حل تمرین سری هفتم

5.14) $$\hat{y} = \eta_y + \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(X - \eta_x) = \eta_y + \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}(X - \eta_x)$$

$\eta_x = 0$
$\eta_y = E(X^3) = 0$
$\sigma_x = 2$
$\lambda_{xy} = EXY = EX^4 = 1 * 3\sigma_x^4 = 3(2)^4 = 48$
$\Rightarrow \hat{y} = \frac{48}{4} x \to \hat{y} = 12x$

6.1) $A_1 =$ برداشتن سکه هر دو رو شیر
$A_2 =$ برداشتن سکه سالم

a) $P(H/A_1) = 1$
$P(H/A_2) = \frac{1}{2}$
$P(H) = P(H/A_1)P(A_1) + P(H/A_1)P(A_2) \quad = 1 * \frac{1}{10} + \frac{1}{2} * \frac{9}{10} = 0.55$

b) $P(A_1/H_1H_2H_3) = \frac{P(H_1H_2H_3/A_1)P(A_1)}{P(H_1H_2H_3/A_1)P(A_1) + P(H_1H_2H_3/A_2)P(A_2)}$

$= \frac{1 * \frac{1}{10}}{1 * \frac{1}{10} + \frac{1}{8} * \frac{9}{10}} = 0.47$
$P(A_2/H_1H_2H_3) = 1 - 0.47 = 0.53$
$P(H_4/H_1H_2H_3) = P(H_4/H_1H_2H_3, A_1)P(A_1/H_1H_2H_3) + P(H_4/H_1H_2H_3, A_2)P(A_2/H_1H_2H_3)$
$P(H_4/H_1H_2H_3, A_1) = P(H_4/A_1) = 1$
$P(H_4/H_1H_2H_3, A_2) = P(H_4/A_2) = 1$
$\Rightarrow P(H_4/H_1H_2H_3) = 1 * 0.47 + \frac{1}{2} * 0.53 = 0.735$

راه دیر در فرمول(6.21)کتاب $f_P = 0.1\delta(P-1) + 0.9\delta(P - \frac{1}{2})$ قرار دهید و n=k= 3 نتیجه مي شود.

$$\frac{0.1 + \frac{1}{16} * 0.9}{0.1 + \frac{1}{8} * 0.9} = 0.735$$

6.3)

Z=2X+Y

W=X-Y

****

$\eta_Z = 2\eta_X + \eta_Y = 0$ ******************************

$\sigma_W^2 = 4\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 5(2)^2 = 20$

$\eta_W = 0$ $\sigma_W^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 2(2)^2 = 8$

$\mu_{ZW} = E(Z-\eta_Z)(W-\eta_W) = EZW = E(2X+Y)(X-Y) = 2EX^2 - 2EXY + EXY - EY^2$

$= 2\sigma_X^2 - \sigma_Y^2 = (2)^2 = 4$

$Z/W \sim N(\eta_{Z/W}, \sigma_{Z/W})$****************

$$\sigma_{Z/W}^2 = \sigma_Z^2(1-r_{ZW}^2) = \sigma_Z^2 - \frac{\mu_{ZW}^2}{\sigma_W^2} = 20 - \frac{16}{8} = 18$$

$$\eta_{Z/W} = \eta_Z + \frac{r_{ZW}\sigma_Z}{\sigma_W}(W-\eta_W) = \eta_Z + \frac{\mu_{ZW}}{\sigma_W^2}(W-\eta_W) = 0 + \frac{4}{8}(W-0) = \frac{W}{2}$$

$$f_z(z/w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{18}} e^{-\frac{(z-w/2)^2}{2*18}}$$

$E(Z/W) = \sqrt{2}W \to E(Z/W=5) = 5\sqrt{2}$

6.5)

$E(Y/X=x) = \int y f_y(y/x)dy$

$f_y(y/x)$

$$EY/X = \frac{x(2-x)}{2}$$

6.8)

$$C \sim U(10,12) \to f_C(c) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 10<c<12 \\ 0 & \end{cases}$$

V~U(-0.2,0.2) $\to f_V(v) = 2.5$ -0.2<v<0.2

X=C+V

a) $f_X(X/C=c) = f_V(x-c) = 2.5$ c-0.2< x <c+0.2

$f_{XC}(x,c)=f_X(x/c)f_C(c)=1.25$ $c-0.2<x<c+0.2\ ,10<c<12$

X=C+V

$9.8<X<10.2$

$\Rightarrow f_X = f_C = f_V$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XC}(x,c)dc=\begin{cases}1.25(x-9.8),9.8<x<10.2\\0.5,10.2<x<11.8\\1.25(12.2-x),11.8<x<12.2\end{cases}$$

b) X=C+V C=X-V

$f_{c/x}=f_v(x-c)=2.5$ $x-0.2<c<x+0.2$

E(C/X)=x

6.9)

$$f_P(p/Y=k)=\frac{P\{Y=k,P=p\}f_P(p)}{\int_0^1 P\{Y=k/P=p\}f_P(p)dp}=\frac{\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}f_P(p)}{\int_0^1\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}f(p)dp}$$

$$E(P/Y=k)=\int_0^1 pf_P(p/Y=k)dp=\frac{\int_0^1 p^{k+1}(1-p)^{n-k}f(p)dp}{\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}f(p)dp}$$

$$\Rightarrow E(P/Y=11)=\gamma\int_0^1 p^{12}(1-p)^7 f(p)dp$$

$$\gamma=\frac{1}{\int_0^1 p^{11}(1-p)^7 f(p)dp}$$

$$f(p)=1\Rightarrow\gamma=\frac{1}{\beta(12,8)}=\frac{19!}{11!7!}=604656$$

$$E(P/Y=11)=\gamma\int_0^1 p^{12}(1-p)^7dp=\frac{19!}{11!7!}\frac{12!7!}{20!}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

6.10) a)

P(X>t)=1-F(t)=R(t)

F(t)=F(t/A).P(A)+F(t/B)P(B) , $F(t/A)=(1-e^{-4t})u(t)$, $F(t/B)=(1-e^{-6t})u(t)$

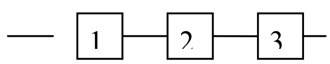
$R(t)=R(t/A)P(A)+R(t/B)P(B)=e^{-4t}.50/200+e^{-6t}.150/200=0.25e^{-4t}+0.75e^{-6t} \quad , \quad t>0$

b)

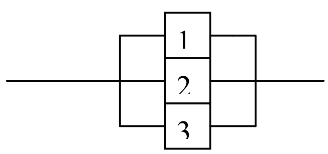
$$P(X>\frac{3}{12}/A)=e^{-4\frac{3}{12}}=e^{-1}$$
$$P(X>\frac{3}{12}/B)=e^{-6\frac{3}{12}}=e^{-\frac{3}{2}}$$
$$P(A/X>\frac{3}{12})=\frac{P(X>\frac{3}{12}/A)P(A)}{P(X>\frac{3}{12}/A)+P(X>\frac{3}{12}/B)P(B)}=\frac{e^{-1}/4}{e^{-1}/4+e^{-\frac{3}{2}}*\frac{3}{4}}=0.355$$

6.11)

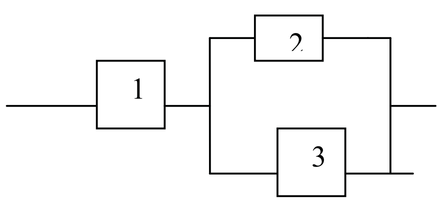
a)



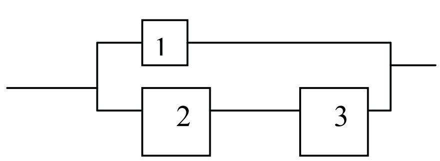
b)



c)



d)



6.12)

$$R(x)=e^{\overbrace{-\int_0^x \beta(t)\,dt}}=e^{-\int_0^x \frac{ct}{1+ct}dt}=e^{-[t-\frac{1}{c}\ln(1+cx)]_{t=0}^{x}}=e^{-x}e^{\frac{1}{c}\ln(1+cx)}=e^{-x}(1+cx)^{\frac{1}{c}}$$

6.13)

$$R(x)=e^{\underbrace{-\int_0^x \beta(t)dt}_{\alpha(t)}}$$

$$\beta(t)=6u(t)+2u(t-t_0)$$

$$\alpha(t)=\int_0^x \beta(t)dt=\begin{cases}6x, x<t_0\\ 6t_0+8(x-t_0), x>t_0\end{cases}$$

$$R(x)=e^{-\alpha(x)}=\begin{cases}e^{-6x}, x<t_0\\ e^{-6t_0-8(x-t_0)}, x>t_0\end{cases}$$

$$mttf=\int_0^\infty R(t)dt=\frac{1}{6}(1-e^{-6t_0})+\frac{1}{8}e^{-6t_0}=\frac{1}{6}-\frac{1}{24}e^{-6t_0}$$

6.14) a)

$$P\{X\ge t/W\le t\}=\frac{P\{X\ge t,\min(X,Y)\le t\}}{P\{\min(X,Y)\le t\}}=\frac{P\{X\ge t,Y\ge t\}}{P\{\min(X,Y)\le t\}}=\frac{F_Y(t)-F_{XY}(t)}{F_X(t)+F_Y(t)-F_{XY}(t,t)}$$

b) با توجه به استقلال X,Y

$$P=P\{X\ge t/W\le t\}=\frac{F_Y(t)-F_X(t)F_Y(t)}{F_X(t)+F_Y(t)-F_X(t)F_Y(t)}=\frac{F_Y(t)(1-F_X(t))}{F_X(t)+F_Y(t)(1-F_X(t))}=\frac{F_Y(t)R_X(t)}{F_X(t)+F_YR_X(t)}$$

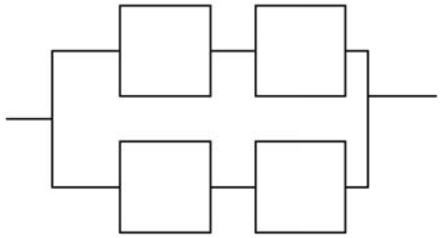
$$P_1=P\{X\ge t/\min(X,Y)=t\}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{X\ge t,t\le Y\le t+\Delta t\}}{P\{t\le\min(X,Y)\le t+\Delta t\}}\underset{\downarrow}{=}\frac{(1-F_X(t))f_Y(t)dt}{[f_X(t)(1-F_Y(t))+f_Y(t)(1-F_X(t))]dt}$$

با توجه به استقلال X,Y

$F_W=F_X+F_Y-F_{XY}$ تابع

$$P_1=\frac{R_X(t)f_Y(t)}{R_Y(t)f_X(t)+R_X(t)f_Y(t)}$$

6.16)



6.17)

A_1: واقعه کار کردن مسیر ١ (١-٢)

A_2: واقعه کار کردن مسیر ٢ (٣-٤)

A_3: واقعه کار کردن مسیر ٣ (١-٤-٥)

A_4: واقعه کار کردن مسیر ٤ (٢-٣-٥)

$$P = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P_1P_2 + P_3P_4 + P_1P_4P_5 + P_2P_3P_5 - P_1P_2P_3P_4 - P_1P_2P_4P_5 - P_1P_2P_3P_5$$
$$- P_1P_3P_4P_5 - P_2P_3P_4P_5 - 2P_1P_2P_3P_4P_5 + 3P_1P_2P_3P_4P_5 = P_1P_2 + P_3P_4 + P_1P_4P_5 + P_2P_3P_5 - P_1P_2P_3P_4$$
$$- P_1P_2P_4P_5 - P_1P_2P_3P_5 - P_1P_3P_4P_5 - P_2P_3P_4P_5 + P_1P_2P_3P_4P_5$$

11)X=S+N

$$\hat{s} = E(S/x) = \int_{-\infty}^{\infty} s f_S(s/x)\,ds$$

$$f_S(s/x) = \frac{f_{SX}(s,x)}{f_X(x)}$$

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}}$$

$$f_X = f_S * f_N$$

$$f_S(s) = \frac{1}{2}\delta(s-1) + \frac{1}{2}\delta(s+1)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}[e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}]$$

$$J = 1, S = s, X = S + N$$

$$\Rightarrow f_{SX}(s,x) = f_{SN}(s, x-s)$$

مستقلند بس S,N

$$\Rightarrow f_{SN}(s,n) = f_S(s).f_N(n) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(\delta(s-1)+\delta(s+1))e^{-\frac{n^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f_{SX}(s,x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(\delta(s-1)+\delta(s+1))e^{-\frac{(x-s)^2}{2}}$$

$$\hat{s} = \int_{-\infty}^{\infty} s\,\frac{[\delta(s-1)+\delta(s+1)]e^{-\frac{(x-s)^2}{2}}}{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}+e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}ds$$

$$= \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}-e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}+e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}} = \frac{e^{-\frac{x^2+1}{2}}(e^x-e^{-x})}{e^{-\frac{x^2+1}{2}}(e^x+e^{-x})} = tghx \rightarrow E(S/x) = tghx$$

13)

$$F_X(x/X=a) = P\{X \le x / X = a\} = \begin{cases} 0 & \text{و}x < a \\ 1 & \text{و}x \ge a \end{cases} \Rightarrow F_X(x/X=a) = u(x-a)$$

$$f_X(x/X=a) = \frac{d}{dx}F_X(x/X=a) = \delta(x-a)$$

$$E(X/X=a) = \int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x-a)dx = a$$

$$\text{var}(X/X=a) = E[(X-a)^2/X=a] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\delta(x-a)dx = 0$$

14)

$F_x(x/A=a)=1/a \qquad 0<x<a$

$$f_A(a) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln a-\mu)^2}{2\sigma^2}}u(a)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x/a)f_A(a)da$$

$$= \int_x^{\infty} \frac{1}{a}\frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln a-\mu)^2}{2\sigma^2}} da \qquad$$ و x>0

=0 x<0

z=lna $$f_X(x) = \int_{\ln x}^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz$$

براي x>0

$$-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2} - z = -\frac{[z-(\mu-\sigma^2)]^2 - (\sigma^4 - 2\mu\sigma^2)}{2\sigma^2}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = e^{\frac{\sigma^4-2\mu\sigma^2}{2\sigma^2}} \int_{\ln x}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-(\mu-\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dz = e^{\frac{1}{2}\sigma^2-\mu}(1-G(\frac{\ln x-\mu+\sigma^2}{\sigma}))$$

$$\Rightarrow f_X(x) = e^{\frac{\sigma^2}{2}-\mu} Q(\frac{\ln x-\mu+\sigma^2}{\sigma})u(x)$$

15)بارادوكس برل _كولموكرف

$$f_X(x/z) = \frac{f_{XZ}(x,z)}{f_Z(z)} \rightarrow f_X(x/Z=0) = \frac{f_{XZ}(x,0)}{f_Z(0)}$$

$$\begin{cases} W = X \\ Z = \dfrac{Y-1}{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = w \\ y = zw+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(w,zw+1)\left| det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial w} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(zw+1)}{\partial w} & \dfrac{\partial(zw+1)}{\partial z} \end{bmatrix} \right| = f_{XY}($$

$$\overset{W=X}{\uparrow}{=} |w| f_{XY}(w,zw+1) = |x| f_{XY}(x,zx+1)$$

X,Y هستند بس $\lambda = 1$ مستقل و داراي توزيع نمايي با

$f_{XZ}(x,z)=xe^{-x}e^{-(zx+1)}$, $x>0$,$zx>-1$
$f_{XZ}(x,0)=xe^{-(x+1)}$,$x>0$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XZ}(x,z)dx \rightarrow f_Z(0)=\int_0^{\infty} xe^{-(x+1)}dx=\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow f_X(x/Z=0)=xe^{-x} \quad , \quad x>0$$

$$\text{مستقلند } X,Y \quad \rightarrow f_X(x/y)=f_X(x)$$

$$f_X(x/Y=1)=f_X(x)=e^{-x} \quad , \quad x>0$$

ملاحظه مي شود که با هم متفاوتند

ب) $U=X$

$$Z=Y-X \quad \rightarrow f_{UZ}(u,z)=f_{XY}(u,z+u)$$

$$u=x \quad f_{XZ}(x,z)=f_{XY}(x,z+x)=e^{-x}e^{-(x+z)}=e^{-(2x+z)} \quad , \quad x>0\ ,\ x+z>0$$

$f_{xz}(x,0)=e^{-2x}\ ,\ x>0$

$f_z(0)=\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$

$$f_X(x/z=0)=\frac{f_{XZ}(x,0)}{f_Z(0)} \Rightarrow f_X(x/z=0)=2e^{-2x}, x>0$$

$$\begin{cases} U=X \\ W=\dfrac{Y}{X} \end{cases} \rightarrow f_{UW}(u,w)=|u|\,f_{XY}(u,uw)$$

$$u=x \rightarrow f_{XW}(x,w)=|x|\,f_{XY}(x,xw)=xe^{-x}e^{-xw}=xe^{-(x+xw)}, x>0, w>0$$

$$f_{XW}(x,1)=xe^{-2x}, x>0$$

ج- کلیه جوابهای بندهای گذشته صحیحند. مثلا در بند الف گرچه ظاهرا واقعه *Y=1* و واقعه *Z=0* معادلند ولی اگر این واقعه را به عنوان نقطه ای در فضای نمونه متغیر تصادفی *Z* در نظر بگیریم، جواب اول درست است و اگر آنرا به عنوان نقطه ای در فضای نمونه متغیر تصادفی *Y* در نظر بگیریم جواب دوم درست است و به همین ترتیب در بند ب (که Z=0 یا W=1 هر دو به معنای *X=Y* هستند)

این امر از آنجا نشأت گرفته که با تک نقطه ای از متغیر تصادفی سر و کار داریم. مثلا اگر $Y=X^3$ را در نظر بگیرید، $0 \le X \le 1$ با $0 \le Y \le 1$ معادل است و تساوی $P\{0 \le X \le 1\} = P\{0 \le Y \le 1\}$ نیز کاملا صحیح است. ولی در مورد توابع چگالی این طور نیست. مثلا نمیتوان گفت چون *X=1* و *Y=1* معادلند پس $f_Y(1)=f_X(1)$ ، بلکه $f_Y(1)=\frac{1}{3}f_X(1)$ و کلا آنچه برابر است $f_X(x)dx$ و $f_Y(y)dy$ است و نه $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ متناظرش. به عبارت دیگر علت بروز پارادوکس این است که واقعه مشروط کننده (به شرط یک تک نقطه از یک متغیر تصادفی) واقعه ای است با احتمال صفر $P(A|B)=\dfrac{\overbrace{P(AB)}^{0}}{\underbrace{P(B)}_{0}}$ و این پارادوکس هشداری است که در نحوه بکار بردن و تفسیر چنین احتمال مشروطی باید دقت کرد.

16-mmse

الف)

$$mmse = E(Y - Y_{ls})^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - \underset{E(Y/X)}{\underset{\downarrow}{\hat{y}}})^2 f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(y - E(Y/X))^2 f_Y(y/x)\,dy}_{\sigma^2_{Y/X}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2_{Y/X} f_X(x)\,dx$$

ب)   براي X,Yمشتركا نرمال مي دانيم كه

$$\sigma^2_{Y/X} = \sigma^2_Y(1-r^2) = \sigma^2_Y - \frac{\mu^2_{XY}}{\sigma^2_X}$$

و   مستقل از X

$$\Rightarrow mmse = \sigma^2_Y(1-r^2)\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \sigma^2_Y(1-r^2)$$

مي دانيم كه   Mmse= $\sigma^2_Y - \sigma^2_{\hat{Y}}$

$$\sigma^2_{\hat{Y}} = \sigma^2_Y - mmse = \sigma^2_Y - (\sigma^2_Y - \frac{\mu^2_{XY}}{\sigma^2_X}) = \frac{\mu^2_{XY}}{\sigma^2_X}$$