar{Z} \triangleq (x, -y)$$

$|\bar{z}| = |z|$

$\overline{(\bar{z})} = z$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$z \cdot \bar{z} = (x, y)(x, -y) = x^2 + y^2$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

داریم :

$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 \cdot z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

۵/۴ — /۱۲, ۱۷ — ریاضی مهندسی

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+\underbrace{z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2}_{2Re\{z_1\bar{z}_2\}} \le |z_1|^2+$

$+|z_2|^2+2|z_1 z_2|$

$Re\{z_1\bar{z}_2\} \le |z_1 z_2|$

$\left|\sum_{k=1}^{N} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{N}|z_k|$

$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \le |z_1+z_2|+|-z_2|$

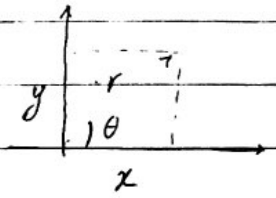
$|z_1|-|z_2| \le |z_1+z_2|$

$|z_2| = |z_2+z_1-z_1| \le |z_1+z_2|+|z_1|$

$|z_2|-|z_1| \le |z_1+z_2|$

نمایش قطبی عدد مختلط :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$$Z = x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$-\pi < \theta < \pi$$

$\theta = Arg(Z)$ آرگومان اصلی Z $\qquad$ $\theta = arg(z)$ آرگومان

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad \theta_1 = arg\, z_1$$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \qquad \theta_2 = arg\, Z_2$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + r_1 r_2 i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$arg(z_1 z_2)$$

به معکوس $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}\left[\cos(0-\theta_1) + i\sin(0-\theta_1)\right] = \frac{1}{r_1}\left[\cos\theta_1 - i\sin\theta_1\right]$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]}{r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$z \cdot z = r^2[\cos 2\theta + i\sin 2\theta]$$

$$z^n = \underbrace{z \dots z}_{n\ \text{بار}} = r[\cos\theta + i\sin\theta] \cdot r[\cos\theta + i\sin\theta] \cdots$$

رابطه دوموآور :

$$= r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta] = [r(\cos^n\theta + i\sin^n\theta)]$$

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta$$

قرارداد : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

نمایش جدید $z = re^{i\theta}$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$