

چهارشنبه ۱۴ آذر میان ترم است

دولن یابی

t	۰	۶۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰	۳۰۰
v	۰	۰/۰۸۲۴	۰/۲۷۴۷	۰/۶۵۰۲	۱/۳۸۵۱	۲/۲۲۲۹

دولن یابی خطی

فرض کنید  $f(x_i)$  و  $f(x_{i+1})$  نقطه تابع در نقاط  $x_i$  و  $x_{i+1}$  باشد، تابع خطی  $P(x)$  که نمودار آن از نقاط  $(x_i, f(x_i))$  و  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  می گذرد به صورت زیر

است:

$$P(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})$$

اثبات: شیب خط بین نقطه را محاسب می کنیم و در فرمول خط قرار می دهیم (تقریب)

$$t = 140 \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x_i) = f(x_i) \\ P(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{array} \right.$$

$$P(140) = \frac{140 - 180}{120 - 180} (0/2747) +$$

$$\frac{(140 - 120)}{(180 - 120)} (0/6502) = 0/3991$$

$$P(140) \approx f(140)$$

فصل یابی چندجمله‌ای

فرض کنید  $n+1$  نقطه متمایز  $x_0, \dots, x_n$  در اختیار داشته باشیم

هدف: نقطه تابع  $f$  را در نقطه  $x_i \neq x$  به دست بیاوریم:  $i=0, \dots, n$

$x_i$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

برای این منظور چندجمله‌ای  $P(x)$  را طوری ایجاد می‌کنیم که  $P(x_i) = f(x_i)$  و

$$P(x) \approx f(x) \quad x \neq x_i$$

فصل ۲

قضیه وجود یکتایی:

فرض کنید که نقاط  $(x_i, f(x_i))$   $i=0, \dots, n$  را داشته باشیم

اگر فرضی باشد آنگاه یک و تنها یک چندجمله‌ای  $P(x)$  حداکثر درجه  $n$

$$\textcircled{*} \quad P(x_i) = f(x_i) \quad \text{به طوری که} \quad i=0, \dots, n$$

✓ چندجمله‌ای  $P(x)$  تابع  $f(x)$  را در نقاط  $x_i$  و  $i=0, \dots, n$



در صورتی که یابی می‌کنیم که شرط  $\oplus$  برقرار باشد

خبرنگارهای درون باب لاغرتر

ملاحظه کنید که یک خبرنگار از درجه  $n$  دقیقاً به صورت زیر وجود دارد.

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \rightarrow P(x) = \sum_{i=1}^n l_i(x) f(x_i)$$

$$i=0, 1, \dots, n \rightarrow l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1 \quad (94, 17, 12) \quad \text{عربی تحویل:}$$

مثال: مقادیر تابع  $f$  به صورت جدول زیر داده شده است

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x$	1	2	4	8
$f(x)$	1	3	7	11

(a) خبرنگارهای درون باب این تابع را بیابید

(b) به کمک آن  $f(x)$  را محاسبه کنید.

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - 2)(x - 4)(x - 8)}{(1 - 2)(1 - 4)(1 - 8)} = \frac{-1}{21} \frac{(x - 2)(x - 4)(x - 8)}{(x - 1)}$$

$$l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^r \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-11)}{(2-1)(2-4)(2-11)} = \frac{1}{12} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-11)}$$

$$l_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^r \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-11)}{(4-1)(4-2)(4-11)} = \frac{-1}{24} \frac{(x-1)(x-2)(x-11)}{(x-11)}$$

$$l_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^r \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{1}{144} (x-1)(x-2)(x-4)$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) = l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) +$$

$$l_2(x) f(x_2) + l_3(x) f(x_3)$$

نقطه خطای دوم یابی لاگرانژ

اگر چند نقطه ای  $P(x)$  تابع  $f \in C^{n+1}[a, b]$  در نقاط  $x_i \in [a, b]$  دوم یابی

کنه آن به خطای دوم یابی عبارت است از

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c(x))$$

که  $c(x)$  نقطه ای است در بازه  $x, x_i$



مسال (۱) می خواهم  $\rho(x)$  که مقادیر  $f(x)$  را مطابق جدول زیر درون بازه  $[0, 1]$  تعریف کند.

$x$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1

$$f(x) = \sin \pi x$$

اورسم:

$$\rho(x) = L_0(x) f(0) + L_1(x) f\left(\frac{1}{4}\right) + L_2(x) f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{4} - 0)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2})} = -9x(2x - 1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{4})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})} = x(2x - 1)$$

$$\leadsto \rho(x) = -9x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$f(x) = \sin \pi x$$

$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$\leadsto |E(x)| \leq \frac{\pi^3}{4} |(x)(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})|$$

$$\leq \frac{\pi^3}{4} \max |x(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})|$$

$$x \in [0, 1]$$

$$g(x) = x(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})$$

$$\leadsto \text{Max} = -1/9 \sqrt{3} < 0.1$$

الگوریتم الگوریتم

$$x_i, i=0, 1, \dots, n$$

$$z \rightarrow f(z) \subseteq p(z), f(x_i) = f_i$$

input  $z, (x_i, f(x_i)) \quad i=0, 1, \dots, n$

$$p = 0$$

for  $i = 1:n$  do

$$c = f_i$$

for  $j = 1:n \ (j \neq i)$  do

$$c = c * \frac{z - x_j}{x_i - x_j}$$

end j

$$p = p + c$$

end i

تمرین تحویلی (۹۴/۷/۲۵)

برای تابع جدول زیر محاسبه کنید  $f(x)$

حال نقطه  $(0, 0)$  را به جدول اضافه کنید

و خط مجله این جدول را بکشید.