DATE / / SUBJECT:

درون یابی با اسپلاین ۴

تعریف تابع اسپلاین:

تابع s تعریف شده بر بازه‌ی $[a,b]$ را یک اسپلاین از درجه‌ی k گوییم هرگاه:

۱. بر روی هر زیربازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ $\forall i=0,1,\dots,n-1$ ، $S_i(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی k باشد.

۲. $S(x)$ ، $S'(x)$ ، … ، $S^{(k-1)}(x)$ بر روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد (یعنی $S(x)\in C^{k-1}[a,b]$) $\Longleftarrow$

✓ تابع اسپلاین یک تابع قطعه قطعه چندجمله‌ای از درجه‌ی k است به طوری که

$$S(x)=S_i(x) \qquad \forall x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$i=0,1,\dots,n-1$

مثال) کدام یک از توابع زیر یک اسپلاین است؟

$$S(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 3-2x & 1\le x\le 3 \end{cases}$$

۱) S_i در هر زیربازه $[0,1)$ و $[1,3]$ تابع خطی است

۲) در نقطه‌ی ۱ هم تابع پیوسته است

$S(x)$ یک اسپلاین از مرتبه‌ی ۱ است

۱) $S_i(x)$ در هر زیربازه یک تابع درجه ۲ است

$$S(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 2 \\ 6 - 2(x-2) + 3(x-2)^2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

$x=2$ $\begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$ شرط پیوستگی را ندارد

✓ اسپلاین از مرتبه ۲ نیست

① $S_i(x)$ در هر زیربازه یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر ۳ است.

$i = 0,1,2,3$

② شرط پیوستگی $S(x)$، $S'(x)$، $S''(x)$ را در نقاط $x=0$، $x=1$ داریم

$\Leftarrow$ $S(x)$ یک اسپلاین از درجه‌ی ۳ است.

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + (x+1)^3 & 1 \le x < 0 \\ 1 + 3x + 3x^2 & 0 \le x < 1 \\ 7 + 9(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 & 1 \le x \le 5 \end{cases}$$

درون‌یابی با اسپلاین درجه ۳ (مکعبی)

فرض کنید $n+1$ نقطه x_i ، $i=0,1,\dots,n$ و f_i ، $i=0,1,\dots,n$ مفروض باشد.

هدف) می‌خواهیم اسپلاین درجه ۳ $S(x)$ را به دست آوریم به طوری که

$S(x_i) = f(x_i)$ $i=0,1,\dots,n$

DATE / / SUBJECT:

و شرایط زیر هم برای تابع $S(x)$ برقرار باشد

۱. $S(x) = S_i(x)$

$\forall x \in [x_i , x_{i+1}]$

$$S(x) = \begin{cases} S_i(x) \end{cases}$$

که $S_i(x)$ یک جمله ای از درجه حداکثر ۳ است.

۲) از نقطه ی مشترک x_i که بازه $[x_{i-1}, x_i]$ و $[x_i, x_{i+1}]$ شرط پیوستگی مشتق را داشته باشیم یعنی

$$\begin{cases} S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) \\ S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \\ S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \end{cases}$$

می دانیم که در بازه ی $[x_i , x_{i+1}]$ و $S''_i(x)$ یک تابع خطی است پس با استفاده از درون یابی خطی داریم:

$$(*) \quad S''_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} S''_i(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} S''_i(x_{i+1})$$

تعریف می کنیم: $h_i = x_{i+1} - x$

$$S''_i(x) = \frac{-6(x - x_{i+1})}{h_i} m_i + \frac{6(x - x_i)}{h_i} m_{i+1} \qquad m_i = \frac{1}{6} S''_i(x_i)$$

DATE / / SUBJECT:

با انتگرال گیری $\longrightarrow$ $$S'_i(x) = \frac{-3(x-x_{i+1})^2}{h_i} m_i + \frac{3(x-x_i)^2}{h_i} m_{i+1} + c_i$$

با انتگرال گیری $\longrightarrow$ $$S_i(x) = \frac{-(x-x_{i+1})^3}{h_i} m_i + \frac{(x-x_i)^3}{h_i} m_{i+1} + c_i(x-x_i) + d_i$$

حال با استفاده از شرط درون یابی داریم.

$$S_i(x_i) = h_i^2 m_i + d_i = f_i$$

$$S_i(x_{i+1}) = h_i^2 m_{i+1} + c_i h_i + d_i = f_{i+1}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} d_i = f_i - h_i^2 m_i \\ c_i = \dfrac{f_{i+1} - h_i^2 m_{i+1} - d_i}{h_i} \end{cases}$$

اگر m_i و m_{i+1} معلوم باشند آنگاه $S_i(x)$ را در بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ به دست می‌آوریم.

با استفاده از شرط (۲) پیوستگی مشتق داریم:

$$S'_{i-1}(x) = \frac{-3(x-x_i)^2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{3(x-x_{i-1})^2}{h_{i-1}} m_i + c_{i-1}$$

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \quad i=1,\dots,n$$

DATE / / SUBJECT:

با استفاده از شرط $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ که به نتیجه زیر می رسیم

$$h_{i-1}m_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)m_i + h_i m_{i+1} = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i] \qquad i=1,\dots,n-1$$

مجهولات $\longrightarrow m_0, \dots, m_n$

دستگاه (1) شامل $n-1$ معادله و $n+1$ مجهول است $(m_0, \dots, m_n)$ برای

آن که تعداد معادلات و مجهولات باهم برابر باشند دو معادله‌ی دیگر نیز لازم. این دو

معادله از ۳ روش زیر ایجاد می کنیم:

(1) اسپلاین طبیعی $\longleftarrow$ $m_n = 0 \ , \ m_0 = 0$

(2) اسپلاین مقید $\longleftarrow$ $S'(b) = f'(b) \ , \ S'(a) = f'(a)$ ($f'(b)$ و $f'(a)$ معلوم هستند)

(3) اسپلاین متناوب $\longleftarrow$ $S^k(a) = S^k(b) \quad k = 0, 1, 2$

اسپلاین های طبیعی در حالت خاص

اگر نقاط در بازه‌ی $[a,b]$ هم فاصله باشند $\forall i \ \ h = x_{i+1} - x_i$ آن‌گاه

دستگاه به صورت زیر تبدیل می شود.

$$(2) \quad m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{\Delta^2 f_{k-1}}{h^2}$$

DATE / / SUBJECT:

با استفاده از شرط $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ به نتیجه زیر می‌رسیم:

$h_{i-1} = h_i = h$

① $h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i) m_i + h_i m_{i+1} = \dfrac{2f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{4h}$ $\quad i = 1, \dots, n-1$

$\longrightarrow 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \dfrac{\cancel{2}\Delta^2 f_{i-1}}{\cancel{2!}\, h^2}$

مجهولات $m_0, \dots, m_n$

$$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$\longrightarrow x_{i+1} - x_i + x_i - x_{i-1} = 2h$

مثال) مقادیر تابع f به صورت زیر داده شده است:

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	0

معادلات تکه‌ای طبیعی که تابع f را درون‌یابی کند بیابید.

$h = 1$

$\longrightarrow m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \dfrac{\Delta^2 f_{i-1}}{h^2} \qquad i = 0, 1, 2$

$= \Delta^2 f_{i-1}$

$m_0 + 4m_1 + m_2 = \Delta^2 f_1$

$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - f_1 - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$
$= 0 - 2 + 0 = -2$

$$m_0 = m_2 = 0$$

$$\longrightarrow 4m_1 = -2 \longrightarrow \boxed{m_1 = \frac{-1}{2}}$$

$$\boxed{m_0 = 0 \,,\; m_1 = \frac{-1}{2} \,,\; m_2 = 0}$$

$$\begin{cases} d_0 = 0 \\ c_0 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = \frac{3}{2} \\ c_1 = \frac{-3}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} S_0(x) = \frac{-1}{4}(x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1) \\ S_1(x) = \frac{1}{4}(x-1)^3 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \end{cases}$$

تمرین: مقادیر تابع f به صورت جدولی زیر داده شده است. معادلات اسپلاین مکعبی طبیعی را بیابید.

x	-1	0	1	3
$f(x)$	0	2	9	37