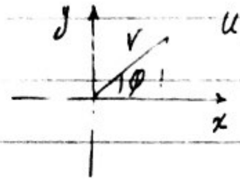
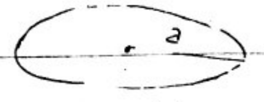
$\frac{1}{2}$ ریاضی مهندسی ۱۰, ۱۲,

تاریخ امتحان میان‌ترم: ۹٤,۱,۲۷ صبح ساعت؟

$u(x, y, t)$

$u(r, \varphi, t)$





$u(a, t) = 0 \quad B.C$

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

معادله‌ی موج دوبعدی (مکان) در دستگاه قطبی (یا استوانه‌ای) $u_{tt} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}_{0} \right)$

$$u_{tt} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$u(r = a, t) = 0 \quad B.C.$

شکل اولیه $u(r, 0) = f(r)$

سرعت اولیه $u_t(r, 0) = g(r)$

$u(r, t) = ?$

$u(r, t) = W(r) G(t)$

$$\underbrace{\frac{G''}{c^2 G}}_{\text{فقط تابع } t} = \underbrace{\frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r} W' \right)}_{\text{فقط تابع } r} = -k^2$$?مثبت ?منفی

$G'' + c^2 k^2 G = 0$ ✓

$W'' + \frac{1}{r} W' + k^2 W = 0$

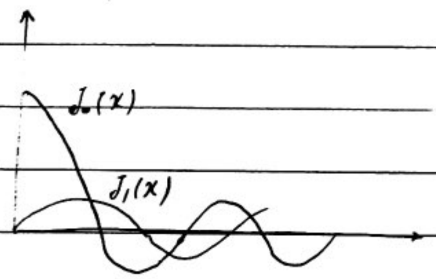
$$r^2 w'' + r w' + k^2 r^2 w = 0$$

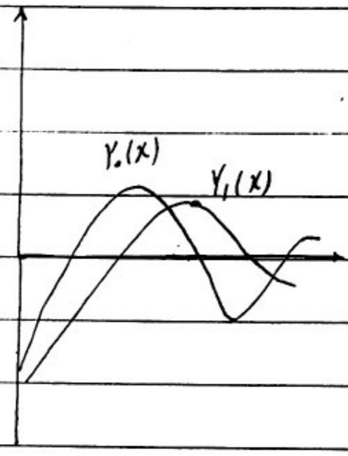
$$r^2 w'' + r w' + (k^2 r^2 - \nu^2) w = 0$$ معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه ی p

$$\longrightarrow w(r) = C_1 J_p(kr) + C_2 Y_p(kr)$$

نوع اول — نوع دوم

مرتبه ی ν — مرتبه ی ν





توابع نیومن

$$\nu = 0 \longrightarrow w(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr)$$

Modified Besel : $w(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)$

توابع بسل پیراسته نوع اول از مرتبه ی صفر — توابع بسل پیراسته نوع دوم از مرتبه ی صفر

$$w(r) = C_1 J_0(kr)$$

$$u(a,t) = 0 \qquad u = wG$$

$$w(a)G(t) = 0 \qquad w(a) = 0 \rightarrow J_0(ka) = 0$$

$J_0(x)=0$

α_{0n} امین ریشه‌ی تابع
بسل نوع اول از مرتبه‌ی
صفر

$J_0(Ka)=0 \longrightarrow Ka=\alpha_{0m}$ Ka یکی از ریشه‌های تابع J_0 باید
باشد $m=1,2,3,\dots$

$k_m = \dfrac{\alpha_{0m}}{a}$ مقادیر ویژه :

$$\lambda_m = C k_m = \frac{C\alpha_{0m}}{a}$$

$$G'' + \lambda_{0m}^2 G = 0$$

$$G_m(t) = A_m \cos\lambda_{0m} t + B_m \sin\lambda_{0m} t$$

$$u_m(r,t) = W_m(r)\, G_m(t)$$

$$u_m = (A_m \cos\lambda_{0m} t + B_m \sin\lambda_{0m} t)\, J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right)$$

$$t=0 \longrightarrow A_m J_0\left(\frac{\alpha_{0m} r}{a}\right) \overset{?}{=} f(r)$$

$$\int_0^a r\, J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right) J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a} r\right) dr = 0$$

$m \neq n$

تابع وزن (r)

$J_\gamma(x)$ ریشه‌ها $\longrightarrow \alpha_{\gamma m}$

درحالت کلی $\int_0^a r J_\gamma\left(\frac{\alpha_{\gamma m}}{a} r\right) J_\gamma\left(\frac{\alpha_{\gamma n}}{a} r\right) dr = 0$

$$\int_0^a r J_0^2\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right) dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_{0m})$$

درحالت کلی : $\int_0^a r J_\gamma^2\left(\frac{\alpha_{\gamma m}}{a} r\right) dr = \frac{a^2}{2} J_{\gamma+1}^2\left(\frac{\alpha_{\gamma m}}{a} a\right) = \frac{a^2}{2} J_{\gamma+1}^2(\alpha_{\gamma m})$

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos\lambda_m t + B_m \sin\lambda_m t\right) J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right)$$

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right)$$

$$\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a} r\right) dr = \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} r A_m J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right) J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right) dr$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^a r J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right) J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right) dr$$

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_{0n})} \int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a} r\right) dr$$

$$B_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_{0n}) \lambda_n} \int_0^a r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_{0m}}{a} r\right) dr$$

استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای :

مثال :

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$w(x,0)=0$

$w(0,t)=t \quad t\geq 0 \qquad \mathcal{L}(w)=\bar{w}$

$$\frac{\partial \bar{w}(x,S)}{\partial x} + x\{S\bar{w} - w(x,0)\} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + xS\bar{w} = 0$$

$$\bar{w}(x,S) = C(S)\, e^{-Sx^2/2}$$

$$w(0,t)=t \;\longrightarrow\; \bar{w}(0,S) = \frac{1}{S^2}$$

$$\bar{w}(0,S) = C(S) = \frac{1}{S^2} \qquad \bar{w}(x,S) = \frac{1}{S^2}e^{-\frac{Sx^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$w(x,t) = \left(t-\frac{x^2}{2}\right) \overset{\text{پله}}{u}\left(t-\frac{x^2}{2}\right) = \begin{cases} 0 & t<\frac{x^2}{2} \\ t-\frac{x^2}{2} & t>\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$f(t)$

$0 \longrightarrow \infty$

$w(0,t) = f(t) \qquad t \geq 0$

$w(x,0) = 0$ شکل اولیه

$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0$ سرعت اولیه

$w_{tt} = c^2 w_{xx}$

$\downarrow \mathcal{L}$

$s^2 \tilde{w} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}$

$\tilde{w}(x,S) = \underline{A(S)\, e^{\frac{Sx}{c}}} + B(S)\, e^{-\frac{Sx}{c}}$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

مولد جواب
غیرعملی

$\tilde{w}(0,S) = F(S) \Longrightarrow B(S) = F(S)$

$\tilde{w}(x,S) = F(S)\, e^{-\frac{Sx}{c}}$

از تابع پله

$w(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{w}(x,S)\} = f(t - x/c)\, u(t - x/c)$