بسمه تعالی

نام و نام خانوادگی : نوید نادری علی زاده - شماره ی دانشجویی : ۸۶۱۰۸۷۴۴ - رشته : مهندسی برق -
گروه : ۱ - زیر گروه : ۲ - تاریخ انجام آزمایش : ۸۷/۱/۲۴ - ساعت : ۱۰:۳۰ -
دستیار آموزشی : خانم فضل علی

آزمایش شماره ی ۵

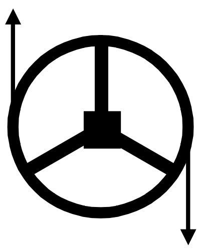
عنوان آزمایش: تعادل اجسام

هدف: در این آزمایش ، به بررسی قانون جمع بردارها و شرط تعادل اجسام خواهیم پرداخت.

وسایل مورد نیاز: میز نیرو ، چهار قرقره ، خط کش یک متری چوبی ، نیرو سنج ، دو پایه ی فلزی همراه گیره های آن ، چهار جاوزنه ای (کفه) ، وزنه های کوچک ، ترازو و تراز .

نظریه :

به طور کلی ، کمیت ها در علم فیزیک از منظری خاص به دو دسته ی نرده ای (اسکالر) و برداری تقسیم بندی می شوند . کمیت های نرده ای فقط دارای اندازه هستند و جهتی برای آنها تعریف نمی شود مثل جرم ، دما ، زمان ، طول و ... . در این میان کمیتی مثل جریان الکتریکی یک استثنا است که با وجود جهت دار بودن ، نرده ای است چون که از قانون جمع بردارها پیروی نمی کند . در مقابل ، کمیت های برداری هستند که علاوه بر اندازه ، جهت نیز دارند و از قانون جمع بردارها پیروی می کنند . بسیاری از کمیت هایی که ما با آنها سر و کار داریم ، برداری هستند ؛ مثل سرعت ، نیرو ، وزن ، گشتاور ، شتاب و ... . در این آزمایش ، ما با دو کمیت برداری نیرو و گشتاور کار خواهیم کرد .



برای اینکه جسمی در حال تعادل باشد ، دو شرط باید برقرار باشد : نخست اینکه برآیند نیروهای وارد بر جسم باید برابر صفر باشد . واضح است که این شرط کافی نیست ؛ برای مثال ، می توان به فرمان ماشین اشاره کرد که اگر نیرویی به سمت راست فرمان به سوی پایین و نیرویی به همان اندازه اما به سوی بالا به سمت چپ فرمان وارد کنیم (مطابق شکل روبرو) ، با اینکه برآیند نیروهای وارد بر فرمان صفر است ، اما فرمان حرکت می کند .

این مثال و سایر مثال های مشابه ، نشان می دهند که شرط دومی باید برای تعادل جسم برقرار باشد که این شرط مربوط به حرکت دورانی جسم است . شرط دوم تعادل جسم این است که برآیند گشتاورهای وارد بر جسم حول هر محور دلخواه باید برابر صفر باشد . گشتاور یک نیرو حول یک محور ، به نقطه ی اثر نیرو وابسته است . اگر بردار واصل مبدا به نقطه ی اثر نیرو را با $\vec{r}$ و بردار نیرو را با $\vec{F}$ نشان دهیم ، گشتاور نیرو به این صورت تعریف می شود :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

بنابراین اگر دو نیروی مثال قبل ، به یک نقطه وارد شود ، گشتاور دو نیرو ، قرینه ی هم خواهند شد و در نتیجه گشتاور کل صفر است و فرمان هیچ گونه حرکتی نخواهد کرد .

پس دو شرط تعادل اجسام به این صورت خواهد بود :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad , \quad \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

روش انجام آزمایش :

۱- جمع بردارها و تعادل انتقالی

(۱- الف) *برآیند دو بردار* : سه قرقره ی A ، B و C را بر روی میز نیرو قرار می دهیم . از نخ قرقره ی A ، وزنه ای به جرم حدود ۱۰۰ گرم و از نخ قرقره ی B ، وزنه ای به جرم حدود ۲۰۰ گرم قرار می دهیم . سپس زاویه ی بین دو قرقره ی A و B را به ۹۰ درجه می رسانیم . با این کار ، حلقه از وضع تعادل منحرف می شود ؛ برای تعادل حلقه به نخ روی قرقره ی C آنقدر وزنه اضافه می کنیم و آنقدر آنرا بر روی میز جابجا می کنیم تا حلقه به حال تعادل برسد . در این حالت ، جرم وزنه های آویخته شده از نخ قرقره ی C و زاویه ی بین نخ های قرقره های A و C را یادداشت می کنیم .

(۱- ب) تعادل انتقالی: چهار قرقره ی A تا D را بر روی میز قرار می دهیم . از نخهای قرقره های A ، B ، C و D به ترتیب وزنه هایی به اجرام تقریبی ۱۰۰ ، ۲۰۰ ، ۱۰۰ و ۵۰ گرم قرار می دهیم . قرقره های A و B را کاملا مقابل هم قرار می دهیم و قرقره های C و D را آنقدر جابجا می کنیم تا حلقه ی وسط میز به حال تعادل برسد . در این حالت به ترتیب زوایای بین نخهای قرقره های (A و C) و (B و D) را یادداشت می کنیم . بدیهی است که این آزمایش بیش از یک جواب می تواند داشته باشد چون کافیست برآیند مولفه های افقی نیروهای C و D صفر شود .

۲- جمع بردارها و تعادل دورانی:

قبل از انجام آزمایش های این بخش ، طول خط کش را بطور کامل اندازه می گیریم .

(۲- الف) تعیین جرم (و چگالی طولی) خط کش : نیرو سنجی را از فاصله ی یک سانتی متری سری از خط کش که دورتر از تکیه گاه است ، آویزان می کنیم و آنقدر نیروسنج را در راستای افقی و عمودی جابجا می کنیم که اولا نیروسنج کاملا در راستای قائم قرار گیرد و ثانیا ، خط کش در حالت کاملا افقی قرار داشته باشد . برای اطمینان از افقی بودن خط کش ، تراز را روی خط کش می گذاریم به طوری که وسط تراز (مرکز جرم آن) دقیقا بالای تکیه گاه باشد و وقتی که حباب تراز ، دقیقا وسط دو شاخص آن قرار گرفت ، خط کش کاملا افقی شده است . در این حالت ، نیرویی را که نیروسنج نشان می دهد و فاصله ی نقطه ی اتصال نیروسنج به خط کش تا تکیه گاه را یادداشت می کنیم .

(۲- ب) تعادل خط کش ۱ : وزنه ای به جرم حدود ۵۵۰ گرم را در فاصله ی ۳۵ سانتی متری سمتی از تکیه گاه که نیروسنج هم در همان سمت است ، قرار می دهیم . آنقدر پایه ی متصل به نیروسنج را در راستای افقی جابجا می کنیم تا خط کش کاملا به حالت افقی در آید . افقی بودن خط کش را با تراز تحقیق می کنیم . در این حالت ، عددی را که نیروسنج نشان می دهد و زاویه ای را که نیروسنج با راستای قائم می سازد ، یادداشت می کنیم . برای محاسبه ی زاویه ، طول وتر و ضلع مقابل به زاویه را با خط کش محاسبه کرده ، با تقسیم آنها بر هم ، سینوس زاویه ، حاصل می شود .

(۲- ج) تعادل خط کش ۲ : وزنه ای به جرم حدود ۵۰۰ گرم را در فاصله ی ۳۵ سانتی متری سمتی از تکیه گاه که نیروسنج هم در همان سمت است و وزنه ای به جرم حدود ۶۵۰ گرم را در فاصله ی ۲۰ سانتی متری سمت دیگر تکیه گاه قرار می دهیم . آنقدر پایه ی نیروسنج را جابجا می کنیم تا خط کش کاملا افقی شود . در این حالت ، نیروی نشان داده شده توسط نیروسنج و زاویه ی بین نیروسنج با راستای قائم را محاسبه می کنیم .

جداول :

جدول ۱ - برآیند دو بردار (نیرو)

T_A (grf)	T_B (grf)	T_C (grf)	θ
۱۰۰	۲۰۰	۲۲۳	۱۱۸ *deg*

جدول ۲ - تعادل انتقالی

T_A (grf)	T_B (grf)	T_C (grf)	T_D (grf)	α	β
۱۰۰	۲۰۰	۱۰۰	۵۰	۳۶ *deg*	۱۰۷ *deg*

جدول ۳ - تعیین جرم خط کش

F (N)	*OA (cm)*
۲.۱	۷۷.۵

جدول ۴ - تعادل خط کش (۱)

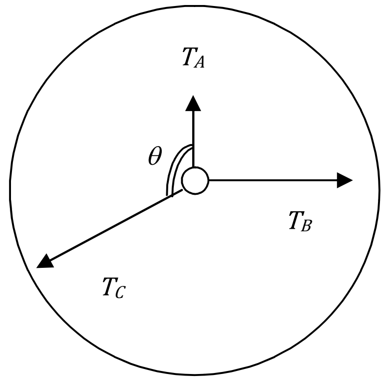
F (N)	α
۵.۰	$\approx sin^{-۱}(\frac{۱۲.۰}{۴۱.۰}) \cong$ ۱۷.۰۲ *deg*

جدول ۵ - تعادل خط کش (۲)

F (N)	β
۲.۶	$\approx sin^{-۱}(\frac{۴.۹}{۴۱.۰}) \cong$ ۶.۸۶ *deg*

خواسته ها :

خواسته ی ۱ (تحلیل داده های جدول ۱) :



شرط تعادل :

$$\sum_{i=۱}^{۳} \vec{F}_i = \vec{۰} \rightarrow \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C = \vec{۰} \rightarrow \vec{T}_C = -\vec{T}_A - \vec{T}_B$$

روش ترسیمی :

$$T_C = \sqrt{{T_A}^۲ + {T_B}^۲ + ۲T_A T_B \cos ۹۰^\circ} = \sqrt{{T_A}^۲ + {T_B}^۲} = \sqrt{(۰.۱۰۰ * ۹.۸)^۲ + (۰.۲۰۰ * ۹.۸)^۲} \cong ۰.۲۲۴ * ۹.۸ \cong ۲.۱۹۵\ N$$

$$\vec{T}_B = -\vec{T}_A - \vec{T}_C \rightarrow {T_B}^۲ = {T_A}^۲ + {T_C}^۲ + ۲T_A T_C \cos\theta \rightarrow \cdots \rightarrow \cos\theta = -\frac{۱}{\sqrt{۵}} \rightarrow \theta \cong ۱۱۷^\circ$$

روش تحلیلی :

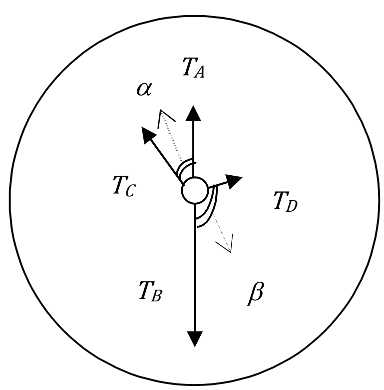
$$\vec{T}_A = ۰.۱۰۰ * ۹.۸\,\hat{j} \ ,\ \vec{T}_B = ۰.۲۰۰ * ۹.۸\,\hat{i} \rightarrow \vec{T}_C = -۰.۲۰۰ * ۹.۸\,\hat{i} - ۰.۱۰۰ * ۹.۸\,\hat{j}$$
$$\rightarrow T_C \cong ۲.۱۹۵\ N\ ,\ ۹۰^\circ + \theta = ۱۸۰^\circ + tg^{-۱}\frac{۰.۱۰۰}{۰.۲۰۰} \cong ۲۰۷^\circ \rightarrow \theta \cong ۱۱۷^\circ$$

و از آزمایش نیز بدست می آوریم :

$$T_C = ۰.۲۲۳ * ۹.۸ = ۲.۱۸۵\ N\ ,\ \theta \cong ۱۱۸^\circ$$

که مشاهده می شود که نتایج تجربی ، ترسیمی و تحلیلی تقریبا یکسانند.

خواسته ی ۲ (تحلیل داده های جدول ۲) :



شرط تعادل :

$$\Sigma_{i=۱}^{۴} \vec{F}_i = \vec{۰} \rightarrow \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C + \vec{T}_D = \vec{۰}$$

روش ترسیمی :

$$* \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C + \vec{T}_D = \vec{۰} \rightarrow \vec{T}_A + \vec{T}_C = -(\vec{T}_B + \vec{T}_D) \rightarrow |\vec{T}_A + \vec{T}_C|^۲ = |\vec{T}_B + \vec{T}_D|^۲$$

$$\rightarrow T_A{}^۲ + T_C{}^۲ + ۲T_A T_C \cos\alpha = T_B{}^۲ + T_D{}^۲ + ۲T_B T_D \cos\beta \rightarrow \cdots \rightarrow \cos\alpha - \cos\beta = \frac{۹}{۸}\ (I)$$

$$* \vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C + \vec{T}_D = \vec{۰} \rightarrow \vec{T}_A + \vec{T}_D = -(\vec{T}_B + \vec{T}_C) \rightarrow |\vec{T}_A + \vec{T}_D|^۲ = |\vec{T}_B + \vec{T}_C|^۲$$

$$\rightarrow T_A{}^۲ + T_D{}^۲ + ۲T_A T_D \cos(۱۸۰ - \beta) = T_B{}^۲ + T_C{}^۲ + ۲T_B T_C \cos(۱۸۰ - \alpha) \rightarrow \cdots \rightarrow ۴\cos\alpha - \cos\beta = \frac{۱۵}{۴}\ (II)$$

$$(I),(II) \rightarrow \cos\alpha = \frac{۷}{۸}, \cos\beta = \frac{-۱}{۴} \rightarrow \alpha \cong ۲۹°, \beta \cong ۱۰۴°$$

روش تحلیلی :

$$* \sum \vec{F}_x = \vec{۰} \rightarrow T_A \cos ۹۰ + T_B \cos(-۹۰) + T_C \cos(۹۰ + \alpha) + T_D \cos(\beta - ۹۰) = ۰$$

$$\rightarrow T_C \sin\alpha = T_D \sin\beta \rightarrow \cdots \rightarrow \sin\beta = ۲\sin\alpha\ (I)$$

$$* \sum \vec{F}_y = \vec{۰} \rightarrow T_A \sin ۹۰ + T_B \sin(-۹۰) + T_C \sin(۹۰ + \alpha) + T_D \sin(\beta - ۹۰) = ۰$$

$$\rightarrow T_A - T_B + T_C \cos\alpha - T_D \cos\beta = ۰ \rightarrow \cdots \rightarrow \cos\beta = ۲\cos\alpha - ۲\ (II)$$

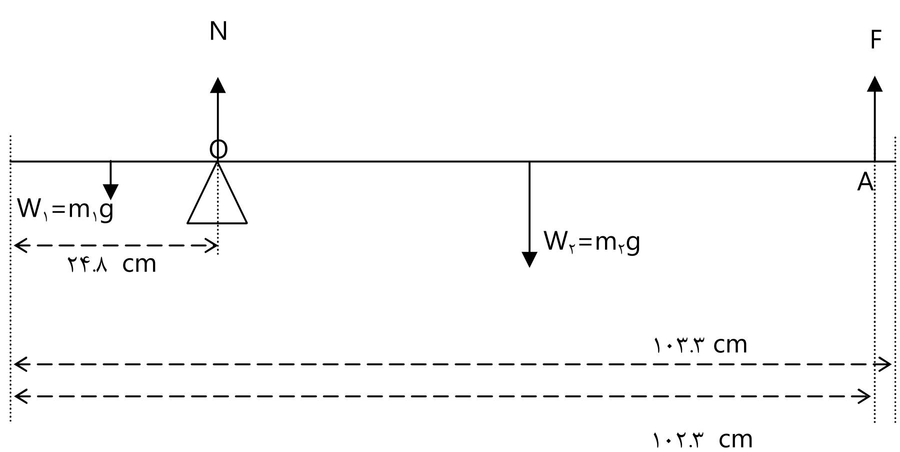
$$(I),(II) \rightarrow \cos\alpha = \frac{۷}{۸}, \cos\beta = \frac{-۱}{۴} \rightarrow \alpha \cong ۲۹°, \beta \cong ۱۰۴°$$

و از آزمایش نیز بدست می آوریم :

$$\alpha \cong ۲۶° , \beta \cong ۱۰۷°$$

باز هم دیده می شود که نتایج تا حد زیادی یکسانند ؛ خطای موجود هم به علت اصطکاک قرقره ها ، جرم نخ ها ، خطای اندازه گیری جرم وزنه ها و ... می باشد .

خواسته ی ۳ (تحلیل داده های جدول ۳) :



$m_۱ = \frac{۲۴.۸}{۱۰۳.۳} m \ , m_۲ = \frac{۷۸.۵}{۱۰۳.۳} m$

محور دوران را در روی تکیه گاه در نظر می گیریم و شرط تعادل دورانی را می نویسیم :

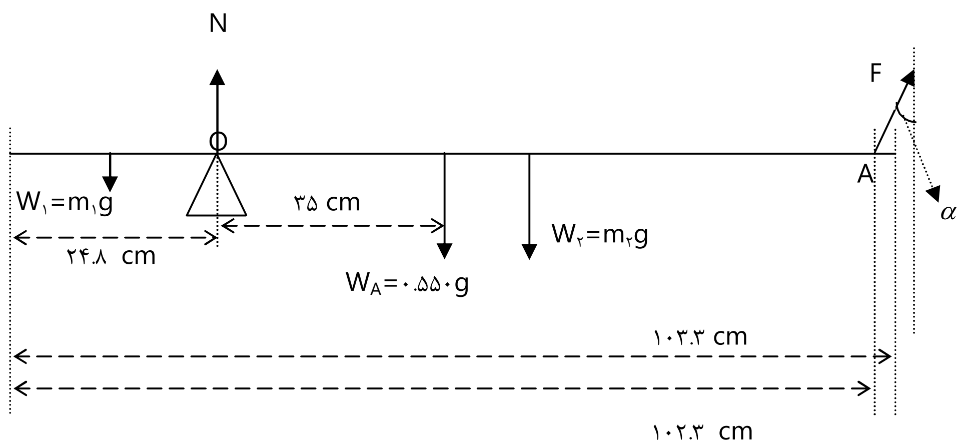
$$\sum \vec{\tau}_i = \vec{0} \rightarrow W_۱ \left(\frac{۲۴.۸}{۲}\right) * ۱۰^{-۲} - W_۲ \left(\frac{۷۸.۵}{۲}\right) * ۱۰^{-۲} + F(۱۰۲.۳ - ۲۴.۸) * ۱۰^{-۲} = ۰$$

$$\rightarrow \frac{۲۴.۸}{۱۰۳.۳} * \frac{۲۴.۸}{۲} * mg - \frac{۷۸.۵}{۱۰۳.۳} * \frac{۷۸.۵}{۲} * mg + ۷۷.۵F = ۰ \rightarrow \cdots \rightarrow \lambda = \frac{m}{۱۰۳.۳} * ۱۰۰ \cong ۰.۶ \ {kg}/{m} \ , m \cong ۰.۶ \ kg$$

خواسته ی ۴ (تحلیل داده های جداول ۴ و ۵) :

الف) (به علت نداشتن نیروی تکیه گاه ، شرط تعادل انتقالی را نمی نویسیم)

مرحله ی ۲- ب :



$m_۱ = \frac{۲۴.۸}{۱۰۳.۳} m \cong ۰.۱kg \ , m_۲ = \frac{۷۸.۵}{۱۰۳.۳} m \cong ۰.۵kg$

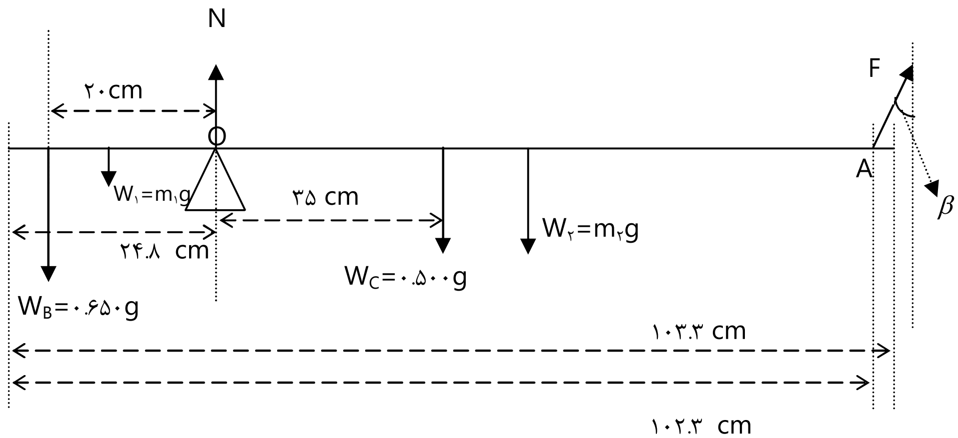
محور دوران را در روی تکیه گاه در نظر می گیریم و شرط تعادل دورانی را می نویسیم :

$$\sum \vec{\tau}_i = \vec{0} \rightarrow W_۱ \left(\frac{۲۴.۸}{۲}\right) * ۱۰^{-۲} - W_۲ \left(\frac{۷۸.۵}{۲}\right) * ۱۰^{-۲} - W_A * ۳۵ * ۱۰^{-۲} + F(۱۰۲.۳ - ۲۴.۸) * \cos\alpha * ۱۰^{-۲} = ۰$$

$$\rightarrow -\frac{۲۴.۸}{۲} * ۰.۱g + \frac{۷۸.۵}{۲} * ۰.۵g + ۰.۵۵۰g * ۳۵ = ۵ * ۷۷.۵\cos\alpha \rightarrow \cdots \rightarrow \cos\alpha \cong ۰.۹۵ \rightarrow \alpha \cong ۱۷.۸۶^\circ$$

که با تقریب بسیار خوبی با نتیجه ی تجربی برابر است .

مرحله ی ۲- ج :



$m_۱=\frac{۲۴.۸}{۱۰۳.۳}m \cong ۰.۱kg \ \ , m_۲=\frac{۷۸.۵}{۱۰۳.۳}m \cong ۰.۵kg$

محور دوران را در روی تکیه گاه در نظر می گیریم و شرط تعادل دورانی را می نویسیم :

$$\sum \vec{\tau}_i=\vec{۰} \rightarrow W_۱\left(\frac{۲۴.۸}{۲}\right)*۱۰^{-۲}-W_۲\left(\frac{۷۸.۵}{۲}\right)*۱۰^{-۲}-W_C*۳۵*۱۰^{-۲}+W_B*۲۰*۱۰^{-۲}+F(۱۰۲.۳-۲۴.۸)*\cos\beta*۱۰^{-۲}=۰$$

$$\rightarrow -\frac{۲۴.۸}{۲}*۰.۱g+\frac{۷۸.۵}{۲}*۰.۵g+۰.۵۰۰g*۳۵-۰.۶۵۰g*۲۰=۲.۶*۷۷.۵cos\beta \rightarrow \cdots \rightarrow cos\beta \cong ۱.۱۱ \rightarrow \times\times\times$$

مشاهده می شود که به یک تناقض شدید (!) برخوردیم که کسینوس یک زاویه ، از یک بیشتر شد . طبیعتا این خطا ، به علت خیلی کوچک بودن زاویه ی بتا و خطای موجود در جرم وزنه هاست و این احتمال وجود دارد که جرم واقعی وزنه های آویخته شده ، کمتر یا بیشتر از مقادیر نامی آنها - که در محاسبات از آنها استفاده کردیم - بوده باشد .

ب)

مرحله ی ۲- ب :

شرط تعادل انتقالی :

$$*\sum \vec{F_x}=\vec{۰} \rightarrow Fsin\alpha - f_s=۰ \rightarrow f_s=Fsin\alpha \cong ۵.۰*\frac{۱۲.۰}{۴۱.۰} \cong ۱.۵N$$

$$*\sum \vec{F_y}=\vec{۰} \rightarrow Fcos\alpha+N-(m_۱+m_۲)g-W_A=۰ \rightarrow N \cong -۵*\cos(۱۷.۰۲)+(۰.۶+۰.۵۵۰)*۹.۸ \cong ۶.۵N$$

$$\rightarrow \mu_{s_{min}}=\frac{f_s}{N} \cong \frac{۱.۵}{۶.۵} \cong ۰.۲$$

مرحله ی ۲- ج :

شرط تعادل انتقالی :

$$*\sum \overrightarrow{F_x} = \vec{0} \rightarrow F\sin\beta - f_s = 0 \rightarrow f_s = F\sin\beta \cong ۲.۶ * \frac{۲.۹}{۴۱.۰} \cong ۰.۲N$$

$$*\sum \overrightarrow{F_y} = \vec{0} \rightarrow F\cos\alpha + N - (m_1 + m_2)g - W_A - W_B = 0 \rightarrow N \cong -۲.۶ * \cos(۶.۸۶) + (۰.۶ + ۰.۵۰۰ + ۰.۶۵۰) * ۹.۸ \cong ۱۴.۶N$$

$$\rightarrow \mu_{s_{min}} = \frac{f_s}{N} \cong \frac{۰.۲}{۱۴.۶} \cong ۰.۰$$

سوالات :

۱- تفریق دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را چگونه تعریف می کنیم؟

تفریق به معنی جمع با قرینه است . A-B در واقع همان برآیند A و قرینه ی B است . قرینه ی B نیز برداری است که جمع آن با بردار B ، برابر بردار صفر است .

۲- آیا در مرحله ی اول آزمایش تحقیق رابطه ی $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$ لزومی دارد؟ چرا؟

خیر ، لازم نیست ؛ چون نیروهای وارد بر حلقه ، در راستای بردار واصل مرکز حلقه به نقطه ی اثر نیرو هستند و گشتاور تک تک نیروها برابر صفر است .

۳- چرا در تمام مراحل آزمایش (خصوصا مرحله ی دوم ، جمع بردارها و تعادل دورانی) خط کش را افقی قرار می دهیم؟

چون در اینصورت ، زاویه ی بین بردارهای r و بردارهای نیرو (به جز نیروی نیروسنج) ، تغییر خواهد کرد و قائمه نخواهد بود .

۴- در مرحله ی دوم آزمایش، آیا تحقیق رابطه ی $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$ فقط در مورد محور دوران O (تکیه گاه) باید صورت گیرد؟

می توان ثابت کرد که اگر تعادل دورانی حول یک محور برقرار باشد ، حول تمام محورهای دلخواه این تعادل برقرار است .

فرض کنید رابطه ی فوق برای محور $\vec{A}$ برقرار باشد، ثابت می کنیم برای محور $\vec{B} = \vec{A} + \vec{U}$ هم برقرار است.

$$\sum (\vec{r_i} - \vec{A}) \times \vec{F_i} = \vec{0} \ (I)$$

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0} \rightarrow (-\vec{U}) \times \sum \vec{F_i} = \vec{0} \rightarrow \sum (-\vec{U}) \times \vec{F_i} = \vec{0} \ (II)$$

$$(I) + (II) \rightarrow \sum \left(\vec{r_i} - (\vec{A} + \vec{U})\right) \times \vec{F_i} = \vec{0} \rightarrow \sum (\vec{r_i} - \vec{B}) \times \vec{F_i} = \vec{0}$$

که این یعنی برقراری رابطه ی تعادل دورانی برای محور $\vec{B}$. پس کافیست شرط تعادل دورانی را حول یک محور تحقیق کنیم .