به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

محاسبات عددی

پاسخ تمرین های سری چهارم

.۱

$$\min_{x\in R}\left\| x\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}\right\|^2 \Rightarrow$$

$1)\ QR$

$$A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$$

$$A\in R^{4\times 1}\Rightarrow m=4\quad \boxed{n=1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\widetilde{R}\in R^{1\times 1}}$$

$$A^{(2)}=Q_1^T A\qquad A^{(2)}(4,1)=0$$

$$Q_1^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&-s\\0&0&s&c\end{bmatrix}\Rightarrow\quad c=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad s=-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad A^{(2)}=Q_1^T A=\begin{bmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$$

$$A^{(۳)} = Q_۲^T A^{(۲)} \quad A^{(۳)}(۳,۱) = ۰$$

$$Q_۲^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & c & -s & ۰ \\ ۰ & s & c & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow s + \sqrt{۲}c = ۰ \Rightarrow c = \sqrt{\frac{۱}{۳}}, s = -\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

$$A^{(۳)} = Q_۲^T A^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ \sqrt{۳} \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^{(۴)} = Q_۳^T A^{(۳)} \quad A^{(۴)}(۲,۱) = ۰$$

$$Q_۳^T = \begin{bmatrix} c & -s & ۰ & ۰ \\ s & c & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow s + \sqrt{۳}\,c = ۰ \Rightarrow c = \frac{۱}{۲}, s = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$A^{(۴)} = Q_۳^T A^{(۳)} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{R} = ۲$$

$$\boxed{\widetilde{b}_۱}$$

$$\tilde{b} = Q^T b = Q_۳^T Q_۲^T Q_۱^T b = \begin{bmatrix} \boxed{\dfrac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴}{۲}} \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

برای حل دستگاه بالامثلثی فقط محاسبه $\widetilde{b}_۱$ لازم است.

نیازی به محاسبه این درایه ها نیست.

$$\tilde{R}x = \tilde{b}_۱ \Rightarrow x = \frac{a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴}{۴}$$

۲) *Newton*

$$f(x)=\min_{x\in R}\left\| x\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\\۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_۱\\a_۲\\a_۳\\a_۴\end{bmatrix}\right\|^۲=(x-a_۱)^۲+(x-a_۲)^۲+(x-a_۳)^۲+(x-a_۴)^۲$$

$$\min_{x\in R} f(x)\Rightarrow f'(x)=۰$$

$$\underbrace{۲\left[(x-a_۱)+(x-a_۲)+(x-a_۳)+(x-a_۴)\right]}_{g(x)}=۰\Rightarrow$$

$$x_۱=x_۰-\frac{g(x_۰)}{g'(x_۰)}=x_۰-\frac{f'(x_۰)}{f''(x_۰)}=x_۰-\frac{۸x_۰-۲(a_۱+a_۲+a_۳+a_۴)}{۸}=\frac{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴}{۴}$$

$f''=۸>۰$

↓

نقطه اکسترمم بدست آمده مینیمم کننده تابع

.۲

$$x_{n+۱}=\frac{x_n^۳+۳\alpha x_n}{۳x_n^۲+\alpha}\qquad \alpha>۰\qquad x_n\to l$$

$$l=\frac{l^۳+۳\alpha l}{۳l^۲+\alpha}\Rightarrow ۳l^۳+\alpha l=l^۳+۳\alpha l\Rightarrow ۲l^۳=۲\alpha l\Rightarrow\begin{cases} l=۰\\ l=\pm\sqrt{\alpha}\end{cases}$$

$۱)\ l=۰$

$$g(x)=\frac{x^۳+۳\alpha x}{۳x^۲+\alpha}\Rightarrow g'(x)=\frac{(۳x^۲+۳\alpha)(۳x^۲+\alpha)-۶x(x^۳+۳\alpha x)}{(۳x^۲+\alpha)^۲}$$

$$g'(۰)=۳$$

بنابراین اگر دنباله به صفر همگرا باشد مرتبه همگرایی برابر با یک است.

3.

$$۲)\ l=\sqrt{\alpha}$$

$$g(x)=\frac{x^{۳}+۳\alpha x}{۳x^{۲}+\alpha}\Rightarrow$$

$$g'(x)=\frac{\left(۳x^{۲}+۳\alpha\right)\left(۳x^{۲}+\alpha\right)-۶x\left(x^{۳}+۳\alpha x\right)}{\left(۳x^{۲}+\alpha\right)^{۲}}=\frac{۳x^{۴}-۶\alpha x^{۲}+۳\alpha^{۲}}{\left(۳x^{۲}+\alpha\right)^{۲}}=\frac{۳\left(x^{۲}-\alpha\right)^{۲}}{\left(۳x^{۲}+\alpha\right)^{۲}}=$$

$$\frac{۳\left(x-\sqrt{\alpha}\right)^{۲}\left(x+\sqrt{\alpha}\right)^{۲}}{\left(۳x^{۲}+\alpha\right)^{۲}}$$

$$\begin{cases} g'(\sqrt{\alpha})=۰ \\ g''(\sqrt{\alpha})=۰ \\ g^{(۳)}\left(\sqrt{\alpha}\right)\neq ۰ \end{cases}$$

بنابراین اگر دنباله به $\sqrt{\alpha}$ همگرا باشد مرتبه همگرایی برابر با سه است.

۳.

$$f(x)=(x-\alpha)^{k}u(x)$$

$$u(\alpha)\neq ۰,\infty$$

$$x_{n+۱}=x_{n}-\frac{f(x_{n})}{f'(x_{n})}=x_{n}-\frac{(x_{n}-\alpha)^{k}u(x_{n})}{(x_{n}-\alpha)^{k}u'(x_{n})+k(x_{n}-\alpha)^{k-۱}u(x_{n})}=\underbrace{x_{n}-\frac{(x_{n}-\alpha)u(x_{n})}{(x_{n}-\alpha)u'(x_{n})+ku(x_{n})}}_{g(x_{n})}$$

$$g'(x)=$$

$$۱-\frac{\left((x-\alpha)u'(x)+u(x)\right)\left((x-\alpha)u'(x)+ku(x)\right)-\left((x-\alpha)u(x)\right)\left((x-\alpha)u''(x)+(k+۱)u(x)\right)}{\left((x-\alpha)u'(x)+ku(x)\right)^{۲}}$$

$$\boxed{g'(\alpha)=?}$$

$$=۱-\frac{ku(\alpha)^{۲}}{k^{۲}u(\alpha)^{۲}}=۱-\underset{k>۱}{\frac{۱}{k}}\neq ۰$$

مرتبه همگرایی برابر با یک است

۴.

```
function [xF,F]=my-secant(a,b,k)
X=zeros(k+1,1);
X(1)=a+(b-a)/3;
X(2)=a+2*(b-a)/3;
for i=3:k+1
    f1=feval('fs',X(i-1));
    f2=feval('fs',X(i-2));
    X(i)=X(i-1)-f1/((f1-f2)/(X(i-1)-X(i-2)));
end
xF=X(k+1);
F=feval('fs',xF);
```

به عنوان مثال:

```
function y=fs(x)
y=x-sin(2*x);
```

```
>> [xF,F]=my_secant(0,pi/2,5)

xF =

   0.9477


F =

 -1.7389e-005    …
```

۵.

$$Ax=۲x \Rightarrow \begin{cases} \cancel{۲x_۱=۲x_۱} \\ -۴x_۱+۵x_۲=۲x_۲ \Rightarrow ۴x_۱-۳x_۲=۰ \end{cases}$$

$$\|x\|=۵ \Rightarrow x_۱^۲+x_۲^۲=۲۵$$

$$\begin{cases} ۴x_۱-۳x_۲=۰ \\ x_۱^۲+x_۲^۲-۲۵=۰ \end{cases}$$

$$f1=۴x_۱-۳x_۲$$
$$f2=x_۱^۲+x_۲^۲-۲۵$$
$$F(x_۰)=\begin{bmatrix}۴\times۳.۵-۳\times۳.۵\\ ۳.۵^۲+۳.۵^۲-۲۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳.۵\\ -۰.۵\end{bmatrix}$$
$$J(x)=\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ ۲x_۱ & ۲x_۲\end{bmatrix}$$
$$J(x_۰)=\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ ۷.۵ & ۷.۵\end{bmatrix}\Rightarrow J^{-۱}(x_۰)=\frac{۱}{۵۲.۵}\times\begin{bmatrix}۷.۵ & ۳\\ -۷.۵ & ۴\end{bmatrix}$$
$$x_۱=\begin{bmatrix}۳.۰۲۸۶\\ ۴.۰۳۸۱\end{bmatrix}$$

۶.

الف)

$$f(x,y)=۱+x\sin(xy)$$
$$k1=۰.۱\times f(۰,۰)=۰.۱$$
$$k2=۰.۱\times f(۰.۱,۰+۰.۱)=۰.۱\times(۱+۰.۱\sin۰.۰۱)=۰.۱۰۰۱$$
$$y(۰.۱)=۰+\frac{۱}{۲}(۰.۱+۰.۱۰۰۱)=۰.۱۰۰۰۵$$

ب)

```
function y=RGKT(x0,y0,h,k)
y=y0;
x=x0;
for j=1:k
    f1=feval('fode',x,y);
    k1=h*f1;
    ynew=y+k1;
    x=x+h;
    f2= feval('fode',x,ynew);
    k2=h*f2;
    y=y+0.5*(k1+k2);
end
```

که در آن

```
function f=fode(x,y)
f=1+x*sin(x*y);

x0=0
y0=0
h=0.1
```

موفق باشید