SS Dr. Behrouzi Se 5 ۹۳/۱۱/۲۵

سؤال مهم: آیا می‌توان با داشتن پاسخ پله رابطه‌ای مانند کانولوشن یافت؟

خواص کیفی سیستم‌های LTI:

۴) سیستم LTI پایدار:

← شرط لازم و کافی برای آنکه سیستم LTI پایدار باشد، آن است که $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

پاسخ ضربه به طور مطلق انتگرال‌پذیر یا جمع‌پذیر باشد ⟵ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

اثبات:

الف)

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \Longrightarrow$ سیستم پایدار است

فرض کنید ورودی $x(t)$ کراندار باشد

$|x(t)| < \alpha < \infty$

$|y(t)| = \left|\int h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int |h(t)|\,|x(t-\tau)|\,d\tau \leqslant \alpha \int |h(\tau)|\,d\tau < \infty$

$y(t)$ کراندار ⟸ سیستم پایدار BIBO

ب)

اثبات لازم بودن شرط:

سیستم پایدار باشد $\Longrightarrow$ شرط داده‌شده برقرار است.

← برهان خلف:

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt \longrightarrow \infty$

Scanned by CamScanner

← باید نشان دهیم به ازای ورودی کراندار خروجی بی‌کران داریم :

$$x(t)=\begin{cases} 0 & h(-t)=0 \\ \dfrac{h(-t)}{|h(-t)|} & h(-t)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow |x(t)| \leq 1 \quad \forall t$$ ورودی کراندار

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \Rightarrow y(t=0)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(0-\tau)\, d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \frac{h(\tau)}{|h(\tau)|}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau \rightarrow \infty$$

مثال: آیا سیستم روبرو $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ پایدار است؟ چرا؟

$$h(t)=y(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)}=u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt=\int_{0}^{\infty} 1\, dt \rightarrow \infty$$ ناپایدار

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \qquad h[n]=u[n] \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] \rightarrow \infty$$

← سیستم LTI علّی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت: سیستمی که توسط معادلات زیر توصیف شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

← تحت شرط حالت اولیه صفر: (initial rest)

$$y(t_0)=\frac{dy(t_0)}{dt}=\cdots=\frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}}=0$$ سیستم LTI علّی است

معادله‌ی تفاضلی :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$ خطی

if $N=0 \Rightarrow \boxed{y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$ $\quad h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \le n \le M \\ 0 & \# \end{cases}$

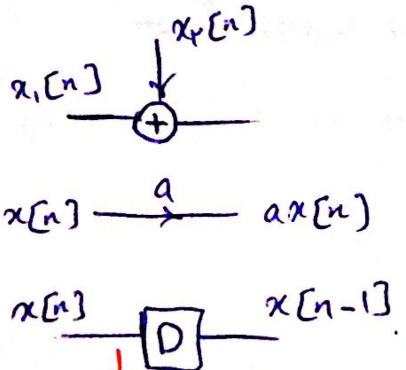
$$\rightarrow y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$

← در مثال قبل نشان داده شد که طول پاسخ ضربه محدود است (FIR : finite impulse response)

← اگر طول پاسخ ضربه محدود نباشد سیستم را IIR گویند.

← در مثال گفته شده اگر $N \ge 1$ باشد، معادله‌ی تفاضلی سیستم بازگشتی می‌شود و می‌توان نشان داد طول پاسخ ضربه نامحدود است.

نمایش بلوکی سیستم‌های LTI : ۳ تا عملگر اصلی داریم:

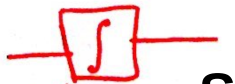


تاخیر ← مشتق (معادل تفاضلی در حالت گسسته)

↓

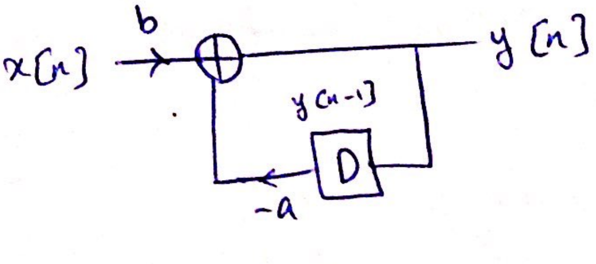
استفاده برای ایجاد delay

(در برخی کتاب‌ها: block انتگرال استفاده می‌شود) ←

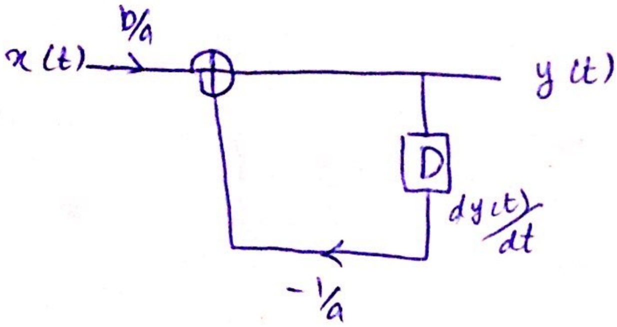


← در حالت پیوسته

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$
$$y[n] = bx[n] - ay[n-1]$$



$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = b x(t) \longrightarrow y(t) = \frac{1}{a}\left\{ b x(t) - \frac{dy(t)}{dt} \right\}$$



$$\frac{dy(t)}{dt} = b x(t) - a y(t) \xrightarrow{\text{با فرض حالت اولیه}} y(t) = \int (b x(\tau) - a y(\tau))\, d\tau$$

توابع ویژه :

برابری انتگرالی: دو تابع $f_1(t)$, $f_2(t)$ را از نظر انتگرالی برابر می‌گوییم اگر به ازای هر تابع دلخواه $\varphi(t)$:

$$\int f_1(t)\varphi(t)\,dt = \int f_2(t)\varphi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f_1(t) = f_2(t)$$

اگر $\varphi(t) = h(\lambda - t)$ ←

$$\int f_1(t) h(\lambda - t)\,dt = \int f_2(t) h(\lambda - t)\,dt \Rightarrow f_1(\lambda) * h(\lambda) = f_2(\lambda) * h(\lambda)$$

تعریف دوم برابری انتگرالی (2.69)

تعریف عملیاتی تابع ضربه: تابع ضربه توصیف کننده‌ی سیستمی است که ورودی و خروجی آن یکسان است. $y(t) = x(t)$

$\boxed{x(t) * \delta(t) = x(t)}$ → عضو خنثی عملگر کانولوشن

$$x(t)=1 \Rightarrow x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,x(\tau-t)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,dt=x(\tau)=1$$

تعریف دوم عملیاتی تابع ضربه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau=g(0)$$

$$g(-t)*\delta(t)=g(-t)$$

$$t=0$$

$$U_1(t)\triangleq\frac{d\delta(t)}{dt} \quad : \quad \underline{\text{unit doublet}}$$

مشتق تابع ضربه

تعریف عملیاتی تابع دوبلت: پاسخ ضربه سیستم مشتق‌گیر سیستم LTI رو در نظر بگیرید:

$$y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

$$h(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)\rightarrow x(t)*h(t)=y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)*U_1(t)=\frac{d}{dt}x(t)}$$

$$U_k(t)\triangleq\frac{d^k\delta(t)}{dt^k}$$

پاسخ ضربه سیستم مشتق‌گیر مرتبه‌ی kام:

$$x(t)*U_k(t)=\frac{d^k(x(t))}{dt^k}$$

← می‌توان نشان داد که:

$$U_k(t)=\underbrace{U_1(t)*U_1(t)*\cdots U_1(t)}_{k\text{ بار}}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=x(t)*U_2(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(x(t)*U_1(t)\right)=$$

$$x(t)*U_1(t)*U_1(t)\Rightarrow U_2(t)=U_1(t)*U_1(t)$$

برخی خواص مشتق رتبه‌ی ۱ به بالای تابع ضربه:

$$U_K(t) = \frac{d^K \delta(t)}{dt^K} = \delta^{(K)}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_1(\tau)\,d\tau = 0 \qquad x(t) * U_1(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad x(t) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_1(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\tau)\,d\tau = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,U_1(\tau)\,d\tau = -g'(0)$$

$$g(-t) * U_1(t) = \frac{d}{dt}\,g(-t) = -g'(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_1(\tau)\,g(-(t-\tau))\,d\tau = -g'(-t)$$

$$t = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,U_1(\tau)\,d\tau = -g'(0)$$

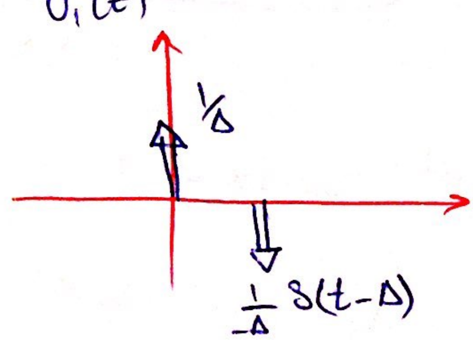
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,U_K(\tau)\,d\tau = (-1)^K \left.\frac{d^K g(t)}{dt^K}\right|_{t=0}$$

$$f(t)\,U_1(t) = f(0)\,U_1(t) - f'(0)\,\delta(t)$$

$$U_1(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\delta(t) - \delta(t-\Delta)}{\Delta}$$

$$x(t) * U_1(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta)}{\Delta}$$

$$x(t) * U_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

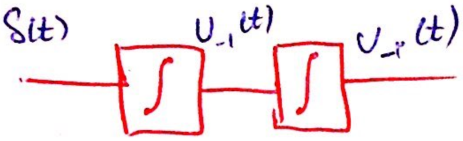


انتگرالهای متوالی تابع ضربه :

$$U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = U(t)$$

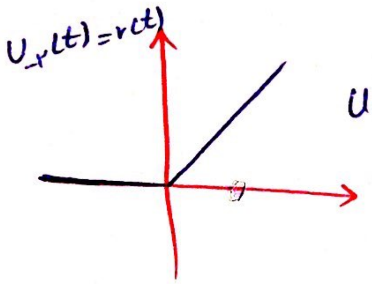
تعریف عملیاتی $U_{-1}(t)$: پاسخ ضربه سیستم LTI انتگرالگر :

$$x(t) * U_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$



$$U_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} U_{-1}(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} U(\tau)\,d\tau = tU(t)$$

$$U_{-k}(t) = \underbrace{U_{-1}(t) * \cdots * U_{-1}(t)}_{k\ \text{مرتبه}} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,U_{-1}(t)$$



unit ramp function

تابع شیب واحد