۱) نشان دهید مساله‌ی زیر دارای مقدار ویژه‌ی حقیقی است.

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$2y(0) - y(1) = 0$$
$$2y'(0) + y'(1) = 0$$

$\lambda = 0 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y = kx$
$2y'(0) + y'(1) = 0 \Rightarrow k = 0$ $\Rightarrow y = 0$ ⇐ جواب بدیهی I

$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = k^2 \quad k > 0$

$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

$2(y(0)) - y(1) = 0 \Rightarrow 2c_1 - 2c_1 \cos k - c_2 \sin k = 0$

$2y'(0) - y'(1) = 0 \Rightarrow 2kc_2 \mp c_1 k \sin k + c_2 k \cos k = 0$

$k \neq 0 \Rightarrow 2c_1 - c_1 \cos k - c_2 \sin k = 0$

$2c_2 - c_1 \sin k + c_2 \cos k = 0$

$2(c_1 + c_2) \mp \sin k (c_1 + c_2) + \cos k (c_2 - c_1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ c_2 = c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ جواب بدیهی II

$\lambda < 0 \quad \lambda = -k^2$
$k > 0$

$y = c_1 \sinh kx + c_2 \cosh kx$

$2c_2 - c_1 \sinh k - c_2 \cosh k = 0$

$2kc_1 + c_1 k \cosh k + c_2 k \sinh k = 0 \Rightarrow k \neq 0 \Rightarrow 2c_1 + c_1 \cosh k + c_2 \sinh k = 0$

+ جمع؛ $2(c_1 + c_2) + \sinh k (c_2 - c_1) + \cosh k (c_1 - c_2) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ جواب بدیهی III

از $\left.\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}\right\}$ نتیجه می‌گیریم λ حقیقی وجود ندارد.

۱۰۹

۲) نشان دهید مساله ی اشتورم ـ لیوویل با شرایط مرزی تناوبی خود الحاق است.

$$(py')' + (q+\lambda r)y = 0$$

$$y(a) = y(b) \quad , \quad y'(a) = y'(b) \quad , \quad p(a) = p(b)$$

u و v دو جواب از مساله ی اشتورم لیوویل بالا $\quad (py')' + (q+\lambda r)y = 0$

$$uL(v) - vL(u) = u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + \cancel{uqv} - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) - \cancel{vqu}$$

$$\Rightarrow uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx}\left[p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_a^b uL(v) - vL(u) = p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Big|_a^b$$

$$= p_{(b)}\left(u(b)v'(b) - v(b)u'(b)\right) - p_{(a)}\left(u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\right)$$

$p(a)=p(b)$
$u(a)=u(b)$
$=$
$u'(a)=u'(b)$

$$p(a)\left(\cancel{u_{(a)}v'_{(a)}} - \cancel{v_{(a)}u'_{(a)}} - \cancel{u_{(a)}v'_{(a)}} + \cancel{v_{(a)}u'_{(a)}}\right)$$

$$= 0 \quad \Rightarrow$$ مساله ی اشتورم لیوویل با شرایط مرزی تناوبی خود الحاق است.

۳) تابع $f(x)$ که در فاصله‌ی $[-1,1]$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. بسط این تابع (سری فوریه) را با کمک چند جمله‌ای لژاندر بنویسید:

$f(x) = x^2+x-1 \qquad [-1,1]$

$\frac{۲n+۱}{۲}$

$$C_k = \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k , P_k \rangle} = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+x-1)P_k(x)\,dx \qquad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = x \\ P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1) \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} -dx = -1 \qquad C_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} (x^3+x^2-x)\,dx = 1 \; , \; C_2 = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1} (3x^4+3x^3-3x^2-x^2+1)\,dx$$

$$= \frac{5}{4}\left[\frac{3}{5}(1+1) - \frac{4}{3}(1+1)+2\right] = \frac{5}{4}\left(\frac{6}{15} - \frac{8}{3} + \frac{2}{15}\right) = \frac{5}{4} * \frac{8}{15} = \frac{2}{3}$$

$f(x) \simeq -1 + x + \frac{1}{3}(3x^2-1) = x^2+x-\frac{4}{3} \Leftarrow$ سری فوریه تا سه جمله‌ی اول لژاندر

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴ـ توابع f و g در بازه‌ی [a,b] قطعه‌ای پیوسته هستند. نامساوی شوارتز را ثابت کنید

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|$$

$f+\alpha g$ ، $\alpha\in\mathbb{R}$ ، راهنمایی

اگر $\langle f,g\rangle=0 \Rightarrow$ نامساوی درست است.

اگر $\langle f,g\rangle\neq 0 \Rightarrow f\neq 0 \quad g\neq 0$

$$\lambda=\frac{|\langle f,g\rangle|}{\langle f,g\rangle} \qquad |\lambda|=1$$

$$0\leq\left|\frac{\lambda f}{\|f\|}-\frac{g}{\|g\|}\right|^2=|\lambda|^2\frac{\|f\|^2}{\|f\|^2}-2\left(\left\langle\frac{\lambda f}{\|f\|},\frac{g}{\|g\|}\right\rangle\right)+\frac{\|g\|^2}{\|g\|^2}$$

$$=2-2\frac{\lambda\langle f,g\rangle}{\|f\|\|g\|} \Rightarrow |\langle f,g\rangle|=\lambda\langle f,g\rangle\leq\|f\|\cdot\|g\|$$

$$\Rightarrow |\langle f,g\rangle|\leq\|f\|\cdot\|g\|$$

PAPCO

۵- برای توابع $f, g \in C[a,b]$ ثابت کنید: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|\langle f,g\rangle|$$

[illegible]

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\longrightarrow \|f+g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2$$

$$\cancel{\|f\|^2} + \cancel{\|g\|^2} + 2\langle f,g\rangle \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\|$$

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|$$ نامساوی کشی شوارتز

همیشه درست $\Leftarrow$ حکم

6) find all the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions. $(\lambda > 0)$

a) $y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) + h y'(1) = 0 \end{cases} , \quad h > 0$

$\lambda > 0 \quad , \quad \lambda = k^2$

$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$

$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

$y(1) + h y'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \sin k + h C_2 k \cos k = 0$

$\Rightarrow C_2 \neq 0 \qquad \sin k + hk \cos k = 0$

$\times \dfrac{1}{\sqrt{1+(hk)^2}} \qquad \dfrac{1}{\sqrt{1+h^2k^2}} \sin k + \dfrac{hk}{\sqrt{1+h^2k^2}} \cos k = 0$

$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+h^2k^2}} \Rightarrow \qquad \sin\beta \sin k + \cos\beta \cos k = 0 \Rightarrow \cos(k-\beta) = 0$

$\cos\beta = \dfrac{hk}{\sqrt{1+h^2k^2}} \quad \Rightarrow k - \beta = \left(\dfrac{2n-1}{2}\right)\pi \Rightarrow k = \left(\dfrac{2n-1}{2}\pi\right) + \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{\sqrt{1+h^2k^2}}$

برای m های بزرگ $\lambda_n \approx \left(\dfrac{2m-1}{2}\pi\right)^2 \Leftarrow k_n = \dfrac{2m-1}{2}\pi$ (از بقیه مقادیر دیگه)

$y_n = C_n \sin \dfrac{2m-1}{2}\pi x$ بقیه توابع دیگه

b) $y^{(4)} - \lambda y = 0 \qquad y(0) = y''(0) = 0 \qquad y(L) = y''(L) = 0$

$\lambda > 0 \quad \lambda = k^4$

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow C_2 \sin kL = 0 \overset{C_2 \neq 0}{\Rightarrow} \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$y''(0) = 0$ و $y''(L) = 0$ ⇐ شرایط مرزی را برقرار می‌کنند $\quad \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4$

مقدار ویژه

$$y_n = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 x$$

تابع ویژه

7) find the eigenvalues and the eigen functions of the following eigenvalue problem.

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{dy}{dx}\right] + \frac{\lambda}{x} y = 0 \qquad 1 < x < e$$

a) $y(1) = y(e) = 0$

b) $y(1) = y'(e) = 0$

c) $y'(1) = y'(e) = 0$

$x = e^t$

$0 < t < 1$

$t = \ln x$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left[e^t \frac{dy}{dt} \times \frac{1}{e^t}\right] + \frac{\lambda}{e^t} y = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\right] + \frac{\lambda}{e^t} y = 0$$

$$\frac{1}{e^t}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda}{e^t} y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y = 0$$

PAPCO

c) $y'(0) = y'(1) = 0$

$\lambda = k^2 > 0$, $k > 0$

$$y = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$$
$$y' = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt$$
$$y'(0) = 0 \overset{k \neq 0}{\Rightarrow} c_2 = 0$$
$$y'(1) = 0 \Rightarrow c_1 k \sin k = 0 \Rightarrow \sin k = n\pi$$
$$\Rightarrow k_n = n\pi \Rightarrow \lambda_n = (n\pi)^2$$
$$\underline{y_n = c_n \cos n\pi t}$$

$\underline{\lambda = 0}$ مقدار ویژه

$$y = c_1 + c_2 t \Rightarrow y' = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$
$$\Rightarrow \underline{y = c_1}$$ تابع ویژه

$\lambda = -k^2 < 0$, $k > 0$

$$y = c_1 \sinh kt + c_2 \cosh kt$$
$$y' = c_1 k \cosh kt + c_2 k \sinh kt$$
$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$y'(1) = 0 \Rightarrow c_2 k \sinh k = 0 \overset{k \neq 0}{\Rightarrow} c_2 = 0$$ $\Rightarrow$ جواب بدیهی

8) consider the regular strum-liouville problem below:

$$(py')' + (q + \lambda r) y = 0 \qquad a < x < b$$
$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \quad , \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

where $p(x)$ and $q(x)$ are positive on the interval (a, b). show that if the conditions $q(x) \leq 0$ $(a \leq x \leq b)$ and $a_1 a_2 \leq 0$, $b_1 b_1 \geq 0$ are satisfied then the eigenvalues of the real-valued eigenfunctions should be positive.

$q(x) \geq 0 \Rightarrow q(x) = 0$

$q(x) \leq 0$

$a_1 a_2 - b_1 b_2 \leq 0$

$$(py')' + (q+\lambda r)y = 0$$

$$\times y \qquad y(py')' + (q+\lambda r)y^2 = 0$$

$$-p'yy' - p(y')^2 - pyy'' + p(y')^2 - qy^2 - \lambda r y^2 = 0$$

$$\int_a^b \Rightarrow \quad -pyy'\Big|_a^b + \int_a^b [p(y')^2 - qy^2]dx - \lambda \int_a^b y^2 r\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-pyy'\Big|_a^b + \int_a^b [p(y')^2 - qy^2]dx}{\int_a^b y^2 r\, dx}$$

$$\lambda = \frac{p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \int_a^b [p(y')^2]dx}{\int_a^b y^2 r\, dx}$$

$$\lambda = \frac{p(a)\, y(a)\left(\frac{-a_1}{a_2}\right)y(a) - p\, y(b)\left(\frac{-b_1}{b_2}\right)y(b) + \int_a^b [p(y')^2]dx}{\int_a^b y^2 r\, dx}$$

$\Rightarrow \lambda \geq 0$ $\xleftarrow{\text{درستی}}$ چون تمام موارد صورت و مخرج کسر بالا مثبت هستند

PaPCO