EM Se 2 Doctor Hashemi

$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda x=0 \quad X(0)=X(L)=0 \quad \lambda=0$ ۲

$\frac{d^2X}{dx^2}=0 \qquad X(x)=c_1+c_2x$

$X(0)=0 \Longrightarrow \boxed{c_1=0} \qquad X_l=0 \Longrightarrow \boxed{c_2=0}$

$\lambda=0$ یک مقدار ویژه نیست.

پاسخ قابل قبول نیست.

۳) $\lambda<0$

$r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda} \qquad X_{1,2}=e^{\pm\sqrt{-\lambda}\,x}$

$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}=$

$\boxed{c_3\cosh\sqrt{-\lambda}\,x+c_4\sinh\sqrt{-\lambda}\,x}$

$X(0)=0 \Longrightarrow \boxed{c_3=0}$

$X(L)=0 \Rightarrow \cosh\sqrt{-\lambda}\,L=0$

$\begin{cases} \cancel{c_4=0} \\ \sinh\sqrt{-\lambda}\,l=0 \Rightarrow \cancel{\lambda=0} \end{cases} \Longrightarrow$ پاسخ قابل قبول به ازای $\lambda<0$ نداریم.

Scanned by CamScanner

خلاصه:

$$\begin{cases} \lambda>0 \begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 & n=1,2,\dots \\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \longrightarrow n=1,2,\dots \end{cases} \\ \lambda\leq 0 \Rightarrow X \rightarrow \text{پاسخ‌های غیرقابل قبول} \end{cases}$$

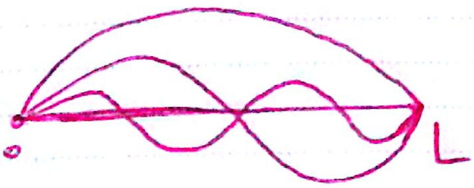
تمرین ۱: نشان دهید که پاسخ مسأله در فاصله‌ی $0<x<l$ دارای $n-1$ صفر است.

تمرین ۲: به همان روش، مسأله‌ی زیر را بررسی کنید.

$$y^{(4)}(x)+\lambda y^{(2)}=0 \qquad y(0)=y(1)=0$$

$$y''(0)=0 \qquad y'(0)=1$$

$n=1$



حل قسمت زمانی معادله:

$$\frac{dT}{dt}+K\lambda T=0 \qquad s+K\lambda=0 \Rightarrow s=-K\lambda$$

Scanned by CamScanner

$$T = c e^{-K\lambda T} \begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow & \text{میرایی نمایی} \\ \lambda < 0 \Rightarrow & \text{رشد نمایی} \\ \lambda = 0 & \text{ثابت} \end{cases}$$

پاسخ کامل :

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\begin{cases} u(x,t) = B \sin \dfrac{n\pi x}{l} \; e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$B = CC_1$$

$u(x,0) = f(x)$ داشتیم : (دامنه)

مثال :

$$f(x) = 4 \sin \frac{3\pi}{l} x$$

جایگذاری در ۱، ۲

$$4 \sin \frac{3\pi x}{l} = B \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\boxed{B = 4 \quad n = 3}$$

ولادت حضرت امام محمد تقی (ع) «جواد الائمه» (۱۹۵ هـ.ق)

Scanned by CamScanner

حالت کلی : $f(x)$

$$U_M(x,t) = \sum_{n=1}^{M} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

بنابر جمع آثار، یک پاسخ کامل است

$$U_M(x,0) = \sum_{n=1}^{M} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} \overset{?}{=} f(x)$$

← تحت شرایطی به ازای $f(x)$ داده شده می‌توان U_M را تقریبی از پاسخ دانست و با افزایش M عبارت U_M به U میل می‌کند.

① $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

بسط به سری فوریه سینوسی $f(x)$

Scanned by CamScanner

تعامد سینوسی:

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{l}\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \frac{L}{2} & m=n \qquad m,n\in\mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

← طرفین رابطه‌ی ① را به در $\sin\frac{m\pi x}{l}$ ضرب می‌کنیم و $\int_0^l$ می‌گیریم:

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx =$$

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = B_m\int_0^L \sin^2\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{L}{2}$$

$$B_m = \frac{\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{m\pi x}{l}\,dx} = \underbrace{\boxed{\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx}}_{B_m}$$

تمرین ۳ـ به ازای $f(x)=100$ مسئله را به طور کامل حل کنید.

شرایط مرزی:

۱) شرایط مرزی دیریکله:

$$u(0,t)=u_g(t)$$

$u_g(t)=0$ حل کردیم

۲) شرایط مرزی نویمن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=g(t) \xrightarrow[\text{کامل}]{\text{عایق}} g(t)=0$$

۳) شرایط مرزی کوشی (رابین):
مخلوط

$$-K_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=-H\left[u(0,t)-u_g(t)\right]$$

قانون خنک سازی نیوتن

Scanned by CamScanner

H: ضریب انتقال حرارت (همرفتی)

هادی کامل ← دیریکله $H \to \infty$

عایق کامل ← نویمن $H \to 0$

عایق ناکامل ← کوشی $0 < H < \infty$

۴) شرایط مرزی متناوب

$$u(-l,t) = u(l,t)$$

$$\frac{du}{dx}(-l,t) = \frac{du}{dx}(l,t)$$

توزیع دمای حالت ماندگار

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &u(0,t) = T_1 \\ &u(l,t) = T_2 \\ &u(x,0) = f(x) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{حالت ماندگار}} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad u(x,t) = u(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0) = T_1, \; u(l) = T_2 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

پاسخ :

$$u(x) = c_1 x + c_2$$

اعمال شرایط مرزی :

$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

شرایط مرزی عایق (کامل) ← همگن :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

بحث حالت تعادلی ماندگار :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \Rightarrow u = c_1 x + c_2 \\ \dfrac{du}{dx}(0) = 0 & \dfrac{du}{dx} = c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{u(x) = c_2} \\ \dfrac{du}{dx}(l) = 0 & \end{cases}$$

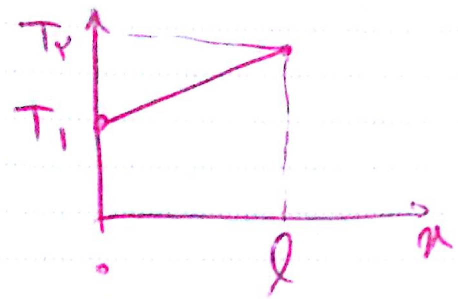
Scanned by CamScanner

پاسخ:

$u(x) = C_1 x + C_2$

اعمال شرایط مرزی:

$$u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} x$$



Scanned by CamScanner