Subject:
Year. Month. Date. ( )

خلاصه‌ی نکات و فرمول‌ها کتاب بر اساس فصل

• اگر $\|f\|^2 = \sum_k |a_k|^2$ باشد کامل بودن سری $\{\phi_k\}$ تضمین می‌شود.

شرایط دیریکله: ۱- تابع در یک دوره تناوب کراندار باشد یعنی $\exists M : |f(x)| < M$

2. تعداد نقاط Max و Min تابع در یک دوره‌ی تناوب متناهی باشد

3. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در یک دوره‌ی تناوب محدود باشد

قضیه همگرایی سری فوریه. اگر $f(x)$ تابعی متناوب با شرایط دیریکله باشد در این صورت سری فوریه آن همگراست در همه نقاط به جز نقاط ناپیوستگی مانند x_0. در سری فوریه به میانگین حد چپ و راست تابع در آن نقطه x_0 میل می‌کند

$$\frac{f(x_{0-}) + f(x_{0+})}{2}$$

قضیه: اگر $f(x)$ متناوب و به طور تکه‌ای پیوسته (PWC) باشد و در هر نقطه از یک تناوب دارای مشتق چپ و راست باشد. در این صورت سری فوریه آن همگراست در تمام نقاط و در نقاط ناپیوستگی برابر $\frac{f(x_{0-}) + f(x_{0+})}{2}$ است.

قضیه. انتگرال‌گیری جمله به جمله: سری فوریه انتگرال $f(x)$ از انتگرال‌گیری جمله به جمله‌ی سری فوریه $f(x)$ به دست می‌آید.

قضیه: اگر $f(x)$ و $f'(x)$ دیریکله باشند ← قضیه مشتق‌گیری جمله به جمله (مانند قضیه بالا)

شکل کلی روابط اولر:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi}{T}nt\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi}{T}nt\,dt$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

گسترش نیم‌دامنه: گسترش تابع غیرتناوبی به صورت فرد یا زوج تا سری فوریه‌ی راحتی داشته باشد

شکل مختلط سری فوریه: جایگذاری $\sin x$ و $\cos x$ توسط رابطه‌های $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ و $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n e^{jnx} + C_{-n} e^{-jnx} \right)$$

$$C_0 = a_0 \qquad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \qquad C_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$$

یا

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx} \qquad C_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-jmx}\, dx$$

تقریب مثلثاتی:

خطای توان دوم

$$\varepsilon_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 dx$$

بهترین تقریب مثلثاتی برای تابع $f(x)$ با تعداد جمله‌های مشخص و با معیار خطای توان دوم، جملات سری فوریه تابع است.

کمترین مقدار خطا (خطای توان دوم).

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{min} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

نامساوی بسل:

$$\hat{\varepsilon} \geq 0 \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right)$$

دوره تناوب $= T$

$$\longrightarrow \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt \geq a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right)$$

رابطه‌ی پارسوال:

$$N \to \infty \quad \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}\right)$$

شکل مختلط رابطه‌ی پارسوال

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_m|^2$$

سری فوریه توابع تحدیدی انتگرال فوریه همگراست، یعنی عبارت انتگرالی $\int_{1} |f|^2 dt$

برای آن محدود است

• انتگرال فوریه: برای توابع غیرمتناوب با در نظر گرفتن $T \to \infty$

• اگر تابع در هر بازه‌ی متناهی پیوسته‌ی تکه‌ای (PWC) باشد و در هر نقطه مشتق چپ و راست داشته باشد و انتگرال

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ موجود باشد در این صورت انتگرال فوریه‌ی آن همگراست. (در نقاط ناپیوستگی برابر میانگین حد چپ و راست)

سری مختلط $\xrightarrow[T \to \infty]{\text{تابع غیرمتناوب}}$ تبدیل فوریه

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{+j2\pi f t} dt$$

• تبدیل فوریه در حالت کلی مختلط است $F(f) = A(f) e^{j\theta(f)}$

قضیه ریله: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 dt \xrightarrow{\text{بر حسب } \omega} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

فصل ۲:

روش دالامبر برای حل معادله‌ی موج: تغییر متغیر $\omega = x + ct \qquad z = x - ct$

در معادله $\rightarrow u_{xx} - \frac{u_{tt}}{c^2} = 0 \Rightarrow 4\frac{\partial^2 u}{\partial w \partial z} = 0 \rightarrow u(x,t) = \phi(x-ct) + v(x+ct)$

جواب نهایی در شرایط مرزی

• روش جداسازی متغیرها برای حل معادله‌ی موج: ساده‌سازی معادله و حل با شرایط مرزی $\rightarrow u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = c \quad \text{ثابت}$$

بحث بر علامت C

Subject
Date

• معادله‌ی حرارت در یک بعد: $u_{xx} = \dfrac{u_t}{c^2}$

قانون فوریه در انتشار حرارت: گرمای منتشر شده در راستای x با گرادیان درجه حرارت متناسب است (در حالت یک بعدی

با $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ $\quad q = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (قانون فوریه در ابعاد بالاتر $q = -k\nabla u$)

وابسته به محیط و ماده‌ی جسم

شرایط مرزی: ۱- شرایط دیریکله: مقدار تابع روی مرز معلوم باشد $\quad u(0,t) = u(l,t) =$ معلوم

صفر - ثابت یا تابع زمان

۲- شرایط مرزی نویمان: مشتق تابع روی مرز معلوم باشد: $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\text{مرز}} =$ معلوم

۳- شرایط مرزی مخلوط: شرایط مرزی به صورت ترکیبی از مقدار تابع و مشتق آن روی مرز باشد. (شرایط رابین)

$a\,u(0,t) + b\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} =$ معلوم

200
150
500

۴- شرایط مرزی متناوب: ابتدا و انتها شکل هم باشد (مثلاً اول و آخر میله حرارت به هم متصل باشد)

$u(0,t) = u(l,t) \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}$

• شرایط مرزی ناهمگن ← در $t \to \infty$: وقتی به زمان بستگی ندارد و معادله ساده می‌شود.

$$u(x,t) = u_s(x) + w(x,t)$$

پاسخ حالت پایدار ↓ $t \to \infty$

پاسخ گذرا ↓ پاسخ شرایط مرزی همگن

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

درصورت حل : حل معادله غیرهمگن . با جداسازی پاسخ مساله که کلی از آن ها فقط تابع x بوده و شرایط مرزی را در بر داشته باشد و دیگری در معادله همگن صدق کند می توان مساله را حل کرد.

• مسائل نیمه محدود . مانند میله ای از یک طرف بی نهایت . شرط فیزیکی : کران دار $\lim_{x \to \infty} u(x,t)$

• مساله عادی اشتورم - لیوویل

$$\frac{d^2X}{dx^2} + P(x)\frac{dX}{dx} + \left[Q(x) + \lambda R(x)\right]X(x) = 0$$

$$a < x < b$$

$$\times p(x) = e^{\int^x P(x)dx}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]X = 0 \qquad p(x) > 0 \quad r(x) > 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 X(a) + \alpha_2 X'(a) = 0 \\ \beta_1 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

$p(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ و $p'(x)$ پیوسته در بازه (a,b)

نکات : 1_ تمام مقادیر λ حقیقی اند و طیف مساله نامیده می شوند.

2_ تعداد مقادیر ویژه نامحدود است و کران پایین دارد اما کران بالا ندارد.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$$

$$n \to \infty \rightarrow \lambda_n \to \infty$$

3_ هر مقدار ویژه یک تابع ویژه X_n وابسته به خود دارد که دارای $n-1$ صفر در فاصله ی a و b است.

4 - توابع ویژه X_n یک مجموعه‌ی کامل تشکیل می‌دهند به طوری که هر تابع هموار (تکه‌ای) را می‌توان به صورت زیر
یا ϕ_n ها بسط داده شود

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

5 - توابع ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی مختلف λ_m و λ_n با تابع وزنی $r(x)$ متعامدند.

$$\int_a^b X_n(x) X_m(x) r(x)\, dx = 0 \qquad (\lambda_m \neq \lambda_n)$$

فصل ۳ : معادله‌ی موج در دو بعد : $\frac{T}{\rho} = c^2$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

در حالت کلی ،

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u$$

لاپلاسین

جداسازی متغیرها

$$u(x,y,t) = X(x)\, Y(y)\, T(t)$$

$$u_{mn}(x,y,t) = \sin\frac{m\pi}{a}x \, \sin\frac{n\pi}{b}y \left(A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t\right)$$

معادله‌ی موج در مختصات دایره‌ای :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

رابطه‌ی تعامد برای توابع بسل مرتبه n :

$$\int_0^a r J_n(k_{mn} r) J_n(k_{pn} r)\, dr = \begin{cases} 0 & p \neq m \\ \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_{mn}) & \end{cases}$$

α_{mn} صفر mام تابع بسل $J_n(x)$ است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ۴: توابع همساز (هارمونیک): تابعی پیوسته با مشتقات اول و دوم پیوسته است که تمام متغیرها در معادله ی زیر صدق کند:

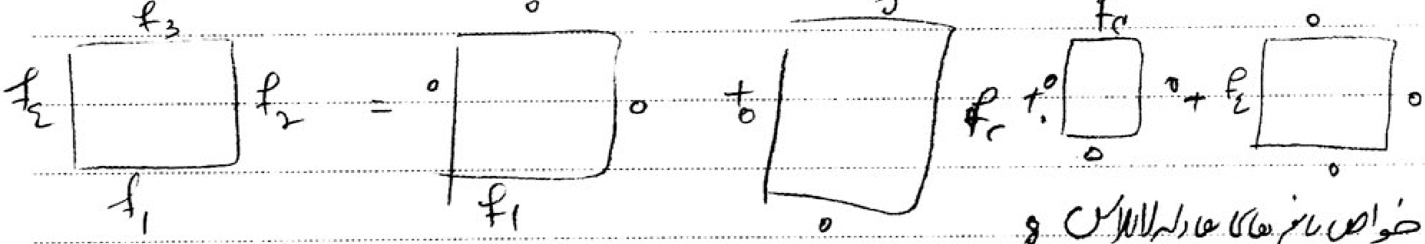
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

حل معادله ی لاپلاس در ناحیه مستطیلی: استفاده از روش جداسازی متغیرها

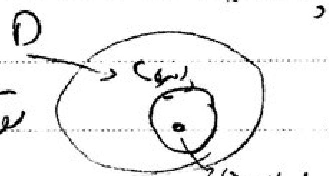
• لاپلاس یک عملگر خطی است:

• اگر شرایط مرزی ناهمگن باشد از خاصیت خطی بودن لاپلاس استفاده میکنیم:

$$\nabla^2 u = \nabla^2 u_1 + \nabla^2 u_2 + \nabla^2 u_3 + \nabla^2 u_4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$



خواص تابع های معادله لاپلاس:



خاصیت مقدار میانگین: مقدار $u(x_0,y_0)$ برابر است با میانگین $u(x,y)$ روی محیط هر دایره ای به مرکز (x_0,y_0) در حوزه ی D. (یا میانگین u روی سطح دایره به مرکز (x_0,y_0) نیز برابر است.

خاصیت مقدار ماکزیمم: اگر u همساز و غیر ثابت باشد در این صورت u در داخل حوزه ی D دارای بیشینه نیست و اگر بیشینه ای داشته باشد روی مرز است. نکته: اگر u روی مرز ثابت باشد روی تمام ناحیه ثابت است.

زیرا داخل ناحیه دارای ماکزیمم یا min نیست و نمی تواند مقدار روی مرز بیشتر یا کمتر باشد پس با آن مساوی است.

فصل ۵ : روش‌های تبدیلی : تبدیل لاپلاس :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \triangleq F(s)$$

تبدیل لاپلاس

u_t	$\frac{1}{s}$
$\delta(s)$	1
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$
$\int_0^t f(t')dt'$	$\frac{1}{s}F(s)$
$t\,f(t)$	$\frac{-dF(s)}{ds}$
$\int_0^t g(t-t')f(t')dt'$	$G(s)F(s)$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$

• کمک‌گیری با جدول‌های تبدیل لاپلاس :

تبدیل فوریه :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$\delta(t)$	1	$u(t+a) - u(t-a)$	$2a\left(\frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)$
$\delta(t-a)$	$e^{-j\omega a}$	$e^{-j\omega t} f(t)$	$F(\omega-\omega_0)$
1	$2\pi\,\delta(\omega)$	$\frac{d f(t)}{dt}$	$j\omega F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
$e^{-\lvert\alpha\rvert t}$	$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$		
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$		
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$		
$e^{-at} \cos\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{j\omega + \alpha}{(j\omega+\alpha)^2 + \omega_0^2}$		
$e^{-at} \sin\omega_0 t\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{(j\omega+\alpha)^2 + \omega_0^2}$		
$t e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(j\omega+\alpha)^2}$		

دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u + G = 0$$

اگر همه ضرایب فقط به x و y بستگی داشته باشند آن را خطی می‌نامیم.

$B^2 - 4AC < 0$ بیضوی (لاپلاس)

$B^2 - 4AC = 0$ سهموی (مانند حرارت)

$B^2 - 4AC > 0$ هذلولوی (مانند موج)

روش مشخصه‌ها در معادلات مرتبه دوم:

فرض کنید $f(y+mx)$ جواب باشد $\longrightarrow m_1 , m_2 \longrightarrow \xi , \eta$

تغییر متغیر $\Longrightarrow$ تبدیل به فرم کانونی و ساده‌تر حل شدن.

اگر مشخصه‌های معادله $\phi(x,y)=c_1$ و $\psi(x,y)=c_2$ باشد $\Longrightarrow$ $r=\phi$ و $s=\psi$

معادله را به شکل استاندارد (کانونی) در می‌آورد.

تبدیل عکس لاپلاس معمولاً گسترهایی که به صورت خارج قسمت توابع گویا هستند معمولاً با تجزیه کسرها به کسرهای ساده بدست می‌آید

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{s - P_n} \right)$$

در آن P_nها قطب‌های $F(s)$ نام دارند یا قطب‌های ساده مقدار A_n چنین بدست می‌آید:

$$A_n = \lim_{s \to P_n} (s - P_n) F(s)$$

همچنین می‌توان A_n را به کمک دستور هویساید بدست آورد.

دستور هویساید

$$A_n = \left. \frac{P(s)}{Q'(s)} \right|_{s = P_n}$$