SS Dr. Behrouzi Se 8 ۹۳/۱۲/۴

خصوصیات ضرایب سری فوریه:

۸) مشتق و انتگرال:

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x'(t) \longleftrightarrow (jk\omega_0)\, a_k$

$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t}$ $\qquad \frac{dx(t)}{dt} = \sum \underbrace{a_k (jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$

$\underbrace{\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda}$ $\longleftrightarrow \frac{a_k}{jk\omega_0}$

برای متناوب بودن

و مقدار محدود بودن $\longrightarrow a_0 = 0$

---

۹) قضیه‌ی پارسوال:

$$\frac{1}{T}\int \left| a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int |a_k|^2 dt = |a_k|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{T}\int |x(t)|^2 dt}_{\text{توان متوسط سیگنال}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}_{\text{مجموع توان متوسط هارمونیک‌های مختلف}}$$

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر سیگنال متناوب $x(t)$ ، $y(t)$:

$$\frac{1}{T}\int_T x(t)\, y(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{-k}$$

← به کمک خاصیت ثابت شد. $x(t)\,y(t) \longleftrightarrow a_k * b_k = c_k$

$$c_k = \frac{1}{T}\int x(t)\,y(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\, b_{k-m}$$

$$\frac{1}{T}\int x(t)\,y(t)\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\, b_{-m}$$

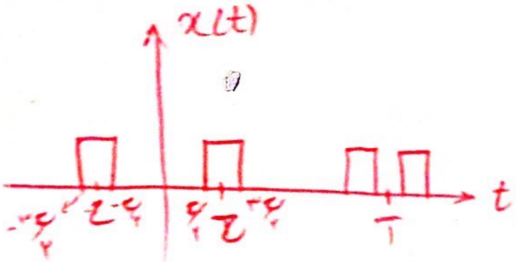
← به جای $y(t)$ ، $x^*(t)$ قرار می‌دهیم.

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$x^*(t) \longleftrightarrow a^*_{-k} = b_k \Rightarrow \frac{1}{T}\int x(t)\,x^*(t)\,dt = \sum a_k\, a_k^*$$

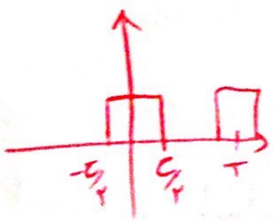
$$= \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum |a_k|^2$$

مثالهای محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه از روی خواص ضرایب (بدون محاسبه‌ی انتگرال) :



→ می‌خواهیم a_k را برای این سیگنال بیابیم.

← از جلسه‌ی قبل می‌دانیم که پالس $p(t)$ ضرایبی به صورت $\frac{A\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)$ دارد.



$$p(t) \longleftrightarrow A\,\frac{\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right) = P_k$$

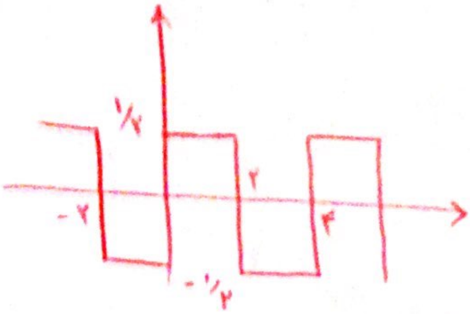
$$x(t) \longleftrightarrow a_k \qquad x(t) = p(t-\tau) + p(t+\tau)$$

$$a_k = P_k\, e^{-jk\omega_0\tau} + P_k\, e^{jk\omega_0\tau} = 2P_k \cos(k\omega_0\tau) = \boxed{2\,\frac{A\tau}{A}\cos(k\omega_0\tau)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}(k/4)\, e^{-j\frac{k\pi}{2}} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

۲

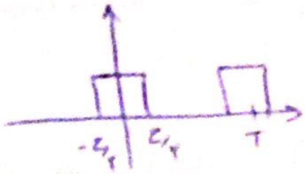
مثال ۲:



$T = 4$

$C = 2$

$A = 1$

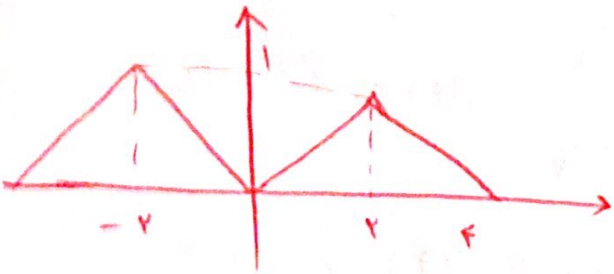


$$y(t) = p(t-1) - \tfrac{1}{2}$$

$\downarrow$

$$b_K = \begin{cases} p_K \, e^{-jK\frac{2\pi}{4}\times 1} & K \neq 0 \\ p_0 - \tfrac{1}{2} & K = 0 \end{cases}$$

مثال ۳:



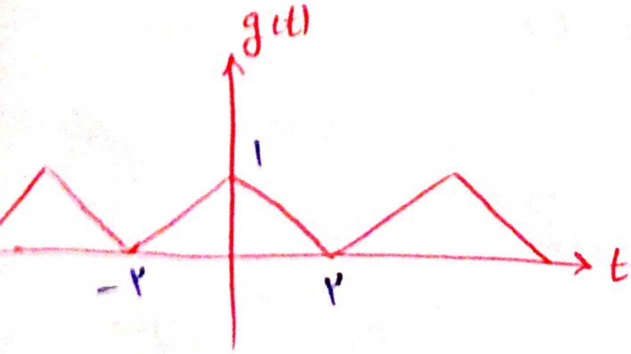
$$\frac{dz(t)}{dt} = y(t) \rightarrow$$ مثال قبل

$(jK\omega_0)c_K = b_K \rightarrow$ برای $K \neq 0$ $\rightarrow$

$$c_K = \begin{cases} \dfrac{b_K}{jK\omega_0} = \dfrac{\text{sinc}(\frac{K}{2})\, e^{-jK\frac{\pi}{2}}}{jK\pi} & K \neq 0 \\ \tfrac{1}{2} & K = 0 \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int z(t)\,dt = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

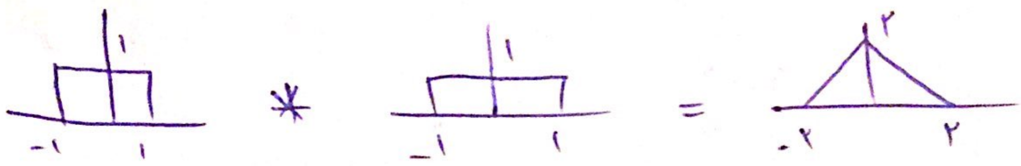
مثال ۴:



$$x(t) \circledast y(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\lambda)\, y(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\lambda)\, y(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

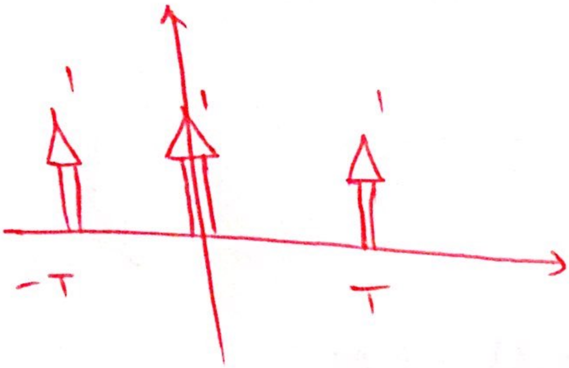


$$g(t) = \frac{1}{2}\, p(t) \circledast p(t)$$

$$\downarrow$$

$$g_K = \frac{1}{2}\, T\, p_K\, p_K = \tfrac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}\right)^2$$

مثال ۵ :



$$a_k = \frac{1}{T}\int x_d(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= 1/T \Rightarrow x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k}_{1/T}\, e^{jk\omega_0 t}$$

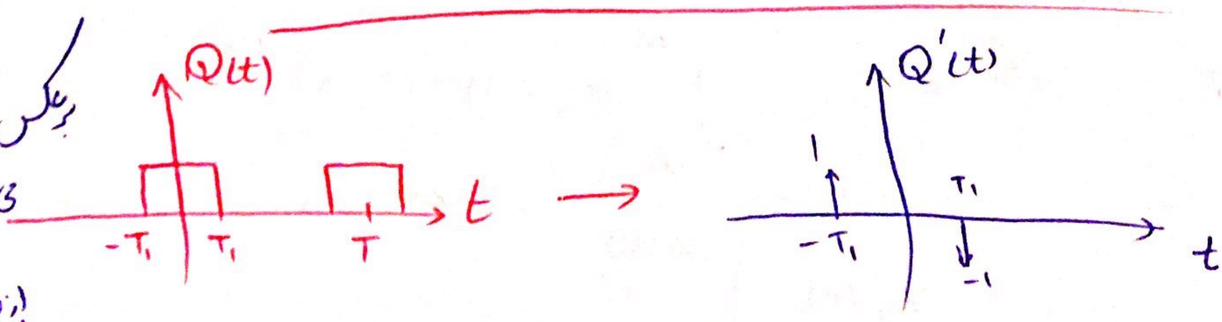
← ضرایب سری فوریه سیگنال قطار ضربه یکسان اند یعنی تمام هارمونیکها قدرت یکسانی دارند.

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} = \sum \delta(t-kT)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_0 t)$$

مثال ۶ :

برعکس قبلی می خواهیم از ضربه استفاده کنیم



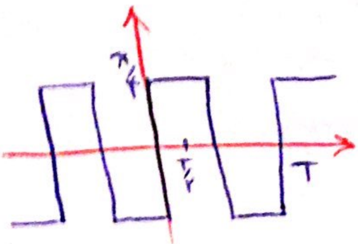
$$Q'(t) = x_d(t+T_1) - x_d(t-T_1)$$

$$x_d(t) \longleftrightarrow a_k = \frac{1}{T}$$

$$b_k = \frac{1}{T}\left(e^{j\omega_0 k T_1} - e^{-j\omega_0 k T_1}\right) = 2j\,\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{T}$$

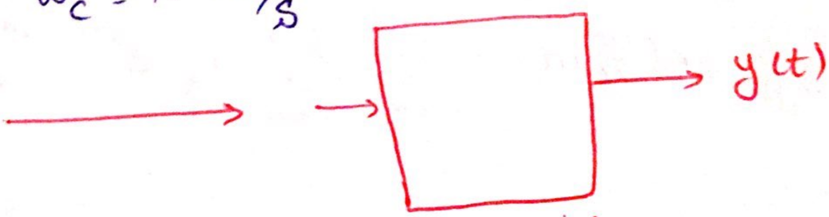
$$a_k = \begin{cases} \dfrac{b_k}{jk\omega_0} & k \neq 0 \\ \dfrac{2T_1}{T} & k = 0 \end{cases} = \boxed{\frac{2T_1}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 \pi}{\pi}\right)}$$

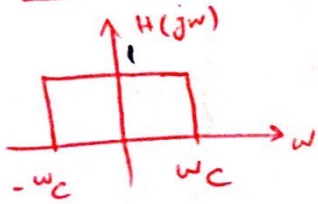
مثال: پاسخ فرکانسی:



$T = 2\ ms$

$\omega_c = 10^4\ rad/s$





$$\Rightarrow x(t) = \sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = \frac{10^4}{\pi \times 10^3} \simeq 3.18 \Rightarrow \boxed{y(t) = \sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)}$$

تا ۳ فرکانسهای این مقدار را عبور می‌دهد.

سری فوریه‌ی سیگنالهای گسسته متناوب:

$$a_k[n] = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$a_k[n+N] = a_k[n] \rightarrow$$ دوره‌ی تناوب آن N است.

← در حوزه‌ی فرکانس نیز متناوب است.

$\phi_{k+rN}[n] = \phi_k[n] \quad r\in Z$ → فقط N تا هارمونیک مجزا وجود دارد.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$k=\langle N\rangle \to 0,1,\dots,N-1$ → هر N عدد صحیح متوالی

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

اثبات: طرفین رابطه $x[n]$ را در $e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$ ضرب می‌کنیم و بعد $\sum$ می‌گیریم:

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}$$

مسأله‌ی ۳-۵۴:

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \begin{cases} N & k=0,\pm N,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n = \begin{cases} N & \alpha=1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha\neq 1 \end{cases} \qquad \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\omega_0 n} = \begin{cases} N & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots \\ \frac{1-(e^{jk\frac{2\pi}{N}})^N}{1-e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}} = 0 & o.w. \end{cases}$$

$\alpha = e^{jk\omega_0} = e^{jk\frac{2\pi}{N}}$

← $e^{jk\frac{2\pi}{N}}$ برداری به طول ۱ و زاویه‌ی $\frac{2k\pi}{N}$ است.

لذا $\sum$ بالا مثل آن است که N بردار داریم که زاویه‌ی آنها با هم $\frac{2\pi}{N}$ است که جمع برداری آن‌ها صفر است.

$$\sum x[n]e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}n} = N\delta[k-r] = N\times a_r \Rightarrow \boxed{a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n}}$$

$\boxed{a_k = a_{k+rN} \quad r\in Z}$ → ضرایب سری فوریه گسسته متناوبند.