به نام خدا

Electromagnetics Se Dr. Rajayi

previously

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{a}_n \, ds \qquad \oint \vec{J} \cdot \hat{a}_n \, ds = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{E} = -\nabla v$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \qquad \vec{J} = \sigma \vec{E}$

$\xRightarrow{\text{طبق معادلات}}$ $\boxed{\begin{array}{l} * \ \nabla \cdot (\sigma \nabla v) = 0 \\ ** \ -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla v) = \rho_f \end{array}}$

⇐ اگر σ ثابت باشد یا نباشد در یک رسانای مجزا داریم :

$D = \hat{E} \cdot \hat{a}_n$

اگر $v = v_0$ آنگاه در معادله‌ی * صدق می‌کند ⇐

پس طبق یکتایی تنها جواب است و چون خارج را عایق کامل درنظر گرفته‌ایم پس هیچ جریانی به آن نمی‌رود و چون در سطح مؤلفه‌ی عمودی J باید پیوسته باشد پس در سطح رسانا هم مؤلفه‌ی عمودی J صفر است!

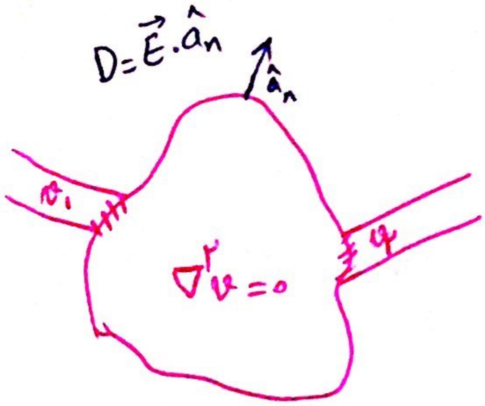
چون $v = v_0$ و ثابت است میدان درون رسانا برابر صفر خواهد شد. همچنین طبق معادله‌ی ** چون $\nabla v = 0$ است پس $\rho_f = 0$ است و داخل رسانا هیچ بار آزادی نداریم.

⇐ عبارت $\rho_f = 0$ زمانی رخ می‌دهد که هم σ و هم ε ثابت باشند. در اینصورت چون

$$\vec{\nabla} \vec{J} = \vec{\nabla}(\sigma \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

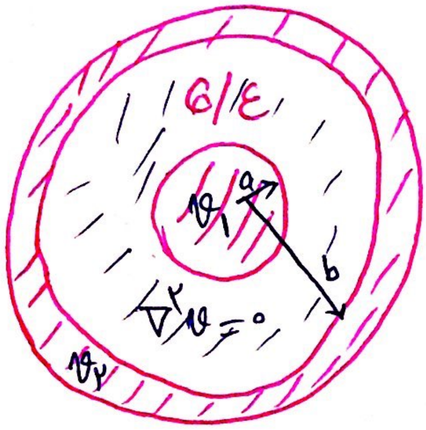
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho_f = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_f = 0$$

حال مثال قبل را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم :



← معادلات همان قبلی است ولی شرایط مرزی فرق می‌کند. اگر $v_1=v_2$ باشد کل پتانسیل کره v_1 ها می‌شود.

مثال :



← در محیط رسانا می‌خواهیم پتانسیل را بدست آوریم.
چون تقارن کروی داریم طبق آنچه قبلاً حل کردیم :

$$v(R)=\frac{A}{R}+B$$

اعمال شرایط مرزی :

$$A=\frac{v_1-v_2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

$$\boxed{E(R)=\frac{A}{R^2}} \Rightarrow \boxed{J_R=\frac{v_1-v_2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\,\frac{\sigma}{R^2}}$$

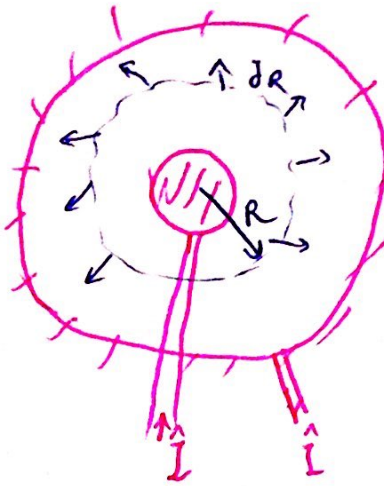
$$\boxed{I=\frac{v_1-v_2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\times 4\pi\sigma}=\oint J\cdot ds$$

$$\Rightarrow \boxed{R=\frac{v_1-v_2}{I}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{4\pi\sigma}} \Rightarrow$$ مقاومت

می خواهیم مسأله را به طریق دیگری حل کنیم.

طبق معادلات داریم

$$\begin{cases} \oint_s \vec{J}\cdot d\vec{s} = 0 & ① \\ \oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_f & ② \\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 & ③ \end{cases}$$



یک سطح گاوسی درنظر می گیریم.

← ادعا می کنیم روی آن تنها

$\vec{J}$ در جهت شعاعی است چون اگر $\vec{J}$ مماسی داشته باشیم طبق رابطه ی $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ و رابطه ی ۳

تناقض وجود می آید.

← اگر σ تابعی از R باشد (فقط) باز هم ادعا می کنیم $\vec{J}$ شعاعی است زیرا اگر شعاعی نباشد یعنی

مؤلفه ی مماسی دارد درحالیکه روی هر سطح کروی $J = \sigma E$ و σ روی سطح کروی ثابت است پس

$\vec{J}$ نمی تواند مؤلفه ی مماسی داشته باشد.

طبق رابطه ی ۱

$$J_R \times 4\pi R^2 - I = 0 \Rightarrow \boxed{J_R = \frac{I}{4\pi R^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_R = \frac{I}{4\pi\sigma(R)R^2}} \Rightarrow$$

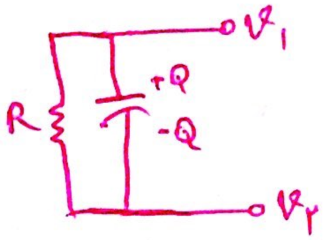
برای کلی بودن حالت σ را تابعی از R گرفتیم.

$$\boxed{\Delta V = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \rightarrow \boxed{R = \frac{1/a - 1/b}{4\pi\sigma}}$$

اگر σ ثابت باشد می دانیم $\Rightarrow \varepsilon\nabla E = \rho_f \Rightarrow \boxed{\rho_f = \frac{\varepsilon I}{4\pi\sigma a^2}}$

$$\Rightarrow Q = \frac{\varepsilon}{\sigma} I = \frac{\varepsilon}{\sigma R} v \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} v} \Rightarrow$$ ظرفیت خازن

⇐ در این حالت شبیه این است که یک خازن موازی با یک مقاومت داریم:



⇐ موازی به این دلیل که ولتاژ یکسان دارند.

می‌توان نشان داد در محیط وسط بار آزاد نداریم زیرا (به شرط σ ثابت بودن و ε ثابت بودن)

$$E_R = \frac{I}{4\pi\sigma R^2} \Rightarrow D_R = \frac{I\varepsilon}{4\pi\sigma R^2} =$$ این تابع در مختصات کروی دیورژانسش برابر صفر است پس

$$\nabla \cdot D = 0 \Rightarrow \boxed{\oint_S D \cdot ds = 0 = Q_f}$$

← اگر σ یا ε تابعی از R باشد دیگر $\nabla \cdot D = 0$ نمی‌شود. در جلسه‌ی بعد این شرایط را بررسی می‌کنیم.

$$\rho_S = \varepsilon E_{\perp} \Rightarrow \rho_S = \frac{\varepsilon I}{4\pi\sigma a^2} \rightarrow$$ روی سطح کروی داخلی