DATE / / SUBJECT:

دوشنبه ۲ آذر میان ترم

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید نقاط $x_0, \dots, x_n$ $(n+1)$ داده شده باشد. $f(x_0), \dots, f(x_n)$ مقادیر تابع در نقاط مفروض باشد در این صورت تفاضلات تقسیم شده از مرتبه‌های مختلف به صورت زیر تعریف می‌شوند

$f[x_k] = f(x_k)$ ← تفاضلات تقسیم شده مرتبه ۰

$k = 0,1,\dots,n$

مرتبه ۱ ← $f[x_k, x_{k+1}] = \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$, $k = 0,1,\dots,n$

مرتبه ۲ ← $f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \dfrac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \to k = 0,1,\dots,n-2$

مرتبه j ← $f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] = \dfrac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] - f[x_k, \dots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}$

DATE / / SUBJECT:

$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$ ✓

$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_2, x_0, x_1] = \dots$ تمرین

x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$	
x_0	$f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

درون یابی نیوتن

مثال) جدول تقسیم شده برای تابع f که مقادیر آن به صورت زیر است را بدست آورید:

x	۱	۲	۴	۸
$f(x)$	۱	۳	۷	۱۱

	x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$
x_0	۱	۱	
x_1	۲	۳	۲
x_2	۴	۷	۲
x_3	۸	۱۱	۱

$\frac{۳-۱}{۲-۱} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$

$\frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$

	x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$
x_0	۱	۱	
x_1	۲	۳	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = ۲$
x_2	۴	۷	$f[x_1, x_2] = ۲$
x_3	۸	۱۱	$f[x_2, x_3] = ۱$

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} =$

$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-۱}{۶}$

$\frac{-۱}{۶} - \cdot$

درون یابی نیوتن

فرض کنید n+1 نقطه $x_0, x_1, \ldots, x_n$ مفروض باشند و $f(x_0), \ldots, f(x_n)$

مقادیر تابع در نقاط مفروض باشند در این صورت چندجمله‌ای درون یاب نیوتن

(حداکثر n) به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$P_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

$$i=0 \rightarrow P(x_0) = f(x_0) = f[x_0] \longleftarrow f(x_k) = f[x_k]$$

$$i=1 \rightarrow P(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) =$$

$$f(x_1) \rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$i=2 \rightarrow P(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f[x_0, x_2] - \overset{f[x_1, x_0]}{f[x_0, x_1]}}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_0, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_n)$$

مثال) با استفاده از درون یابی نیوتن چندجمله‌ای درون یاب تابع f را بیابید:

x	۱ (x_0)	۲ (x_1)	۴ (x_2)	۸ (x_3)
$f(x)$	۲	۳	۷	۱۱

x	$f(x)$			
۱	۱			
۲	۳	۲		
۴	۷	۲	۰	
۸	۱۱	۱	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{42}$

$$P_3(x) = 1 + 2(x-1) + 0(x-1)(x-2)$$

$$\left(\frac{-1}{42}\right)(x-1)(x-2)(x-4)$$