به نام خدا

سیستم ها:

خواص کیفی سیستمها:

۱) سیستم بدون حافظه (Memoryless): خروجی سیستم در هر لحظه فقط به ورودی سیستم در همان لحظه بستگی دارد.

$y(t) = R\,x(t) \longrightarrow$ مانند یک مقاومت ← بدون حافظه

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$\longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n]$$

مثال: $y(t) = (t-2)\,x(t)$ ← یک سیستم بدون حافظه

---

۲) معکوس پذیری یا وارون پذیری: (Invertibility)

← سیستمی را معکوس پذیر گویند که بتوان با داشتن خروجی ورودی آن را به طور کامل مشخص نمود.

← سیستم وارون پذیر به ورودی های متمایز (مختلف) خروجی های متمایز نسبت می دهد. لذا اگر بتوان ۲ ورودی متمایز یافت که یک خروجی بدهند، سیستم، معکوس پذیر نیست.

مثال:

$y(t) = x^2(t)$ ← غیرمعکوس پذیر

$y(t) = 2x(t)$ ← معکوس پذیر

$y[n] = 2$ ← معکوس ناپذیر

نیست ← کوانتایزر

یک سیستم کدینگ ← معکوس پذیر

$$\begin{cases} y(t) = \cos(x(t)) \\ 0 \le x(t) \le \pi \end{cases}$$

$y[n] = x[n] - x[n-1]$

معکوس ناپذیر ✗

مثال نقض
$$\begin{cases} x_1[n] = x[n] \longrightarrow y[n] = x[n] - x[n-1] \\ x_2[n] = x[n] + c \rightarrow y[n] = x[n] - x[n-1] \end{cases}$$

* تفاضل در سیگنالهای گسسته مانند مشتق در سیگنالهای پیوسته است.

---

۳) علّی بودن (سببی بودن) (causality)

← سیستمی که خروجی آن در لحظه t_0 فقط به مقادیر ورودی در زمانهای $t \le t_0$ بستگی داشته باشد.

مثال: $y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{-M}^{M} x[n-k] \rightarrow$ غیرعلّی

مثلاً در $n = 4$

مقدار $y[4]$ به $x[M-4]$ بستگی دارد

که M می تواند خیلی بیشتر از ۴ هم باشد پس علّی نیست.

* n می تواند منفی باشد ← غیرعلّی $\leftarrow y[n] = x[-n]$

$y(t) = x(t+1) \rightarrow$ غیرعلّی

* تعریف ریاضی علّی بودن: سیستم $x(t) \rightarrow y(t)$ علّی است اگر:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \\ x_1(t) = x_2(t) \rightarrow \text{برای همهٔ } t \le t_0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y_1(t) = y_2(t) \\ \text{برای } \forall t \le t_0 \end{array}$$

۴ پایداری (stability):

← سیستمی پایدار است که اگر هر ورودی محدود (کراندار) (bounded) به سیستم اعمال شود خروجی نیز محدود (کراندار) باشد.

به این سیستم‌ها BIBO گویند. ⟶ $|x(t)| < B \Rightarrow |y(t)| < B'$, $-\infty < t < \infty$

(Bounded-Input Bounded output)

← برای نشان دادن ناپایداری سیستم کافی است که یک ورودی کراندار به سیستم بدهیم که خروجی به ازای آن ورودی بیکران نشود.

* پایداری برای سیستم‌ها تعریف می‌شود.

مثال: $y(t) = t\,x(t)$

$|x(t)| < B \rightarrow \cancel{|y(t)| < B'} \rightarrow$ ناپایدار

$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = t$

مثال: $y(t) = e^{x(t)} \rightarrow |x(t)| < \beta \rightarrow e^{-\beta} < |y(t)| < e^{\beta} \rightarrow |y(t)| < B' \Rightarrow$ پایدار

مثال: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow$ ناپایدار ⟵ مثال نقض ⟵ $x[n] = -\frac{1}{n}$

---

۵ خطی بودن:

← سیستمی که بتوان قضیه‌ی جمع آثار (superposition) را در مورد آن بکار برد.

← بعبارت بهتر ۲ خاصیت زیر را داشته باشد: $x(t) \rightarrow y(t)$

$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \rightarrow$ خاصیت جمع‌پذیری ⟵ (additionally)

$a x_1(t) \rightarrow a y_1(t) \rightarrow$ خاصیت همگنی یا مقیاس‌پذیری → (homogenity)(scaling)

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

$a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$

مثال:

$$y(t) = t\,x(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{array}\right\} \to a x_1(t) + b x_2(t)$$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = t\,x_3(t) = t\,(a x_1(t) + b x_2(t)) =$$

$$a t\,x_1(t) + b\,t\,x_2(t) = a y_1(t) + b y_2(t)$$

مثال:

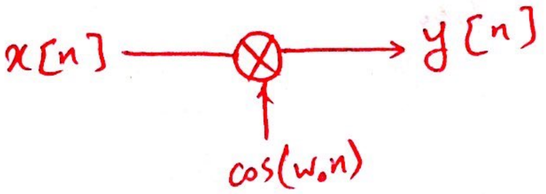
$$y[n] = 2x[n] + 3 \rightarrow$$ غیرخطی

$$x_1(t) \to y_1(t)$$

$$0 \times x_1(t) \to 0 \times y_1(t) \rightarrow$$

* در یک سیستم خطی ورودی صفر به خروجی صفر منجر می‌شود.

مثال:



$$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$$

$$y_3[n] = x_3[n]\cos(w_0 n) = (a x_1[n] + b x_2[n])\cos(w_0 n) = a x_1[n]\cos(w_0 n) + b x_2[n]\cos(w_0 n)$$

$$= a y_1[n] + b y_2[n]$$ ✓ خطی

مثال:

$$y(t) = x(2t)$$

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(2t)$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(2t)$$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \to y_3(t) = x_3(2t)$$

$$= a x_1(2t) + b x_2(2t) = a y_1(t) + b y_2(t) \rightarrow$$ خطی

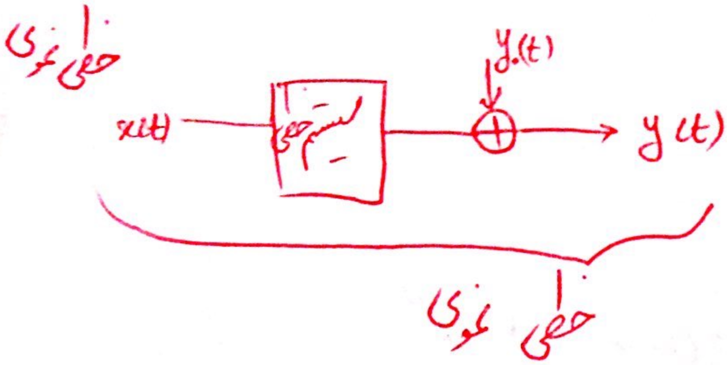
تمرین: $x[n] \to x[n-K]$ یک سیستم خطی علّی است اگر و تنها اگر شرط حالت اولیه‌ی صفر (initial reset) برای آن برقرار باشد.

$$x(t) = 0 \quad t < t_0$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = 0 \quad t < t_0$$

← به این نکته توجه کنید که سیستم خطی با سیستم خطی نموی تفاوت دارد:



← سیستمی که خروجی آن غیرخطی است
جمع آن با خروجی یک سیستم خطی
و پاسخ ورودی صفر است را خطی نموی گویند.

$$y(t) = ax(t) + b$$

$$y_2(t) - y_1(t) = a(x_2(t) - x_1(t))$$

---

۴) سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان (مستقل از زمان) (TI) ← Time Invariant

← سیستمی که رفتار آن به زمان بستگی ندارد یعنی به ازای کلیه‌ی مقادیر t:

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x_1(t-t_0) \rightarrow y_1(t-t_0)$$

← نحوه‌ی تست TI بودن یک سیستم:

مثال: $y(t) = x(2t)$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = x_2(2t) = x_1(2t-t_0)$$

$$y_1(t-t_0) = x_1(2(t-t_0))$$

$\neq \Rightarrow$ TI نیست.

مثال: $y[n] = nx[n]$

$$x_1[n] = \delta[n] \rightarrow y_1[n] = n\delta[n] = 0$$

$$x_2[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y_2[n] = nx_2[n] = n\delta[n-1] = \delta[n-1] \neq 0$$

$$y_1[n-1] = 0$$

(TV) → time varying

تمرین: پاسخ یک سیستم TI تغییرناپذیر با زمان به یک ورودی متناوب، یک سیگنال متناوب با همان دوره‌ی تناوب سیگنال ورودی است.

$$x(t+T_0) = x(t)$$
$$y(t+T_0) = y(t)$$

← مجموع سیگنال خاص:

1) $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases}$

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1}$$

$$\alpha S = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^N \Rightarrow S - \alpha S = S(1-\alpha) = 1 - \alpha^N$$

$$\Rightarrow S = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad |\alpha| < 1$

$$\sum_{n=K}^{\infty} \alpha^n = \alpha^K + \cdots = \alpha^K (1 + \alpha + \cdots) = \alpha^K \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^K}{1-\alpha} \quad |\alpha| < 1$$

---

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad |\alpha| < 1$

4) $\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^{N-n-1}$

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha^{N-n}$$

فصل ۲ : سیستمهای خطی تغیر ناپذیر با زمان (LTI)

$$x[n] = \sum x[k]\, \delta[n-k]$$

$$\delta[n-k] \Downarrow h_k[n]$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = \sum x[k]\, h_k[n]$$