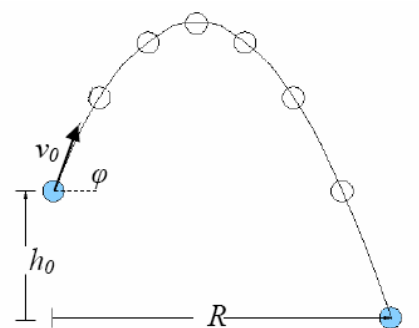


نظریه:

حرکت پرتابی، نمونه ای از حرکت در دو بعد است؛ یعنی جسم در یک صفحه متشکل از محورهای X و Y حرکت می کند. جسم (پرتابه) با سرعت اولیه v_0 و تحت زاویه φ نسبت به افق (محور X ها) رو به بالا پرتاب می شود. در حالت ایده آل که مقاومت هوا را ناچیز و برابر صفر در نظر می گیریم، تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی وزن جسم است که رو به پایین و در جهت منفی محور Y هاست. در راستای محور X ها هم که هیچ نیرویی بر جسم وارد نمی شود؛ به همین دلیل، طبق قانون اول نیوتن، شتاب جسم در راستای محور X ها برابر صفر و در نتیجه سرعت پرتابه در راستای افقی یا مولفه x ی افقی سرعت، همواره ثابت و برابر مولفه x ی افقی سرعت اولیه است. با انتگرال گیری از طرفین معادله x ی سرعت، (در صورتی که مکان افقی جسم در لحظه t ی پرتاب برابر صفر باشد) معادله x ی مکان افقی جسم به دست می آید:

$$v_x = v_{\cdot x} = v_0 \cos \varphi \xrightarrow{\int dt} x = v_0 \cos \varphi t$$



با نوشتن قانون دوم نیوتن در راستای محور Y ها نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F_y &= ma_y, F_y = -mg \rightarrow a_y = -g \rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g \\ &\rightarrow v_y = -gt + v_{\cdot y} = -gt + v_0 \sin \varphi \\ \rightarrow \frac{dy}{dt} &= -gt + v_0 \sin \varphi \rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \varphi t + h_0 \end{aligned}$$

حداکثر ارتفاعی را که گلوله در طول مسیر حرکت خود به آن می رسد، می توان با صفر قرار دادن مشتق y نسبت به زمان که در واقع صفر قرار دادن مولفه y ی عمودی سرعت است، به دست آورد :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \rightarrow -gt + v_0 \sin \varphi = 0 \rightarrow t = \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \\ \rightarrow y_{\max} &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \varphi}{g}\right)^2 + v_0 \sin \varphi \left(\frac{v_0 \sin \varphi}{g}\right) + h_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} + h_0 \end{aligned}$$

و حداکثر فاصله x ی افقی را که گلوله در مسیر خود طی می کند، یعنی فاصله x ی افقی نقطه y ی پرتاب تا نقطه y ی برخورد به زمین، با صفر قرار دادن y و جایگذاری زمان به دست آمده در معادله x ی مکان افقی محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} y &= 0 \rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \varphi t + h_0 = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} t = \frac{-v_0 \sin \varphi + \sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 - 4 * h_0 * (-\frac{1}{2}g)}}{2 * (-\frac{1}{2}g)} & * \\ t = \frac{-v_0 \sin \varphi - \sqrt{(v_0 \sin \varphi)^2 - 4 * h_0 * (-\frac{1}{2}g)}}{2 * (-\frac{1}{2}g)} & \checkmark \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rightarrow t = \frac{v \cdot \sin \varphi + \sqrt{(v \cdot \sin \varphi)^2 + 2gh}}{g} = \frac{v \cdot \sin \varphi}{g} + \sqrt{\left(\frac{v \cdot \sin \varphi}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

$$\rightarrow R = v \cdot \cos \varphi \left(\frac{v \cdot \sin \varphi}{g} + \sqrt{\left(\frac{v \cdot \sin \varphi}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \right)$$

اگر ارتفاع اولیه ی پرتاب را برابر صفر در نظر بگیریم ($h = 0$)، روابط به این شکل ساده خواهند شد:

$$y_{\max} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{2g}, \quad R = \frac{2v^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{v^2 \sin 2\varphi}{g}$$

تا این مرحله، تمام روابط نوشته شده در حالتی بود که مقاومت هوا وجود نداشته باشد؛ اما اگر نیروی مقاومت هوا به صورت $f = -kmv$ بر جسم اثر کند که v ، سرعت جسم، m ، جرم جسم و k ، یک ضریب ثابت است، رابطه ی برد به این صورت خواهد شد که جمله ی اول، همان برد بدون مقاومت هواست و جملات بعدی، به خاطر مقاومت هوا ظاهر خواهند شد:

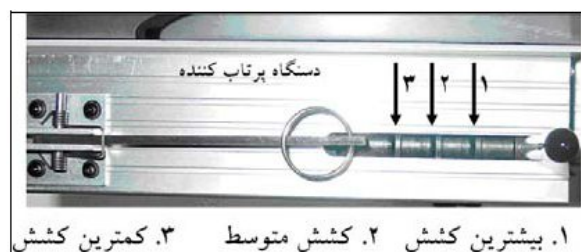
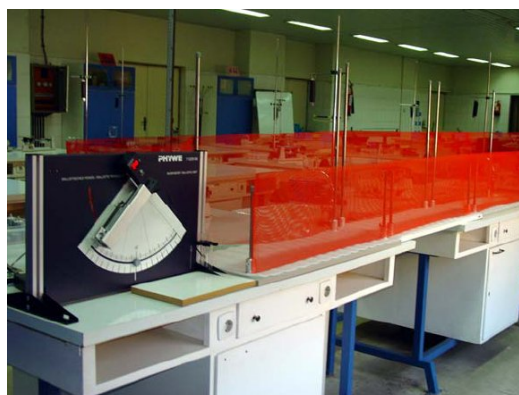
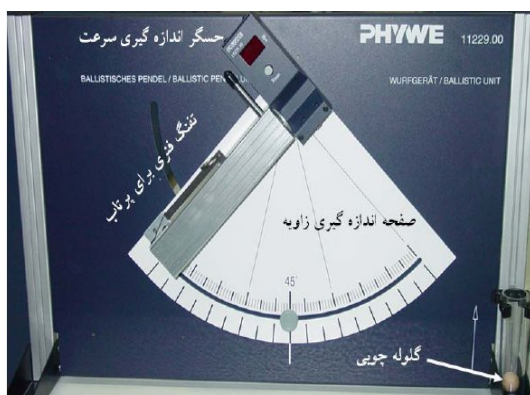
$$R = \frac{v^2 \sin 2\varphi}{g} - \frac{f}{v} k \frac{v^2 \sin 2\varphi \sin \varphi}{g^2} + \dots$$

مراحل انجام آزمایش:

ابتدا زاویه ی پرتاب گلوله را با سطح افق، روی ۴۵ درجه تنظیم می کنیم؛ سپس گلوله را روی نگهدارنده ی مغناطیسی قرار می دهیم و تفنگ فنری را با بالاترین زائده درگیر می کنیم؛ یعنی، دستگاه را در حالت بیشینه ی کشش قرار می دهیم. ضامن تفنگ فنری را رها می کنیم تا گلوله تحت زاویه ی ۴۵ درجه پرتاب شود. نقطه ی فرود گلوله بر سطح کاغذ کربنی را اندازه می گیریم و خط کش عمودی را تقریباً در وسط نقطه ی فرود و نقطه ی پرتاب قرار می دهیم؛ بار دیگر گلوله را پرتاب می کنیم و این بار فقط به نقطه ای که گلوله از ماکزیمم ارتفاع خود عبور می کند، توجه می کنیم و خط کش عمودی را به آن نقطه منتقل می کنیم. پس از این تنظیمات اولیه، ۳ بار گلوله را پرتاب می کنیم و سرعت اولیه را در هر پرتاب از روی دستگاه می خوانیم و برد و ارتفاع بیشینه را (به طور چشمی!) اندازه می گیریم و میانگین مقادیر بدست آمده در ۳ آزمایش را در جدول ۱ ثبت می کنیم. همین آزمایش را با همان بیشینه ی کشش برای دیگر زاویه های خواسته شده در جدول ۱ تکرار می کنیم.

در مرحله ی بعد، آزمایش را برای کشش متوسط و کشش کمینه نیز تکرار کرده، مقادیر حاصل را به ترتیب در جدولهای ۲ و ۳ ثبت می کنیم.

در ضمن، ارتفاع نقطه ی پرتاب را تا سطح فرود گلوله (کاغذ کربنی نه سطح میز) (h) اندازه گیری کرده، یادداشت می کنیم.



خواسته ها:

خواسته ی ۱

روابطی که برای محاسبه ی برد و ارتفاع بیشینه بدست آمدند، به ترتیب زیر هستند:

$$R = v \cdot \cos \varphi \left(\frac{v \cdot \sin \varphi}{g} + \sqrt{\left(\frac{v \cdot \sin \varphi}{g} \right)^2 + \frac{2h_i}{g}} \right), y_{\max} = \frac{v \cdot \sin^2 \varphi}{2g} + h_i$$

با توجه به داده هایی که در اختیار داریم، ارتفاع بیشینه و برد برای تک تک ستونهای جدول، محاسبه می شوند:

جدول ۴ - مقادیر ارتفاع بیشینه و برد محاسبه شده برای جدول ۱

زاویه (درجه)	۴۵	۳۰	۶۰	۲۰	۷۰	۱۰	۸۰
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	۶.۰۵	۵.۷۸	۷.۰۶	۶.۴۰	۶.۵۸	۵.۳۰	۷.۱۳
ارتفاع بیشینه ی محاسبه شده (سانتی متر)	۱۱۸.۱	۶۷.۲	۲۱۵.۶	۴۹.۰	۲۲۰.۰	۲۸.۸	۲۷۶.۶
برد محاسبه شده (سانتی متر)	۳۹۷.۳	۳۳۳.۵	۴۵۵.۱	۳۲۵.۰	۲۹۳.۲	۱۷۶.۰	۱۸۲.۰

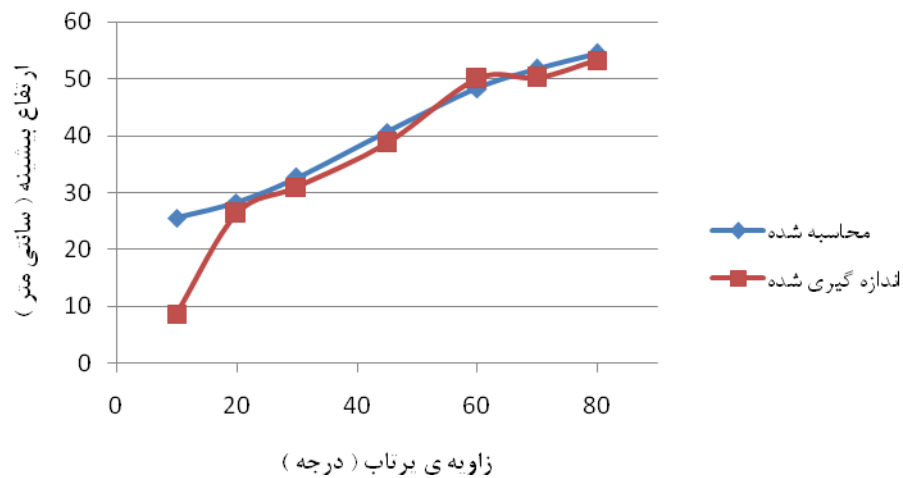
جدول ۵ - مقادیر ارتفاع بیشینه و برد محاسبه شده برای جدول ۲

زاویه (درجه)	۴۵	۳۰	۶۰	۲۰	۷۰	۱۰	۸۰
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	۳.۵۳	۳.۵۱	۵.۰۶	۳.۵۷	۳.۵۰	۳.۵۶	۳.۵۱
ارتفاع بیشینه ی محاسبه شده (سانتی متر)	۵۶.۴	۴۰.۲	۱۲۲.۷	۳۲.۱	۷۹.۸	۲۶.۵	۸۵.۶
برد محاسبه شده (سانتی متر)	۱۴۸.۰	۱۴۲.۰	۲۴۰.۱	۱۲۸.۰	۸۸.۶	۱۰۴.۰	۴۷.۰

جدول ۶ - مقادیر ارتفاع بیشینه و برد محاسبه شده برای جدول ۳

زاویه (درجه)	۴۵	۳۰	۶۰	۲۰	۷۰	۱۰	۸۰
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	۲.۵۱	۲.۵۲	۲.۴۹	۲.۵۱	۲.۴۶	۲.۶۱	۲.۴۶
ارتفاع بیشینه ی محاسبه شده (سانتی متر)	۴۰.۶	۳۲.۶	۴۸.۳	۲۸.۳	۵۱.۸	۲۵.۶	۵۴.۵
برد محاسبه شده (سانتی متر)	۸۳.۴	۸۴.۵	۶۶.۶	۷۷.۴	۴۷.۳	۷۰.۷	۲۴.۸

نمودار ۶ - نمودار ارتفاع بیشینه بر حسب زاویه ی پرتاب برای جداول ۳ و ۶



همانطور که اثبات شد، ارتفاع بیشینه ای که گلوله در حین حرکت، به آن می رسد، از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} + h_0$$

از این رابطه مشخص است که چون زاویه ی پرتاب، بین ۰ تا ۹۰ درجه است، با افزایش زاویه ی پرتاب، ارتفاع بیشینه باید افزایش یابد که به طور کلی، نمودارها هم چنین روندی را نشان می دهند؛ اما در نمودارهای فوق، خصوصا در نمودار ۵، قله ای در نمودار وجود دارد که این بی نظمی، به دلیل افزایش ناگهانی سرعت اولیه است که از رابطه ی فوق، معلوم است که با افزایش ضربه ی وارد بر گلوله و در نتیجه افزایش سرعت اولیه، ارتفاع بیشینه، به ازای یک زاویه ی پرتاب معین، افزایش می یابد. از میان عوامل خطا، واضح ترین آن ها، یکی خطای چشم در محاسبه ی ارتفاع ماکزیمم و قرار نگرفتن خط کش عمودی دقیقا در راس مسیر سهمی وار گلوله و دیگری، مقاومت هواست. نکته ی دیگری که می توان به آن اشاره کرد، این است که هر چه زاویه ی پرتاب بیشتر شود، آهنگ تغییرات سینوس زاویه ی پرتاب و در نتیجه آهنگ تغییرات ارتفاع بیشینه، افزایش می یابد که تقریبا از روی نمودارها و اعداد، مشخص است.

خواسته ی ۴

برای کشیدن نمودار تمام لگاریتمی برد بر حسب سرعت اولیه، از مقادیر اندازه گیری شده برای برد و سرعت اولیه، لگاریتم می گیریم و نمودار این دو کمیت را بر حسب هم رسم می کنیم:

جدول ۷- سرعت اولیه، لگاریتم سرعت اولیه، برد و لگاریتم برد برای زاویه ی پرتاب ۲۰ درجه

log R	R (m)	log V ₀	V ₀ (m/s)	
۰.۳۱	۲.۰۵۰	۰.۸۱	۶.۴۰	ضربه ی بیشینه
۰.۱۳	۱.۳۳۷	۰.۵۵	۳.۵۷	ضربه ی متوسط
-۰.۰۵	۰.۸۹۷	۰.۴۰	۲.۵۱	ضربه ی کمینه

جدول ۸- سرعت اولیه، لگاریتم سرعت اولیه، برد و لگاریتم برد برای زاویه ی پرتاب ۴۵ درجه

log R	R (m)	log V ₀	V ₀ (m/s)	
۰.۴۱	۲.۵۹۷	۰.۷۸	۶.۰۵	ضربه ی بیشینه
۰.۲۱	۱.۶۲۷	۰.۵۵	۳.۵۳	ضربه ی متوسط
-۰.۰۲	۰.۹۵۳	۰.۴۰	۲.۵۱	ضربه ی کمینه

جدول ۹- سرعت اولیه، لگاریتم سرعت اولیه، برد و لگاریتم برد برای زاویه ی پرتاب ۷۰ درجه

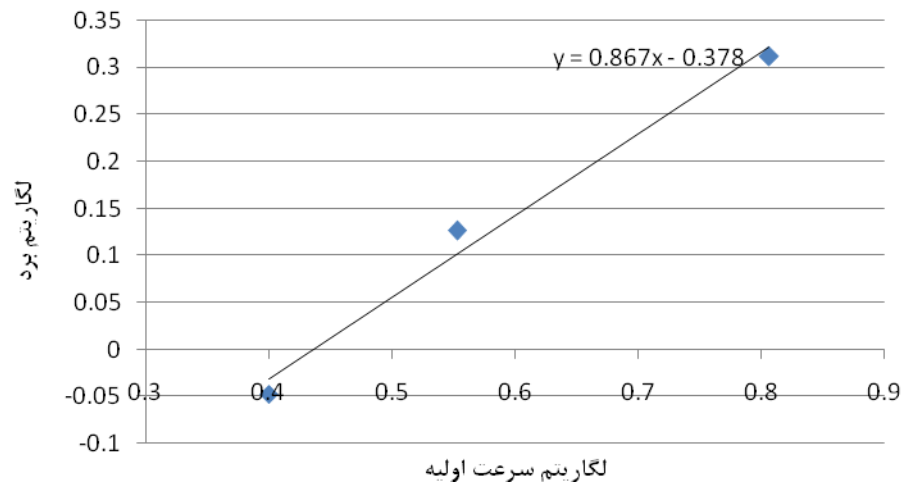
log R	R (m)	log V ₀	V ₀ (m/s)	
۰.۲۱	۱.۶۲۳	۰.۸۲	۶.۵۸	ضربه ی بیشینه
۰	۱.۰۰۰	۰.۵۴	۳.۵۰	ضربه ی متوسط
-۰.۲۹	۰.۵۱۰	۰.۳۹	۲.۴۶	ضربه ی کمینه

همچنین از رابطه ی برد بر حسب سرعت اولیه، در صورتی که از h ، صرف نظر کنیم، بدست می آید:

$$R \cong \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} \rightarrow \log R \cong \log v_0^2 + \log \left(\frac{\sin^2 \varphi}{g} \right) \rightarrow y \cong 2x + \log \left(\frac{\sin^2 \varphi}{g} \right)$$

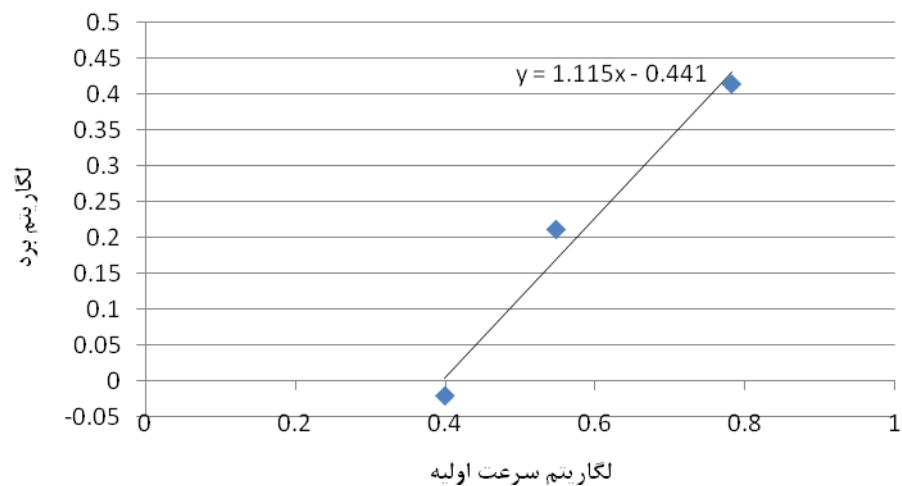
کافیست عرض از مبدا نمودار تمام لگاریتمی را در نظر بگیریم و شتاب گرانشی را محاسبه کنیم:

نمودار ۷ - نمودار تمام لگاریتمی برد بر حسب سرعت اولیه برای زاویه ی برتاب ۲۰ درجه



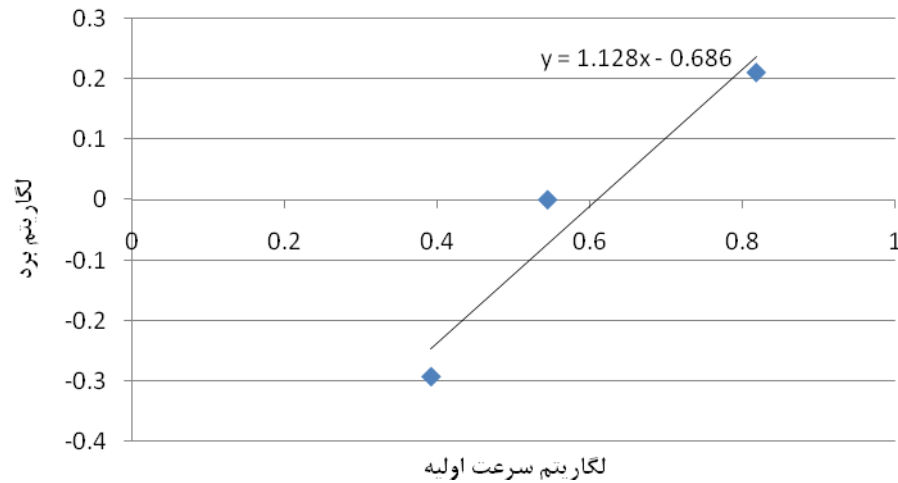
$$\rightarrow \log \left(\frac{\sin^2 \varphi}{g} \right) \cong -0.378 \rightarrow \frac{\sin^2 * 20}{g} \cong 10^{-0.378} \rightarrow g \cong \frac{\sin 20}{10^{-0.378}} \cong 1.525 m/s^2!!!$$

نمودار ۸ - نمودار تمام لگاریتمی برد بر حسب سرعت اولیه برای زاویه ی برتاب ۴۵ درجه



$$\rightarrow \log \left(\frac{\sin^2 \varphi}{g} \right) \cong -0.441 \rightarrow \frac{\sin^2 * 45}{g} \cong 10^{-0.441} \rightarrow g \cong \frac{\sin 45}{10^{-0.441}} \cong 2.761 m/s^2!!$$

نمودار ۹ - نمودار تمام لگاریتمی برد بر حسب سرعت اولیه برای زاویه ی پرتاب ۷۰ درجه



$$\rightarrow \log\left(\frac{\sin^2 \varphi}{g}\right) \cong -0.686 \rightarrow \frac{\sin^2 * 70}{g} \cong 10^{-0.686} \rightarrow g \cong \frac{\sin^2 70}{10^{-0.686}} \cong 3.119 \text{ m/s}^2$$

مشاهده می شود که اعداد به دست آمده، با مقدار واقعی g که برابر ۹.۷۸ است، بسیار اختلاف دارند. دلایل این اختلاف، همان اصطکاک هوا، خطا در محاسبه ی برد، در نظر نگرفتن ارتفاع اولیه ی پرتاب است که دیده می شود با اینکه در تئوری انتظار داریم شیب منحنی تمام لگاریتمی برابر ۲ باشد، در عمل این طور نشد. همچنین تعداد داده ها که برای هر نمودار تنها ۳ نقطه وجود دارد، بسیار کم است و این کم بودن، مسلماً خطا را افزایش می دهد. همچنین لگاریتم گرفتن از اعداد و گرد کردن آنها در حالت لگاریتمی و سپس به برگرداندن آنها به حالت عادی، خطا را زیاد می کند؛ چون مثلاً اگر تنها یک رقم اعشار را در حالت لگاریتمی در نظر بگیریم، در برگرداندن به حالت عادی، این خطا چند برابر می شود.