روش نیوتن - رافسون

فرض می‌کنیم که α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ باشد، و x_0 به عنوان تقریبی برای α باشد.

فرض: تابع f در همسایگی به که شامل α است مشتق‌پذیری باشد.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(\eta)\frac{(x-x_0)^2}{2!} \qquad x_0<\eta<x$$

$$\xrightarrow{x=\alpha} 0=f(\alpha)=f(x_0)+f'(x_0)(\alpha-x_0)+f''(\eta)\frac{(\alpha-x_0)^2}{2}$$

فرض $f'(x_0)\neq 0$

$$-f(x_0)=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f''(\eta)\frac{(\alpha-x_0)^2}{2}$$

$$\xrightarrow{\div f'(x_0)} \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}=(\alpha-x_0)+\frac{f''(\eta)}{f'(x_0)}\frac{(\alpha-x_0)^2}{2}$$

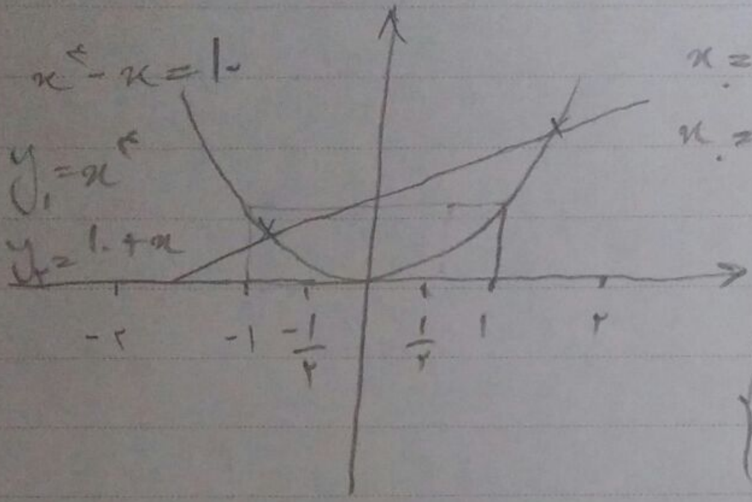
$$\rightarrow \alpha = x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_1$$

$$\rightarrow x_2 = x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=0,1,2,\dots$$

PAPCO



$x = -1/5 \leftarrow [-2,-1] \rightarrow f(-2) = 16+2-10 = 8$

$x = 1/5 \leftarrow [1,2] \rightarrow f(-1) = 1+1-10 = -8$

$f(-2)\, f(-1)$

$\begin{cases} f(1) = -10 \\ f(2) = 16-2-10 = 4 \end{cases} \rightarrow f(2)\, f(1) < 0$

می توان نشان داد که اگر تابع f شرایط مناسب را داشته باشد روش نیوتن - رافسون همواره همگرا به α است یعنی $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

خطا در روش نیوتن

فرض کنید α ریشه ی معادله ی $f(x)=0$ باشد و f، f'، f'' در یک همسایگی از α مانند $I \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته باشد اگر $x_n \in I$ و $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

آن گاه $x_n < \eta < \alpha$ موجود است که

$$e_{n+1} = \frac{-f''(\eta_n)}{2f'(\eta_n)} e_n^2$$

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n) + \frac{1}{2} f''(\eta_n)(x-x_n)^2 \qquad x_n < \eta < x_n$$

$$x=\alpha \longrightarrow 0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2} f''(\eta_n)(\alpha - x_n)^2$$

$$x_{n+1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha - x_n + \frac{1}{2}\frac{f''(\eta_n)(\alpha - x_n)^2}{f'(x_n)}$$

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + \frac{1}{2}\frac{f''(\eta_n)(\alpha - x_n)^2}{f'(x_n)} \qquad e_n = \alpha - x_n$$

$$\alpha - x_{n+1} = \frac{-1}{2}\frac{f''(\eta_n)}{f'(x_n)} e_n^2$$

$$e_{n+1} = \frac{-1}{2}\frac{f''(\eta) e_n^2}{f'(x_n)} \qquad e_n = \alpha - x_n \qquad \lim \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = c \neq 0$$

$$\Phi_n(x) \longrightarrow \Phi_n'(x) = \Phi_n''(x) = \dots = \Phi^{(p-1)} = 0$$

رابطه تکراری $\Phi_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\qquad P(x) \neq 0$

تمرین: نشان دهید اگر تابع f ریشه ی تکراری مرتبه $\underline{\underline{m}}$ داشته باشد روش نیوتن-رافسون همگرایی خطی دارد.

$$f(x) = (x-\alpha)^m g(x) \longrightarrow g(\alpha) \neq 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} g(x) + (x-\alpha)^m g'(x)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1} g(x) + (x-\alpha)^m g'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x-\alpha) g(x)}{m g(x) + (x-\alpha) g'(x)}$$

$$\phi(x) = x - \frac{(x-\alpha) g(x)}{m g(x) + (x-\alpha) g'(x)}$$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{\big(g(x) + (x-\alpha) g'(x)\big)\big(m g(x) + (x-\alpha) g'(x)\big) + \big(m g'(x) + g'(x) + (x-\alpha) g''(x)\big)\big((x-\alpha) g(x)\big)}{\big(m g(x) + (x-\alpha) g'(x)\big)^{۲}}$$

$$\phi'(\alpha) = 1 - \frac{m g^{۲}(\alpha)}{m^{۲} g^{۲}(\alpha)} = 1 - \frac{1}{m} \neq ۰$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{m f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$x^{۴} - x = ۱۰$

$[-۲,-۱] \rightarrow x_n = -۱/۵$

$[۱,۲] \rightarrow x = ۱/۵$

$f' \approx$ [illegible]

$$\frac{f(x_n) - f(x_n - h)}{h}$$

روش وتری

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$h = x_n - x_{n-1}$$

$$x_{n-1} = x_{n-h}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h f(x_n)}{f(x_n) - f(\underbrace{x_n - h}_{x_{n-1}})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n+1})}$$

فصل ۳

۱، ۳، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۷، ۱۸،
۲۱، ۲۳، ۲۴