

باسمه تعالی

نام و نام خانوادگی: احسان عماد مروستی شماره دانشجویی: ۸۷۱۰۵۸۳۵ رشته: کامپیوتر

زیر گروه: C

دستیار آموزشی: آقای اسعد زاده

آزمایش شماره: ۶

عنوان آزمایش: حرکت پرتابی

هدف: بررسی حرکت پرتابی گلوله ی فلزی و بستگی برد و بیشینه ی ارتفاع به شرایط اولیه ی پرتاب

وسایل مورد نیاز: سیستم پرتاب کننده شامل تفنگ فنی سه حالته - صفحه ی تنظیم زاویه ی پرتاب - سنسور اندازه گیری سرعت - گلوله ی فلزی - میز فرود - خط کش مخصوص اندازه گیری ارتفاع - کاغذ کاربنی نشان دهنده ی مکان فرود - متر نواری

نظریه:

حرکت پرتابی یعنی حرکت یک جسم تحت میدان گرانش زمین در حالتی که یک مکان اولیه و یک زاویه ی اولیه داشته باشد:

که در آن  $R$  برد،  $H$  ارتفاع اوج و  $v_0$  سرعت اولیه ی پرتابه است. با صرف نظر کردن از مقاومت هوا می توان معادلات زیر را برای این نوع حرکت در نظر گرفت:

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{x} = v_0 \cos \phi$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \phi$$

$$x = v_0 t \cos \phi$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \phi + h_0$$

که در آن  $h_0$  ارتفاع اولیه ی پرتابه است. از این روابط می توان برد و ارتفاع اوج پرتابه را محاسبه کرد:

$$h = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \theta + h_0$$

$$R = V_0 \cos \theta \left( \frac{V_0 \sin \theta}{g} + \sqrt{\left( \frac{V_0 \sin \theta}{g} \right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \right)$$

اگر مقاومت هوا را به صورت  $F = -mv\gamma$  در نظر بگیریم و ارتفاع اولیه را صفر در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\phi}{g} - \gamma \frac{4v_0^3 \sin 2\phi \sin \phi}{3g^2} + \dots$$

## مراحل انجام آزمایش

تفنگ پرتاب از یک فنر تشکیل شده که می تواند گلوله ای را که پرتابه ی ما محسوب می شود با سه شدت اولیه کمینه، متوسط و بیشینه پرتاب کند. با استفاده از نقاله می توان زاویه ی اولیه پرتاب را تنظیم کرد. برای هر شدت ضربه، ارتفاع اوج و برد را به ازای زوایای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۰ و ۸۰ درجه اندازه می گیریم. ارتفاع اولیه ی پرتاب را هم به کمک خط کش ثبت می کنیم. هر آزمایش را ۳ بار انجام می دهیم. نحوه ی ثبت برد گلوله به این صورت است که گلوله روی یک کاغذ کاربنی فرود می آید و روی آن جا می اندازد و با استفاده از متر نواری می توان برد را اندازه گرفت. ارتفاع را هم با یک خط کش که هر سانتیمتر آن با یک رنگ رنگ شده و می توان با عبور گلوله از روبروی خط کش، ارتفاع اوج آن را با دقت یک سانتیمتر اندازه گرفت. در زیر بعضی از وسایل آزمایش آورده کشیده شده است:

## جداول

جدول ۱ - (ضربه ی تفنگ پرتاب کننده: بیشینه)

زاویه (درجه)	45	30	60	20	70	10	80
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	4.42	4.17	3.99	4.42	3.87	4.12	4.14
میانگین ارتفاع بیشینه (سانتیمتر)	89	55	107	37	124	29	141
میانگین برد (سانتیمتر)	245	200	188	209	134	143	85

$$h_0 = 25 \text{ cm}$$

جدول ۲ - (ضربه ی تفنگ پرتاب کننده: متوسط)

زاویه (درجه)	45	30	60	20	70	10	80
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	3.36	3.66	3.22	3.12	3.22	2.83	3.27
میانگین ارتفاع بیشینه (سانتیمتر)	59	44	78	34	87	31	93
میانگین برد (سانتیمتر)	163	142	126	122	102	84	50

$$h_0 = 26 \text{ cm}$$

جدول ۳ - (ضربه ی تفنگ پرتاب کننده: کمینه)

زاویه (درجه)	45	30	60	20	70	10	80
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	2.31	2.13	2.26	2.16	2.29	2.18	2.26
میانگین ارتفاع بیشینه (سانتیمتر)	45	36	54	34	53	32	64
میانگین برد (سانتیمتر)	83	79	70	68	55	60	29

$$h_0 = 25 \text{ cm}$$

## خواسته ها

### خواسته ی ۱

می دانیم برد و ارتفاع بیشینه از روابط زیر بدست می آیند:

$$h = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \theta$$

$$R = V_0 \cos \theta \left( \frac{V_0 \sin \theta}{g} + \sqrt{\left( \frac{V_0 \sin \theta}{g} \right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \right)$$

با توجه به روابط بالا مقادیر برد و ارتفاع بیشینه با توجه به زاویه و سرعت اولیه در جداول زیر آورده شده است:

جدول ۴ - نتایج محاسبه شده برای ضربه ی بیشینه

زاویه (درجه)	45	30	60	20	70	10	80
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	4.42	4.17	3.99	4.42	3.87	4.12	4.14
ارتفاع بیشینه (سانتیمتر)	75	47	86	37	92	28	110
برد (سانتیمتر)	222	189	154	178	107	126	64

جدول ۵ - نتایج محاسبه شده برای ضربه ی متوسط

زاویه (درجه)	45	30	60	20	70	10	80
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	3.36	3.66	3.22	3.12	3.22	2.83	3.27
ارتفاع بیشینه (سانتیمتر)	54	42	65	31	72	26	78
برد (سانتیمتر)	137	153	105	107	76	80	41

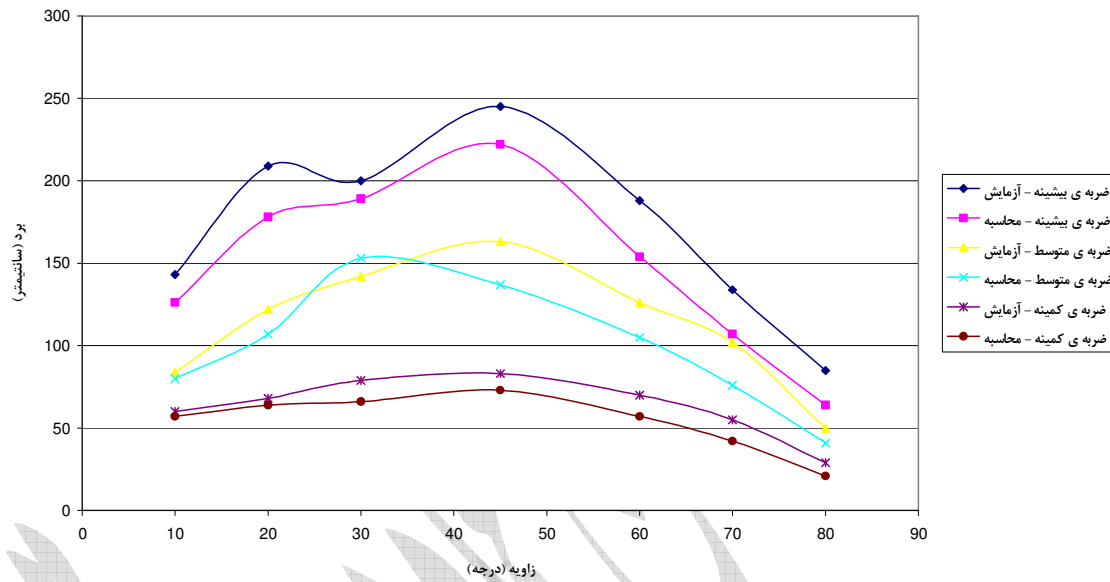
جدول ۶ - نتایج محاسبه شده برای ضربه ی کمینه

زاویه (درجه)	45	30	60	20	70	10	80
میانگین سرعت اولیه (متر بر ثانیه)	2.31	2.13	2.26	2.16	2.29	2.18	2.26
ارتفاع بیشینه (سانتیمتر)	39	31	44	28	49	26	50
برد (سانتیمتر)	73	66	57	64	42	57	21

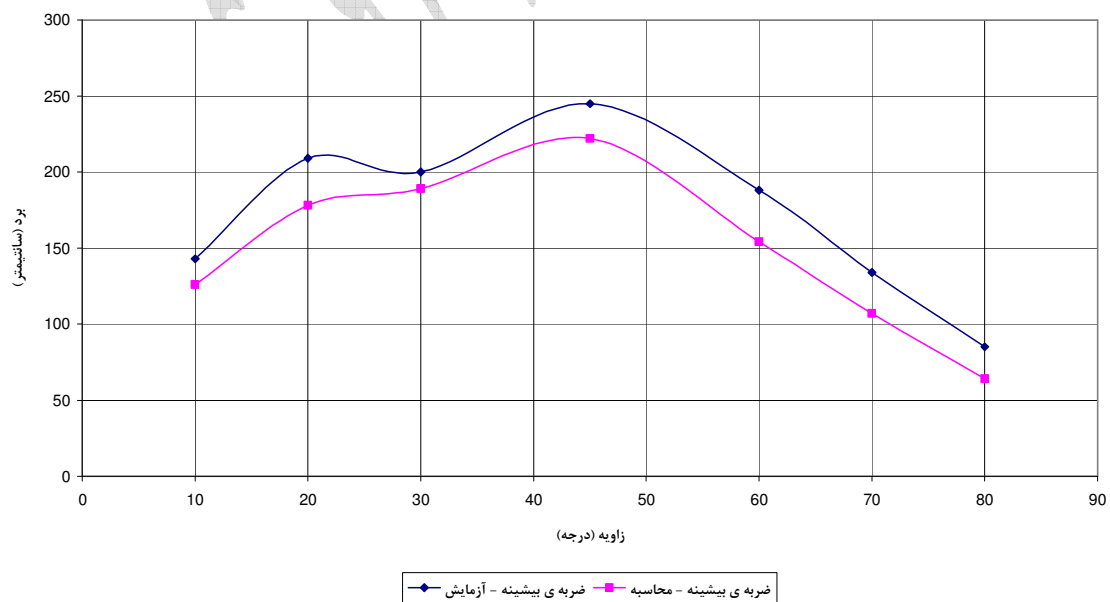
## خواسته ی ۲

نمودار مربوط به برد گلوله بر حسب زاویه ی پرتاب مربوط به جداول ۱ تا ۳:

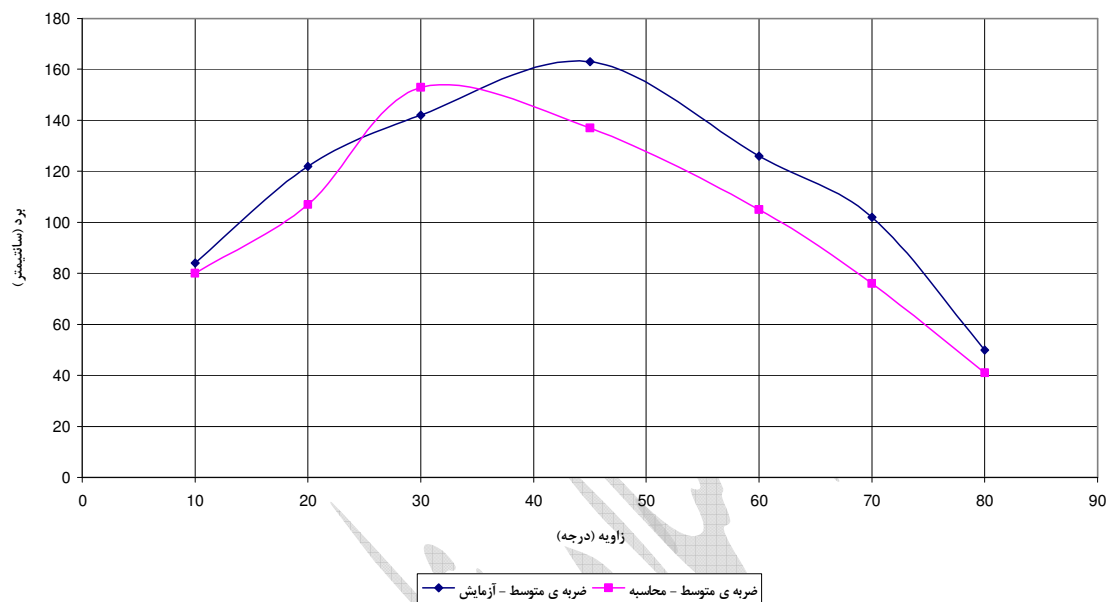
برد - زاویه ی پرتاب



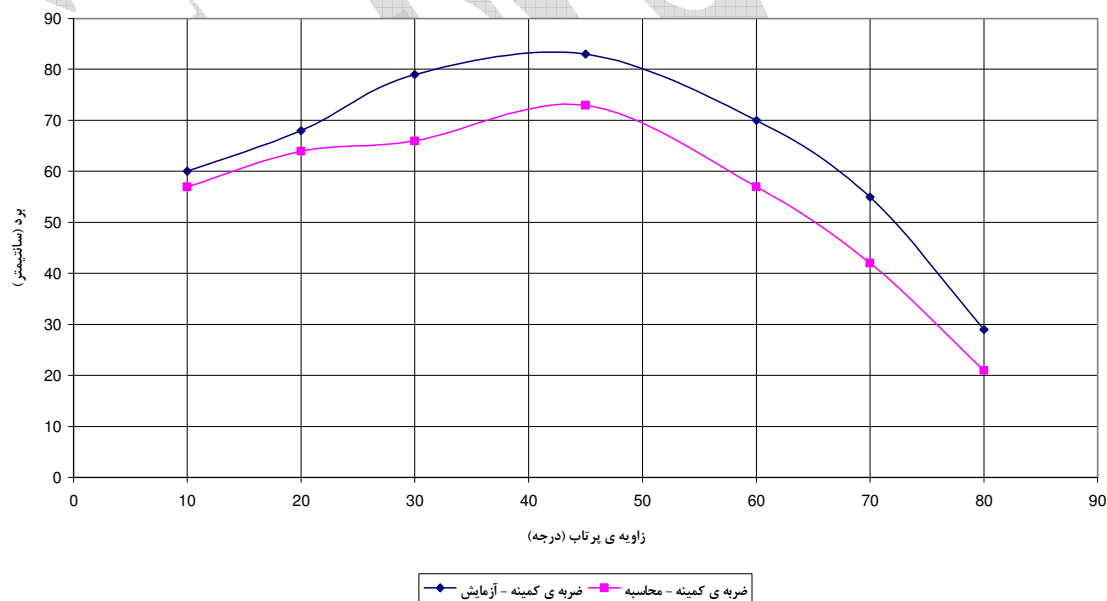
برد - زاویه ی پرتاب برای ضربه ی بیشینه



برد - زاویه ی پرتاب برای ضربه ی متوسط



برد - زاویه ی پرتاب برای ضربه ی کمینه



چون  $h_0$  کم است، می توان در نظر گرفت که شکل کلی نمودارها باید به صورت  $R \cong \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$  باشد که به

دلیل تقریباً یکسان بودن  $V_0$  برای هر کدام از جدول ها، می توان گفت که شکل خروجی باید یک سینوسی باشد که نزدیکیهای ۴۵ درجه برد ماکسیمم است (نزدیک ۴۵ درجه چون نمی توان برای حساب کردن زاویه ای که بیشترین برد را به ما می دهد از  $h_0$  صرف نظر کنیم، از  $h_0$  تنها برای تعیین شکل کلی نمودار صرف نظر کردیم). صفر نبودن  $h_0$  باعث می شود که برد برای زاویه های متمم برابر نباشد.

در ضمن به ازای یک زاویه ی پرتاب، مسلماً هم از نظر شهودی و هم با بررسی رابطه ی

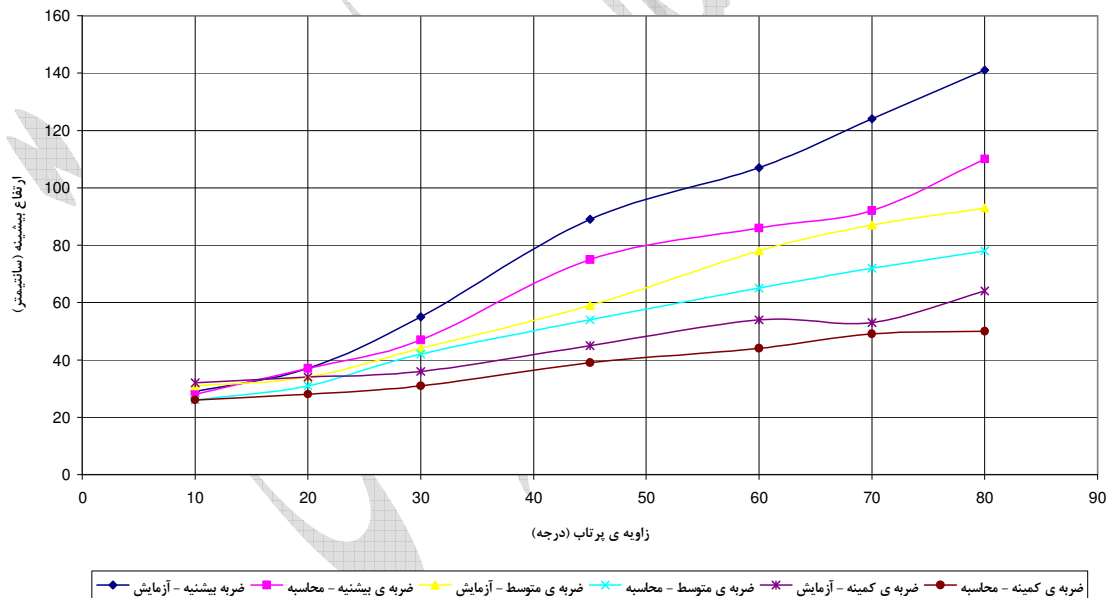
$$R(\varphi) = v_0 \cos \varphi \left( \frac{v_0 \sin \varphi}{g} + \sqrt{\left( \frac{v_0 \sin \varphi}{g} \right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \right)$$

می توان پیش بینی کرد که اگر ضربه را زیاد کنیم،

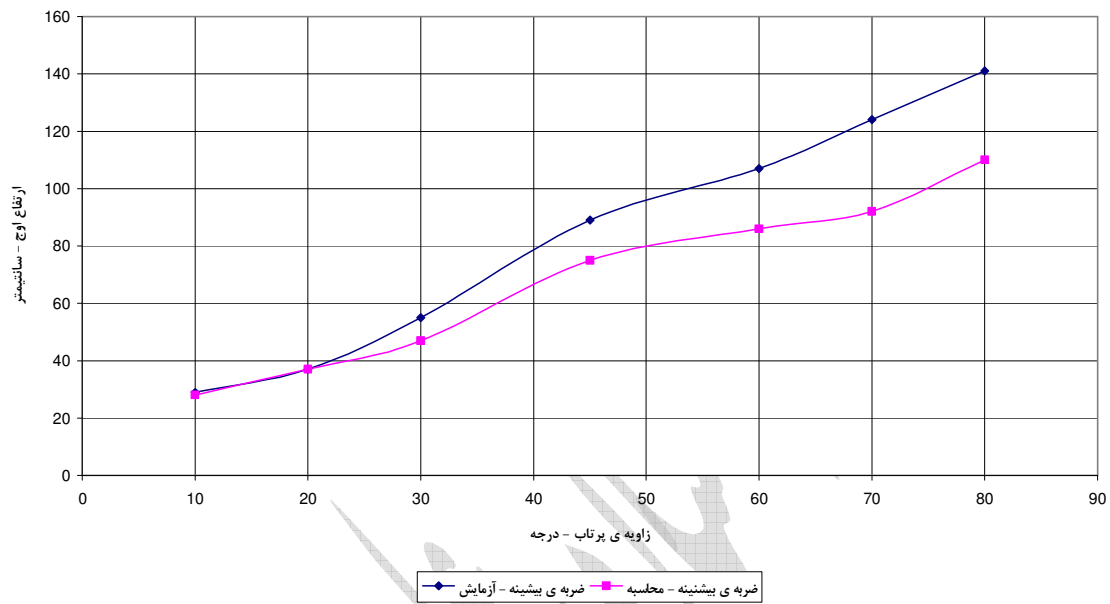
برد هم زیاد خواهد شد. نمودارها هم این مطلب را نشان می دهند: نمودارهای مربوط به ضربه ی بیشینه بالای نمودارهای مربوط به ضربه ی متوسط و آن هم بالای نمودارهای مربوط به ضربه ی کمینه است. خطای منحنی ها نسبت به حالت آزمایش شده ناشی از اصطکاک هوا، اصطکاک وسیله ی پرتاب کننده، یکسان نبودن ضربه برای همه ی حالات، و خطای وسایل اندازه گیری و خطای انسانی در تشخیص محل برخورد گلوله با زمین است.

## خواسته ی ۲

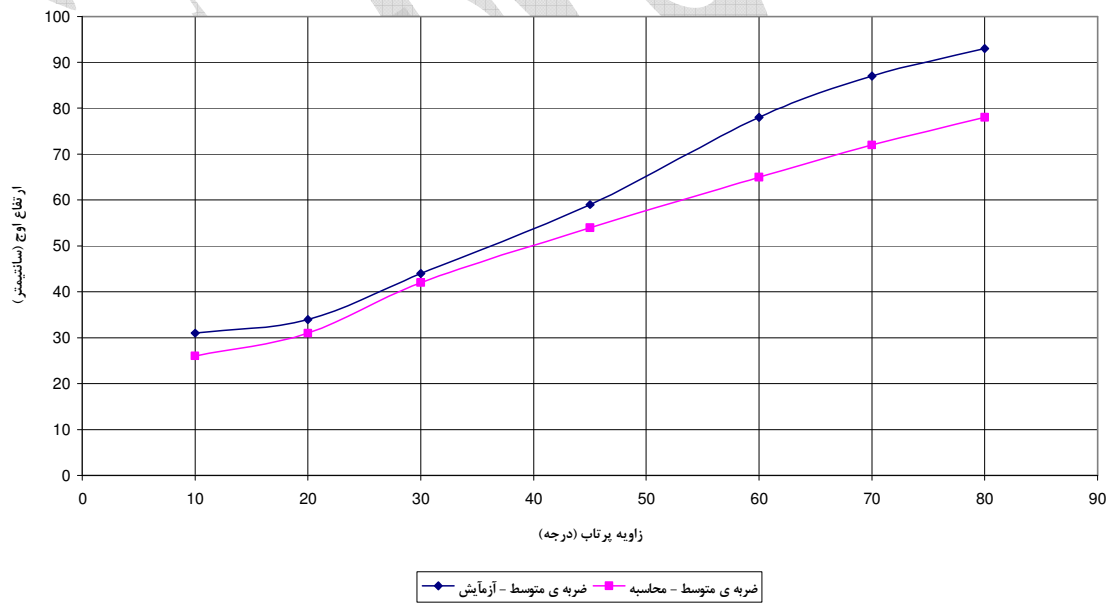
ارتفاع بیشینه - زاویه ی پرتاب



ارتفاع اوج - زاویه ی پرتاب برای ضربه ی بیشینه

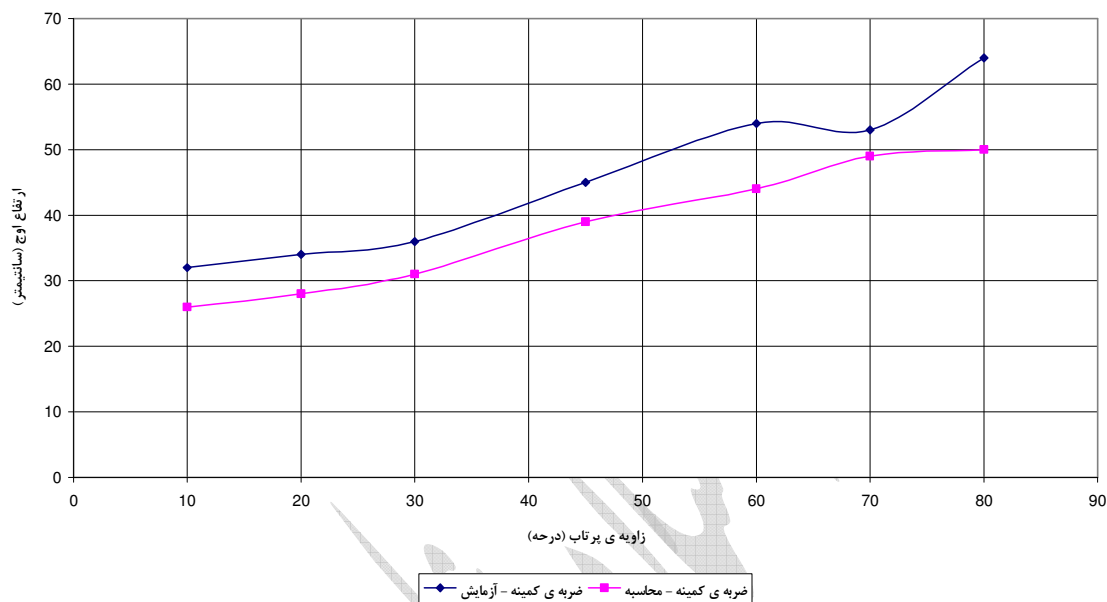


ارتفاع اوج - زاویه ی پرتاب برای ضربه ی متوسط





ارتفاع اوج - زاویه ی پرتاب برای ضربه ی کمینه



می دانیم ارتفاع اوج از رابطه ی  $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$  بدست می آید. در هر حالت چون  $v_0$  تقریباً ثابت است و سینوس هم در محدوده ی ۰ تا ۹۰ صعودی است، ارتفاع اوج هم باید صعودی باشد و در ۹۰ درجه به مقدار ماکسیمم خود برسد. از طرفی به ازای زاویه ی پرتاب های یکسان، با زیاد کردن ضربه ارتفاع اوج هم زیاد می شود که این مطلب هم در نمودار مشاهده می شود.

علت اختلاف و خطا در نمودارها، وجود اصطکاک هوا، اصطکاک وسیله ی پرتاب کننده، خطای ناشی از وسایل اندازه گیری و خطای انسانی در اندازه گیری ارتفاع اوج است.

### خواسته ی ۳

به دلیل اینکه نرم افزار EXCEL نمی تواند بهترین خط گذرنده را در حالت نمودار تمام لگاریتمی رسم نماید، نمودار لگاریتم برد بر حسب لگاریتم سرعت اولیه را رسم می کنیم و بهترین خط گذرنده از آن را در نظر می گیریم، داده های خام و تبدیل شده به لگاریتم به صورت زیر است:

زاویه ی پرتاب	20		45		70	
	$V_0$ (m/s)	R (m)	$V_0$ (m/s)	R (m)	$V_0$ (m/s)	R (m)
ضربه ی پیشینه	4.42	2.09	4.42	2.45	3.87	1.34
ضربه ی متوسط	3.12	1.22	3.36	1.63	3.22	1.02
ضربه ی کمینه	2.16	0.68	2.31	0.83	2.29	0.55

زاویه ی پرتاب	20		45		70	
	Log $V_0$	Log R	Log $V_0$	Log R	Log $V_0$	Log R

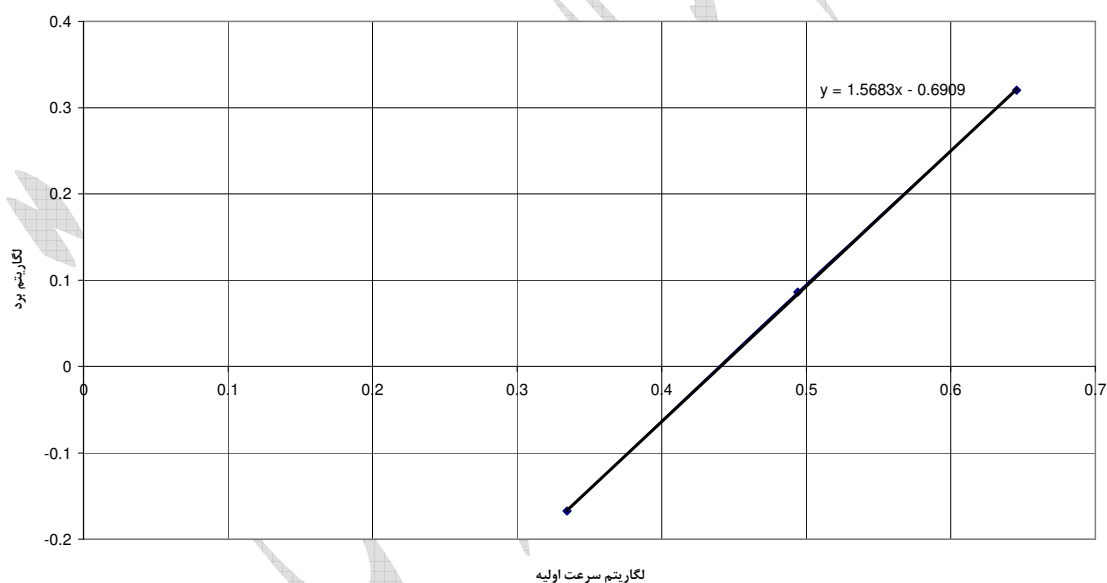
ضربه ی بیشینه	0.65	0.32	0.65	0.39	0.59	0.13
ضربه ی متوسط	0.49	0.09	0.53	0.21	0.51	0.01
ضربه ی کمینه	0.33	-0.2	0.36	-0.1	0.36	-0.3

با صرف نظر کردن از  $h_0$  داریم  $R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$  پس با کشیدن نمودار تمام لگاریتمی خواهیم داشت:

$$\log(R) = 2\log V_0 + \log\left(\frac{\sin 2\theta}{g}\right) \Rightarrow y = 2x + \log\left(\frac{\sin 2\theta}{g}\right)$$

پس کافی است عرض از مبدا بهترین خط گذرنده از نمودار را در نظر بگیریم و با توجه به زاویه ی پرتاب، مقدار  $g$  را محاسبه کنیم:

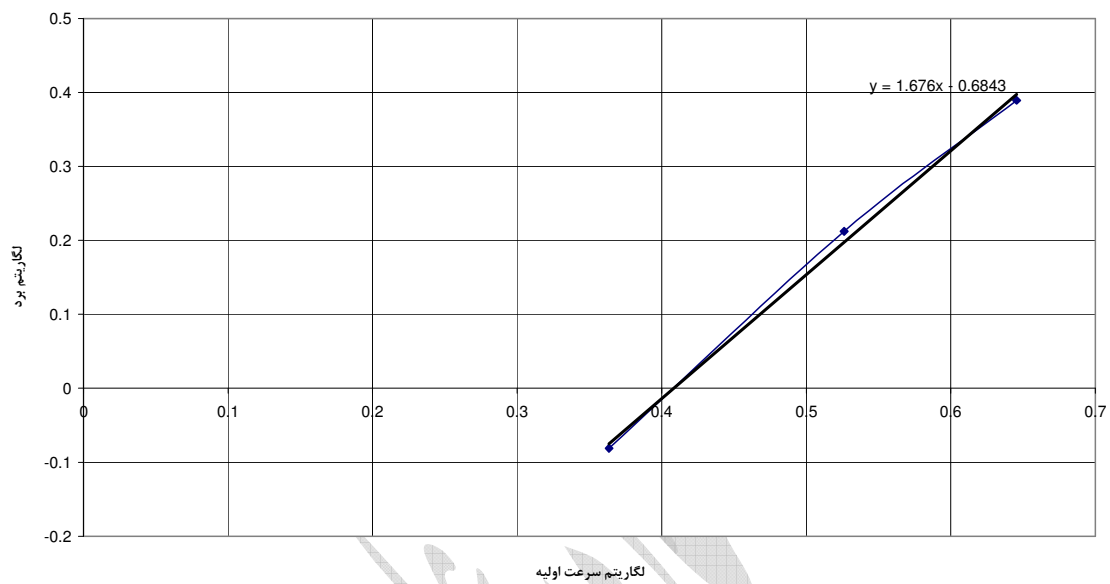
نمودار تمام لگاریتمی برد بر حسب زاویه ی پرتاب برای زاویه ی ۴۰ درجه



در این حالت:

$$\log\left(\frac{\sin 2\theta}{g}\right) = -0.69 \Rightarrow \frac{\sin(40)}{g} = 0.20 \Rightarrow g = 3.21 \frac{m}{s^2}$$

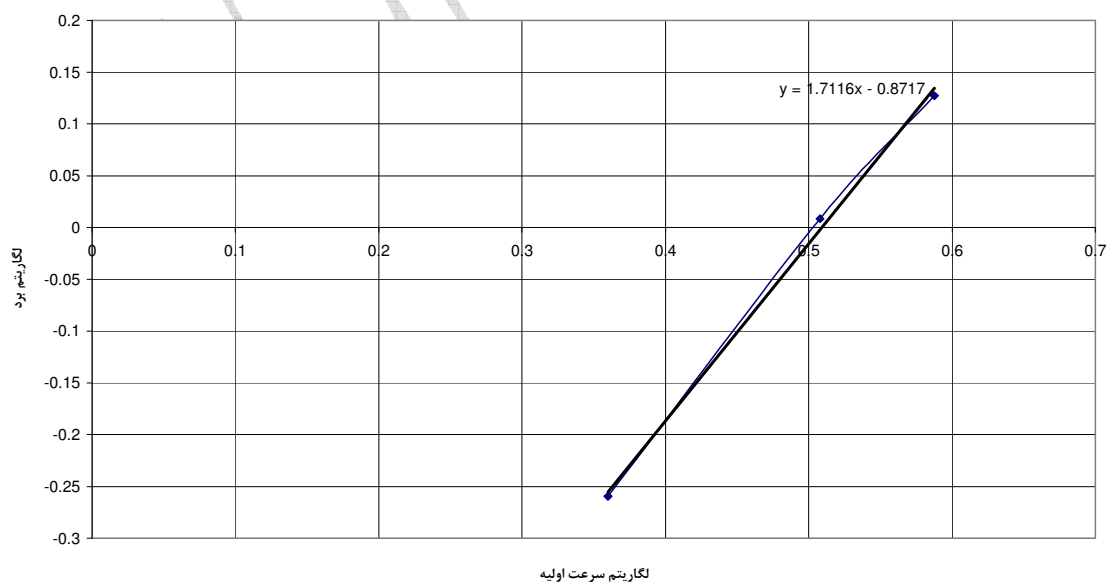
نمودار تمام لگاریتمی برد برحسب زاویه ی پرتاب برای زاویه ی ۴۵ درجه



در این حالت:

$$\log\left(\frac{\sin 2\theta}{g}\right) = -0.68 \Rightarrow \frac{\sin(90)}{g} = 0.21 \Rightarrow g = 4.76 \frac{m}{s^2}$$

نمودار تمام لگاریتمی برد برحسب زاویه ی پرتاب برای زاویه ی ۷۰ درجه



در این حالت:

$$\log\left(\frac{\sin 2\theta}{g}\right) = -0.87 \Rightarrow \frac{\sin(140)}{g} = 0.13 \Rightarrow g = 4.94 \frac{m}{s^2}$$

همان طور که دیده می شود، در این روش خطای بسیاری وجود دارد و اعداد بدست آمده با مقدار واقعی شتاب گرانش بسیار متفاوت است. مشکلات این روش را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- مقدار داده ها خیلی کم است، یعنی گذراندن خط از تنها ۳ نقطه، خطا را بسیار بالا می برد.
- تبدیل کردن اعداد اولیه به لگاریتم و سپس تبدیل دوباره ی نتیجه به صورت عادی، باعث تغییر داده ها می شود، چون در برگرداندن داده ها از حالت لگاریتمی به حالت عادی، اگر تنها 0.1 اختلاف مد نظر قرار نگیرد، مقدار بدست آمده حدود ۱/۲ برابر می شود!
- وجود اصطکاک هوا و اصطکاک وسیله ی پرتاب کننده
- خطاهای وسایل اندازه گیری (متر برای اندازه گیری طول و نقاله برای اندازه گیری زاویه) و خطای انسانی در بدست آوردن داده های اولیه