خلاصه‌ی نکات ریاضی مهندسی دانشجو

فصل ۶ : • معادلات کوشی ریمان

$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$$

• شرایط کوشی ریمان شرایط لازم برای تحلیلی بودن تابع $f(z)$ است.
که همه‌ی مشتق‌ها موجود باشند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow{\text{قطبی}} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$f(z) = f(re^{j\theta}) = u(r,\theta) + jv(r,\theta)$$

• توابع همساز: اگر تابع در معادله‌ی لاپلاس صدق کند

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

در این صورت تابع f را همساز یا هارمونیک گوییم.

• مشتق یک تابع تحلیلی باز هم تحلیلی است.

• اگر تابع $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ در حوزه‌ی D تحلیلی باشد در این صورت جزءهای حقیقی و انگاری آن u و v در حوزه‌ی D در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کنند.

توابع همساز مزدوج: اگر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در حوزه‌ی D همساز باشند و در سراسر D در معادلات کوشی ریمان صدق کنند در این صورت $v(x,y)$ را تابع همساز مزدوج $u(x,y)$ گوییم.

• در تابع تحلیلی $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ دسته منحنی‌های $u(x,y) = C$ بر خانواده منحنی‌های $V(x,y) = K$ عمودند. (اثبات: استفاده از گرادیان u و v)

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{y}$$

ریشه‌های مخرج معمولاً به قطب‌های تابع موسوم اند. ریشه‌ها می‌توانند قطب‌های $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

ساده (ریشه ساده) و یا قطب‌های چندگانه (ریشه تکراری) باشند

• توابعی که در همه‌ی صفحه‌ی مختلط مشتق‌پذیرند توابع تام نامیده می‌شوند. مانند: سینوس، کسینوس و e^z

$\cosh x$, $\sinh x$

لگاریتم:

$$e^w = e^{u+jv} = re^{j\theta} = z$$

$$e^u = r \Rightarrow u = \ln r \;\text{و}\; v = \theta$$

$$\underline{\ln z = \overset{u=\ln r}{\ln r} + j\theta} \quad / \quad r = |z| > 0 \;,\; \theta = \arg z$$

$$\ln z = \underbrace{\ln r + j\theta}_{} + j2n\pi$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + j\,\mathrm{Arg}\, z$$

← مقدار اصلی تابع $\ln z$

تعریف: $z^c = e^{c\ln z}$ ← مقدار اصلی $z^c = e^{c\,\mathrm{Ln} z}$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{Arg}\, z$$

فصل ۷: انتگرال‌ها: $z(t) = x(t) + jy(t)$ و $x(t)$، $y(t)$ توابع پیوسته از متغیر حقیقی t باشند در این

صورت مسیری که $z(t)$ در صفحه‌ی مختلط طی می‌کند کمان یا قوس نامیده می‌شود. و جهت آن را جهت افزایش

پارامتر t تعریف می‌شود. اگر مسیر C از روی خود عبور نکند آن را کمان ساده یا کمان جردن گوییم.

همچنین اگر منحنی $x(t)$ و $y(t)$ در تبدیل منحنی $z(t)$ پیوسته در صفحه تغییر مختصات نگاشت شود،

منحنی C یک منحنی هموار خواهد بود.

• در نگاشت $w = f(z)$ که زاویه بین دو منحنی را از نظر اندازه و جهت تغییر ندهد آن را همدیس گوییم.

در هر نقطه ای همدیس است که $f'(z)$ ناصفر و تحلیلی باشد. در نقاطی که $f'(z)=0$ باشد نگاشت $w=f(z)$ همدیس نیست.

• نگاشت همدیس $w = f(z)$، طول های کوچک در صفحه z را با ضریب $|f'(z)|$ در صفحه w

تغییر می‌دهد. $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} \simeq f'(z) \Rightarrow |\Delta w| \simeq |f'(z)| \cdot |\Delta z|$

• اگر مساحت المان $|\Delta z|$ در نظر بگیریم ضریب سطح حاصل در صفحه تبدیل یافته ی $|f'(z)|^2$ برابر

ژاکوبین است. $|f'(z)|^2 = \left| \dfrac{\partial u}{\partial x} + j\dfrac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2$

ژاکوبین $= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$ $\qquad (\Delta S)_w = |f'(z)|^2 (\Delta S)_z$

قضیه. اگر $\phi(x,y)$ در D همساز باشد در این صورت تحت نگاشت همدیس $w = f(z)$ در صفحه w

باز هم همساز خواهد بود. $\underset{D}{\nabla^2 \phi(x,y) = 0} \xrightarrow{w = f(z)} \underset{D^*_{w}}{\nabla^2 \phi^*(u,v) = 0}$

$$\nabla^2 \phi(x,y) = |f'(z)|^2 \nabla^2 \phi^*(u,v)$$

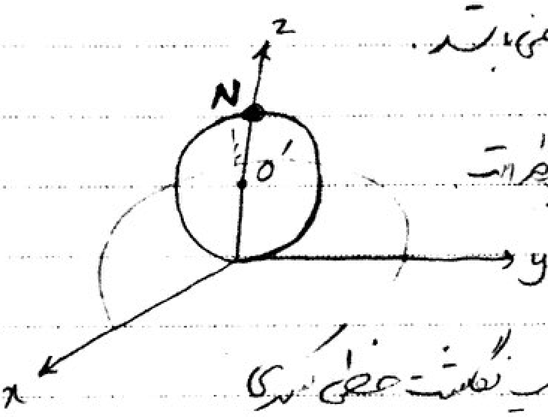
.تبدیل شرایط مرزی :

$$h(u,v) = h_0 \quad \text{یا} \quad \frac{dh}{dn} = 0$$

$$H(x,y) = h\left[u(x,y), v(x,y)\right]$$

$$H(x,y) = h_0 \text{ (ثابت حقیقی) } \quad \text{یا} \quad \frac{dH}{dN} = 0$$

اگر $\frac{dh}{dn} = \alpha \neq 0$ ⟸ $\frac{dH}{dN} = \alpha$ نیز برقرار می‌باشد.



. کره ریمان: صفحه مختلط گسترش یافته و ∞ به عنوان یک نقطه است

. نگاشت خطی کسری: اگر سه نقطه‌ی z_1 و z_2 و z_3 با یک نگاشت خطی کسری

به ترتیب به ۳ نقطه‌ی w_1 و w_2 و w_3 تبدیل شوند نگاشت به صورت زیر است.

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

فصل ۸:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,\dot z(t)\,dt$$

• $\int_C \left[k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)\right] dz = k_1\int_C f_1(z)\,dz + k_2\int_C f_2(z)\,dz$

• $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML \quad : \quad |f(z)| \le M$

L = طول مسیر C

حوزه‌ی همبند ساده: ناحیه‌ای از صفحه است که هر منحنی بسته دلخواه که در آن انتخاب شود نقاط درونی را
در بر بگیرد باز هم در حوزه است

قضیه‌ی کوشی - گورسا: فرض می‌کنیم که تابع $f(z)$ در یک حوزه‌ی همبند ساده D تحلیلی و C یک مسیر بسته
درون حوزه باشد در این صورت اگر $f'(z)$ نیز پیوسته باشد خواهیم داشت

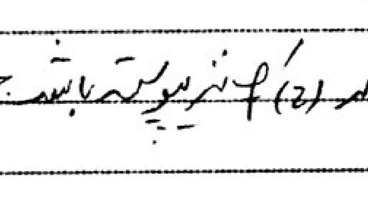
$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

اثبات: استفاده از انتگرال‌گیری از قضیه‌ی گرین:

$$\oint_C (f\,dx + g\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

• نیازی به فرض پیوسته بودن مشتق $f(z)$ نیست به دلیل زیر:

• مشتق هر تابع تحلیلی باز هم تحلیلی است و بنابراین $f'(z)$ تحلیلی بوده و پیوسته است. گورسا این فرض
را از صورت قضیه حذف کرد.



اصل تغییر شکل:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \dots$$

Subject: Data:

قضیه انتگرال نامعین: اگر انتگرال f روی D مستقل از مسیر باشد.

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)$$

$$F'(z) = f(z)$$

فرمول انتگرال کوشی: اگر تابع $f(z)$ در حوزه‌ی همبند ساده‌ی D تحلیلی باشد و z_0 نقطه‌ای از حوزه باشد و مسیر بسته‌ی ساده‌ی C در حوزه بوده و نقطه‌ی z_0 را دور بزند.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi j\, f(z_0)$$

قضیه مشتقات یک تابع تحلیلی: اگر $f(z)$ در یک حوزه‌ی همبند ساده D تحلیلی باشد، در این صورت مشتقات از تمام مرتبه‌ها را دارد که آن‌ها نیز در D تحلیلی **اند**. مقادیر این مشتقات در یک نقطه z_0 از حوزه‌ی D با دستورهای زیر به دست می‌آید که در آن C هر مسیر بسته‌ای است که در D نقطه‌ی z_0 را دور می‌زند.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

. مشتقات متوالی یک تابع در محاسبه‌ی انتگرال‌ها روی مسیرهای بسته کاربرد دارد.

* قضیه موررا: اگر تابع $f(z)$ در حوزه‌ی همبند ساده D پیوسته باشد و به ازای هر مسیر ساده‌ی بسته
(عکس قضیه‌ی کوشی)
C در D داشته باشیم

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

در این صورت $f(z)$ در حوزه‌ی D تحلیلی است.

MICRO

Subject: Data:

• نامساوی کوشی: فرض کنیم C دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع R باشد. مشتق n ام تابع $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 که روی C و داخل آن تحلیلی است

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

الف) اگر M بیشترین مقدار $f(z)$ روی C باشد یعنی $|f(z)|<M$

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| < \frac{n!}{2\pi}\times\frac{M}{R^{n+1}}\times 2\pi R = \frac{n!M}{R^n}}$$

• قضیه لیویل: اگر تابع $f(z)$ در تمام صفحه تحلیلی (برای تمام z ها) کراندار باشد مقداری ثابت است

قضیه اساسی جبر: هر چندجمله‌ای درجه‌ی n $(n \ge 1)$ به صورت:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

دارای حداقل یک صفر است $\Leftarrow$ $\exists z_0 : p(z_0) = 0$

فصل ۹:

سری لوران: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt \; ; \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

MICRO