Subject:
Year: Month: Date:

۹۳۱۰۲۸۴۶ مهدی [illegible]

تمرینات فصل سوم محاسبات عددی

۲) خطا $E(x) = |f(x) - P(x)| = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} \times f^{(2)}(c(x))$

$(x-x_0)(x-x_1)$ ماکزیمم $(x^2 - (x_0+x_1)x + x_0 x_1)' = 0 \longrightarrow x = \frac{x_0+x_1}{2}$

$(x_0, x_1) \subseteq (a,b)$

$$E(x) \leq \left| \frac{\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)\left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)}{2!} \times M \right| = \frac{h^2}{8} M$$

۳) فرض $f(x) = 1$ $\quad P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$

$E(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(c(x)) = 0$ $\qquad f^{(n+1)}(c(x)) = 0$

$\Rightarrow P_n(x) = f(x) \longrightarrow f(x) = 1 = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)$

مثال $f(x) = x^k \quad k \leq n$

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) x_i^k \longrightarrow P_n(x) = f(x) \to x^k = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) x_i^k$

$E(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(c(x)) = 0$

۵) $P(x) = \sum_{i=1}^{n-1} L_i(x) f(x_i) \longrightarrow R(x) = P(x) + \frac{x-x_1}{x_n-x_1}\left[\sum_{i=2}^{n} L_i(x) f(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} L_i(x) f(x_i)\right]$

$Q(x) = \sum_{i=2}^{n} L_i(x) f(x_i)$

$R(x) = \sum_{i=1}^{n-1} L_i(x) f(x_i) + \left(\frac{x-x_1}{x_n-x_1}\right)\left(L_n(x) f(x_n) - L_1(x) f(x_1)\right)$

$R(x_n) = 0 + \left(\frac{x_n-x_1}{x_n-x_1}\right)\left(1 \times f(x_n) - 0\right) = f(x_n)$

P4PCO

ct:
Year. Month. Date. ( )

$R(x_1) = 1 \times f(x_1) + 0 = f(x_1)$

$2 \leq i \leq n-1$

$R(x_i) = 1 \times f(x_i) + \left(\frac{x_i - x_1}{x_n - x_1}\right)(0 + 0) = f(x_i)$

شرایط $R(x)$ در نقاط $x = x_i$ برابر $f(x_i)$ است پس $R(x)$ نقاط x_1 تا x_n را درون‌یابی کند.

$P(x) = \frac{(x - x_2)}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \frac{x}{\frac{\pi}{6}} \times \frac{1}{2} = \frac{3x}{\pi}$

$Q(x) = \frac{(x - x_3)}{x_2 - x_3} f(x_2) + \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}\right) f(x_3) = \frac{x - \frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{3}} \times \frac{1}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3x + \frac{\pi}{2}}{2\pi}$

$R(x) = \frac{3x}{\pi} + \frac{x}{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3x}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{3x}{\pi}\right) = \frac{7x}{2\pi} - \frac{3x^2}{\pi^2}$

6) $\sum_{i=0}^{n} (f(x) - f(x_i)) L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x) L_i(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = f(x) \sum_{i=0}^{n} L_i(x) - P(x)$

$= f(x) - P(x)$

8) $\ln(L_i(x)) = \ln\left(\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \ln\left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$

مشتق $\longrightarrow \frac{L_i'(x)}{L_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \xrightarrow[L_i(x_i)=1]{x = x_i} L_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}$

$j \leftrightarrow i$

$\boxed{L_j'(x_j) = \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_j - x_i}}$

Subject:
Year Month Date ( )

۱۲) $P_2(x) = f(x_0) + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2]$

$$= f(x_0) + (x-x_0)\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$\begin{vmatrix} P_2(x) & 1 & x & x^2 \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2(x)-f_0 & 0 & x-x_0 & x^2-x_0^2 \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ f_1-f_0 & 0 & x_1-x_0 & x_1^2-x_0^2 \\ f_2-f_1 & 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{P_2(x)-f_0}{x-x_0} & 1 & x+x_0 \\ \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} & 1 & x_1+x_0 \\ \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} & 1 & x_2+x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x-x_1}{x_2-x_0}\left[\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} + \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}\right] & 0 & x-x_1 \\ \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} & 1 & x_1+x_0 \\ \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} & 0 & x_2-x_0 \end{vmatrix}$$

$$= (x-x_1)\left(\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}\right) - \left(\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}\right)(x-x_1) = 0$$

16) $f[x_0, x_0, x_0] = \lim_{h\to 0} f[x_0, x_0+h, x_0+2h]$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h} - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

۱۸) $m_0 = S''(-1) = 4(-1)+4(0) = -6 \neq 0$ اسپلاین طبیعی نیست

$m_5 = S''(5) = 6(5-1) = 24 \neq 0$

PAPCO

Month. Date. ( )

۲۵) $S''(x) = \begin{cases} -۴۸x & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۲c + ۶d(x-۱) & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$ | $S'(x) = \begin{cases} ۳ - ۲۴x^۲ & ۰ \leq x \leq ۱ \\ b + ۲c(x-۱) + ۳d(x-۱)^۲ & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$

$S(۱^-) = S(۱^+) \Rightarrow a = ۱$

$S'(۱^-) = S'(۱^+) \Rightarrow ۳ - ۲۴ = b \rightarrow b = -۲۱$

$S''(۱^-) = S''(۱^+) \Rightarrow -۴۸ = ۲c \rightarrow c = -۲۴$

$g(d) = \int_۰^۲ (S''(x))^۲ dx = \int_۰^۱ (-۴۸x)^۲ dx + \int_۱^۲ (-۴۸ + ۶d(x-۱))^۲ dx$

$= ۷۶۸x^۳ \Big|_۰^۱ + \frac{(۶d(x-۱) - ۴۸)^۳}{۳ \times ۶d} \Big|_۱^۲ = -۱۶ + \frac{(۶d - ۴۸)^۳}{۱۸d} \rightarrow g'(d) = ۰ \rightarrow d = ۱۲$

۲۸) $g(x) = a_۱ + a_۲ \cos x + a_۳ \sin x \rightarrow E(a_۱, a_۲, a_۳) = \sum_{i=۱}^{۳} (y_i - a_۱ - a_۲ \cos x - a_۳ \sin x)^۲$

$\frac{\partial E}{\partial a_۱} = ۰ \rightarrow \sum (y_i - a_۱ - a_۲ \cos x - a_۳ \sin x) = ۰ \rightarrow \sum a_۱ + \sum a_۲ \cos x_i + \sum a_۳ \sin x_i = \sum y_i$

$\frac{\partial E}{\partial a_۲} = ۰ \rightarrow \sum (y_i - a_۱ - a_۲ \cos x - a_۳ \sin x_i) \cos x = ۰ \rightarrow \sum a_۱ + \sum a_۲ \cos^۲ x_i + \sum a_۳ \sin x_i \cos x_i = \sum y_i \cos x_i$

$\frac{\partial E}{\partial a_۳} = ۰ \rightarrow \sum (y_i - a_۱ - a_۲ \cos x_i - a_۳ \sin x_i) \sin x = ۰ \rightarrow \sum a_۱ \sin x_i + \sum a_۲ \sin x_i \cos x_i + \sum a_۳ \sin^۲ x_i = \sum y_i \sin x_i$

x_i	y_i	$\cos x_i$	$\sin x_i$	$y_i \cos x_i$	$y_i \sin x_i$
۰	۵	۱	۰	...	
۱	۵۴	۰,۵۴	۰,۸۴	...	
۲	۹۹	-۰,۴۱	۰,۹۱	...	
۳	۱۸۱	-۰,۹۹	۰,۱۴	...	
Σ ۳۳۹		۰,۱۴	۱,۸۹	-۱۸۵,۶	۱۶۰,۸

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۰,۱۴ & ۱,۸۹ \\ ۰,۱۴ & ۲,۴۴ & -۰,۰۶ \\ ۱,۸۹ & -۰,۰۶ & ۱,۵۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۳۹ \\ -۱۸۵,۶ \\ ۱۶۰,۸ \end{bmatrix}$$

$\rightarrow a_۱ = ۹۴,۶ \quad a_۲ = -۸۱,۸۵ \quad a_۳ = -۱۴,۷۷$

$g(x) = ۹۴,۶ + (-۸۱,۸۵) \cos x + (-۱۴,۷۷) \sin x$

$\sum \cos^۲ x_i = ۲,۴۴$

$\sum \sin^۲ x_i = ۱,۵۵$

$\sum \sin x_i \cos x_i = -۰,۰۶$

Subject:

Subject: Year. Month. Date. ( )

29) $y = c e^{bx} \rightarrow \underbrace{\ln y}_{Y} = \ln c + bx \rightarrow Y = a + bx$

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۳	۸	۲۲	۶۰
Y	۰	۱٫۰۹	۲٫۰۷	۳٫۰۹	۴٫۰۹

$$\begin{bmatrix} \Sigma 1 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma y_i x_i \end{bmatrix}$$

$\sum_{i=1}^{۵} x_i = ۵ \quad , \quad \Sigma x_i^{۲} = ۱۵ \quad \Sigma Y_i = ۱۰٫۳۴ \quad \Sigma y_i x_i = ۲۰٫۵۲$

$$\begin{cases} ۵a + ۵b = ۱۰٫۳۴ \\ ۵a + ۱۵b = ۲۰٫۵۲ \end{cases} \qquad b = ۱٫۰۱۸ \qquad a = ۱٫۰۵ \rightarrow c = e^{a} = ۲٫۸۶$$

$$y = ۲٫۸۶ e^{۱٫۰۱۸x}$$

33- $y = ax^{۲} + b \rightarrow E(a,b) = \sum_{i=1}^{۴} (y_i - (a x_i^{۲} + b))^{۲}$

$\frac{\partial E}{\partial a} = ۰ \rightarrow \sum_{i=1}^{۴} (y_i - (a x_i^{۲} + b)) x_i^{۲} = ۰ \Rightarrow \Sigma a x_i^{۴} + \Sigma b x_i^{۲} = \Sigma y_i x_i^{۲}$

$\frac{\partial E}{\partial b} = ۰ \rightarrow \sum_{i=1}^{۴} (y_i - (a x_i^{۲} + b)) = ۰ \rightarrow \sum_i a x_i^{۲} + \sum_i b = \sum_i y_i$

x_i	y_i	$x_i^{۲}$	$x_i^{۴}$	$y_i x_i^{۲}$
-۲	۱	۴	۱۶	۴
-۱	۱	۱	۱	۱
۲	۳	۴	۱۶	۱۲
۳	۴	۹	۸۱	۳۶
	۹	۱۸	۱۱۴	۵۳

$$\begin{cases} ۴b + ۱۸a = ۹ \\ ۱۸b + ۱۱۴a = ۵۳ \end{cases} \qquad b = ۰٫۵۴ \qquad a = ۰٫۳۷$$

$$y = ۰٫۳۷x^{۲} + ۰٫۵۴$$