به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

محاسبات عددی

پاسخ تمرین های سری چهارم

---

۱. الف)

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \; \end{bmatrix}$$

$$cx - sy = ۰ \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{y}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}} \\ s = \dfrac{y}{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}} \end{cases}$$

```
function [c,s]=Rotate2(x,y)
c=y/sqrt(x^2+y^2);
s=x/sqrt(x^2+y^2);
```

ب)

$$\bar{A} = Q^T A Q = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} \quad \begin{cases} c = cos(\theta) \\ s = sin(\theta) \end{cases}$$

$$\bar{A}(۱,۲) = \bar{A}(۲,۱) = -s(cx + sy) + c(cy + sz) = ۰ \Rightarrow$$

$$(c^{٢}-s^{٢})y+sc(z-x)=٠$$

$$\cos(٢\theta)y+\sin(٢\theta)\frac{z-x}{٢}=٠\Rightarrow$$

$$\cos(٢\theta)=c^{٢}-s^{٢}=\frac{\left(\frac{z-x}{٢}\right)}{\sqrt{\left(\frac{z-x}{٢}\right)^{٢}+y^{٢}}}\qquad \sin(٢\theta)=٢cs=-\frac{y}{\sqrt{\left(\frac{z-x}{٢}\right)^{٢}+y^{٢}}}$$

$$\Rightarrow(c+s)^{٢}=١+٢cs=١-\frac{y}{\sqrt{\left(\frac{z-x}{٢}\right)^{٢}+y^{٢}}}$$

$$c+s=\sqrt{١-\frac{y}{\sqrt{\left(\frac{z-x}{٢}\right)^{٢}+y^{٢}}}}$$

$$c-s=\frac{c^{٢}-s^{٢}}{c+s}=\frac{\dfrac{\left(\frac{z-x}{٢}\right)}{\sqrt{\left(\frac{z-x}{٢}\right)^{٢}+y^{٢}}}}{\sqrt{١-\dfrac{y}{\sqrt{\left(\frac{z-x}{٢}\right)^{٢}+y^{٢}}}}}$$

```
function [c,s]=Rotate2diag(x,y,z)
c2=2*(z-x)/sqrt((z-x)^2+4*y^2);
s2=-4*y/ sqrt((z-x)^2+4*y^2);
c=0.5*(sqrt(1+s2)+c2/ sqrt(1+s2));
s=0.5*(sqrt(1+s2)-c2/ sqrt(1+s2));
```

OR

```
function [c,s]=Rotate2diag(x,y,z)
c2=2*(z-x)/sqrt((z-x)^2+4*y^2);
theta=1/2*acos(c2);
c=cos(theta);
s=sin(theta);
```

.۲

$$\min_{x\in R}\left\| x\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}\right\|_۲^۲ \Rightarrow$$

$۱)$ QR

$$A=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{(۲)}=Q_۱ A \quad A^{(۲)}(۳,۱)=\circ$$

$$Q_۱=\begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ \\ \circ & c & -s \\ \circ & s & c \end{bmatrix} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad s=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$A^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲\sqrt{۲} \\ \circ \end{bmatrix} \quad b^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲} \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$A^{(۳)}=Q_۲ A^{(۲)} \quad A^{(۳)}(۲,۱)=\circ$$

$$Q_۲=\begin{bmatrix} c & -s & \circ \\ s & c & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow s+۲\sqrt{۲}c=\circ \Rightarrow c=\frac{۱}{۳}, s=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$A^{(۳)}=\begin{bmatrix}۳\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}\quad b^{(۳)}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۳}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۳}\\ ۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\tilde{R}=۳\\ \tilde{b}_{۱}=\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

$$\tilde{R}x=\tilde{b}_{۱}\Rightarrow x=\frac{۵}{۹}$$

$۲)\ Newton$

$$f(x)=\min_{x\in R}\left\|x\begin{bmatrix}۱\\ ۲\\ ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}\right\|_{۲}^{۲}=(x-۱)^{۲}+(۲x-۱)^{۲}+(۲x-۱)^{۲}$$

$$\min_{x\in R}f(x)\Rightarrow\underbrace{f'}_{g}(x)=۰$$

$$۲(x-۱)+۸(۲x-۱)=۰\Rightarrow x_{۱}=x_{۰}-\frac{g(x_{۰})}{g'(x_{۰})}=x_{۰}-\frac{f'(x_{۰})}{f''(x_{۰})}=x_{۰}-\frac{۲(x_{۰}-۱)+۸(۲x_{۰}-۱)}{۱۸}=\frac{۵}{۹}$$

.۳

$$x_{n+۱}=\frac{x_{n}^{۲}+۲}{۲x_{n}+۱}\Rightarrow l=\frac{l^{۲}+۲}{۲l+۱}\Rightarrow ۲l^{۲}+l=l^{۲}+۲$$

$$l^{۲}+l-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}l=-۲\\ l=۱\end{cases}$$

4.

$$1)\, l=-2$$

$$g(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{(2x+1)(2x)-2(x^2+2)}{(2x+1)^2}=\frac{2(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$$

$$g'(-2)=0 \quad g''(-2)\neq 0$$

زیرا با توجه به اینکه $x=-2$ ریشه ساده g' است، پس $g''(-2)\neq 0$. بنابراین اگر دنباله به ۲- همگرا باشد مرتبه همگرایی برابر با دو است. به طور مشابه اگر دنباله به یک همگرا باشد نیز مرتبه همگرایی برابر با دو است، زیرا

$$g'(1)=0 \quad g''(1)\neq 0$$

* روش دوم: محاسبه بر اساس تعریف مرتبه همگرایی

به عنوان نمونه به ازای $l=-2$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-l|}{|x_n-l|^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{x_n^2+2}{2x_n+1}+2\right|}{|x_n+2|^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n+2|^2}{|x_n+2|^p\,|2x_n+1|}\overset{(p=2)}{=}\frac{1}{3}\neq 0,\infty$$

۴.

```
function [xF,F]=bisection(a,b,k)
for i=1:k
fa=feval('fbi',a);
fb=feval('fbi',b);
x=(a+b)/2;
fx=feval('fbi',x);
if abs(fx)<=0.00001
    xF=x;
    F=fx;
    return
elseif  fa*fx<0
    b=x;
else
    a=x;
end
end
```

```
xF=x;
F=fx;
```

به عنوان مثال:

```
function y=fbi(x)
y=x-sin(2*x);
```

```
>> xF=bisection(pi/4,pi/2,5)
xF =

    0.9572


F =

    0.0157

>> xF=bisection(pi/4,pi/2,10)
xF =

    0.9472


F =

 -8.4145e-004
```

موفق باشید