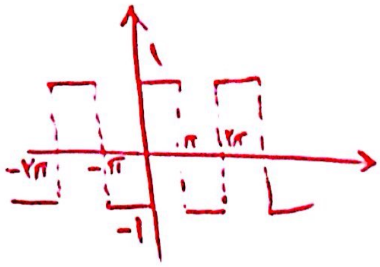
SS Se 7 Dr. Behrouzi ۱۳۹۳/۱۲/۲

مثال:




$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\tau)d\tau = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{2\pi}t\right)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\sin t\, dt + \int_{0}^{\pi} \sin(nt)\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases} \qquad x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t \ldots\right)$$

مثلاً $t = \pi/2 \Rightarrow x(t) = 1 = \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right] \Rightarrow \boxed{\pi/4 = \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots\right]}$

$$t = \pi/4 \Rightarrow 1 + 1/3 - 1/5 - \frac{1}{7} + 1/9 + 1/11 - \ldots = \pi/2\sqrt{2}$$

تمرین ۱: ۴

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + 1/9 + 1/25 + \ldots$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$$

* در به دست آوردن ثابت انتگرال گیری می توان از یک نقطه که مقدار آن را می دانیم با جایگذاری در معادله استفاده کرد.

تمرین ۲: ۴

$x(t) = t^2$, $0 \le t < 2$, $T = 2$ $\xrightarrow{\text{نشان دهید}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \pi^2/6$ , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

## محاسبه‌ی پاسخ فرکانسی :

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega_0 t}$$

تابع ویژه LTI

$H(j\omega)$ : مقدار ویژه

$F\{h(t)\}$ ← تبدیل فوریه‌ی پاسخ ضربه

همان پاسخ فرکانسی سیستم LTI است

---

مثال : پاسخ فرکانسی سیستم $y(t)=\frac{1}{M}\int_{t-M}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$ را بیابید.

$x(t)=e^{j\omega t}$

$$y(t)=\frac{1}{M}\int_{t-M}^{t} e^{j\omega\lambda}\,d\lambda=\frac{1}{M}\,\frac{1}{j\omega}\,e^{j\omega\lambda}\Big|_{t-M}^{t}=\frac{1-e^{-j\omega M}}{j\omega M}\,e^{j\omega t}$$

---

مثال : $y(t)=x(t-T)$

$$x(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow y(t)=e^{j\omega(t-T)}=e^{j\omega t}\,e^{j\omega T}=H(j\omega)\,e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega)=e^{-j\omega T}}$$

---

مثال :

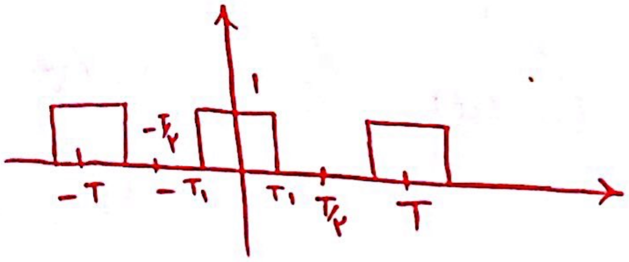
$$y[n]-y[n-2]=x[n]+x[n-1]+x[n-3]$$

$$x[n]=e^{j\omega n}\xrightarrow{LTI} y[n]=H(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow x[n]=e^{j\omega n}\Rightarrow H(e^{j\omega})e^{j\omega n}-H(e^{j\omega})e^{j\omega(n-2)}=e^{j\omega n}+e^{j\omega(n-1)}+e^{j\omega(n-3)}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega})=\frac{1+e^{-j\omega}+e^{-j\omega 3}}{1-e^{-j2\omega}}}$$

محاسبه ضرایب سری فوریه‌ی پالس مستطیلی متناوب :




$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\,\frac{1}{-jk\omega_0}\, e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{k\omega_0 T (j)} =$$

$$\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T \times \frac{T_1}{T_1}} = \boxed{\frac{2T_1}{T}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2T_1}{T}\, \mathrm{sinc}\left(2k\frac{T_1}{T}\right) e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

---

شرط‌های کافی برای وجود داشتن سری فوریه (همگرا شدن سری فوریه) :

۱) اگر انرژی یک سیگنال متناوب محدود باشد. (در یک دوره) $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$

۲) سه شرط دیریکله (Dirichlet) :

← اگر سه شرط زیر برقرار باشد $x(t)$ و سری فوریه‌ی آن با هم برابرند. بجز در نقاط ناپیوستگی که در آنجا سری فوریه به مقدار متوسط قبل و بعد از آن میل می‌کند.

۱) مطلقاً انتگرال پذیر باشد. $\int_T |x(t)|\,dt < \infty \longrightarrow$

نتیجه از شرط : $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow |a_k| \leq \frac{1}{T}\int |x(t) e^{-jk\omega_0 t}|\, dt =$

$$= \frac{1}{T}\int |x(t)|\, dt < \infty$$

۲) تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم در بازه‌ی زمانی محدود T محدود باشد.

۳) تعداد نقاط ناپیوستگی $x(t)$ در یک بازه‌ی محدود T، محدود باشد و علاوه بر آن مقادیر ناپیوستگی نیز محدود باشد.

---

* مهم * برای اثبات وجود نداشتن سری فوریه از هیچکدام از این شرایط می‌توان استفاده کرد!

---

مثال ۱:

$x(t) = \frac{1}{t} \quad 0 < t \leq 1 \quad T = 1$

$\int_0 |x(t)|\,dt$ ⟵ محدود نیست ⟵ شرط اول را نقض می‌کند ⟵ (البته لزومی ندارد که سری فوریه نداشته باشد، تنها می‌دانیم وجود سری فوریه را بنابر شرط اول نمی‌توان ثابت کرد.)

---

مثال ۲:

$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \quad 0 < t \leq 1 \quad T = 1$

شرط دوم در یک لحظه را نقض می‌کند.

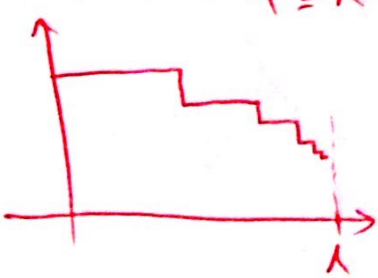
* ولی بنابر شرط اول سری فوریه دارد.

---

مثال ۳:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ 1/2 & 4 \leq t < 6 \\ 1/4 & 6 \leq t < 7 \\ 1/8 & 7 \leq t < 7.5 \end{cases}$$

$T = 8$




شرط سوم در یک لحظه را نقض می‌کند.

دو قضیه‌ی مهم در رابطه با شرایط دیریکله :

قضیه‌ی ۱ : اگر $x(t)$ در شرایط دیریکله صدق کند می‌توان از بسط سری فوریه‌ی $x(t)$ بصورت جمله به جمله انتگرال گرفت و حاصل بسط فوریه انتگرال تابع است .

قضیه‌ی ۲ : اگر $x'(t)$ وجود داشته باشد و $x(t)$ و $x'(t)$ هر دو در شرایط دیریکله صدق کنند در اینصورت اگر از بسط سری فوریه‌ی $x(t)$ بصورت جمله به جمله مشتق بگیریم حاصل بدست آمده بسط سری فوریه‌ی مشتق تابع است .

---

خواص ضرایب سری فوریه : ( از این خواص برای چک کردن جواب بدست آمده استفاده می‌کنیم . )

۱) خطی بودن :

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$y(t) \longleftrightarrow b_k$

$$z(t) = A x(t) + B y(t) \longleftrightarrow c_k = A a_k + B b_k$$

---

۲) شیفت زمانی :

$$x(t) \Longleftrightarrow a_k \qquad x(t-t_d) \longleftrightarrow \underbrace{e^{-jk\omega_0 t_d} a_k}_{b_k}$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t-t_d)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(\lambda)\, e^{-jk\omega_0(\lambda+t_d)}\, d\lambda$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_d}\, \frac{1}{T}\int_T x(\lambda)\, e^{-jk\omega_0 \lambda}\, d\lambda = a_k\, e^{-jk\omega_0 t_d}$$

$$\begin{cases} |b_k| = |a_k| \\ \measuredangle b_k = \measuredangle a_k - k\omega_0 t_d \end{cases}$$

۳)

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x(-t) \longleftrightarrow b_k = a_{-k}$

$$y(t) = \sum b_k e^{jk\omega_0 t} = \sum a_k e^{-jk\omega_0 t} \underset{k=-m}{=} \sum_m a_{-m} e^{jm\omega_0 t}$$

---

۴)

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$x^*(t) \longleftrightarrow a^*_{-k}$

← اگر $x(t)$ حقیقی باشد $a^*_{-k} = a_k$

$\boxed{a_{-k} = a^*_k}$ → conjugate symmetry

تقارن مزدوج

$|a_k|$ زوج

$\measuredangle a_k$ فرد

$Re\{a_k\}$ زوج

$Im\{a_k\}$ فرد

← اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد: ⟷ $a_k$ موهومی خالص و فرد

← اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد ⟷ $a_k = a^*_{-k} = a_{-k}$ حقیقی و زوج

---

۵)

← $x(t) \longleftrightarrow a_k$, $x(\alpha t) \longleftrightarrow a_k$

$$x(\alpha t) = \sum a_k e^{jk\omega_0(\alpha t)} = \sum a_k e^{jk\alpha\omega_0 t}$$

← نمایش سری فوریه تغییر کند. یعنی:

$$\begin{cases} \alpha\omega_0 \Leftarrow \omega_0 \\ \frac{T}{\alpha} \Leftarrow T \end{cases}$$ ولی ضرایب عوض نمی شود.

۴) هر دو پریود یکسان T دارند:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \longleftrightarrow a_k \\ y(t) \longleftrightarrow b_k \end{array}\right\}$$

$$h(t) = x(t)\,y(t) \longleftrightarrow h_k = a_k * b_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\, b_{k-l}$$

$$x(t)\,y(t) = \sum_{l} a_l\, e^{jl\omega_0 t} \sum_{m} b_m\, e^{jm\omega_0 t} = \sum \sum a_l\, b_m\, e^{j(l+m)\omega_0 t}$$

$$\underset{l+m=k}{=} \sum_{k} \underbrace{\left(\sum_{l} a_l\, b_{k-l}\right)}_{h_k} e^{jk\omega_0 t}$$

---

۷)

$$\int_T x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \longleftrightarrow T a_k b_k$$

$$= x(t) \circledast y(t)$$

کانولوشن داریم

اثبات:

$$\begin{array}{l} x(t) \longleftrightarrow a_k \\ y(t) \longleftrightarrow b_k \end{array} \qquad z(t) = x(t) \circledast y(t) \Longleftrightarrow c_k$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T \left(x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau\right) e^{-jk\omega_0 t} =$$

$$\frac{1}{T}\int_T\int_T x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau\; e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \int_T \frac{1}{T}\left[\int_T y(t-\tau)\, e^{-jk\omega_0 (t-\tau)}\, dt\right] x(\tau)\, e^{-jk\omega_0 \tau}\, d\tau$$

$$= \int_T b_k \times x(\tau)\, e^{-jk\omega_0 \tau}\, d\tau = b_k T a_k = T a_k b_k$$