به نام خدا

EM Se 12 Dr. Hashemi

Matin Barekatain

معادله‌ی بسل:

$$r^2y''+ry'+(\lambda r^2-\alpha^2)y=0$$

۱) شرط مرزی منفرد در $r=0$: $\lim_{r\to 0^+} y, y' < \infty$

۲) شرط مرزی عادی در $r=a$: دیریکله $y(a)=0$

۳) برای $\lambda<0$

$\lambda=-\beta_2^2$ ، $\beta_2>0$

$$r^2y''+ry'-(\beta_2^2r^2+\alpha^2)y=0 \Rightarrow \boxed{y(r)=C_1I_\alpha(\beta_2 r)+C_2K_\alpha(\beta_2 r)}$$

← I_α و K_α توابع بسل اصلاح شده: modified Bessel func:

شرایط مرزی:

۱) شرط اول: متناهی شدن y در $r=0$:

چون K_α در $r\to 0$ نامتناهی می‌شود ⇐ $\boxed{C_2=0}$ ⇐ $y(r)=C_1I_\alpha(\beta_2 r)$

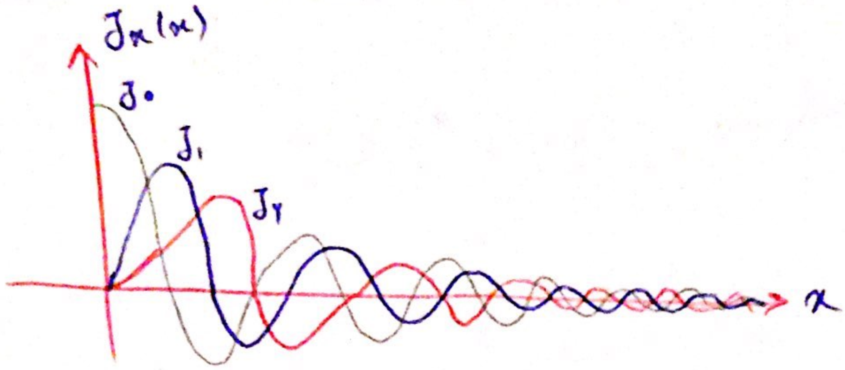
۲) شرط دوم: در $r=a$ ⇐ $y(a)=0$ ⇐

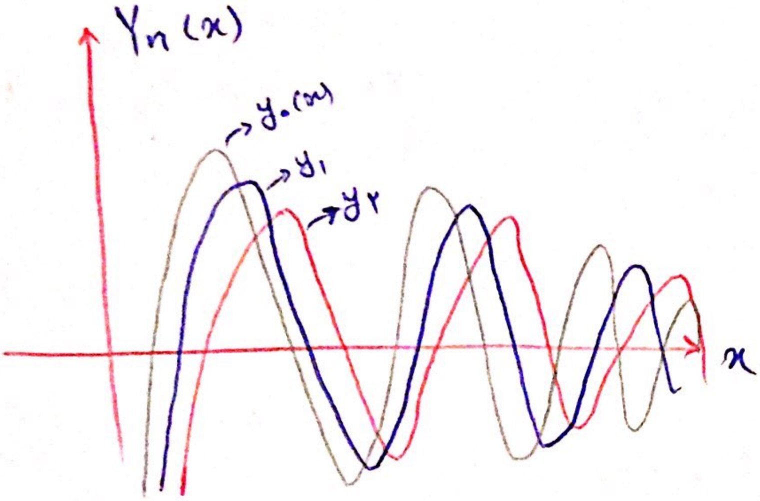
$$C_1\underbrace{I_\alpha(\beta_2 a)}_{\neq 0}=0$$

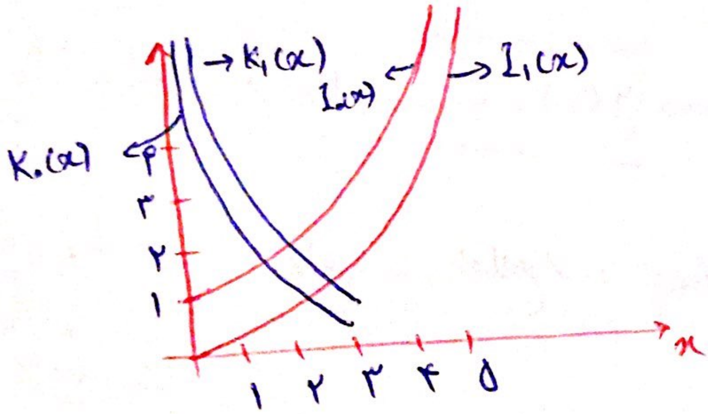
K, I ریشه ندارند

$\Rightarrow C_1=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ ✗ ⇒ پاسخ بدیهی

← پس برای $\lambda<0$ نمی‌تواند جواب داشته باشد!







← از اینجا به بعد تنها برای $\lambda > 0$ که جواب داریم و توابع ویژه را با J و Y نشان می‌دهیم، بررسی می‌کنیم.

← توابع ویژه در حالت $\lambda > 0$ متعامدند.

$$\Rightarrow \int_0^a r\, J_\alpha(\beta_{rn} r)\, J_\alpha(\beta_{rm} r)\, dr = 0 \qquad m \neq n$$

$\sigma(r) \Longrightarrow$ ابتدا کل معادله‌ی بسل به ۲ تقسیم شود تا فرم اشتورم لیوویل استخراج شود.

با اعمال شرایط اولیه ضریب Y صفر می‌شود.

← توابع ویژه در معادله صادقند :

$$r^2 y_n'' + r y_n' + (\beta_{rn}^2 r^2 - \alpha^2)\, y_n = 0$$

← طرفین را در $2y_n'$ ضرب می‌کنیم. می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد (انجام دهید.)

$$\int_0^a \left[r^2 y_n'^2(r)\right]' dr + \int_0^a \underbrace{(\beta_{rn}^2 r^2 - \alpha^2)}_{f} \underbrace{\left(y_n^2(r)\right)'}_{g'} dr = 0$$

← کاری که در بالا انجام دادیم انتگرال‌گیری از طرفین و استفاده از جزء به جزء بود. (می‌خواهیم نرم را حساب کنیم.)

$$(1)\quad \int_0^a \underbrace{r}_{\frac{1}{2\beta_{rn}} f'} \underbrace{y_n^2(r)}_{g} dr = \left[\frac{1}{2\beta_{rn}^2} r^2 y_n'^2(r) + \frac{1}{2} \underbrace{\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{\beta_{rn}^2}\right)}_{\frac{1}{2\beta_{rn}} f} \underbrace{y_n^2(r)}_{g}\right]_0^a$$

← از قرار دادن شرط مرزی $y_n(a)=0$:

$$\boxed{\int_0^r r\, y_n^2(r)\, dr = \frac{a^2}{2\beta_{rn}^2}\, y_n'^2(a)} \quad (2) \Rightarrow$$

برای $m=n$ نرم اینگونه بدست می‌آید.

← اتحاد معروف توابع بسل:

$$\boxed{\begin{aligned} J_{\alpha+1}(x) &= -\left[\frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) + \frac{d}{dx} J_\alpha(x)\right] \\ \frac{d}{dx} J_\alpha(x) &= -J_{\alpha+1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) \end{aligned}}$$

$$y_n'(r) = \frac{d}{dr} J_\alpha(\underbrace{\beta_{rn} r}_{s}) = \beta_{rn} \overset{d/ds}{J_\alpha'}(\beta_{rn} r) =$$

(ادامه صفحه‌ی بعد)

قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای

ادامه $= \beta_{rn}\left[-J_{\alpha+1}(\beta_{rn} r)+\frac{\alpha}{\beta_{rn} r}J_\alpha(\beta_{rn} r)\right]$

← قرار می‌دهیم $r=a$:

$$y_n'(a) = -\beta_{rn} J_{\alpha+1}(\beta_{rn} a) + 0 \longrightarrow$$ ③

چون $\mu_n=\beta_r a$ ریشه‌های J_α هستند.

← از ③ در ② جایگذاری می‌کنیم:

$$\int_0^a r y_n^2(r)dr = \frac{a^2}{2\cancel{\beta_{rn}^2}}\left[-\cancel{\beta_{rn}} J_{\alpha+1}(\beta_{r_n} a)\right]^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^a r y_n^2(r)\,dr = \underbrace{\frac{a^2}{2}}_{\triangleq A_n} J_{\alpha+1}^2(\beta_{rn} a)} \Rightarrow$$ نرم در معادله‌ی بسل

تمرین: نشان دهید که معادله‌ی بسل با شرایط مرزی متفاوت منجر به روابط متفاوتی برای انتگرال $\int_0^a r y_n^2(r)dr$ می‌شود.

← برای شرایط مرزی نیومان

شرط مرزی منفرد در $r=0$ ← y و y' در $r=0$ متناهی

شرط مرزی نیومان در $r=a$ ← $y'(a)=0$

مقادیر ویژه:

$$\lambda_n = \beta_{r_n}^2 \quad , a\beta_{r_n} = \left(J_\alpha'(\beta_{r_n} r)\right) = 0$$ n-امین ریشه $n=1,2,\ldots$

توابع ویژه:

$$y_n(r) = J_\alpha(\beta_{rn} r) \quad n=1,2,\ldots$$

← از رابطه‌ی ① برای محاسبه‌ی نرم داریم:

$$\int_0^a r y_n^2(r)\,dr = \left[0 + \tfrac{1}{2}\left(a^2 - \frac{\alpha^2}{\beta_{rn}^2}\right) y_n^2(a)\right] - \left[0 + 0\right] =$$

$\left\{ \begin{array}{l} J(0)=0 \\ n \geq 1 \end{array} \right.$

$$\frac{\beta_{rn}^2 a^2 - \alpha^2}{2\beta_{rn}^2} J_\alpha^2(\beta_{rn} a)$$

$\triangleq A_n$

$$y_n(r) = J_\alpha(\beta_{rn} a)$$

HW 7:

برای معادله‌ی بسل با شرایط مرزی مرکب (رابین)

$$r^2 y'' + r y' + (\lambda r^2 - \alpha^2) y = 0$$

همان سوال قبلی را حل کنید.

1) شرط مرزی منفرد در $r=0$: y و y' متناهی در $r=0$

2) " " عادی مرکب در $r=a$: $h y(a) + y'(a) = 0$

مقادیر ویژه: $\lambda_n = \beta_{rn}^2$

$a\beta_{rn}$ ریشه‌ی n ام شت: $h J_\alpha(\beta_r a) + \beta_r J_\alpha'(\beta_r a) = 0$

جواب آخر

توابع ویژه: $y_n(r) = J_\alpha(\beta_r r)$ $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^a r y_n^2(r)\,dr = \frac{\beta_{rn}^2 a^2 - \alpha^2 + h^2 a^2}{2\beta_{rn}^2} \triangleq A_n$$

$$A_n = \begin{cases} a^2/2 & \text{شرط صفر + دیریکله} \\ (\beta_{rn}^2 a^2 - \alpha^2)/2\beta_{rn}^2 & \text{صفر + نیومن} \\ (\beta_{rn}^2 a^2 - \alpha^2 + h^2 a^2)/2\beta_{rn}^2 & \text{صفر + رابین} \end{cases}$$

← از روابط تعامد برای تشکیل بسط به سری فوریه - بسل استفاده می‌کنیم. توابع $J_\alpha(\beta_{rn} r)$ متعامدند.

$$\begin{cases} \int_0^a r J_\alpha(\beta_{rm} r) J_\alpha(\beta_{rn} r) dr = 0 \\ \int_0^a r J_\alpha^2(\beta_{rn} r) dr = A_n J_\alpha^2(\beta_{rn} r) & m = n \end{cases}$$

ضرایب بسط به سری فوریه - بسل :

$$f(r) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\alpha(\beta_{rn} r)$$

← مطابق همان کاری که برای بسط سینوسی انجام می‌دادیم در اینجا هم در $J_\alpha(\beta_{rm} r)$ ضرب می‌کنیم و $\int_0^a \underbrace{r}_{\sigma(r)}[\ ]dr$

$$\int_0^a r f(r) J_\alpha(\beta_{rm} r) dr = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^a r J_\alpha(\beta_{rm} r) J_\alpha(\beta_{rn} r) dr$$

$m \neq n$ ← جمله‌ی داخل $\sum$ برابر صفر

$m = n$ ← " " " مخالف "

$$\Rightarrow \int_0^a r f(r) J_\alpha(\beta_{nr} r) dr = c_n A_n$$

← روابط مربوط به سری فوریه‌ی - بسل :

$$C_n = \frac{1}{A_n}\int_0^a r f(r) J_\alpha(\beta_{rn} r)\, dr$$

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_\alpha(\beta_{rn} r)$$

$A_n =$ قبلاً تعریف شده است

توابع لژاندر :

۱) توابع لژاندر عادی جوابهای معادله‌ی لژاندر عادی هستند :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

$$y(x) = A_1 P_p(x) + B_1 P_p(-x) \longleftarrow$$ p نا صحیح

$$y(x) = A_2 P_n(x) + B_2 Q_n(x) \longleftarrow$$ p صحیح $(p=n)$

$P(x)$: تابع لژاندر نوع اول

$Q(x)$: " " " دوم

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m (2n-2m)!\, x^{n-2m}}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}$$

$$M = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$Q_n(x) = \lim_{p \to n} Q_p(x) = \lim_{p \to n} \frac{P_p(x)\cos p\pi - P_p(-x)}{\sin p\pi}$$

$\boxed{Q_n(x) \text{ دارای تکینگی در } x=\pm 1}$ *

$$Q_n(x) = P_n(x)\left\{ \frac{1}{۲} \ln \frac{1+x}{1-x} - \Psi(n) \right\} + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m (n+m)!}{(m!)^۲ (n-m)!} \Psi(m) \left(\frac{1-x}{۲}\right)^m$$

$$\Psi(n) = 1 + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \cdots + \frac{1}{n}$$