محاسبات عددی

مقدمه:

قضیه ی تیلور:

فرض کنیم تابع f و مشتق آن آن تا مرتبه ی $n+1$ در بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشند و $x_0 \in [a,b]$ به طوری که $x \in [a,b]$ عددی مانند $\eta(x)$ موجود است که $\eta(x)$ بین x_0 و x قرار دارد به طوری که:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

که

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

و

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta(x))$$

✓ $P_n(x)$ را چند جمله ای تیلور تابع f حول نقطه ی x_0 گوییم

✓ $R_n(x)$ را باقی مانده یا خطای برشی می نامند

✓ $n \to \infty \Leftarrow R_n(x) \to 0$ در این حالت بسط تیلور به صورت تبدیل می شود

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

DATE / / SUBJECT:

اگر در بسط تیلور قرار دهیم $x=0$ آن گاه بسط مک لورن به صورت زیر نوشته می شود.

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

مثال) با استفاده از فرمول تیلور $(1.1)^{\frac{1}{5}}$ را تا ۴ رقم اعشار حساب کنید

حل) تعریف می کنیم: $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{5}}$

با استفاده از بسط مک لورن داریم:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0)$$

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{5}} \qquad f''(x) = \frac{-4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} \qquad f'''(x) = \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}}$$

با توجه به بسط مک لورن $\Rightarrow f(0.1) = 1 + 0.1 f'(0) + \frac{0.01}{2!} f''(0) + \frac{0.001}{3!} f'''(0) \simeq (1.1)^{\frac{1}{5}}$

$$R(0.1) = \frac{36}{125}(1+\eta)^{-\frac{14}{5}} \frac{(0.1)^3}{3!} < \frac{6}{125}(0.1)^3 = 0.000048 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

از طرفی $0 < (x+1)^{-\frac{14}{5}} < 1 \quad \forall x$

قضیه‌ی مقدار میانی:

فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و k عددی باشد به طوری که $f(a)<k<f(b)$

آن‌گاه عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $f(c)=k$

✓ در حالت خاص نتیجه می‌شود که اگر $f(a)<0<f(b)$ آن‌گاه $f(c)=0$

قضیه‌ی رل

اگر تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و (a,b) مشتق‌پذیر باشد به طوری که

$f(a)=f(b)$ آن‌گاه عددی مانند c وجود دارد که $f'(c)=0$

با $a<c<b$

تمرین: نشان دهید x^3+2x+a که در آن a عددی حقیقی است بیش از یک ریشه دارد.

برهان خلف
$$f(x_1)=0,\quad f(x_2)=0 \longrightarrow \exists c\in[x_1,x_2] \mid f'(c)=0$$

$$\longrightarrow 3x^2+2=0 \longrightarrow \times \longrightarrow$$ تنها یک ریشه دارد

قضیه‌ی رل تعمیم‌یافته

فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد اگر

$f(x)$ در $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x , \dots , x_n$ در بازه‌ی $[a,b]$ صفر شود آن‌گاه

عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f^{(n)}(c)=0$

قضیه‌ی مقدار متوسط

اگر تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد

که $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

تمرین: تابع $f(x)=\ln x$ را در نظر بگیرید اگر $0<a<b$ نشان دهید:

$$1-\frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a}-1 \qquad \underbrace{\ln(b)-\ln(a)}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{1}{c}(b-a)$$

$$\rightarrow \quad 1-\frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a}-1$$

$$a<c<b \Longrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$