جوابهای تمرین سری چهارم

4.16)

a)

$y = g_1(x)$

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & |x| \le 2 \\ x & |x| > 2 \end{cases}$$

$$F_y(Y) = P\{Y \le y\} = \begin{cases} P\{X \le y\} = Fx(y) & |y| \ge 2 \\ P\{X \le 2\} = Fx(2) & 0 \le y \le 2 \\ P\{X \le -2\} = Fx(-2) & -2 \le y < 0 \end{cases}$$

$z = g_2(x)$

$$g_2(x) = \begin{cases} 2 & x > 2 \\ x & |x| \le 2 \\ -2 & x < -2 \end{cases}$$

$$F_z(z) = P\{Z \le z\} = \begin{cases} P\{X \le z\} = Fx(z) & |z| \le 2 \\ 1 & z > 2 \\ 0 & z < -2 \end{cases}$$

$w = g_3(x)$

$$g_3(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

$$F_w(w) = \begin{cases} 0 & w < -1 \\ Fx(0) & -1 \le w < +1 \\ -2 & w \ge 1 \end{cases}$$

b)

$P\{Y = 0\} = 0.69146 - 0.06681 = 0.62465$

$P\{Z = 0\} = 0$

$P\{W = 0\} = 0$

4.19)

$$f_y(y) = \sum_i f_x(x_1(y)) \frac{dx_i(y)}{dy}$$

a) $y = g(x) = x^3$

$$x_1 = \sqrt[3]{y} \qquad \frac{dx1(y)}{dy} = \frac{1}{3} y^{-2/3} \qquad f_y(y) = \frac{1}{3} \frac{fx(\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{y^2}}$$

b)

برای y>0 ریشه دارد.

$y = g(x) = x^4$

$x_1 = \sqrt[4]{y} \rightarrow \frac{dx_1}{dy} = \frac{1}{4}\ y^{\frac{-3}{4}}$

$x_2 = -\sqrt[4]{y} \rightarrow \frac{dx_2}{dy} = +\frac{1}{4}\ y^{-\frac{-3}{4}}$

$f_y(y) = \frac{f_x(\sqrt[4]{y}) + f_x(-\sqrt[4]{y})}{4\sqrt[4]{y^3}} u(y)$

c) $y = g(x) = |x|$

برای y>0 ریشه دارد.

$x_1 = y \rightarrow \frac{dx_1}{dy} = 1$

$x_2 = -y \rightarrow \left|\frac{dx_2}{dy}\right| = 1$

$f_y(y) = (f_x(y) + f_x(-y))u(y)$

d) $y = g(x) = xu(x)$

$$F_y(y) = P\{Y \le y\} = \begin{cases} P\{X \le y\} = F_x(y) & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} f_x(y) & y > 0 \\ F_x(0)\delta(y) & y = 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$f_y(y) = f_x(y)u(y) + \left(\int_{-\infty}^{0} f_x(x)dx\right)\delta(y)$$

4-22)

$Y = e^X$

$x_1 = \ln y \rightarrow \frac{dx_1}{dy} = \frac{1}{y}$

$f_y(y) = \frac{1}{y}\ f_x(\ln y) \quad , \quad y>0$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{\frac{-(\ln y-\eta)^2}{2\sigma^2}} u(y)$$

4-23)

$y = 2\,F_x(x) + 3$

$F_y(y) = P\{Y \le y\} = P\{ F_x(x) \le \frac{y-3}{2} \} =$

$$\begin{cases} P\{X \le F_x^{-1}(\frac{y-3}{2})\} = F_x(F_x^{-1}(\frac{y-3}{2})) = \frac{y-3}{2} & 0 < \frac{y-3}{2} < 1 \\ 0 & \frac{y-3}{2} < 0 \end{cases}$$

$\rightarrow f_y(y) = \begin{cases} 0 & 3 < y < 5 \\ x & else \end{cases} \rightarrow Y \sim u(3,5)$

4-26)

(اگر مقصود تعداد انداختنها بدون در نظر گزفتن آخرین بار که 7 می آید باشد)

$f(k) = pq^k \qquad , k = 0,1,2, \dots$

$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$

$(\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \xrightarrow{\frac{d}{dq}} \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$ زیرا)

$7 = (6,1)(1,6)(3,4)(4,3)(2,5)(5,2) \rightarrow p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$E(x) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$

(اگر مقصود تعداد انداختنها با در نظر گزفتن آخرین بار که 7 می آید باشد)

$f(k) = pq^{k-1} \qquad , \quad k = 1,2, \dots$

$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = 6$

4.28)

$E(X-c)^2 = E(X - \eta_x + \eta_x - c)^2 = E(X-\eta_x)^2 + (\eta_x - c)^2 + 2(\eta_x - c)\ E(X-\eta_x) =$
$\sigma_x^2 + (\eta_x - c)^2$

7) با توجه به آنچه در مساله 4.23 دید یم بر ای x با توزیع دلخواه $Z = F_x(x)$ دار ای توزیع $u(0,1)$ است.
حال اگر $Z \sim u(0,1)$ باشد $Y = G^{-1}(Z)$ دار ای تابع توزیع انباشته G است. زیر ا:

$F_z(z) = \begin{cases} z & 0 < z < 1 \\ 1 & z > 1 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$

$F_y(y) = P\{Y < y\} = P\{ G^{-1}(Z) \le y\} = P\{ Z \le G(y)\} = F_z(G(y)) = G(y) \qquad 0 < G(y) < 1$

(با توجه به اینکه G بین صفر و یک است.)

پس تبد یل لازمه $Y = G^{-1}(F_x(X))$ می باشد.

8) الف)

y = xu(x)

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x)dx = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2}(1 - \frac{1}{\pi})$$

ب)

$y = |x|$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = 2\int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(Y^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

$$\text{Var}(Y) = \sigma^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2 = \sigma^2(1 - \frac{2}{\pi})$$

9)

$V = a\cos(wt + \phi) \qquad \phi \sim u(0,2\pi)$

برای $|u| < a$ معادله $V = a\cos(wt + \phi)$ بینهایت ریشه دارد:

$$\phi_n = Cos^{-1}(\frac{V}{a}) - wt \rightarrow \frac{d\phi_n}{dv} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - v^2}}$$

ولی برای هر V . ϕ_n هایی مورد نظر است که بین 0 و 2π باشند (برای سایر ϕ_nها مقدار $f(\phi_n)$ صفر است.)

پس برای هر V دو ϕ وجود دارد.(ϕ_0 و $\phi_0 + 2\pi$) لذا

$$f_v(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - v^2}} & |v| < a \\ 0 & else \end{cases}$$

$$E(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_v(v)dv = \int_{-a}^{+a} \frac{v}{\pi\sqrt{a^2 - v^2}} dv = 0$$

$$\sigma_v^2 = E(V^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f_v(v)dv = \int_{-a}^{+a} \frac{v^2}{\pi\sqrt{a^2 - v^2}} dv = \frac{a^2}{2}$$

$$(\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-v^2}}dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})$$

مسائل اختیاری

(10

4.20)

$b = tg\theta \qquad \theta \sim u(0,\frac{\pi}{4})$

برای 0<b<5 بی نهایت ریشه دارد.

$$\theta_n = tg^{-1}\frac{b}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta_n}{db} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{b^2}{25}+1}$$

ولی فقط θ_n هایی موردنظر است که بین $(0,\frac{\pi}{4})$ باشد.

.برای θ_n های دیگر $f_\theta = 0$ است.

$$f_b(b) = \begin{cases} \frac{1}{5(\frac{b^2}{25}+1)}\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{20}{\pi(b^2+\frac{1}{25})} & , \quad 0<b<5 \\ 0 & else \end{cases}$$

(11

الف)

$$h(x) = g^2(x) \rightarrow h''(x) = 2g'^2(x) + 2g(x)g''(x)$$

$$E(g^2(x)) = E(h(x)) \approx h(\eta_x) + h''(x)\frac{\sigma_x^2}{2} = g^2(\eta_x) + \sigma_x^2\left[g'^2(\eta_x) + g(\eta_x)g''(\eta_x)\right]$$

$$E^2(g(x)) \approx (g^2(\eta_x) + g''(\eta_x)\frac{\sigma_x^2}{2})^2 \cong g^2(\eta_x) + g(\eta_x)g''(\eta_x)\sigma_x^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{g(x)}^2 \approx g'^2(\eta_x)\sigma_x^2$$

ب)

$$i = \frac{10}{R}$$

$$E(i) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{10}{R}f_R(R)dR = \int_{900}^{1100}\frac{1}{200}\times\frac{10}{R}dR = \frac{1}{20}(\ln R)\Big|_{900}^{1100} = 0.0100335_A = 10.0335_{mA}$$

$$E(i^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{10}{R})^2 f_R(R)dR = \int_{900}^{1100}\frac{1}{200}\times\frac{100}{R^2}dR = \frac{1}{2}(-\frac{1}{R})\Big|_{900}^{1100} = 1.01\times10^{-4}{}_{A^2}$$

$$\sigma_i^2 = E(i^2) - E^2(i) = 3.383\times10^{-7}{}_{A^2}$$

$$\eta_R = 1000 \quad \sigma_R^2 = \frac{(1100-900)^2}{12} = \frac{10000}{3}$$

$$g(R) = \frac{10}{R} \rightarrow g''(R) = \frac{20}{R^3}$$

$$E(i) \approx g(\eta_R) + g''(\eta_R)\frac{\sigma_R^2}{2} \approx \frac{10}{1000} + \frac{20}{(1000)^3} \times \frac{10000}{6} = 0.010033_A = 10.033_{mA}$$

$$\sigma_i^2 \approx g'^2(\eta_R)\sigma_R^2 = (\frac{-10}{(1000)^2})^2 \frac{10000}{3} = 3.333 \times 10^{-7}{}_{A^2}$$

(12

$$y = g(x) = kx^2 u(x) \qquad k > 0$$

ابتدا در حالت کلی برای f_x داده شده f_y را بدست می آوریم.

برای y<0 $f_y(y) = 0$ چون معادله ریشه ندارد.

برای y>0 یک ریشه دارد.

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{k}} \rightarrow \frac{dx_1}{dy} = \frac{1}{2k}(\frac{y}{k})^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{ky}}$$

$y > 0$:

$$f_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ky}}(f_x(\sqrt{\frac{y}{k}}))$$

اما برای y = 0 چون تمام x<0 به y = 0 تبدیل می شود.

$$f_y(0) = F_x(0)\delta(y)$$

به طور کلی

$$f_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ky}}(f_x(\sqrt{\frac{y}{k}}))u(y) + (\int_{-\infty}^{0} f_x(x)dx)\delta(y)$$

حال برای $f_x(x) = \frac{x}{\alpha^2}e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}$ چون X منفی نمی شود داریم:

$$f_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ky}} f_x(\sqrt{\frac{y}{k}}))u(y) = \frac{1}{2\sqrt{ky}}\frac{\sqrt{\frac{y}{k}}}{\alpha^2}e^{\frac{-\frac{y}{k}}{2\alpha^2}}u(y) = \frac{1}{2k\alpha^2}e^{\frac{-y}{2k\alpha^2}}u(y)$$

یعنی توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2k\alpha^2}$ دارد.

(13

اگر k تا درست بزند $X = k + (n-k)(-\frac{1}{3}) = \frac{4k}{3} - \frac{n}{3}$

$$E(X) = \frac{4E(k) - n}{3}$$

$$E(k) = np = \frac{n}{m} \rightarrow E(X) = \begin{cases} \frac{n}{3} & m = 2 \\ \frac{n}{9} & m = 3 \\ 0 & m = 4 \end{cases}$$

$$\sigma_k^2 = npq = n(\frac{1}{m})(1 - \frac{1}{m})$$

$$\sigma_x^2 = (\frac{4}{3})^2 \sigma_k^2 = \begin{cases} \frac{4n}{9} = 0.444n & , m = 2 \\ \frac{32n}{81} = 0.395n & , m = 3 \\ \frac{3n}{9} = 0.333n & , m = 4 \end{cases}$$

(14

رایلی

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} u(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx}_{\sigma^2} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$(y = \frac{x^2}{2\sigma^2} \qquad dy = \frac{x}{\sigma^2} dx)$$

$$= 2\sigma^2 \underbrace{\int_0^\infty y e^{-y} dy}_{1!} = 2\sigma^2$$

$$\mathrm{var}(X) = 2\sigma^2 - (\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}})^2 = \sigma^2 (2 - \frac{\pi}{2})$$

دوجمله ای

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad , k = 0,1,2,\cdots,n$$

$$E(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k} = np\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}}_{(p+q)^{n-1}} = np$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^{k}q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k}q^{n-k} = n(n-1)p^{2}\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}q^{n-k}}_{(p+q)^{n-2}}$$

$$= n(n-1)p^{2}$$

$$\text{var}(X) = E(X(X-1)) + \eta - \eta^{2} = n(n-1)p^{2} + np - n^{2}p^{2} = np - np^{2} = np(1-p) = npq$$

لوگ نرمال

$$f_{y}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}y}e^{\frac{-(\ln y-\eta)}{2\sigma^{2}}}u(y)$$

با توجه به اینکه اگر $Y = e^{X}$ و X نرمال باشد Y لوگ نرمال خواهد بود می توانیم EY را از روی f_x (به جای f_y) بد ست آوریم.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\eta)^{2}}{2\sigma^{2}}}dx$$

$$x - \frac{(x-\eta)^{2}}{2\sigma^{2}} = -\frac{-2\sigma^{2}x + x^{2} + \eta^{2} - 2\eta x}{2\sigma^{2}} = -\frac{(x-(\eta+\sigma^{2}))^{2} + \eta^{2} - (\eta+\sigma^{2})^{2}}{2\sigma^{2}}$$

$$= -\frac{(x-(\eta+\sigma^{2}))^{2} - (\sigma^{4} + 2\eta\sigma^{2})}{2\sigma^{2}}$$

$$\Rightarrow E(Y) = e^{\frac{\sigma^{4}+2\eta\sigma^{2}}{2\sigma^{2}}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-(\eta+\sigma^{2}))^{2}}{2\sigma^{2}}}dx}_{1} = e^{(\frac{\sigma^{2}}{2}+\eta)}$$

$$E(Y^{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{x})^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\eta)^{2}}{2\sigma^{2}}}dx$$

$$2x - \frac{(x-\eta)^{2}}{2\sigma^{2}} = -\frac{-4\sigma^{2}x + (x-\eta)^{2}}{2\sigma^{2}} = -\frac{(x-(\eta+2\sigma^{2}))^{2} + \eta^{2} - (\eta+2\sigma^{2})^{2}}{2\sigma^{2}}$$

$$= -\frac{(x-(\eta+2\sigma^{2}))^{2} - (4\sigma^{4} + 4\eta\sigma^{2})}{2\sigma^{2}}$$

$$\Rightarrow E(Y^{2}) = e^{\frac{4\sigma^{4}+4\eta\sigma^{2}}{2\sigma^{2}}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-(\eta+2\sigma^{2}))^{2}}{2\sigma^{2}}}dx}_{1} = e^{(2\sigma^{2}+2\eta)}$$

$$\mathrm{var}(Y) = e^{(2\sigma^2+2\eta)} - e^{(\sigma^2+2\eta)} = e^{2\eta}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$$

کوشی

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\frac{a}{\pi}}{a^2+x^2} dx = \frac{a}{2\pi} \ln(a^2+x^2) \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} = \infty - \infty$$

E(x) به مفهوم دقیق ریاضی آن وجود ندارد.چون xf(x) مطلقا انتگرالپذیر absolutely integrable نیست.
{البته Cauchy principle value برای انتگرال فوق صفر است. یعنی

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-M}^{+M} x \frac{\frac{a}{\pi}}{a^2+x^2} dx = 0$$

لذا بعضا(با تسامح) EX=0 گفته می شود . به عبارت دیگر چون f(x) زوج است مقدار متوسط آن صفر است.
(با تسامح) }

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\frac{a}{\pi}}{a^2+x^2} dx = \infty$$

var(X) وجود ندارد.

(15

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} + \frac{x}{\sigma^2}(-\frac{x}{\sigma^2}) e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} = 0 \rightarrow 1 - \frac{x_{\mathrm{mod}}^2}{\sigma^2} = 0 \rightarrow \underline{\underline{x_{\mathrm{mod}} = \sigma}}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{u}{\sigma^2} e^{\frac{-u^2}{2\sigma^2}} du \underbrace{=}_{v=\frac{u^2}{2\sigma^2}} \int_0^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-v} dv = (-e^{-v}) \Big|_0^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{x_{\mathrm{mod}}^2}{2\sigma^2} = \ln 2 \rightarrow \underline{\underline{x_{med} = \sigma\sqrt{2\ln 2}}}$$

$$we \quad had: \quad \underline{\underline{x_{mean} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}$$

So in the Rayleigh distribution we have:

$$\underbrace{x_{\mathrm{mod}}}_{\sigma} \underbrace{x_{med}}_{1.177\sigma} \underbrace{x_{mean}}_{1.253\sigma}$$

(16

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{dF(x)}{dx} dx$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}(1 - F(x))$$

$$\eta_x = \int_{-\infty}^{0} x \frac{dF(x)}{dx} dx - \int_{0}^{+\infty} x \frac{d(1-F(x))}{dx} dx$$

$$(part\ by\ part\ \mathrm{int}\,egration)$$

$$= (xF(x))\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx - (x(1-F(x)))\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} (1-F(x))dx$$

اگر F(x) آنچنان باشد که $\lim_{x\to-\infty} xF(x) = \lim_{x\to\infty} x(1-F(x)) = 0$ نتیجه می شود

$$\eta = \int_{0}^{\infty} (1-F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

(17

الف) برای هر الکترون از واقعه عبور یا عدم عبور الکترون از سد پتانسیل روبرو هستیم. لذا احتمال عبور n الکترون از N الکترون توزیع دوجمله ای است.(آزمایش برنولی) ولی چون $P = \frac{n}{N} << 1$ و N>>1 و Np = n عدد محدودی است می توانیم از توزیع پواسن برای n استفاده کنیم.

$$f(n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

ب)

$$E(n) = \lambda \qquad \sigma_n^2 = \lambda$$

$$i = cn \to E(i) = cE(n) = c\lambda \to \sigma_i^2 = cE(i)$$

$$\sigma_i^2 = c^2 \sigma_n^2 = c^2 \lambda$$