حل معادلات غیرخطی

روش تکرار نقطه ی ثابت

نقطه ی ثابت : فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه ی $[a,b]$ تعریف شده باشد

نقطه ی $x_0 \in [a,b]$ را نقطه ی ثابت $f(x)$ گوییم هرگاه

$f(x_0) = x_0$

مثال $f = x^2 - 2$

$f(2) = 2 \longrightarrow f(x_0) = x_0$ ، $x_0 = 2$ نقطه ی ثابت است

هدف : به دست آوردن $\alpha \in [a,b]$ است که ریشه معادله ی $f(x) = 0$

برای رسیدن به این هدف از معادل بودن این مسئله با مسئله ی زیر استفاده می کنیم.

$f(x) = 0 \longleftrightarrow x = g(x) \longleftarrow$ نقطه ی ثابت تابع $g(x)$

تابع $g$ به دست آمده باید شرایط زیر را داشته باشد

۱. تابع $g(x)$ بر روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و

$\forall x \in [a,b] \longrightarrow g(x) \in [a,b]$

۲. عددی مانند $k$ وجود داشته باشد به طوری که $(0 < k < 1)$

$|g'(x)| \leq k$ $\quad \forall x \in [a,b] \quad |g'(x)| < 1$

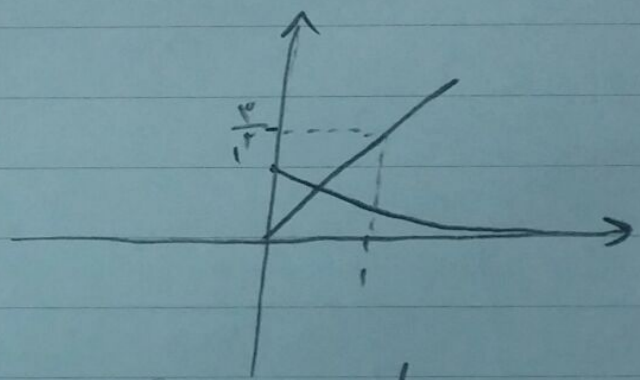
$f(x)=۰ \longrightarrow g(x) \qquad x_{n+1}=g(x_n) \rightarrow |x_n-x_{n+1}|<\varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha \longleftarrow g(x)$ تعریف برای نقطه ثابت

$f(x)=۳x-۲e^{-x}$

$y_1=\frac{۳}{۲}x$

$y_2=e^{-x}$ $\longrightarrow$




$[۰,۱] \rightarrow f(۰)=-۲<۰ \qquad f(۱)\ ۳-۲e^{-۱}>۰$

$۳x-۲e^{-x}=۰ \qquad g_1(x)=\frac{۲}{۳}e^{-x} \qquad g_2(x)=-\ln(\frac{۳}{۲}x)$

$۳x=۲e^{-x}\rightarrow x=\frac{۲}{۳}e^{-x}$

$۲e^{-x}=۳x \rightarrow e^{-x}=\frac{۳}{۲}x \rightarrow -x=\ln\frac{۳}{۲}x \rightarrow x=-\ln\frac{۳}{۲}x$

$g_2(x)=-\ln(\frac{۳}{۲}x) \rightarrow [۰,۱] \xrightarrow{۱} \forall x\in[۰,۱] \quad ۰\le x\le ۱$

$\rightarrow ۰\le \frac{۳}{۲}x\le \frac{۳}{۲} \qquad \ln ۰\le \ln\frac{۳}{۲}x\le \ln\frac{۳}{۲}$

$g_1(x)=\frac{۲}{۳}e^{-x} \qquad ۱ \rightarrow \forall x\in[۰,۱] \rightarrow ۰\le x\le ۱ \rightarrow -۱\le -x\le ۰$

$\rightarrow \frac{۱}{e}\le e^{-x}\le ۱ \xrightarrow{\times\frac{۲}{۳}} \frac{۲}{۳e}\le \frac{۲}{۳}e^{-x}\le \frac{۲}{۳}$

(۲) $\exists k \quad ۰<k<۱ \longrightarrow |g'(x)| \le k$

$\forall x \in [۰,۱] \quad |g'(x)| = \frac{۲}{۳}e^{-x} \le \frac{۲}{۳}$

(۱) $\longrightarrow [a,b]$ (۲) $\longrightarrow g(x)$ (۳) $x_{n+1} = g(x_n)$

$x_{n+1} = \frac{۲}{۳}e^{-x} \quad n = ۰,۱,۲,\dots$

| $n$ | $x_n$ | $n$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۰/۴۰۴۳۵ | ۶ | ۰/۴۳۲۹۹ |
| ۲ | ۰/۴۴۴۴۹۴ | ۷ | ۰/۴۳۲۳۸ |
| ۳ | ۰/۴۲۷۲۴ | ۸ | ۰/۴۳۲۹۴ |
| ۴ | ۰/۴۳۴۸۷ | ۹ | ۰/۴۳۲۵۳ |
| ۵ | ۰/۴۳۱۵۷ | ۱۰ | ۰/۴۳۲۵۸ |

$\longrightarrow x_{۱۰} = ۰/۴۳۲۵۸$

$|x_{۱۰} - x_۹| < ۰/۰۰۰۱$

$f(x) = x^۳ - x - ۱ = ۰$ (۱) $[۱,۲] \longrightarrow f(۱) = -۱ < ۰$

$f(۲) = ۳ > ۰$

(۴) $g_۱(x) = \sqrt[۳]{x+۱}$

$g_۲(x) = x^۳ - ۱$

$g_۳(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۱}$

$g_۴(x) = \frac{x+۱}{x^۲}$

DATE / / SUBJECT:

$g_2(x) = x^3 - 1 \quad \forall x \quad 1 \le x \le 2 \longrightarrow 1 \le x^3 \le 8$

$0 \le x^3 - 1 \le 7$ ✗

$g_3(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \quad 1 \le x \le 2$

$\longrightarrow 1 \le x^2 \le 4 \longrightarrow 0 \le x^2 - 1 \le 3 \quad \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{x^2-1}$ ✗

$1 \le x \le 2 \rightarrow 2 \le x+1 \le 3 , \quad 1 \le x^2 \le 4$

$\longrightarrow \quad \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{x^2} \le 1 \xrightarrow{\text{✗}} \dfrac{1}{2} \le \dfrac{x+1}{x^2} \le 3$

① $1 \le x \le 2 \quad 2 \le x+1 \le 3 \quad \sqrt[3]{2} \le \sqrt[3]{x+1} \le \sqrt[3]{3}$ ✓

② $\rightarrow |g'(x)| = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \le \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1$

$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}$

$x_0 = 1 \quad \epsilon = 10^{-3}$

آهنگ همگرایی

④

$x_n \quad e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$

$= g'(c_n)\,(x_n - \alpha) \quad e_{n+1} = g'(c_n)(e_n)$

شرط ۱

$\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n) \quad \alpha < c_n < x_n \quad \lim_{n \to \infty} c_n = \alpha$

DATE / / SUBJECT:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n\to\infty} g'(c_n) = g'(\lim_{n\to\infty} c_n) = g'(\alpha)$$

با فرض پیوستگی $g'$

$\boxed{e_{n+1} = g'(\alpha)\, e_n}$ $\qquad \alpha - x_{n+1} \quad g'(\alpha) = 0$

تمرین: اثبات همگرایی مثال ۲ را بیابید.

$$g(x_{n+1}) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + g''(d)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2}$$

$$g(x_{n+1}) - g(\alpha) = g'(\alpha)(x_n - \alpha) + g''(d)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2}$$

$$g'(c_n)(x_{n+1} - \alpha) = g''(d_n)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2} \rightarrow \alpha < d_n < x_n$$

$$e_{n+1} \cdot g'(c_n) = \frac{g''(d_n)}{2}(e_n)^2$$

قضیه: فرض کنید $\{x_n\}_{n=0}$ دنباله‌ای باشد که $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

قرار می‌دهیم $e_n = x_n - \alpha$ ، $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$ اگر عدد حقیقی $p \geq 1$ و عدد مثبت ثابت $C$ وجود داشته باشد که $\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$ .

روش همگرایی $p$ دارد