

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری دوم محاسبات عددی

تاریخ تحویل: ۹۳/۹/۰۴

* لطفاً برگه‌های تحویلی شامل حل دستی تمرینات و پرینت متن برنامه‌ها باشد. (به برنامه‌های دست‌نویس نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد).

* ترجیحاً تمرین را به صورت حضوری تحویل دهید. اما در صورتی که تمرین را ایمیل می‌کنید، لطفاً همه‌ی تمرینات شامل اسکن صفحات دست‌نویس و فایل برنامه‌ها، در یک پوشه با نام StudentID.rar قرار گیرند. (به جای StudentID شماره‌ی دانشجویی خود را بنویسید). این پوشه را به آدرس

nc.1393.1@gmail.com

ایمیل کنید.

۱. (۲۰ نمره)

(الف) یک درونیاب قطعه‌ای خطی را برای تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$ در بازه‌ی $[0.8, 1.2]$ بدست آورید، به طوری که خطا کمتر از ۰.۰۱ باشد.

(ب) اگر یکی از نقاط شکست را برابر با ۱ بگیرید درونیاب قطعه‌ای خطی چگونه تغییر می‌کند.

نتیجه: با توجه به اینکه مقدار مشتق دوم در نقطه‌ی ۱ زیاد است، بهتر است این نقطه جزو نقاط شکست باشد.

۲. (۲۰ نمره) با استفاده از نرم افزار MATLAB برنامه‌ای بنویسید که اسپلاین کامل متناظر با نقاط (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$

و شرط‌های $q'(x_1) = \alpha$ و $q'(x_n) = \beta$ را محاسبه کند. (توجه کنید که ورودی‌ها بردارهای $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ و مقادیر α و β هستند و خروجی‌های برنامه بردارهای a ، b ، c و d هستند شامل ضرایب

چند جمله‌ای‌های $q_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3(x - x_{i+1})$ که در آن $a_i = y_i$ ، $b_i = s_i$ ،
 $c_i = \frac{yp_i - s_i}{\Delta x_i}$ و $d_i = \frac{s_i + s_{i+1} - 2yp_i}{\Delta x_i^3}$.

۳. (۲۰ نمره)

(الف) می‌دانیم دستور `spline` برای محاسبه‌ی اسپلاین `not-a-knot` به کار می‌رود. به ازای نقاط دلخواه

$(x_i, f(x_i))$ ، این دستور را به صورت
 $i = 1, \dots, n$

>> S=spline(X,Y)

اجرا کنید (نقاط و تابع را به دلخواه انتخاب کنید). حال قرار دهید

>> [x,c]=unmkpp(S)

توضیح دهید این دستور چه کاری انجام می‌دهد.

(ب) نمودار این اسپلاین و تابع را در بازه‌ی $[min(x_i), max(x_i)]$ رسم کنید. برای حل مساله‌ی برون‌یابی می‌توانید از دستور `ppval` نرم افزار `MATLAB` کمک بگیرید.

۴. (۱۰ نمره)

(الف) مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^1 \sin \pi x \, dx$ را با استفاده از فرمول نیوتن کوته مرتبه ۳ (سیمپسون) محاسبه کنید. کرانی برای خطای این تقریب معرفی نمایید.

(ب) اگر بخواهیم با استفاده از فرمول نیوتن کوته مرتبه ۳ مرکب، مقدار تقریبی این انتگرال را محاسبه کنیم به طوری که خطای تقریب کمتر از 10^{-4} باشد، بازه $[0, 1]$ باید به چند قسمت تقسیم شود؟

۵- (۱۰ نمره) کوادراتور نیوتن کوتاه با فرم کلی $Q^{(m)} = (b-a) \sum_{i=1}^m w_i f(x_i)$ را برای تقریب

$I = \int_a^b f(x) dx$ در نظر بگیرید. ثابت کنید

$$i) \sum_{i=1}^m w_i = 1$$

$$ii) \sum_{i=1}^m w_i x_i = \frac{a+b}{2}$$

موفق باشید