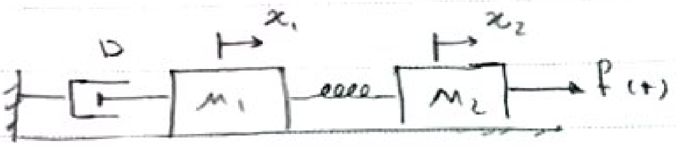
«باسمه تعالی»

طرحیب زاده - 9260053 - تمرین سری 2 کنترل خطی دکتر تیمادی

سوال ۱)



با فرض آنکه خروجی سیستم نسبت جابجایی دو جرم باشد داریم

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \Delta x_1 = x_2 - x_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -D\dot{x}_1 + K(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) + f(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \dot{z}_1 = -Dz_1 + kz_3 \\ m_2 \dot{z}_2 = -kz_3 + f(t) \\ \dot{z}_3 = z_2 - z_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{D}{m_1} z_1 + \frac{K}{m_1} z_3 \\ \dot{z}_2 = -\frac{K}{m_2} z_3 + \frac{1}{m_2} f(t) \\ \dot{z}_3 = z_2 - z_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{Z} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{D}{m_1} & 0 & \frac{K}{m_1} \\ 0 & 0 & -\frac{K}{m_2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} Z + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} f(t)$$

$$Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} Z + \underbrace{0}_{D} f(t)$$

سوال 2) با استفاده از رابطه‌ی بدست آمده بدون داریم :

الف) $G_1(s) = \dfrac{b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

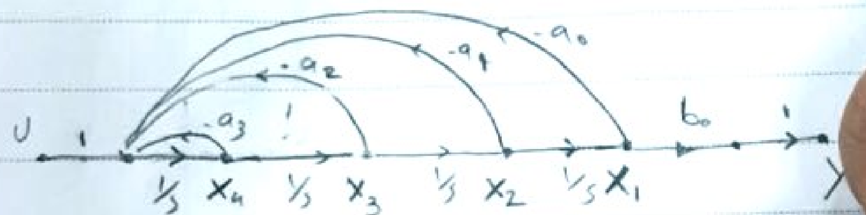
$$Y = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + 0 \cdot U$$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\dot{x}_3 = x_4$

$\dot{x}_4 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + U$



ب

ب) $G_2(s) = \dfrac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$

با توجه به روابط کلی که در جزوه داریم:

C. $S^3 +$

S^3 :

S^2 :

S^1 :

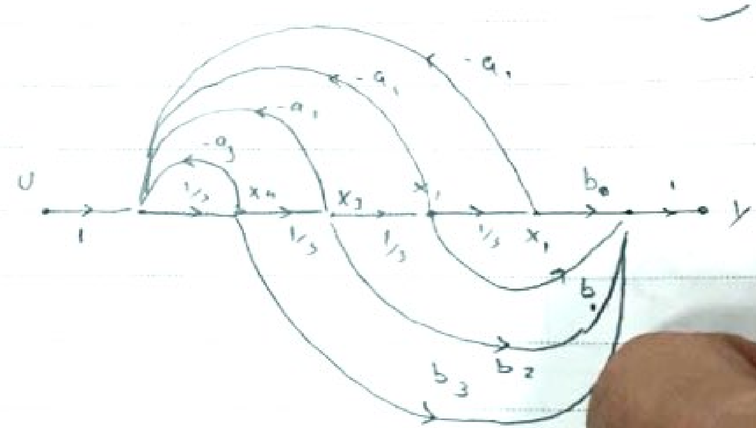
S^0 :

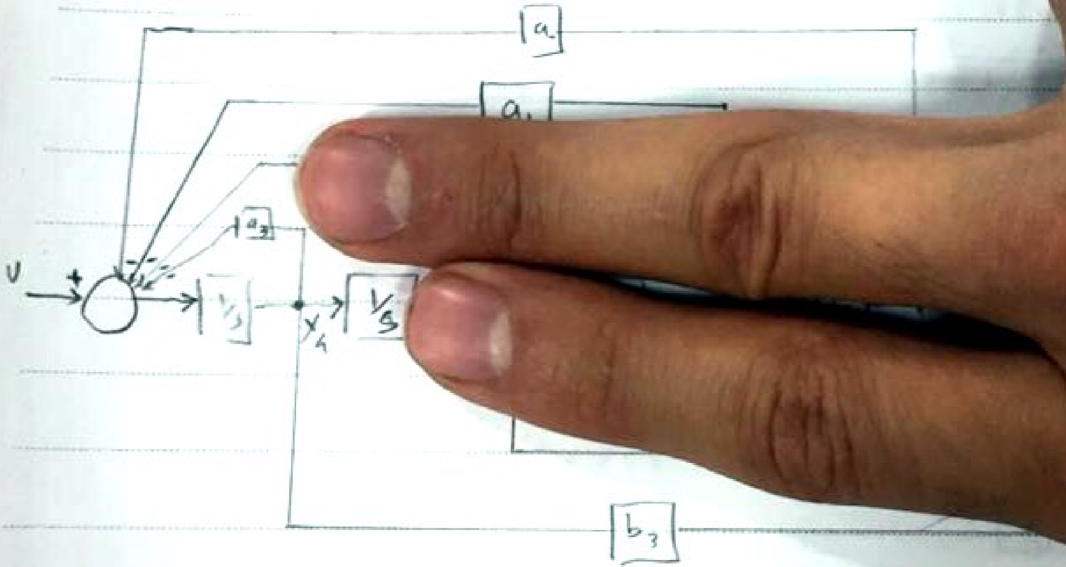
D.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

$$Y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} X + 0\,U$$

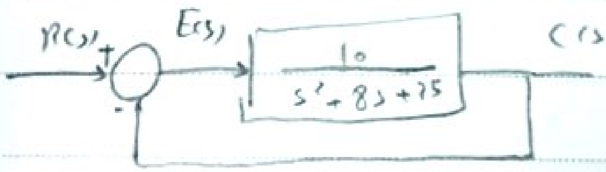
سیگنال فلوگراف





سؤال 3)

الف)



$$H(s) = \frac{\frac{10}{s^2+8s+25}}{1+\frac{10}{s^2+8s+25}} = \frac{10}{s^2+8s+35}$$

$C_{s} < 0.05 \Rightarrow 1-\alpha < 0.05 \Rightarrow \boxed{\alpha > 0.95}$

ب)

$$\rightarrow H(s) = \frac{\frac{s+\alpha}{s^3+(1+\alpha)s^2+(\alpha-1)s+1-\alpha}}{1+\frac{s+\alpha}{s^3+(1+\alpha)s^2+(\alpha-1)s+1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s+\alpha}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha s+1}$$

s^3 : 1 $\quad \alpha$

s^2 : $1+\alpha$ $\quad 1$

s^1 : $\frac{\alpha^2+\alpha-1}{1+\alpha}$ $\quad 0$

s^0 : 1 $\quad 0$

داریم

$$\begin{cases} 1+\alpha > 0 \\ \frac{\alpha^2+\alpha-1}{1+\alpha} > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2+\alpha-1 > 0$$

$$\underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{-1.61} < \alpha < \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{0.62}$$

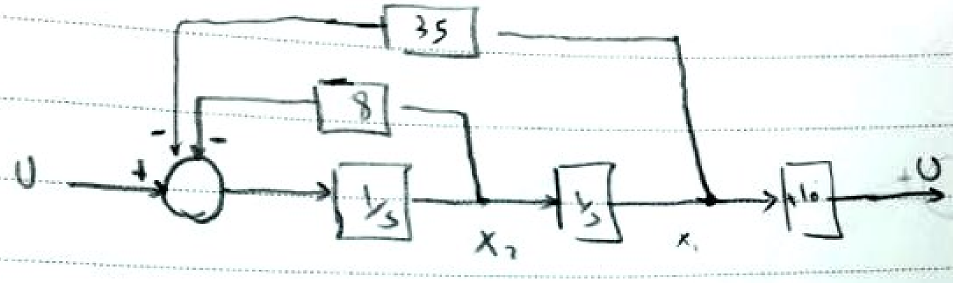
$\Rightarrow \boxed{-1 < \alpha < 0.62}$

ج) چنین α وجود ندارد با توجه به دو شرط به دست آمده

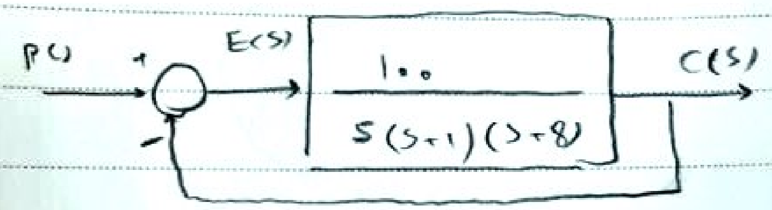
از معادلات حالت داریم

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -35 & -8 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} +10 & 0 \end{pmatrix} x + 0 \cdot u$$



ب)

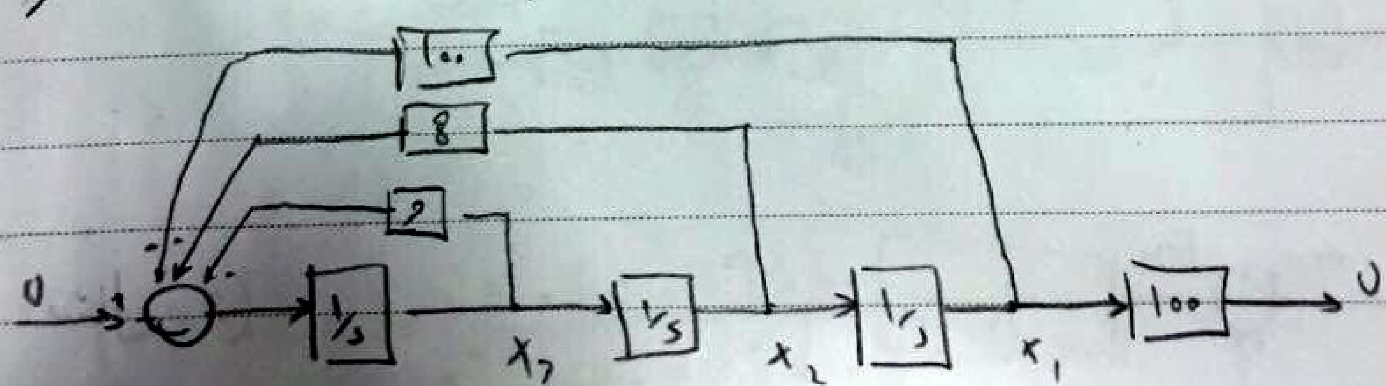


$$\rightarrow H(s) = \frac{\dfrac{100}{s^3+9s^2+8s}}{1+\dfrac{100}{s^3+9s^2+8s}} = \frac{100}{s^3+9s^2+8s+100}$$

معادلات حالت داریم

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -100 & -8 & -9 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} +100 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + 0 \cdot u$$



Subject:
Date

مثال ۹) پس متغیرهای حالت را بصورت زیر تعریف میکنیم

$$z_1 = y_1 \quad , \quad z_2 = y_2 \quad , \quad z_3 = \dot{y}_1 \quad , \quad z_4 = \dot{y}_2$$

برای معادلات حرکت جسم داریم

$$m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g + K i^2 \left(\frac{1}{y_2 - y_1}\right)^2 - B\dot{y}_1 - \frac{K i^2}{y_1^2}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g - B\dot{y}_2 - K i^2 \frac{1}{(y_2 - y_1)^2}$$

پس برای معادلات حالت داریم

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = z_4 \\ \dot{z}_3 = g + \dfrac{K i^2}{m_1}\left(\dfrac{1}{z_2 - z_1}\right)^2 - \dfrac{B}{m_1} z_3 - \dfrac{K i^2}{m_1 z_1^2} \\ \dot{z}_4 = g - \dfrac{K i^2}{m_2}\left(\dfrac{1}{z_2 - z_1}\right)^2 - \dfrac{B}{m_2} z_4 \end{cases}$$

$$\frac{-2i^2}{(z_1 - z_2)^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = z_4 \\ \dot{z}_3 = g + i^2/(z_2 - z_1)^2 - \dfrac{z_3}{10} - \dfrac{i^2}{z_1^2} \quad (1) \\ \dot{z}_4 = g - i^2/(z_2 - z_1)^2 - \dfrac{z_4}{10} \quad (2) \end{cases}$$

حال برای مقادیر اولیه z_1 تا z_4 داریم

چون در حال تعادل بوده

$$z_{4_0} = z_{3_0} = 0 \quad , \quad z_{1_0} = 1$$

حال داریم Z_0 با استفاده از ①، ② داریم

$$\begin{cases} \dfrac{i^2}{(z_2 - z_1)^2} = g \\ 2g = i^2 \end{cases} \Rightarrow (z_2 - z_1)^2 = 2 \Rightarrow z_2 = 1+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{i^2}{z_{20} - z_{10}} = g, \quad i_0^2 = 2g \Rightarrow i_0 = 8$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_1}{\partial z_3} & \frac{\partial f_1}{\partial z_4} \\ & & & \\ \frac{\partial f_4}{\partial z_4} & & & \frac{\partial f_4}{\partial z_4} \end{pmatrix}\right|$$ در نقطه تعادل

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4g(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}) & \frac{-g}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{10} & 0 \\ \frac{-g}{\sqrt{2}} & \frac{g}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z_1} = -\frac{2i^2}{(z_1 - z_2)^3} + \frac{2i^2}{z_1^3} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)4g$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z_2} = \frac{-2i^2}{(z_2 - z_1)^3} = -\frac{g}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial i} = \frac{2i}{\sqrt{2}} - 2i = -i = -8$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial i} = -i = -8 \qquad \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \dot{Z} = A \Delta Z + B \cdot \Delta u$$

$$\dot{y} - \dot{y}_0 = z_4 - z_{40} \Rightarrow \Delta y = (0 \; 0 \; 0 \; 1)\Delta Z$$

«باسمه تعالی»

صاحب‌زاده - 92100053 - تمرین سری ۳ کنترل خطی دکتر موحدی

سؤال ۱)

A. $s^2 + 5s + 2$

بدون تغییر علامت در ستون چپ پس پایدار

s^2 :	1		2
s :	5	0	0
s^0 :	2	0	0

B. $s^3 + 4s^2 + 8s + 4$

3 ریشه سمت چپ $\Rightarrow$ پایدار

s^3 :	1		8
s^2 :	4	0	4
s^1 :	7	0	0
s^0 :	4	0	0

C. $s^3 + 2s^2 - 6s + 20$

۲ ریشه سمت راست ، ۱ ریشه سمت چپ $\Rightarrow$ ناپایدار

s^3 :	1		-6
s^2 :	2	0	20
s^1 :	-16	1	0
s^0 :	20	1	

D. $s^4 + s^3 + 2s^2 + 12s + 10$

s^4:	1	2	10
s^3:	1	12	0
s^2:	-10	10	0
s^1:	-11	0	0
s^0:	10	0	0

دو ریشه سمت راست، دو ریشه سمت چپ

⇐ ناپایدار

E. $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + K$

s^4:	1	3	K
s^3:	1	2	0
s^2:	1	K	0
s^1:	$2-K$	0	0
s^0:	K	0	0

شرط پایداری $\begin{cases} 2-K>0 \\ K>0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0<K<2}$

F. $s^5 + s^4 + 2s^3 + s + 6$

s^5:	1	2	1
s^4:	1	0	6
s^3:	2	-5	0
s^2:	$\frac{5}{2}$	$\cancel{6}$ 12	0
s^1:	$-\frac{49}{5}$	0	0
s^0:	12	0	0

دو ریشه سمت راست و ۳ ریشه سمت چپ

⇐ ناپایدار است

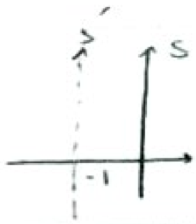
G. $s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + K$

s^5:	1	2	1
s^4:	1	1	K
s^3:	1	1 - K	0
s^2:	K	K	0
s^1:	-K	0	0
s^0:	K	0	0

برای پایداری $\begin{cases} K>0 \\ -K>0 \end{cases} \Rightarrow$ ✗

پس سیستم به ازای هر K ناپایدار است

مثال 2) الف) محور s' را انطباق بر تعریف می‌کنیم



$$\Rightarrow (s'-1)^4 + 10(s'-1)^3 + 36(s'-1)^2 + 70(s'-1) + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (s'^2-2s'+1)(s'^2-2s'+1) + 10(s'^3-3s'^2+3s'-1) + 36(s'^2-2s'+1) + 70(s'-1) + 75 = 0$$

$s'^4 + 4s'^2 + 1 - 4s'^3 + 2s'^2 - 4s'$

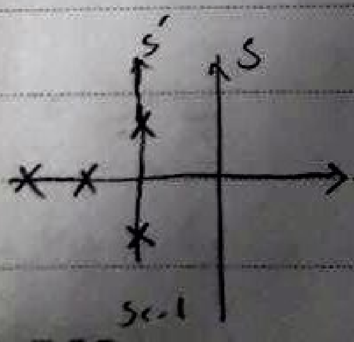
$s'^4 - 4s'^3 + 6s'^2 - 4s' + 1$

$$\Rightarrow s'^4 + 6s'^3 + 12s'^2 + 24s' + 32$$

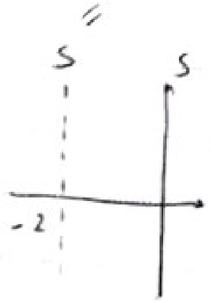
s'^4:	1	12	32
s'^3:	6	24	0
s'^2:	$\cancel{8}$ 1	$\cancel{32}$ 4	0
s'^1:	$\cancel{0}$ 2	0	0
s'^0:	4	0	0

$s'^2 + 4 = 0 \Rightarrow s' = \pm 2j$

پس دو ریشه روی محور s' دارد و 2 ریشه در سمت چپ آن



پس ریشه با بزرگتری ندارد



ب) محور ″s را مطابق شکل تعریف می‌کنیم

بجای ″s داریم

$$\rightarrow (s''-2)^4 + 10(s''-2)^3 + 36(s''-2)^2 + 70(s''-2) + 75 = 0$$

$$(s''^4 + 16s''^2 + 16 - 8s''^3 + 8s''^2 - 32s'') + 10(s''^3 - 6s''^2 + 12s'' - 8) + 36(s''^2 - 4s'' + 4)$$
$$+ 70(s''-2) + 75 = 0$$

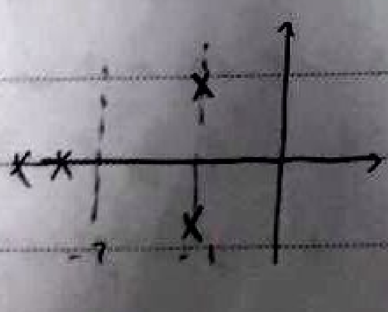
$$\Rightarrow s''^4 + 2s''^3 + 0s''^2 + 14s'' + 15 = 0$$

s''^4 :	1	0	15
s''^3 :	2	14	0
s''^2 :	-7	15	0
s''^1 :	$\frac{128}{7}$	0	0
s''^0 :	15	0	0

پس ۲ ریشه سمت راست محور ″s دارد

پس 2 ریشه با بخش حقیقی بزرگتر از 2- دارد

ج) با توجه به نتایج الف و ب نتیجه می‌گیریم، آرایش قطب‌ها به صورت زیر بوده است

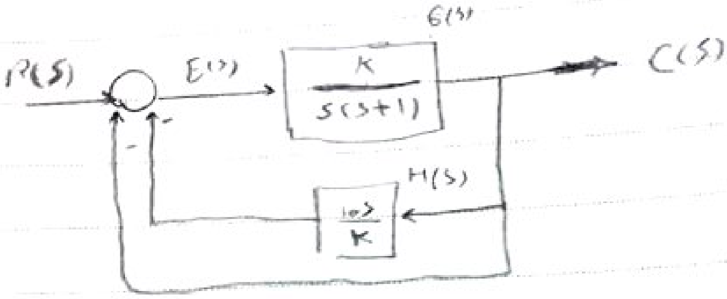


پس ریشه‌ای بین 1- و 2- وجود ندارد

PAPCO

Subject:
Date

مثال 3)



$\rightarrow E(s) = R(s) - H(s)C(s) - C(s) \Rightarrow E(s) = R(s) - (1+H(s))C(s)$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}}{1+\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}} = \frac{G(s)}{1+(1+H(s))G(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+(1+H(s))G(s)} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim s E(s)$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{100s}{s^2} \frac{1}{\left(1+\left(1+\frac{10s}{K}\right)\left(\frac{K}{s(s+1)}\right)\right)} = \lim_{s\to 0} \frac{100}{s} \frac{1}{\left(1+\frac{K+10s}{s(s+1)}\right)}$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{100}{s+\frac{K+10s}{s+1}} = \frac{100}{K} = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 10^4}$$

مثال 4) الف)

$$sE(s) = s\underset{1/s}{R(s)} \frac{1}{1+\frac{s+\alpha}{s^3+(1+\alpha)s^2+(\alpha-1)s+(1-\alpha)}}$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} \left(\frac{s^3+(1+\alpha)s^2+(\alpha-1)s+1-\alpha}{s^3+(1+\alpha)s^2+\alpha s+1}\right) = 1-\alpha$$

PAPCO