سری ۳

4-1) $\cancel{X(i,k) = i+k}$

$$Y(i,k) = \begin{cases} 5 & \text{if } X(i,k) = 7 \\ 20 & \text{if } X(i,k) = 11 \\ 0 & \text{والا} \end{cases}$$

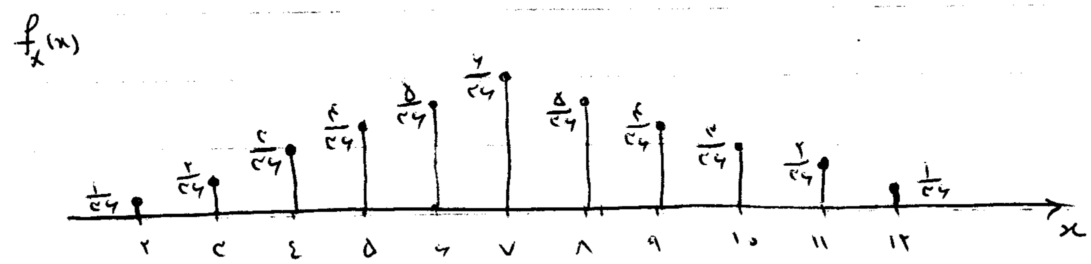
a) $P\{6.5 < X < 10\} = P\{X=7\} + P\{X=8\} + P\{X=9\} = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{15}{36}$

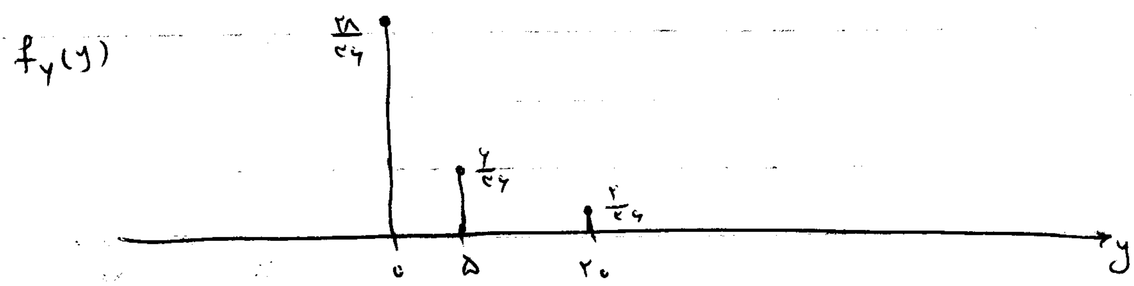
$P\{X > 2\} = 1 - P\{X=2\} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

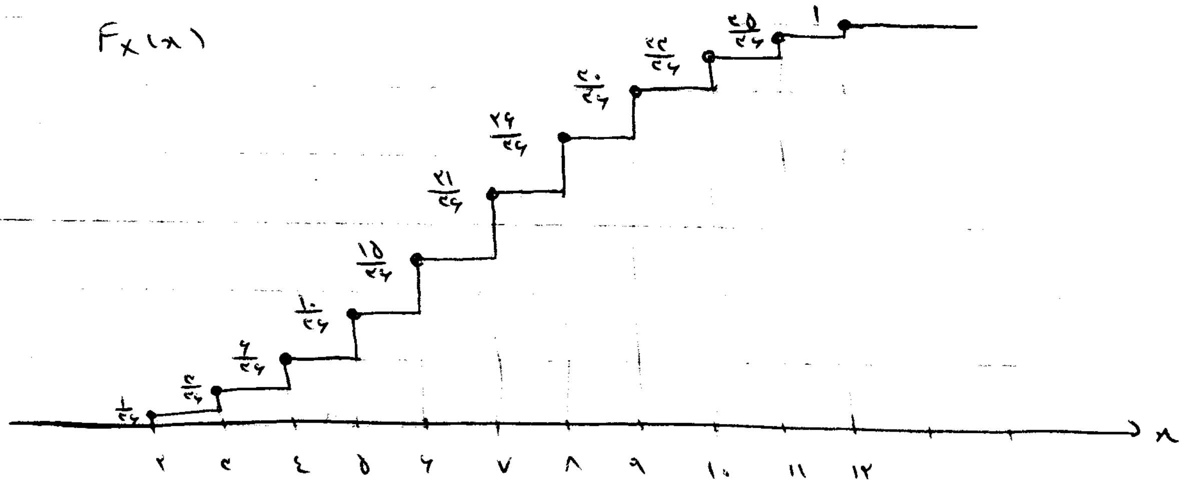
$P\{5 < Y < 25\} = P\{Y = 20\} = P\{X = 11\} = \frac{2}{36}$

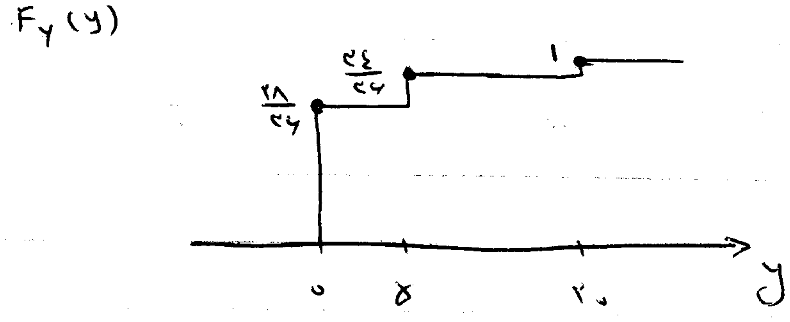
$P\{Y < 4\} = 1 - P\{X=7\} - P\{X=11\} = 1 - \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{28}{36}$

b)









4-3)

$$P(۵۰۰ < X < ۶۰۰) = G\left(\frac{۶۰۰-۵۱۰}{۵۰}\right) - G\left(\frac{۵۰۰-۵۱۰}{۵۰}\right)$$

$$= G(۱٫۸) - G(-۰٫۲) = ۰٫۵۴۲$$

$$\boxed{٪۵۴٫۲}$$

4-8) a) $F(x) = (1 - e^{-cx})\,u(x)$

$$x_{۰٫۵} = ۵۰ \Rightarrow 1 - e^{-۵۰c} = ۰٫۵ \Rightarrow e^{-۵۰c} = ۰٫۵ \rightarrow c = \frac{\ln ۲}{۵۰} = ۰٫۰۱۳۸۶$$

$$P\{X \leq ۵\} = F(۵) = 1 - e^{-۵c} = ۰٫۰۶۷$$

$$\boxed{٪۶٫۷}$$

b) $1 - e^{-cx} = ۰٫۰۵ \longrightarrow x = \boxed{۳٫۷ \text{ ماه}}$

4-10) $f(x)=c^2 x e^{-cx} u(x)$, $c=5\times10^{-4}$ /kW

a) $F(x)=\int_0^x c^2 y e^{-cy}\,dy = -(cy+1)e^{-cy}\Big|_0^x = 1-(cx+1)e^{-cx}$, $x\geq 0$

$P\{X>10^4\}=1-F(10^4)=(10^4 c+1)e^{-10^4 c}=(5+1)e^{-5}=\boxed{0.0404}$

b) $P\{X>x\}=1-F(x)=0.005 \to (cx+1)e^{-cx}=0.005 \xrightarrow{\text{با سعی و خطا}} cx\approx 7.43$

$\to x=\boxed{1.49\times10^4 \text{ kW}}$

4.11) a) $1-P(960<X<1040)=1-\left[G\left(\frac{1040-1000}{20}\right)-G\left(\frac{960-1000}{20}\right)\right]$

$=1-0.9544=0.0455$

$\boxed{4.55}$ درصد

b) $1-P(960<X<1040)=1-\frac{80}{100}=0.2 \to \boxed{\%20}$

4.12) a) $P\{X=n\}=pq^{n-1}$ توزیع هندسی

b) $P\{X>30\}=\sum_{k=31}^{\infty} pq^{k-1}=1-p\sum_{k=1}^{30} q^{k-1}=1-p\frac{1-q^{30}}{1-q}$

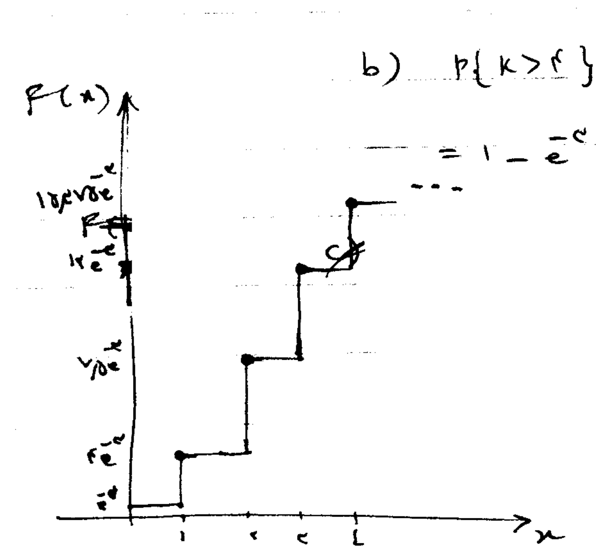
$=q^{30}=0.215$

4.15) a) $P\{k=0\}=e^{-\eta}\frac{\eta^0}{0!}=e^{-3}=0.05$

b) $P\{k>4\}=1-\sum_{i=0}^{4}P(k=i)=1-e^{-\eta}\sum_{i=0}^{4}\frac{\eta^i}{i!}$

$=1-e^{-3}\left(1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}\right)=0.185$

c)



$P\{k=0\}=e^{-3}$

$P\{k=1\}=3e^{-3}$

$P\{k=2\}=4.5e^{-3}$

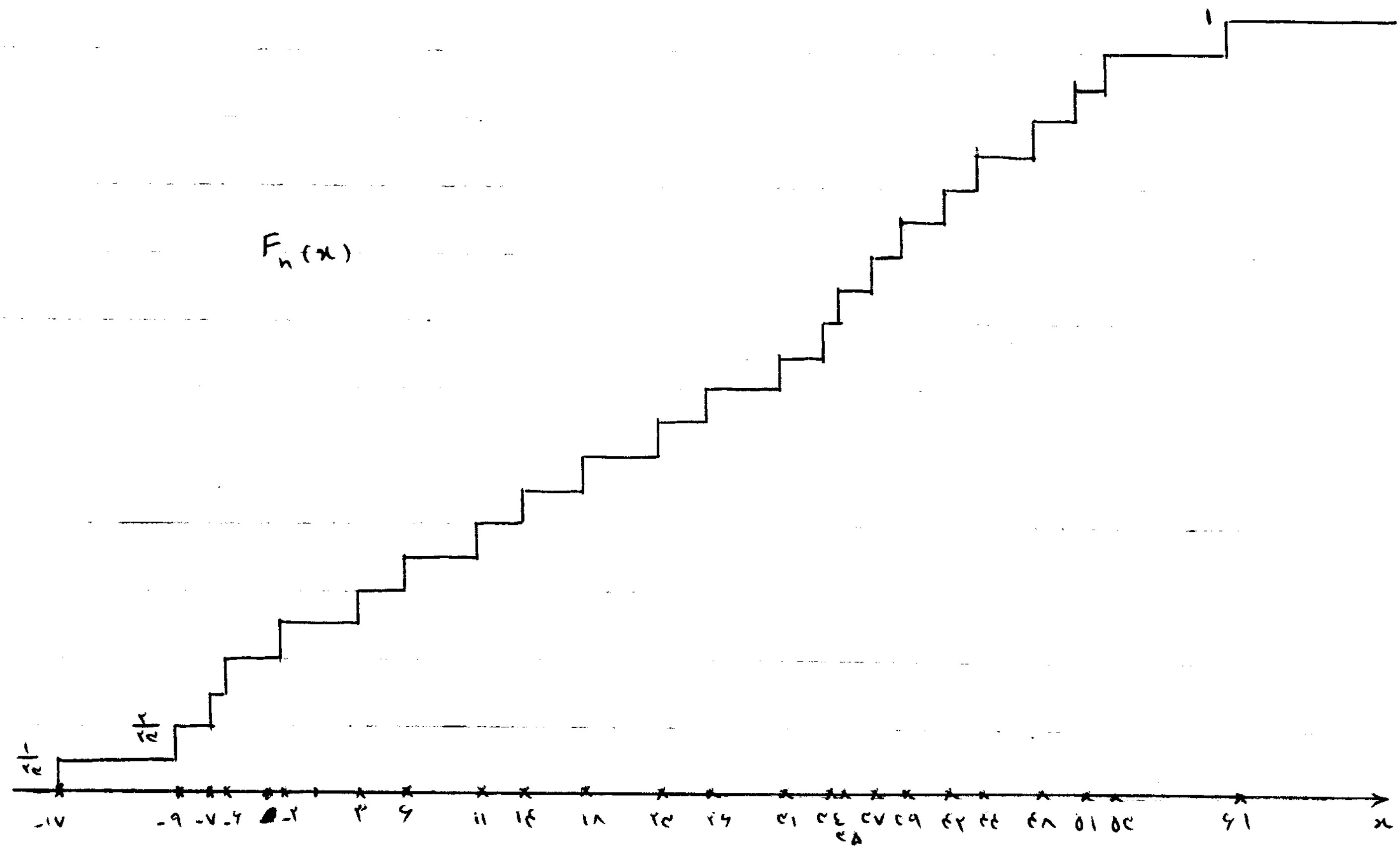
$P\{k=3\}=\frac{27}{6}e^{-3}=4.5e^{-3}$

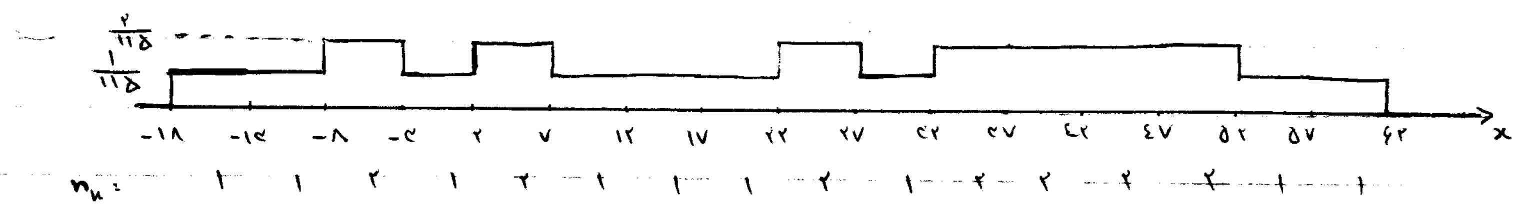
$P\{k=4\}=\frac{81}{24}e^{-3}=3.375e^{-3}$

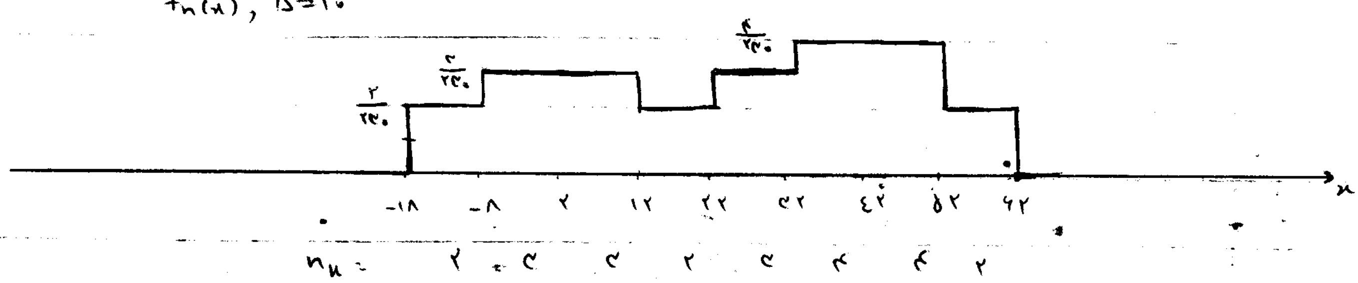
$P\{k=5\}=\frac{243}{120}e^{-3}=2.025e^{-3}$

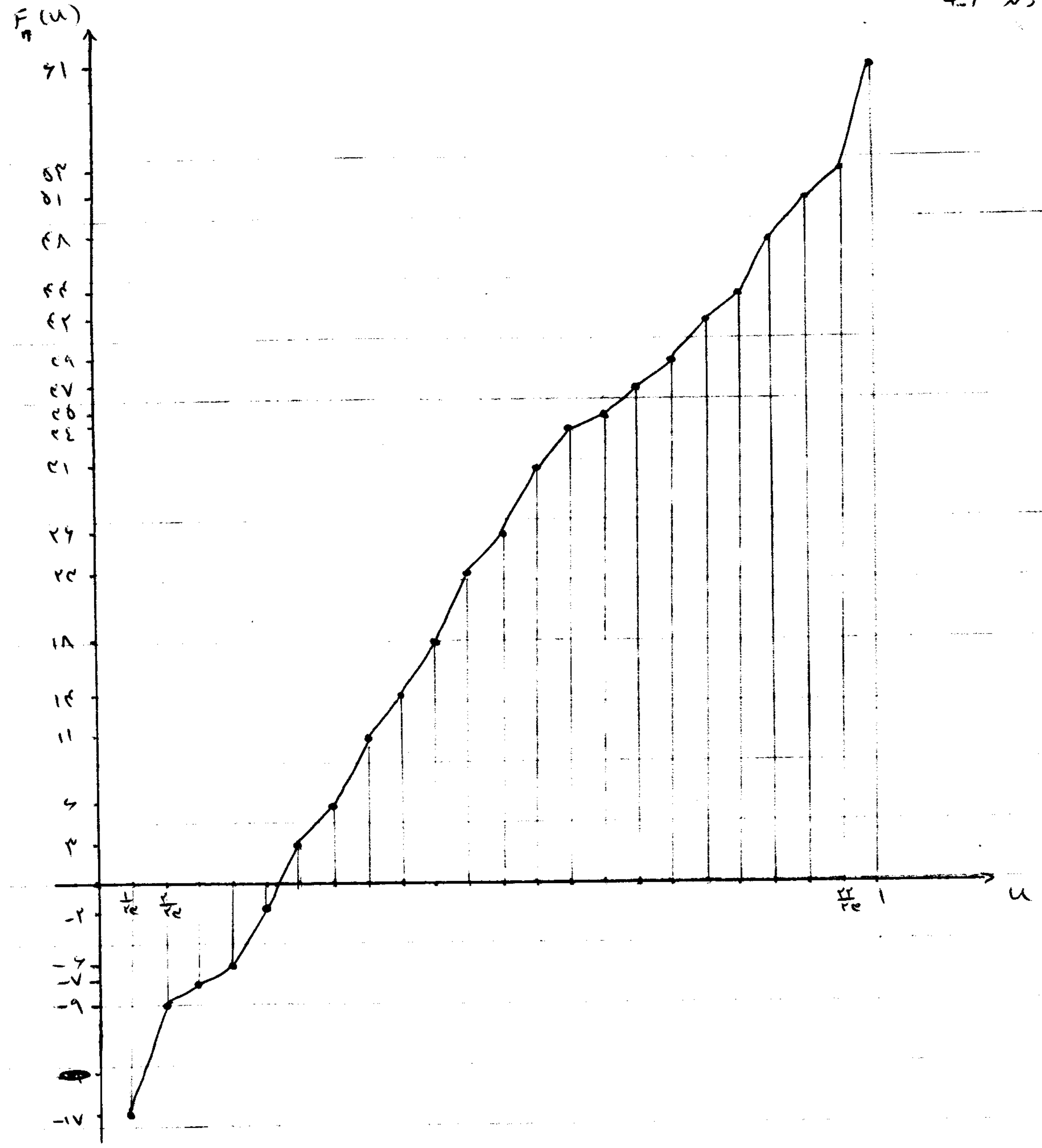
$P\{k=6\}=\frac{729}{720}e^{-3}=1.0125e^{-3}$

4-7)









$F'_4(u)$
۶۱
۵۱
۴۸
۴۲
۳۷
۳۱
۲۶
۱۸
۱۱
۶
۳
-۲
-۶
-۷
-۹
-۱۷
u
۱

— توزیع گاما

الف — محل ماکزیمم شدن

$$f(x) = A\, x^{r-1} e^{-\lambda x} u(x)$$

$$f'(x) = A(r-1)x^{r-2} e^{-\lambda x} - A\lambda x^{r-1} e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$

$$= A e^{-\lambda x} x^{r-2} (r-1-\lambda x) = 0 \longrightarrow x = \frac{r-1}{\lambda}$$

ب — CDF

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0$$

$$F(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^x u^{r-1} e^{-\lambda u}\, du$$

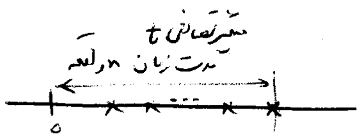
$$y = \lambda u$$

$$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\lambda x} \frac{y^{r-1}}{\lambda^{r-1}} e^{-y} \frac{dy}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\lambda x} y^{r-1} e^{-y}\, dy \Rightarrow F(x) = \frac{\gamma(r, \lambda x)}{\Gamma(r)}$$

— توزیع ارلانگ

الف — مدت زمان لازم برای وقوع n واقعه است



$$F_t(x) = P\{t \leq x\} = P\{\text{حداقل } n \text{ واقعه در زمان } x\} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \quad , x \geq 0$$

$$f_t(x) = \frac{dF_t(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^k - e^{-\lambda x} k\lambda(\lambda x)^{k-1}}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} k \frac{(\lambda x)^{k-1}}{k!}\right) = \lambda e^{-\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{(\lambda x)^{k'}}{k'!}\right)$$

$$k' = k-1$$

$$= \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \quad , x \geq 0 \longrightarrow \text{توزیع ارلانگ}$$

ب - CDF توزیع ارلانگ   با توجه به آنچه در بند الف دیدیم

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du=\frac{\gamma(n,\lambda x)}{(n-1)!}=1-\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

یا با انتگرال‌گیری جزء به جزء از انتگرال فوق به عبارت آخر می‌رسیم

ث - توزیع هندسی

$$P\{X<k\}=\sum_{i=0}^{k-1}pq^i=p\,\frac{1-q^k}{1-q}=1-q^k$$

$$\Rightarrow P\{X\geqslant k\}=q^k$$

$$P\{X\geqslant k+l\,/\,X\geqslant k\}=\frac{q^{k+l}}{q^k}=q^l=P(X\geqslant l)$$

— توزیع رایلی

$$P(X>\alpha)=\int_{\alpha}^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$ برای $\alpha\geq 0$

$$=\left[-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{x=\alpha}^{\infty}=e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}\quad,\ \alpha\geq 0$$

$$P(X>\alpha)=1\quad,\ \alpha<0$$

— دیگر عقربه‌ای

محل قرار گرفتن عقربه بین دو ریزترین درجه را دارای توزیع یکنواخت فرض می‌کنیم (معقول‌ترین فرض به علت اصل ناکافی بودن دلیل)

درصورتی خطایی بیش از ۰٫۲ خواهد بود که عقربه در

فاصله بین ۰٫۲ تا ۰٫۸ باشد با توجه به توزیع یکنواخت

احتمال ۶۰٪ است

— پیشرانش

الف – اگر فاصله زمانی بین خرابی‌ها را متغیر تصادفی t در نظر بگیریم t دارای توزیع نمایی است

$$f_t(\tau)=\nu\tau\,e^{-\nu\tau}\ ,\ \tau\geq 0\ \rightarrow\ F_t(\tau)=(1-e^{-\nu\tau})\ ,\ \tau\geq 0$$

احتمال شکست پرتاب $=P(\tau<T_s)=1-e^{-\nu T_s}$

ب – $1-e^{-3T_s}\leq 0{,}01\ \rightarrow\ T_s\leq 0{,}00335$ سال $=1{,}2$ روز

T_s یک روز

— حدود $Q(x)$

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\sqrt{2\pi}\, Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{u} \left(u e^{-\frac{u^2}{2}} du\right)$$

$$= \frac{1}{u}\left(-e^{-\frac{u^2}{2}}\right)\Bigg|_{u=x}^{\infty} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \qquad x > 0$$

ولی

$$0 < \int_x^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\frac{u^2}{2}} du < \frac{1}{x^3} \int_x^\infty u\, e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x^3} e^{-\frac{x^2}{2}} < \sqrt{2\pi}\, Q(x) < \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x > 0$$

پس

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

اشتباه [illegible] ص ۲۲۴ wozencraft Fig 2.36

— توزیع پواسن و مد

$$f(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$ توزیع پواسن

$$\frac{f(k-1)}{f(k)} = \frac{\lambda^{k-1}/(k-1)!}{\lambda^k/k!} = \frac{k}{\lambda}$$

لذا اگر $\eta<1$ باشد $f(x)$ برای $x=0$ ماکزیمم خواهد بود

اگر $\eta>1$ و η عدد صحیح نباشد $f(x)$ در $x=[\eta]$ (جزء صحیح η) ماکزیمم خواهد بود

اگر $\eta>1$ و η عدد صحیح باشد $f(x)$ دارای دو ماکزیمم در $x=\eta-1$ و $x=\eta$ خواهد بود.

توزیع بتا

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(a,b)}\,x^{a-1}(1-x)^{b-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{والا}\end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{1}{B(a,b)}\left[(a-1)\,x^{a-2}(1-x)^{b-1}-x^{a-1}(b-1)(1-x)^{b-2}\right]$$

$$=\frac{1}{B(a,b)}\left[(a-1)(1-x)-x(b-1)\right]x^{a-2}(1-x)^{b-2}$$

$$\left[(a-1)(1-x)-x(b-1)\right]=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{a-1}{a+b-2}}$$