SS Se9 Dr. Behrouzi ۹۳,۱۲,۹ بنام خدا

سری فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته ـ زمان متناوب :

$$x[n+N]=x[n]$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

مثال: $x[n]=\cos(n\pi/4) \rightarrow a_k = ?$

$$\cos((n+N)\pi/4)=\cos(n\pi/4) \rightarrow \boxed{N=8}$$

$$\cos(n\pi/4)=\frac{e^{jn\pi/4}+e^{-jn\pi/4}}{2}=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/8)n}$$

$$a_k=\begin{cases}1/2 & k=\pm 1\\ 0 & k=0,2,3,\dots\end{cases}$$

مثال: $x[n]=1 \quad -N_1\le n\le N_1 \longrightarrow N>2N_1$ با دوره تناوب

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} 1\times e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n)}$$

$$\underset{m=n+N_1}{=}\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-N_1)}=\frac{1}{N}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)m}$$

$$=\frac{1}{N}e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)N_1}\,\frac{1-e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(2N_1+1)}}{1-e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}}=\frac{e^{-jk\left(\frac{2\pi}{2N}\right)}}{N}\left[\frac{e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N_1+1/2)}-e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N_1+1/2)}}{e^{-jk\left(\frac{2\pi}{2N}\right)}\left(e^{jk\left(\frac{2\pi}{2N}\right)}-e^{-jk\left(\frac{2\pi}{2N}\right)}\right)}\right]$$

$$a_k=\frac{1}{N}\,\frac{\sin\left(k\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N_1+1/2)\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \Rightarrow N a_k=\frac{\sin(\dots)}{\sin(\dots)}$$

$* \quad a_k = a_{k+N} \qquad k \neq 0, \pm N_1, \pm 2N_1, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] = \frac{2N_1+1}{N} = a_N = a_{2N} = a_{-N}$$

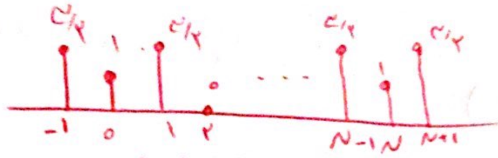
مثال ۳:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)n + \cos\left(\frac{4\pi n}{N} + \frac{\pi}{2}\right)$$

متناوب با دوره‌ی N باشد ضرایب سری فوریه کدامست؟

$a_0 = 1$

$a_1 = \frac{3}{2} - \frac{j}{2}$

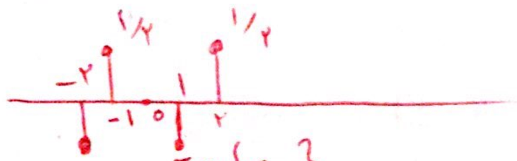


Re{a_k}

$a_{-1} = \frac{3}{2} + \frac{j}{2}$

$a_2 = \frac{j}{2}$

$a_{-2} = -\frac{j}{2}$



Im{a_k}

$a_k = 0 \rightarrow k \neq 0, \pm 1, \pm 2$

سری فوریه‌ی سیگنالهای گسسته متناوب برحسب توابع مثلثاتی:

← اگر پریود سیگنال حقیقی $x[n]$ ، N باشد: $x[N] = A_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} A_k \cos(k\omega_0 n + \varphi)$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$\lfloor N/2 \rfloor = \begin{cases} N/2 & \text{زوج} \\ \frac{N-1}{2} & \text{فرد} \end{cases}$$

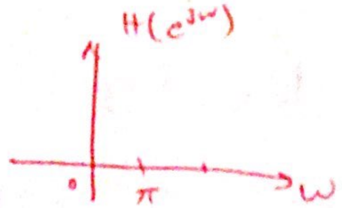
مثال: $(N=4)$ $\quad 2\omega_0, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{4}$

$$\cos(3\omega_0 n + \varphi_3) = \cos\left(\frac{6\pi}{4}n + \varphi_3\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{6\pi}{4}n - \varphi_3\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{4}n - \varphi_3\right)$$

سری فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته زمان متناوب :

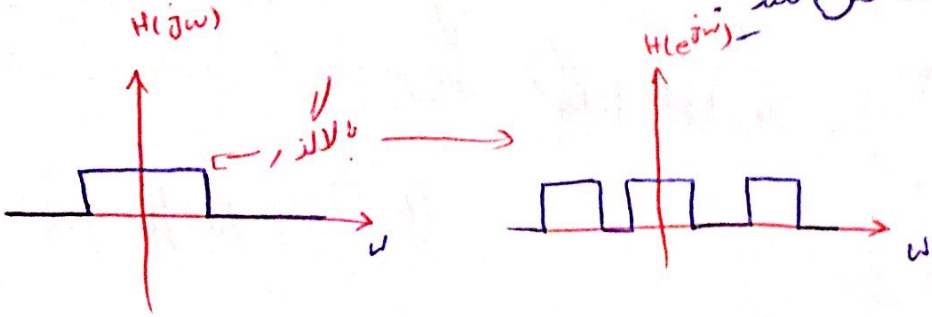
$$\begin{cases} \omega_0 = 2\pi/4 \\ 2\omega_0 = \pi \\ 3\omega_0 = 6\pi/4 \\ \vdots \end{cases}$$



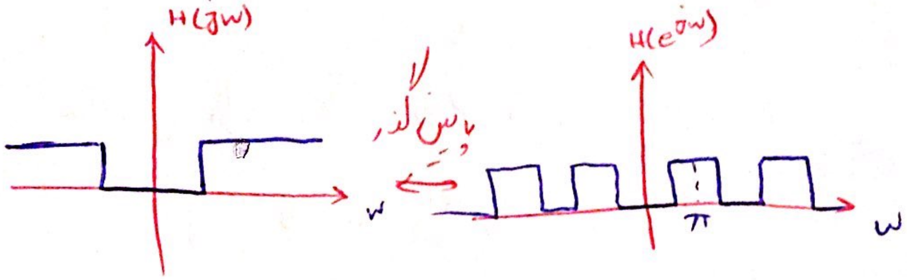
فیلترهای گسسته : مثال :

$$y[n] = \frac{1}{3}\left[x[n-1] + x[n] + x[n+1]\right]$$

نوع فیلتر را مشخص کنید



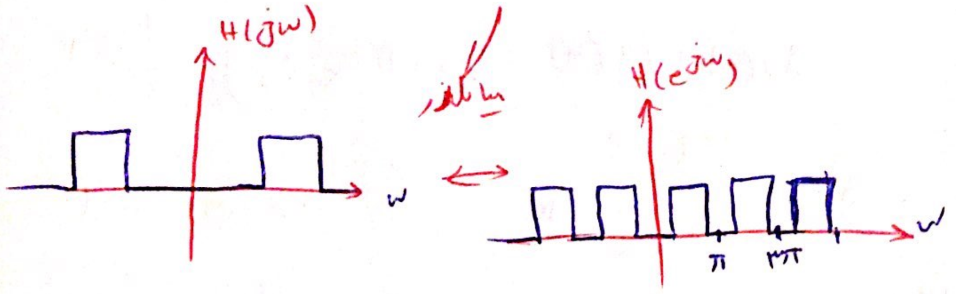
* در حالت گسسته لزوماً a_k ها و $H(e^{j\omega})$ متناوبند.

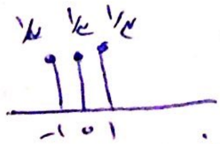


$$h[n] = \frac{1}{3}\left[\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\right]$$

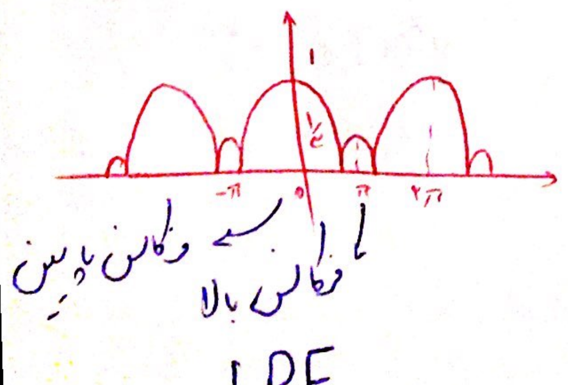
$$x[n] = e^{j\omega n} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

$$x[n] \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$





$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} e^{-j\omega} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{j\omega}$$



* در حالت گسسته بیشترین فرکانس ضرایب فرد π می‌باشد.

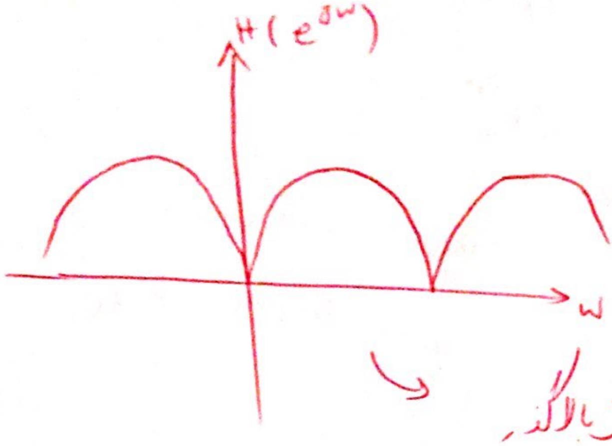
$$y[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] - x[n-1]\right]$$

مثال ۲:

فیلتر بالاگذر یک تفاضل‌گیر دو نقطه‌ای است مثل فیلتر بالاگذر عمل می‌کند یا پایین‌گذر؟

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega}) = \frac{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)}{2} = j e^{-j\omega/2} \sin(\omega/2)$$

$$\rightarrow |H(e^{j\omega})| = |\sin(\omega/2)|$$



فیلتر بالاگذر

← فیلتر بالاگذر تغییرات تند سیگنال را رد می‌کند (مثال تفاضل‌گیر) و پایین‌گذر سیگنال را هموار می‌کند. (مثل مثال قبلی (متوسط‌گیر))

خواص سری فوریه‌ی گسسته:

جدول ۲-۳ ص ۲۲۱

$x[n] \longleftrightarrow a_k$

$y[n] \longleftrightarrow b_k$

۱) خطی بودن: $Ax[n] + By[n] \longleftrightarrow Aa_k + Bb_k$

۲) شیفت زمانی: $x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0} a_k$

۳) شیفت فرکانسی: $e^{jM\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} x[n] \longleftrightarrow a_{k-M}$

۴) $x^*[n] \longleftrightarrow a^*_{-k}$

$x[-n] \longleftrightarrow a_{-k}$

۵) $x[n]$ حقیقی $\Leftarrow a^*_{-k} = a_k \Leftarrow a_{-k} = a^*_k$

$Re\{a_k\} = Re\{a_k\} \quad Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\}$

$x[n]$ حقیقی و زوج $\Leftarrow$ a_k حقیقی و زوج

" " فرد $\Leftarrow$ a_k موهومی خالص و فرد

$$Ev\{x[n]\} \leftrightarrow Re\{a_k\} \rightarrow \frac{x[n]+x[-n]}{۲} \rightarrow \frac{a_k+a_{-k}}{۲} = \frac{a_k+a_k^*}{۲}$$

$$odd\{x[n]\} \leftrightarrow j\, I_m\{a_k\}$$

---

۶) ضرب :

$$x[n]y[n] \leftrightarrow d_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} = \underbrace{a_k \circledast b_k}_{\text{کانولوشن متناوب}}$$

$$Z[n] = \sum x[r]y[n-r] \longleftrightarrow N a_k b_k \qquad ۷)$$

$$Z[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(\frac{۲\pi}{N})r} \sum_{m=\langle N\rangle} b_m e^{j(\frac{۲\pi}{N})m(n-r)}$$

$$= N \sum_{k=\langle N\rangle} a_k b_k e^{jk(\frac{۲\pi}{N})n} = \sum d_k e^{jk(\frac{۲\pi}{N})n} \Rightarrow \boxed{d_k = N a_k b_k}$$

$$x[n]-x[n-1] \leftrightarrow \left(1-e^{-jk(\frac{۲\pi}{N})}\right)a_k \qquad \text{تفاضلی مرتبه‌ی اول} \qquad ۸)$$

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{N} x[k]}_{\text{دارای مقدار محدود و متناوب است اگر } a_0=0} \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-jk(\frac{۲\pi}{N})}}\, a_k \qquad \text{Running sum} \qquad ۹)$$

$$x_m(n) \triangleq \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & \text{ضرب } m \text{ باشد} \\ 0 & \# \end{cases}$$

$$x[n] \leftrightarrow a_k \qquad \frac{n}{m} = k$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \qquad a_0' = \frac{1}{mN}\sum_{\langle mN\rangle} x_{(m)}(n) = \frac{1}{mN}\sum_{n=\langle mN\rangle} x[\frac{n}{m}]$$

$$= \frac{1}{mN}\sum_{k=\langle N\rangle} x[k] = \frac{a_0}{m}$$