

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{a}_n ds \quad \oint \vec{J} \cdot \hat{a}_n ds = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\nabla \psi$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

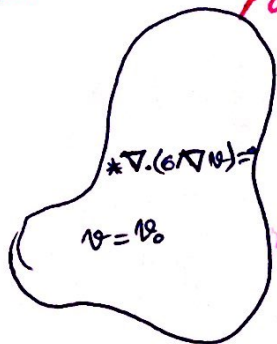
طبق معادلات

$$*\nabla \cdot (\sigma \nabla \psi) = 0$$

$$** -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \psi) = \rho_f$$

اگر ثابت باشد باید در یک رسانای مجزا داریم :

$$D = \epsilon \cdot \hat{a}_n$$



اگر $\psi = \psi_0$ آنگاه در معادله $*$ صفر می‌کند \Rightarrow

پس طبق یکسانی تنها جواب است و چون خارج را معادله کامل در نظر گرفته‌ایم پس هیچ جریانی به آن نمی‌رود و چون

در سطح مؤلفه عمودی ψ باید پیوسته باشد پس در سطح رسانای مؤلفه عمودی ψ صفر است!

چون $\psi = \psi_0$ ثابت است میدان درون را نابرابر صفر خواهند شد. همچنین طبق معادله

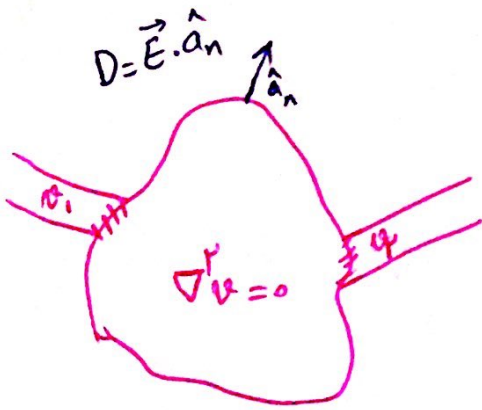
$**$ چون $\nabla \psi = 0$ است پس $\rho_f = 0$ است و داخل را هیچ بار آزاد نداریم.

\Leftarrow عبارت $\rho_f = 0$ زمانی رخ می‌دهد که هم σ و هم ϵ ثابت باشند. در این صورت چون

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

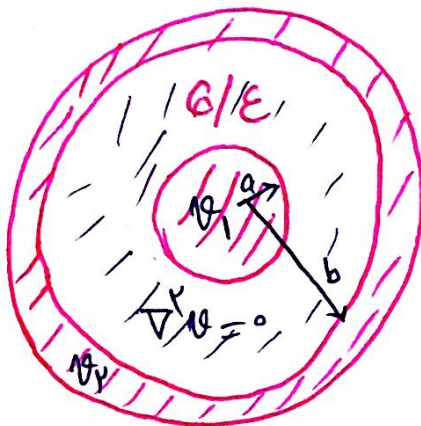
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_f = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_f = 0$$

حال مثال قبل را به صورت زیر تعمیم دهیم :



معادلات محان قبلی است ولی شرایط مرزی
فوق می‌کند. اگر $V_1 = V_2$ باشد کل پتانسیل
کره V_1 می‌شود.

مثال :



در محیط وسطی خواهیم پتانسیل را بدست آوردیم.
چون تقارن کروی داریم طبق آنچه قبلاً حل کردیم :

$$V(R) = \frac{A}{R} + B$$

$$A = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

(حال شرایط مرزی :

$$E(R) = \frac{A}{R^2}$$

$$\Rightarrow J_R = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \frac{\sigma}{R^2}$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \times 4\pi\sigma = \oint J \cdot ds$$

$$\Rightarrow R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{4\pi\sigma} \Rightarrow \text{مقاومت}$$

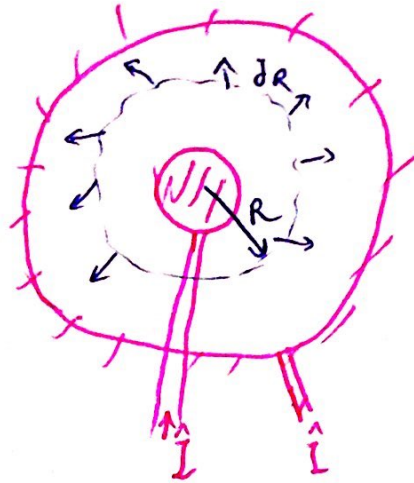
می خواهیم سازه را به طریق دیگری حل کنیم.

طبق معادلات داریم

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f \quad (2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3)$$



یک سطح گاوسی در نظر بگیریم.
→ ادعای کنیم روی آن تنها

تدریج شعاعی است چون اگر شعاعی داشته باشیم طبق رابطه $\vec{J} = \epsilon \vec{E}$ و رابطه ۳

تناقض وجودی آید.

→ اگر ϵ تابعی از R باشد (فقط) باز هم ادعای کنیم شعاعی است زیرا اگر شعاعی نباشد یعنی مولفه شعاعی دارد در حالیکه روی سطح کروی $\vec{J} = \epsilon \vec{E}$ و ϵ روی سطح کروی ثابت است پس نمی تواند مولفه شعاعی داشته باشد.

طبق رابطه ۱

$$J_R \times 4\pi R^2 - I = 0 \Rightarrow J_R = \frac{I}{4\pi R^2}$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{I}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

برای کلی بودن حالت ϵ را تابعی از R فرض می کنیم.

$$\Delta \phi = \frac{I}{4\pi \epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

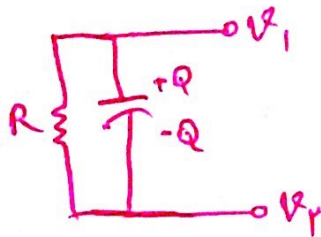
$$\Rightarrow R = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{4\pi \epsilon}$$

اگر ϵ ثابت باشد می دانیم $\Rightarrow \epsilon \nabla E = \rho_f \Rightarrow$

$$\rho_f = \frac{\epsilon I}{4\pi \epsilon a^2}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\epsilon}{6} I = \frac{\epsilon}{6R} V \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} V} \Rightarrow \text{ظرفیت خازن}$$

در این حالت شیب این است که یک خازن موازی با یک مقاومت داریم:



موازی به این دلیل که ولتاژ یکسان دارند.

می توان نشان داد در محط وسط بار آزاد نداریم زیرا (به شرط ثابت بودن ϵ ثابت بودن)

$$E_R = \frac{I}{4\pi\epsilon R^2} \Rightarrow D_R = \frac{I\epsilon}{4\pi\epsilon R^2} = \text{این تابع در مختصات کروی دور است}$$

برابر صفر است پس

$$\nabla \cdot D = 0 \Rightarrow \boxed{\oint_S D \cdot ds = 0 = Q_f}$$

اگر ϵ تابعی از R باشد دیگر $\nabla \cdot D \neq 0$ نمی شود. در حالی که بعد این شرایط را بررسی می کنیم.

$$P_s = \epsilon E_{\perp} \Rightarrow P_s = \frac{\epsilon I}{4\pi\epsilon a^2} \rightarrow \text{ویسکال کروی داخلی}$$