2-3)

$۲^۷$ زیرمجموعه

چون سه عضو ۱و۳و۷ باید در زیرمجموعه‌ها باشند و ۷ عضو دیگر می‌توانند موجود باشند و می‌توانند موجود نباشند

به عبارت دیگر حاصلضرب دکارتی $\{۱,۳,۷\}$ در کلیه زیرمجموعه‌های $\{۲,۴,۵,۶,۸,۹,۱۰\}$

$۱\times۲^۷=۲^۷$

2-6)

$P(A)=۰/۶$ $\quad P(\bar{A}\cup B)=?$

$P(B)=۰/۳$ $\quad P(\bar{A}\cup\bar{B})=?$

$P(A\cap B)=۰/۲$ $\quad P(A\cap\bar{B})=?$

$P(\bar{A}\cap\bar{B})=?$

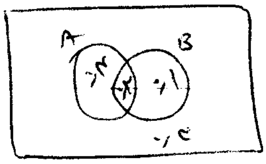
$$P(A\cap\bar{B})=P(A-A\cap B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۶-۰/۲=۰/۴$$

$$P(\bar{A}\cup B)=1-P(A\cap\bar{B})=۰/۶$$

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)=1-۰/۲=۰/۸$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۳-۰/۲=۰/۷$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-۰/۷=۰/۳$$



2-7) a) $P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-\big(P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)\big)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

b) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A_1 + (A_2 - A_1) + \left[A_3 - (A_1 + A_2)\right] + \cdots + \left[A_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i\right]$

$$\Rightarrow P(A_1 + \cdots + A_n) = \underbrace{P(A_1)}_{\leq P(A_1)} + \underbrace{P(A_2 - A_1)}_{\leq P(A_2)} + \underbrace{P(A_3 - (A_1 + A_2))}_{\leq P(A_3)} + \cdots + \underbrace{P\left(A_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i\right)}_{\leq P(A_n)}$$

$$\Rightarrow P(A_1 + \cdots + A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

یا با استقرا:

$n=۲$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1 A_2)}_{\geq 0} \leq P(A_1) + P(A_2)$$

فرض استقرا

$$\underbrace{P(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)}_{A} \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

اثبات حکم استقرا

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_k + A_{k+1}) = P(A + A_{k+1}) = P(A) + P(A_{k+1}) - \underbrace{P(AA_{k+1})}_{\geq 0}$$

$$\leq P(A) + P(A_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)$$

با توجه به فرض استقرا

2-8) a) $P(A) = 1 \rightarrow P(\bar{A}) = 0$

$P(B) = 1 \rightarrow P(\bar{B}) = 0$

طبق سوال قبل $P(\bar{A} \cup \bar{B}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B}) \Rightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) \leq 0$

که طبق اصل ۱ احتمال نمی‌تواند منفی باشد پس

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$$

$P(A \cap B) = 1 \leftarrow P(A \cap B) \geq 1 \leftarrow P(A \cup B) = ۲ - P(A \cap B) \leq 1 \leftarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ راه دوم

b) $AB \subset A \rightarrow P(AB) \leq P(A)$ $\longrightarrow P^{۲}(AB) \leq P(A)P(B)$

$AB \subset B \rightarrow P(AB) \leq P(B)$ $\searrow ۲P(AB) \leq P(A) + P(B) \rightarrow P(AB) \leq \frac{P(A)+P(B)}{۲}$

2-10) a) $\frac{7}{100} = 0.07$

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{99}{6}}{\binom{100}{7}} = \frac{7}{100}$$ یا

$\binom{1}{1}\binom{99}{6}$ ← تعداد انتخاب‌هایی که شماره مورد نظر ما جزء ۷ تا باشد

$\binom{100}{7}$ ← کل تعداد حالات ممکن انتخاب ۷ تا از ۱۰۰ تا

b) $\frac{7}{100} \times \frac{6}{99} \times \frac{5}{98} = 0.000216$

$$\frac{\binom{3}{3}\binom{97}{4}}{\binom{100}{7}} = 0.000216$$ یا

$\binom{3}{3}\binom{97}{4}$ ← تعداد انتخاب‌هایی که سه شماره خاص ما جزء ۷ تا باشند

2-11)

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{90}{18}}{\binom{100}{20}} = 0.318$$

2-13) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (M \cup \bar{M}))$

$= P[(A \cap M) \cup (A \cap \bar{M})]$

$= P(A \cap M) + P(A \cap \bar{M}) = P(A/M)P(M) + P(A/\bar{M})P(\bar{M})$

از هم جدا

2-12)

$P(A) = 0.6$

$P(A \cup B) = 0.8$

$P(A/B) = 0.5$

$P(B) = ?$

$P(B-A) = P(A \cup B - A) = P(A \cup B) - P(A)$

$= 0.8 - 0.6 = 0.2$

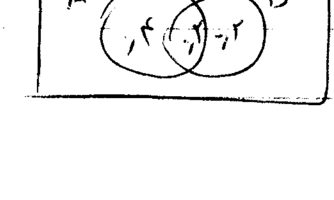
$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.5 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{P(B)}{2}$

$B = (A \cap B) \cup (B - A)$

$\Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(B-A)$

از هم جدا هستند

$\Rightarrow P(B) = \frac{P(B)}{2} + 0.2 \Rightarrow P(B) = 0.4$



2-14) $P(ABCD) = P(A(BCD)) = P(A/BCD)\,P(B(CD))$

$= P(A/BCD)\;\cancel{P(B/CD)\;P(CD)}$

$= P(A/BCD)\;\cancel{P(B/CD)}\;P(C/D)\,P(D)$

2-15) a) $P(B/\bar{A}) = \dfrac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(B)}{1-P(A)}$

$A\cap B=\phi \Rightarrow B\subset\bar{A} \Rightarrow B\cap\bar{A}=B$ زیرا

$P(B/A\cup B) = \dfrac{P(B\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \dfrac{P((\overset{\phi}{\cancel{B\cap A}})\cup B)}{P(A\cup B)} = \dfrac{P(B)}{P(A)+P(B)}$

b) $P(\bar{A}/M)+P(A/M) = \dfrac{P(\bar{A}\cap M)+P(A\cap M)}{P(M)} = \dfrac{P((\bar{A}\cap M)\cup(A\cap M))}{P(M)}$

$= \dfrac{P((A\cup\bar{A})\cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(\Omega\cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(M)}{P(M)} = 1$

$\Rightarrow P(\bar{A}/M) = 1-P(A/M)$

2-16)

$P(L/A)=۰٫۶$
$P(L/B)=۰٫۸$
$P(A)=\frac{۱}{۳}$
$P(B)=\frac{۲}{۳}$
$P(L)=?$
$P(A/L)=?$

$P_1 = P(L) = P(L/A)\,P(A)+P(L/B)\,P(B)$

$= ۰٫۶\times\frac{۱}{۳}+۰٫۸\times\frac{۲}{۳} = \frac{۲۲}{۳۰}$

$P_2 = P(A/L) = \dfrac{P(L/A)P(A)}{P(L)} = \dfrac{۰٫۶\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۲۲}{۳۰}} = \dfrac{۶}{۲۲}$

2-18) مستقل $P(A/B)=P(A)$

$\Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$

~~$B\subset A \Rightarrow A\cap B = B$~~

$\therefore \dfrac{P(B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow \boxed{P(A)=1}$

2-19)

اگر دو واقعه از هم جدا باشند $P(AB)=0$

در حالیکه دو واقعه مستقل از هم است $P(A)P(B)=P(AB)$

پس دو واقعه مستقل نمی‌توانند از هم جدا باشند مگر اینکه احتمال لااقل یکی از آنها صفر باشد.

2-20)

$$P_۲ = P(A \cap B) = P(A)P(B) = ۱۰^{-۳} \times ۲ \times ۱۰^{-۳} = ۲ \times ۱۰^{-۶}$$

$$P_۱ = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۱۰^{-۳} + ۲ \times ۱۰^{-۳} - ۲ \times ۱۰^{-۶} = ۲٫۹۹۸ \times ۱۰^{-۳}$$

2-24) $p = (۰٫۹۹)^{۵۰} = ۰٫۶۰۵$

— نشان دهید اگر A، B، C مستقل ← الف- A از BC مستقل ب- A از B+C مستقل

الف-

$$P(A(BC)) = P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C) = P(A)\;P(BC) \rightarrow$$ A از BC مستقل است

ب-

$$P(A(B+C)) = P(AB+AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$
$$= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C)$$
$$= P(A)\left[P(B) + P(C) - P(B)P(C)\right]$$
$$= P(A)\left[P(B+C)\right] \longrightarrow$$ A از B+C مستقل است

— مسأله روز تولد

الف- $\bar{A}$ = { روز تولدها یکسان نباشد } ، { کل روزهای تولد ممکن برای n نفر } = n تعداد عناصر = 365^n عضو متساوی‌الاحتمال‌اند

$$P(\bar{A}) = \frac{P^{365}_{n}}{365^n} = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)!\;365^n}$$

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\;365^n}$$

البته با فرض استقلال روز تولد افراد از همدیگر (مثلاً دوقلو نباشند) و با فرض اینکه هیچکس ۳۰ اسفند دنیا نیامده (یا آن را با اول فروردین یکی بدانیم)

ب-

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{355!\;365^{10}} = 0{,}117 \qquad n = 10$$

$$1 - \frac{365!}{345!\;365^{20}} = 0{,}411 \qquad n = 20$$

$$1 - \frac{365!}{342!\;365^{23}} = 0{,}507 \qquad n = 23$$

$$n = 50$$

$$1 - \frac{365!}{315!\;365^{50}} \simeq 1 - \frac{(365)^{365}\,e^{-365}\sqrt{2\pi 365}}{(315)^{315}\,e^{-315}\sqrt{2\pi 315}\;\;365^{50}}$$

$$= 1 - \left(\frac{365}{315}\right)^{315} e^{-50}\sqrt{\frac{365}{315}} = 0{,}970$$

اعداد اعصاب خُردکن!

استقلال شرطی

B = بی احتیاط بودن $\bar{B}$ = با احتیاط بودن

A_1 = تصادف در سال اول A_2 = تصادف در سال دوم

$P(A_2|A_1)=?$

$$P(A_2|A_1)=P(A_2|BA_1)P(B|A_1)+P(A_2|\bar{B}A_1)P(\bar{B}|A_1)$$

اما

$$P(B|A_1)=\frac{P(A_1|B)P(B)}{P(A_1|B)P(B)+P(A_1|\bar{B})P(\bar{B})}$$

$$=\frac{۰٫۴\times۰٫۳}{۰٫۴\times۰٫۳+۰٫۲\times۰٫۷}=\frac{۶}{۱۳}$$

$$\Rightarrow P(\bar{B}|A_1)=۱-\frac{۶}{۱۳}=\frac{۷}{۱۳}$$

$$P(A_2|BA_1)=P(A_2|B)=۰٫۴$$

$$P(A_2|\bar{B}A_1)=P(A_2|\bar{B})=۰٫۲$$

$$\Rightarrow P(A_2|A_1)=۰٫۴\times\frac{۶}{۱۳}+۰٫۲\times\frac{۷}{۱۳}=۰٫۲۹$$

— مسائل تورنمنت فوتبال

الف — چون انتخاب تیمها و برنده شدن تیمها کاملاً تصادفی است هر یک از تیمها به طور کاملاً تصادفی ممکن است در فینال باشند. پس هر دو تیم از n تیم شرکت کننده با احتمال یکسانی در فینال خواهند بود ترکیب یعنی

$$P_1 = \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

ب — طبق بند الف احتمال اینکه دو تیم خاص در هر بازی مشخص با هم روبرو شوند $\frac{1}{\binom{n}{2}}$ است
از طرفی تعداد کل بازیها برابر است با:

$$\text{تعداد بازیها} = \underbrace{2^{k-1}}_{\text{تعداد بازی در مرحله اول (اصطلاحاً } \frac{1}{2^{k-1}} \text{ نهایی)}} + 2^{k-2} + \cdots + \underbrace{2}_{\text{تعداد بازی در نیمه نهایی}} + \underbrace{1}_{\text{نهایی}} = 2^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 2^{k-1}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} = 2^k - 1 = n-1$$

راه ساده‌تر: برای اینکه تیم برنده جام معین مشخص شود از n تیم باید $n-1$ تیم شکست بخورند. در هر بازی یک تیم شکست خورده و از دور مسابقات خارج می‌شود. پس تعداد مسابقات $n-1$ مسابقه می‌باشد.

احتمال اینکه دو تیم خاص در این مسابقات با هم روبرو شوند مجموع احتمالات داده شده ساده فوق (روبرو شدن در هر بازی مشخص) است لذا

$$P_2 = \frac{n-1}{\binom{n}{2}}$$

— ثابت کنید

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad k \geq 0$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{\cancel{kn!} + n! + nn! - \cancel{kn!}}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

در واقع $\binom{n}{k}$ یعنی تعداد گروههای $k+1$ عضوی منتخب از میان $n+1$ نفر که حتماً عضو خاص در آن باشد و $\binom{n}{k+1}$ یعنی تعداد گروههای $k+1$ عضوی منتخب از میان $n+1$ نفر که حتماً عضو خاص در آن نباشد. لذا مجموع آنها می‌شود تعداد کل گروههای $k+1$ عضوی منتخب از میان $n+1$ نفر.

ـ ثابت کنید

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \qquad n>0 ,\ k\geq 0$$

می‌دانیم $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ بجای n ، $-n$ قرار دهیم

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\cdots\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(n+k-1)\cdots\cdots(n+1)n}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

ـ ثابت کنید

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{p}{j}\binom{q}{r-j}$$

$$(a+b)^{p+q} = (a+b)^p (a+b)^q$$

$$\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} a^k b^{p+q-k} = \left(\sum_{k_1=0}^{p} \binom{p}{k_1} a^{k_1} b^{p-k_1}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{q} \binom{q}{k_2} a^{k_2} b^{q-k_2}\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{p} \sum_{k_2=0}^{q} \binom{p}{k_1}\binom{q}{k_2} a^{k_1+k_2} b^{p+q-(k_1+k_2)}$$

$r = k_1 + k_2$

$$= \sum_{r=0}^{p+q} \sum_{k_1=0}^{r} \binom{p}{k_1}\binom{q}{r-k_1} a^r b^{p+q-r}$$

با مقایسه طرفین تساوی نتیجه می‌شود

$$\binom{p+q}{k} = \sum_{j=0}^{r} \binom{p}{j}\binom{q}{r-j}$$

ـ با استقرا ثابت کنید برای هر $n \geq 1$, $k \geq 0$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{k+j}{j} = \binom{n+k}{k+1}$$

برای $n=1$

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$$

رابطه برقرار است

فرض استقراء:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{k+j}{j} = \binom{n+k}{k+1}$$

حکم

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} \overset{?}{=} \binom{n+1+k}{k+1}$$

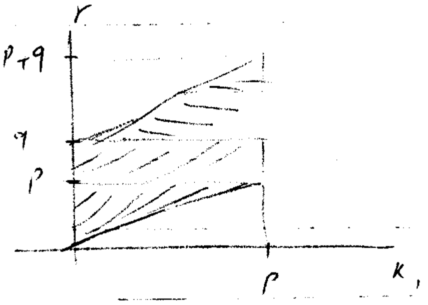
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k+j}{j} + \binom{k+n}{n}$$

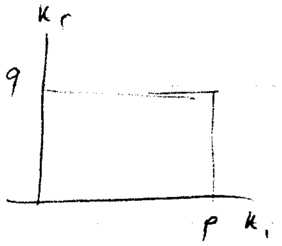
$$\overset{\text{طبق فرض استقراء}}{=} \binom{k+n}{k+1} + \binom{k+n}{n}$$

$$= \binom{k+n}{k+1} + \binom{k+n}{k}$$

$$\overset{\text{طبق تساوی که قبلاً داشتیم}}{=} \binom{k+n+1}{k+1}$$

توضیح صفحه قبل:





فرض مثلاً $p<q$

$$\sum_{k_1=0}^{p}\sum_{k_2=0}^{q} = \sum_{r=0}^{p}\sum_{k_1=0}^{r} + \sum_{r=p}^{q}\sum_{k_1=0}^{p} + \sum_{r=q}^{p+q}\sum_{k_1=r-q}^{p}$$

پس با توجه به p,q ، $r<p,q$ فقط $\sum\sum$ اولی را داریم

_ مسأله تطابق

الف) واقعه A_i : نامه iام در پاکت صحیح قرار گیرد

واقعه A : لااقل یکی از نامه‌ها در پاکت صحیح قرار گیرد

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

با تعمیم یافته مسأله 2.7 کتاب داریم

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_iA_jA_kA_l)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

(قابل اثبات توسط استقراء) (اثبات شلدون راس ص ۲۷)

$$P(A_i) = \frac{1}{n} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

$$\underset{i \neq j}{P(A_iA_j)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \Longrightarrow \sum_{i<j} P(A_iA_j) = \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}$$

$$\underset{i \neq j \neq k}{P(A_iA_jA_k)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n-2} \longrightarrow \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) = \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!}$$

$$\vdots$$

استدلال ترتیبی ضعیف

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

راه حل ترتیبی ضعیف

ب) $n = 7$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= ٫۶۳۲۱۴$$

برای $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} = 1 - \frac{1}{e} = ٫۶۳۲۱۲$$

(شاید تا حدی عجیب به نظر برسد چون گمان می‌کردیم صفر خواهد شد)

اگر نتیجه آزمایش را به صورت جایگشتی از n عدد که iامین عضو آن، عدد پاکت نامه‌ای است که نامه iام را در آن قرار داده‌ایم نشان دهیم

تعداد نتایج ممکن برابر $n!$ است. نتیجه $(1, 2, \ldots, n)$ نشان دهنده ~~...~~ واقعه‌ای است که هر نامه در پاکت نامه خود قرار گرفته یعنی

$$P(A_1 \cdots A_n) = \frac{1}{n!}$$

اگر $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$ نشان دهنده واقعه‌ای باشد که هر یک از نامه‌های i_1، i_2، ...، i_k در پاکت خود قرار گرفته،

تعداد حالات ممکن برای این واقعه عبارت است از $(n-k)!$ زیرا $n-k$ نامه باقیمانده به $(n-k)!$ طریق

می‌توانند داخل $n-k$ پاکت نامه قرار گیرند یعنی

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$

لذا

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \binom{n}{k} \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{1}{n!}$$

راه حل دیگر برای مسأله تطابق

واقعه B هیچ انطباقی اتفاق نیفتد $\quad P_n = P(B) = 1 - P(A)$

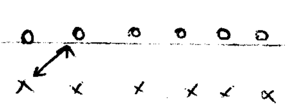
واقعه M اولین نامه در پاکت نامه خود قرار گیرد $\quad$ بستگی دارد به n

$$P_n = P(B) = \cancel{P(B/M)}\, P(M) + P(B/\bar{M})\, P(\bar{M})$$

$$\cancel{P(B/M)} \to 0, \quad P(\bar{M}) \to \frac{n-1}{n}$$

$$P_n = P(B/\bar{M}) \frac{n-1}{n}$$

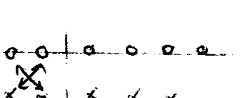
ولی $P(B/\bar{M})$ یعنی احتمال اینکه $n-1$ نامه باقیمانده در $n-1$ پاکت باقیمانده قرار گیرند به طوری که هیچ‌کدام در پاکت خودشان نباشند، مشابه مسأله ما با $n-1$ پاکت و نامه است



واقعه $B/\bar{M}$ به دو صورت می‌تواند اتفاق افتد یا اینکه نامه اضافی داخل

پاکت اضافی قرار گیرد و در $n-2$ تای بقیه هیچ انطباقی نباشد یعنی

با احتمال $\frac{1}{n-1}$ $\quad$ با احتمال P_{n-2}



مسأله انطباق با $n-2$

دیگر اینکه نامه اضافی داخل پاکت اضافی قرار نگیرد. در این حالت هیچ نامه‌ای در پاکت خود قرار نمی‌گیرد.

که مثل این است که پاکت اضافه را پاکت نامه اضافه تلقی کرده‌ایم. داریم که این $n-1$ نامه هیچ‌کدام در پاکت خودشان قرار نگیرند $\to P_{n-1}$

لذا

$$P(B/\bar{M}) = P_{n-1} + \frac{1}{n-1} P_{n-2}$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{n-1}{n} P_{n-1} + \frac{1}{n} P_{n-2} \Rightarrow P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2})$$

$$P_1 = 0,\ P_2 = \frac{1}{2} \to P_3 - P_2 = -\frac{1}{3!} \Rightarrow P_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!},\quad P_4 - P_3 = \frac{1}{4!} \Rightarrow P_4 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

احتمال اینکه دقیقاً k نامه در پاکت نامه صحیح قرار بگیرد

همانطور که قبلاً گفته شد تعداد کل حالات ممکنه $= n!$ برابر است با

تعداد حالات مطلوب، ابتدا توجه خود را به k نامه معین جلب کرده تعداد حالاتی که این k نامه در پاکت نامه صحیح قرار بگیرند برابر است با

تعداد حالاتی که $n-k$ نامه دیگر هیچیک در پاکت صحیح خود قرار نگیرد که طبق آنچه داشتیم (با گذاردن n بجای $n-k$) احتمال آن برابر است با

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

پس تعداد حالاتی که k نفر (شخص) کلاه خود را انتخاب کنند برابر است با

$$\underbrace{(n-k)!}_{\text{تعداد کل نقاط}}\underbrace{\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right]}_{\text{احتمال}}$$

از طرفی چون به $\binom{n}{k}$ حالت ممکن می‌توان گروه k نفری انتخاب نمود پس کل تعداد حالات مطلوب برابر است با

$$\binom{n}{k}(n-k)!\left[\qquad\right]$$

و احتمال خواسته شده برابر است با

$$\frac{\binom{n}{k}(n-k)!\left[\qquad\right]}{n!}$$

$$=\frac{1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}{k!}$$

(برای $n\to\infty$ این احتمال برابر است با $\frac{e^{-1}}{k!}$)

سیستم فرمیونی

الف - تعداد کل حالات ممکنه = $\binom{n}{m}$ اما تعداد حالات مورد نظر =

اگر تعداد آنتن‌های سالم بین آنتن‌های معیوب را با k_i نشان دهیم

$$k_1 \; O \; k_2 \; O \quad O \; k_m \; O \; k_{m+1}$$

$$k_1+k_2+\cdots+k_{m+1}=n-m$$

که $k_1 \geq 0$ و $k_{m+1} \geq 0$ و $k_i > 0$ ، $i=2,\dots,m$

لذا اگر تعریف کنیم

$$c_1=k_1+1 \; ; \quad c_i=k_i \; , \; i=2,\dots,m \quad ; \quad c_{m+1}=k_{m+1}+1$$

به دنبال تعداد بردارهای مثبت $(c_1,\dots,c_{m+1})$ هستیم که در رابطه زیر صدق کند

$$c_1+c_2+\cdots+c_{m+1}=n-m+2$$

لذا براساس آنچه در درس گفته شده پاسخ برابر است با $\binom{n-m+1}{m}$

$$p=\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}$$

ب - در اینجا

$$k_1+k_2+\cdots+k_{m+1}=n-m \qquad k_1\geq 0 \; , \; k_{m+1}\geq 0 \; , \; k_i\geq 2 \; , \; i=2,\dots,m$$

اگر تعریف کنیم

$$c_1=k_1+1 \; ; \quad c_i=k_i-1 \; , \; i=2,\dots,m \quad ; \quad c_{m+1}=k_{m+1}+1$$

تعداد نقاط مطلوب برابر است با تعداد بردارهای مثبت $(c_1,\dots,c_{m+1})$ که در رابطه زیر صدق کنند

$$c_1+c_2+\cdots+c_{m+1}=n-2m+3$$

که طبق درس برابر است با $\binom{n-2m+2}{m}$ پس

$$p=\frac{\binom{n-2m+2}{m}}{\binom{n}{m}}$$

یادآوری: به تعداد $\binom{m-1}{N-1}$ بردار N عنصری $(k_1,\dots,k_N)$ با عناصر صحیح مثبت k_i با شرط $k_1+k_2+\cdots+k_N=m$ و $k_i>0$ ، $i=1,\dots,N$ وجود دارد.