به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی علوم ریاضی

محاسبات عددی – گروه‌های 1 تا 4

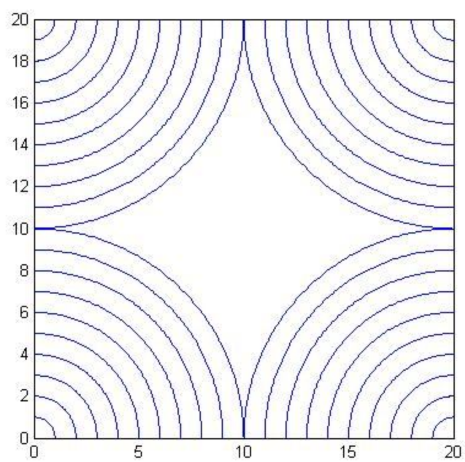
حل تمرین سری اول

۱- در برنامه‌ی myplot شکل مورد نظر رسم می‌شود. در هر قسمت، بخش مورد نظر دایره بر اساس فرمول‌بندی قطبی و با انتخاب شعاع، زاویه و مرکز مناسب رسم می‌شود.

```
function myplot(k)
plot([0 2*k 2*k 0 0],[0 0 2*k 2*k 0])
theta=linspace(0,pi/2);
axis('equal')
axis([0 2*k 0 2*k])
hold on
for r=1:k
    plot(r*cos(theta),r*sin(theta))
    plot(r*cos(theta+pi/2)+2*k,r*sin(theta+pi/2))
    plot(r*cos(theta+pi)+2*k,r*sin(theta+pi)+2*k)
    plot(r*cos(theta+3/2*pi),r*sin(theta+3*pi/2)+2*k)
end
```

نمونه‌ی خروجی را در شکل زیر می بینید:

```
>> myplot(10)
```



به نکات زیر توجه کنید:

- با توجه به این‌که تابع خروجی (`output`) ندارد، در خط اول برنامه بخش خروجی‌ها حذف می‌شود و خط اول به صورت

```
function myplot(k)
```

نوشته می‌شود.

- دستور `axis('equal')` به منظور مساوی بودن مقیاس محورهای طول و عرض به‌کار می‌رود.

- به‌کار بردن دستور `hold on` باعث می‌شود که هر نمودار جدید، بدون حذف نمودارهای قبلی، به شکل اضافه شوند.

2- الف)

دستور randi: این دستور برای تولید ماتریس با درایه‌های طبیعی تصادفی به‌کار می‌رود. ورودی اول این دستور بزرگترین عدد طبیعی قابل قبول را تعیین می‌کند و ورودی‌های دوم و سوم ابعاد ماتریس مورد نظر هستند. بنابراین،

```
>> I=randi (imax,m,n)
```

ماتریس $m \times n$ با درایه‌های تصادفی طبیعی در بازه‌ی $[0, i\max]$ تولید می‌کند.

دستور find: این دستور، اندیس درایه‌هایی از یک بردار یا ماتریس را که دارای یک شرط مشخص هستند گزارش می‌دهد. اگر شرط خاصی تعیین نشود، به صورت پیش فرض اندیس داریه‌های مثبت مشخص می‌شود.

برای ماتریس‌ها، اگر دو خروجی به دستور اختصاص داده شود، در خروجی اول و دوم به ترتیب اندیس سطر و ستون درایه‌های دارای شرط گزارش می‌شود. اما اگر یک خروجی اختصاص داده شود، درایه‌های ماتریس به صورت ستون به ستون از بالا به پایین اندیس گذاری می‌شوند. به عنوان نمونه،

```
>> z=rand(3)
z =
   0.9595   0.8491   0.7577
   0.6557   0.9340   0.7431
   0.0357   0.6787   0.3922

>> find(z>0.8)
ans =
    1
    4
    5
```

```
>> [i,j]=find(z>0.8)
i =
   1
   1
   2


j =
   1
   2
   2
```

ب و پ)

```
function [A,I0,J0,I1,J1]=calc01(m,n)
i=randi(m,1);
j=randi(n,1);
I=randi(m,1,i);
J=randi(n,1,j);
A=zeros(m,n);
A(I,J)=ones(i,j);
[I0,J0]=find(A==0);
[I1,J1]=find(A==1);
```

در مورد این برنامه، به نکات زیر توجه کنید:

- برای این‌که اعداد i و j در بازه‌ی مناسب باشند، آن‌ها را اعداد تصادفی به ترتیب در بازه‌ی $[1,m]$ و $[1,n]$ انتخاب می‌کنیم.
- می‌دانیم که منظور از $A(i1:i2, j1:j2)$ درایه‌هایی از ماتریس A است که اندیس سطر و ستون آن‌ها به ترتیب در بازه‌ی $i1:i2$ و $j1:j2$ قرار دارد. به طور مشابه می‌توان به جای $i1:i2$ و $j1:j2$ هر دو بردار سطری I و J را قرار داد. به این ترتیب منظور از `A(I,J)` درایه‌هایی از ماتریس است که اندیس سطر و ستون آن‌ها به ترتیب عضو بردار `I` و `J` است.
همچنین، با قرار

```
A(I,J)=ones(i,j);
```

همه‌ی درایه‌های این زیرماتریس برابر با یک قرار می گیرند. به طور معادل، در این برنامه می‌توان به جای

```
A(I,J)=ones(i,j);
```

قرار داد

```
for p=1:i
    for q=1:j
        A(I(p),J(q))=1;
    end
end
```

3- اگر ماتریس V وارون‌پذیر نباشد، آن‌گاه بردار $z \neq 0$ وجود دارد به طوری که $Vz = 0$. یعنی،

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

پس با تعریف $p(x) = z_1 + z_2 x + \cdots + z_n x^{n-1}$ داریم

$$p(x_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, n\,,$$

یعنی $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی $n-1$ است که دارای n ریشه‌ی $\underset{i=1,\cdots,n}{x_i}$ است، و باید برابر با صفر باشد و بنابراین

$$z_i = 0 \Rightarrow z = 0.$$

4-

X	y				
-3	$121\,(c_1)$				
		$-58\,(c_2)$			
-1	5		$18\,(c_3)$		
		-4		$-3\,(c_4)$	
0	1		3		$1\,(c_5)$
		5		3	
2	11		15		
		50			
3	61				

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{i-1}) = 121 - 58(x+3) + 18(x+3)(x+1) - 3(x+3)(x+1)(x) + (x+3)(x+1)(x)(x-2)$$

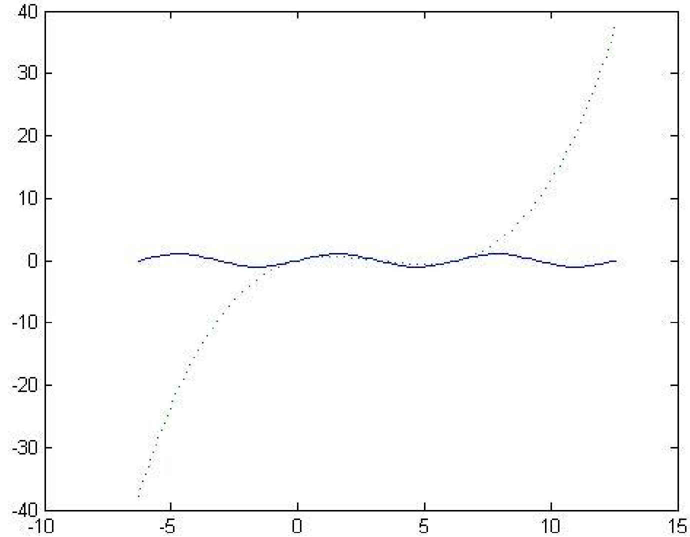
5- (الف)

x	y			
a	fa			
		$p'(a)=da$		
a	fa		$\dfrac{fp-da}{b-a}$	
		$\dfrac{fb-fa}{b-a}(=fp)$		$\dfrac{db-2fp+da}{(b-a)^2}$
b	fb		$\dfrac{db-fp}{b-a}$	
		$p'(b)=db$		
b	fb			

```
function [c1,c2,c3,c4]=Cinterp(a,b,fa,fb,da,db)
c1=fa;
c2=da;
fp=(fb-fa)/(b-a);
c3=(fp-da)/(b-a);
c4=(db-2*fp+da)/(b-a)^2;
```

(ب)

```
a=0;
b=2*pi;
fa=sin(a);
fb=sin(b);
da=cos(a);
db=cos(b);
[c1,c2,c3,c4]=Cinterp(a,b,fa,fb,da,db);
x=linspace(-2*pi,4*pi);
y=sin(x);
yapprox=c4*ones(1,100);
yapprox=yapprox.*(x-b)+c3;
yapprox=yapprox.*(x-a)+c2;
yapprox=yapprox.*(x-a)+c1;
plot(x,y,x,yapprox,':')
```



شکل نشان می دهد که خطا در بازه‌ی درونیابی قابل قبول است. اما در خارج از بازه خطا زیاد است و تقریب مناسب نیست.

موفق باشید