

Subject :

Year :

Month :

Date :

حاصل دوم " سیستم های خطی غیر متغیر با زمان " LTI

سیستم های غیر متغیر با زمان : Convolution Sum

$$x[n] \cdot \sum x[k] \delta[n-k]$$

اند $h_k[n]$ پاسخ یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان به سیگنال ورودی ضربی $\delta[n-k]$ باشد

$$y[n] = \sum x[k] h_k[n]$$

از طرف دیگر می دانیم که اگر سیستم LTI پاسخ ضربی $h[n]$ باشد :

$$x_1[n] = \delta[n-k] \Rightarrow y_1[n] = h[n-k]$$

لذا خدش سیستم LTI به دو صورت $x[n]$ برابر است با :

$$y[n] = \sum x[k] h[n-k]$$

$$= x[n] * h[n]$$

برای هر سیستم LTI به کمک پاسخ ضربی آن می توان خدش را از روی ورودی دلخواه

به دست آورد

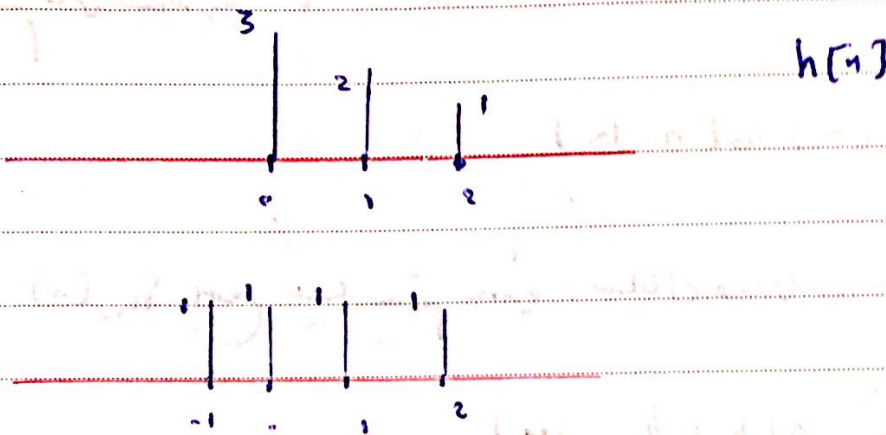
Subject:

Year:

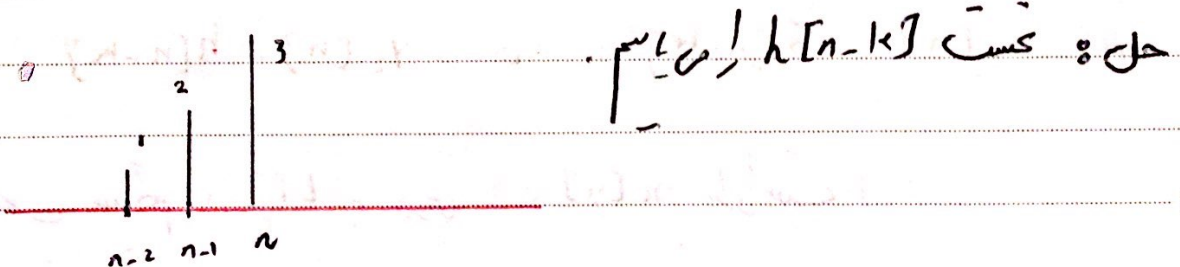
★ Month:

🕒 Date:

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = ?$$



$$y[n] = \sum x[k] h[n-k]$$



1) $n < -1 \rightarrow y[n] = 0$

5) $n = 2 \rightarrow y[n] = 6$

2) $n = -1 \rightarrow y[n] = 3 \times 1 = 3$

6) $n = 3 \rightarrow y[n] = 3$

3) $n = 0 \rightarrow y[n] = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 5$

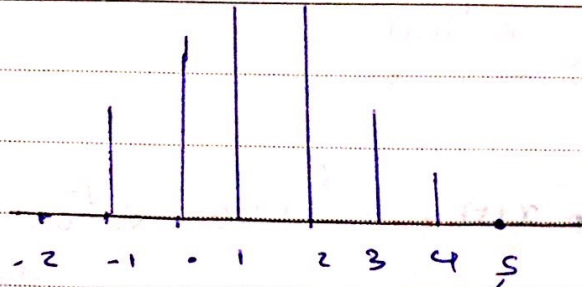
7) $n = 4 \rightarrow y[n] = 1$

4) $n = 1 \rightarrow y[n] = 6$

8) $n \geq 5 \rightarrow y[n] = 0$

$y[n]$

$\Delta =$



اگر حول سیگنال $x[n]$ برای M باشد و حول سیگنال $h[n]$ برای M باشد طول سیگنال

این سیگنال $L+M-1$ باشد.

در سیستم های پیوسته $\delta(t)$ به عنوان سیگنال در صورت

جمع سیگنال یافته ها $\delta(t)$

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

$$\delta(t-k\Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t-k\Delta)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

اگر پاسخ سیستم به ورودی $\delta(t-k\Delta)$ باشد $\hat{h}_{k\Delta}(t)$ نشان دهنده خروجی

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \hat{h}_{k\Delta}(t) \Delta$$

جمع آن برای سیستم های پیوسته

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \triangleq x(t) * h(t)$$



Convolution integral

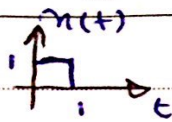
Subject:

Year:

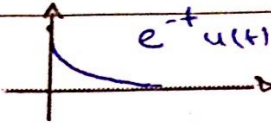
Month:

Date:

if



-



ex

* $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ \Rightarrow $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ در این صورت یکسان است.

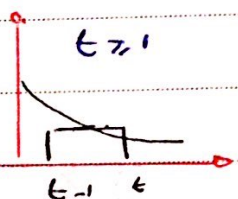
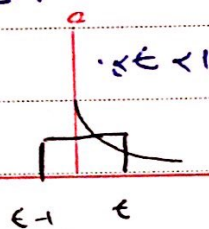
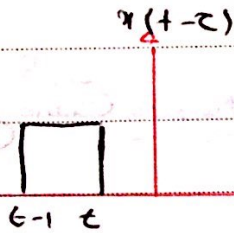
چون:

$$t < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = 0$$

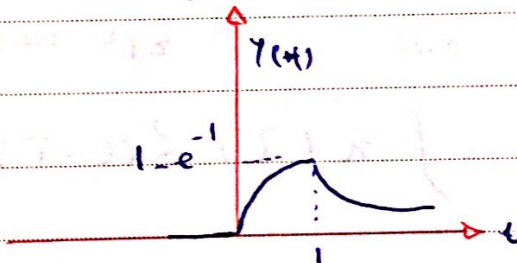
5

$$0 < t \leq 1 \Rightarrow y(t) = \int_0^t 1 \times e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}$$

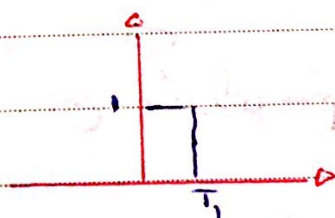
$$t \geq 1 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^t 1 \times e^{-\tau} d\tau = e^{1-t} - e^{-t}$$



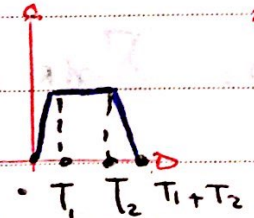
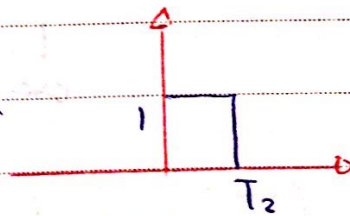
10



15



*



ex

20

Subject:

Year:

Month:

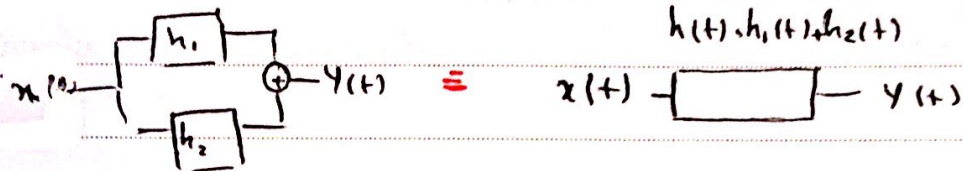
Date:

خواص لائوسس 8.

(1) خاصیت جابجایی (Commutative) $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

(2) خاصیت توزیع پذیری (Distributive property)

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



(3) خاصیت سرت پذیری (Associative property)

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

$$x(t) \rightarrow [h_1(t)] \rightarrow [h_2(t)] \rightarrow y(t) \equiv x(t) \rightarrow [h_1(t) * h_2(t)] \rightarrow y(t)$$

$$* (x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1 * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

Subject:

Year:

Month:

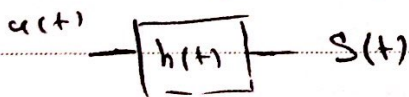
Date:

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \quad (: +)$$

$$(y(t), x(t-t_0), h(t) = \delta(t-t_0) , x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0))$$

$$\text{if } y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau \Rightarrow h(t) = y(t) \Big|_{x(t)=\delta(t)} \quad \text{ex}$$
$$= \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \cdot d\tau = u(t)$$

(Step Response) LTI



$$S(t) = u(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau$$



$$\frac{dS(t)}{dt} = h(t)$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

عزیز 2.45 باب ۸: آیات لیس

$$\frac{d}{dt} [x_1(t) * x_2(t)] = x_1(t) * \frac{d}{dt} x_2(t)$$

$$= x_2(t) * \frac{d}{dt} x_1(t)$$

$$* \frac{d}{dt} [S(t)] = h(t) * \dot{x}(t) = \dot{h}(t)$$

$$\frac{d}{dt} [u(t) * h(t)] = h(t) * \frac{d}{dt} u(t)$$

بسیار، به سیستم های LTI لیس

$$S[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k]$$

$$* \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] *$$

$$* h[n], S[n] - S[n-1]$$

Subject:

Year:

Month:

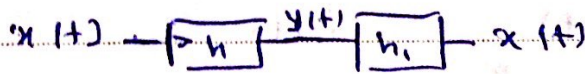
Date:

بررسی خواص سیستم های LTI از روی پاسخ ضربه آن ها

(۱) سیستم LTI بدون حافظه

۵ شرط لازم و کافی برای آنکه سیستم LTI بدون حافظه باشد آن است که $h(t) = k \delta(t)$

(۲) سیستم LTI وارون پذیر؟



$$h(t) * h_1(t) = \delta$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = y(t) * h_1(t) = x(t) * h(t) * h_1(t)$$

باید برابر $\delta(t)$ باشد

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$h_1(t), \delta(t - t_0) = h_1(t) \delta(t - t_0), \delta(t)$$

$$= h_1(t), \delta(t + t_0)$$

۲۰ سیستم با پاسخ ضربه $h[n]$ و $u[n]$ با هم ترکیب می شود

$$y[n], x[n] * h[n], x[n] * u[n], \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$$

Subject :

Year :

Month :

Date :

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

یون سیستم انتقال پیدا است، پس متغیرسی با به پیشوند باید

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

حال شرط را حل کنیم

$$\Rightarrow u[n] * [\delta[n] - \delta[n-1]] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

(۳) سیستم LTI علی δ شرط لازم، کافی برای آنکه سیستم به باشد آن است که

$$h(t) = 0; \forall t < 0$$

این شرط کافی است: if $h(t) = 0; \forall t < 0$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

علی است چون فرضی فقط به زمان های قبل از t بستگی دارد.