SS Dr. Behrouzi Se6 ۹۳/۱۱/۲۷

توابع پایه و نمایش سیگنال ها برحسب آنها :

$x(t+T_0) = x(t)$

$x(t+KT_0) = x(t) \quad \forall K \in \mathbb{Z}$ ⟵ سیگنال متناوب با دوره تناوب T_0

هدف : بدست آوردن تقریبی از سیگنال $x(t)$ برحسب مجموعه ای از توابع پایه $\varphi_K(t)$ بطوریکه :

$$\hat{x}(t) = \sum_{K=1}^{N} a_K \varphi_K(t)$$

$$\hat{x}(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} x(t)$$

تعریف ضرب داخلی در سیگنال توان :

⟵ اگر $x_1(t)$, $x_2(t)$ سیگنال توان باشند :

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)\, x_2^*(t)\, dt$$

⟵ درحالت خاص که $x_1(t)$, $x_2(t)$ متناوب با دوره تناوب مشترک T_0 باشند :

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_1(t)\, x_2^*\, dt$$

$$\|x(t)\|^2 \triangleq \langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt$$

تعامد دو سیگنال :

$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = 0 \iff$ x_1, x_2 متعامدند.

← تابع Normal ← تابع یکه $\|x(t)\|^2 = 1$

← مجموعه‌ی توابع متعامد یکه (orthonormal) :

← مجموعه‌ی توابع $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ و ... را مجموعه‌ی توابع متعامد یکه گویند هرگاه :

۱) همه‌ی اعضای آنها دو به دو متعامد باشند. ۲) همه‌ی اعضای آن نرمال باشند.

$$\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_T \varphi_i(t)\, \varphi_j^*(t)\, dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$= \boxed{\delta_{i,j} = \delta[i-j]}$$

← بعنوان مثال : مجموعه توابع $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ برای $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ روی هر بازه‌ی $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$

که $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ یک مجموعه‌ی توابع متعامد یکه است.

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots\} \longrightarrow$$ در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ متعامدند.

هدف : تعیین ضرایب a_k بطوریکه $\hat{x}(t) = \sum a_k \varphi_k(t)$:

$$\varepsilon = \|x - \hat{x}\|^2 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t) - \hat{x}(t)|^2\, dt \longrightarrow$$ مینیمم شود.

MMSE

(Minimum mean squared error)

$$a_k = \langle x(t), \varphi_k(t) \rangle$$

نتیجه:

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, \varphi_k^*(t)\, dt$$

$$\left(x(t) - \sum a_k \varphi_k(t)\right)\left(x^*(t) - \sum a_k^* \varphi_k^*(t)\right)$$

$$\varepsilon = \|x - x_0\|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left| x(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(t) \right|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

$$- \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \varphi_k(t)\, x^*(t)\, dt - \sum_{k=1}^{N} a_k^* \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, \varphi_k^*\, dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_j a_k^* \times \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \varphi_j(t)\, \varphi_k^*(t)\, dt$$

$$\varepsilon = \|x(t)\|^2 - \sum_{k=1}^{N} a_k \langle \varphi_k(t), x(t) \rangle - \sum_{k=1}^{N} a_k^* \langle x(t), \varphi_k(t) \rangle + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$$

← جمله ی $\sum_{k=1}^{N} |\langle x(t), \varphi_k(t) \rangle|^2$ را یکبار اضافه و یکبار کم می‌کنیم:

$$\varepsilon = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left\{ |a_k|^2 - a_k^* \langle x, \varphi_k \rangle - a_k \underbrace{\langle \varphi_k, x \rangle}_{\langle x, \varphi_k \rangle^*} + |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \right\}}_{|a_k - \langle x, \varphi_k \rangle|^2 = (a_k - \langle x, \varphi_k \rangle)(a_k^* - \langle x, \varphi_k \rangle^*)}$$

$$\varepsilon = \|x(t)\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k - \langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

← برای مینیمم کردن ε ، a_k ها باید طوری انتخاب شوند که

$$a_k = \langle x, \varphi_k \rangle$$

پس $$\varepsilon_{min} = \|x(t)\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x(t), \varphi_k(t) \rangle|^2$$

$$\varepsilon_{min} \geq 0 \qquad \|x(t)\|^2 \geq \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$$

→ رابطه ی بسل

$$\varepsilon_{min} \to 0,\quad N \to \infty \implies \|x(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x(t), \varphi_k(t)\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

رابطه‌ی پارسوال

فصل ۳ : نمایش سری فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب :

در فصل قبل : هر سیگنال دلخواهی را به صورت مجموعه‌ای از توابع ضربه شیفت یافته نمایش دادیم .
و طبق جمع آثار در صورت داشتن پاسخ ضربه سیستم توانستیم خروجی سیستم را به ازای هر ورودی دلخواه بیابیم

⟸ در این فصل :

یک مجموعه سیگنال‌های پایه معرفی می‌کنیم که می‌توان هر سیگنال متناوبی را به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها نوشت و سپس نشان می‌دهیم که خروجی سیستم LTI به هر ورودی متناوب به راحتی از قضیه‌ی جمع آثار بدست می‌آید.

سیگنال‌های نمایی مختلط e^{st} ← s مختلط

↓

توابع ویژه (eigen function)

$$Q_K(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}}_{\,h(t)} \longrightarrow \underbrace{\lambda_K}_{\text{مقدار ویژه}} Q_K(t)$$

تابع ویژه e^{st}

مقدار ویژه (eigen value)

برای سیستم‌های LTI هستند.

⟸ اگر سیگنالی به یک سیستم LTI اعمال شود به طوری که خروجی به صورت ضرب همان سیگنال ورودی در یک عدد مختلط باشد به آن تابع، تابع ویژه سیستم LTI گویند.

$$x(t) = e^{st}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$H(s)$ ← تبدیل لاپلاس

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow z^n H(z)$$

تک متغیر
مختلط

$$y[n] = \sum h[k]\, x[n-k] = \sum h[k]\, z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k} \rightarrow H(z)$$

$$x(t) = \sum a_k e^{s_k t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \boxed{y(t) = \sum a_k H(s_k)\, e^{s_k t}}$$

متناوب

سری فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب:

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad s = j\omega$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t}}$$

$$a_k = \langle x(t), \varphi_k(t) \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, \varphi_k^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

← اندیس‌های $k = \pm N$ بیانگر Nامین هارمونیک سیگنال هستند.

← $k = 0$ مؤلفه‌ی DC

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, dt$$

$$\int e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} T_0 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

* با فرض اینکه می‌دانیم $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$\xrightarrow[e^{-jn\omega_0 t}]{\text{ضرب در}} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} = \sum a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \xrightarrow[\text{پریود}]{\text{انتگرال روی یک}} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt =$$

$$\sum a_k \int e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt = a_n \times T_0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{T_0}\int x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}$$

۵

اگر $x(t)$ حقیقی باشد

$$x(t) = x^*(t)$$

$$\to x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} = \sum a_k e^{jk\omega_0 t}$$

conjugate symetry

$$\Rightarrow a_{-k} = a_k^*$$

تقارن زوج

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = a_0 + ۲\sum_{k=1}^{\infty} Re\{a_k e^{j\omega_0 k t}\} \quad , a_k = b_k + c_k j$$

$$x(t) = a_0 + ۲\sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \cos(\omega_0 k t) - c_k \sin(k\omega_0 t)\right)$$