سری ۲

3-1)

$\Omega = \{$کلیه ۸ تایی‌های مرتب که هر عضو آن H یا T است$\}$ ← 2^8 عضو متساوی الاحتمال

a) A_1 : $\{$کلیه ۸ تایی‌های مرتبی که یک عضو آن H باشد$\}$ ← ۸ عضو

$$P_1 = \frac{8}{2^8} = 0.03125$$

یا

$$P_1 = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{8}{2^8} = 0.03125$$

b) $A_2 = \{(TTTTTHxx)\}$

A_2 = ۴ عضو ، Ω = 2^8 عضو متساوی الاحتمال

$$P_2 = \frac{4}{2^8} = 0.0156$$

یا

$$P_2 = \left[\underbrace{\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5}_{\text{در ۵ پرتاب اول شیر نیاید}}\right] \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{پرتاب ششم شیر باشد}} = \frac{1}{2^6} = 0.0156$$

3-2)

$$p = \left[\underbrace{\binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6}_{\text{در هفت پرتاب اول یک شیر بیاید}}\right] \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{پرتاب هشتم شیر بیاید}} = \frac{7}{2^8} = \frac{7}{256} = 0.0273$$

3-3) $\Omega = \{$کلیه ۴ تایی‌ها با ترتیب که هر عضو آن H یا T است$\}$ ← 2^4 عنصر متساوی الاحتمال

A $\{$سه شیر در ۴ پرتاب$\}$ تعداد عناصر $= \binom{4}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

3-4) در یکبار انجام آزمایش، اگر واقعه A این باشد که مجموع ۷ باشد

$$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

$$p = P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P_1 = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.29$$

$p(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ $\qquad B=\{(6,5),(5,6)\}$

$$P_2=\binom{10}{1}\left(\frac{1}{18}\right)^1\left(\frac{17}{18}\right)^9=0.332$$

3.5)

فضا را طوری تعریف می‌کنیم که عناصر آن متساوی الاحتمال باشند. برای این منظور:
فضا عبارت است از کلیه ۶ تایی‌های عددی که عناصر آن ۱ الی ۶ باشند
لذا فضا دارای $6^6=46656$ عضو است

تعداد عناصر واقعه A $\qquad 36\times6\times36=7776$

« « B $\qquad 34\times34\times34=39304$

$$P(A)=\frac{7776}{46656}=0.167 \qquad P(B)=\frac{39304}{46656}=0.842$$

3.6)

a) $A_1=\{$همگی سالم$\}=\{$هیچیک خراب$\}$ $\qquad p=0.01$ (احتمال خرابی)

$$P_1=\binom{20}{0}(0.01)^0(0.99)^{20}=(0.99)^{20}=0.818$$

b) A_2 { چهارتای اول خراب یا سالم، پنجمی خراب، پانزده‌تای بقیه سالم }
(تعویض شده)

$$P_2=P(A_2/\bar{A}_1)=\frac{P(A_2)}{1-P(A_1)}=\frac{0.01\times0.99^{15}}{1-0.818}=\frac{0.01\times0.86}{0.182}=0.047$$

c) A_3 { در پنج‌تای اول (تعویض شده) لااقل یکی خراب، پانزده‌تای بقیه سالم }

$$P_3=\frac{P(A_3)}{1-P(A_1)}=\frac{(0.99)^{15}(1-0.99^5)}{1-0.818}=\frac{0.86\times0.049}{0.182}=0.231$$

b

$$P(A_3)=0.01\times0.99^{15}+0.01\times0.99^{16}+0.01\times0.99^{17}+0.01\times0.99^{18}+0.01\times0.99^{19}=0.04215$$

در همین تعویض [illegible]

$$P_3=\frac{0.04215}{1-0.818}=0.231$$

۴

3.7)

a) $P_1 = \binom{12}{3} \, 0.2^3 \, 0.8^9 = 0.2362$

b) $P_2 = \dfrac{\binom{20}{3}\binom{80}{9}}{\binom{100}{12}} = 0.2533$

3-10) $\binom{100}{16} (0.2)^{16} (0.8)^{84} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{16}} e^{-\frac{(16-20)^2}{2\times 16}} = 0.0605$

$np = 20$
$npq = 16$
$k = 16$

$npq \gg 1$ ✓

$0 < np - 3\sqrt{npq} < k < np + 3\sqrt{npq} < n$ ✓

دقیق‌تر (با تقریب فاکتوریل توسط فرمول استرلینگ)

$\left(\frac{100}{16}\times 0.2\right)^{16}\left(\frac{100}{84}\times 0.8\right)^{84} \dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{16}\sqrt{84}\sqrt{2\pi}} = 0.0634$

3-12) $P\{|\frac{k}{n} - p| \le \epsilon\} = 2G\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 0.95$

$G(0.02\sqrt{n}) = 0.975$

$0.02\sqrt{n} = 1.960$

$n = 9604$

3-13) $P\{|\frac{k}{n} - p| \le \epsilon\} = 2G\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1$

$= 2G\left(\frac{24}{720}\sqrt{\frac{36\times 720}{5}}\right) - 1$

$\epsilon = \frac{24}{720}$
$p = \frac{1}{6}$

$= 2G(2.4) - 1$

$= 2(0.9918) - 1 = 0.9836$

3-14

a) $\sum_{k=۴۵}^{۶۷} \binom{۱۸۹}{k} (۰٫۳)^k (۰٫۷)^{۱۸۹-k}$

$np = ۱۸۹ \times ۰٫۳ = ۵۶٫۷$
$npq = ۵۶٫۷ \times ۰٫۷ = ۳۹٫۶۹$

$$\simeq G\left(\frac{۶۷ - ۵۶٫۷}{\sqrt{۳۹٫۶۹}}\right) - G\left(\frac{۴۵ - ۵۶٫۷}{\sqrt{۳۹٫۶۹}}\right)$$

$$= G(۱٫۶۳۵) - G(-۱٫۸۵۷)$$

$$= ۰٫۹۴۹۰ - (۱ - ۰٫۹۶۸۴) = ۰٫۹۱۷۴$$

b)

$$G\left(\frac{۶۷٫۵ - ۵۶٫۷}{\sqrt{۳۹٫۶۹}}\right) - G\left(\frac{۴۴٫۵ - ۵۶٫۷}{\sqrt{۳۹٫۶۹}}\right)$$

$$G(۱٫۷۱۴) - G(-۱٫۹۳۷)$$

$$۰٫۹۵۶۸ - (۱ - ۰٫۹۷۳۶) = ۰٫۹۳۰۴$$

3.15)

$$P = \frac{۱۰!}{۷!\,۲!\,۱!} (۰٫۵۲)^۷ (۰٫۳)^۲ (۰٫۱۸)^۱ = ۰/۰۶۰$$

3.16)

a) $P_1 = \binom{۱۸۰۰}{۱} (۰/۰۰۱)^۱ (۰٫۹۹۹)^{۱۷۹۹} = ۰٫۲۹۷۵۷$

$$P_۲ = ۱ - \sum_{k=0}^{۲} \binom{۱۸۰۰}{k} p^k q^{۱۸۰۰-k}$$

$$= ۱ - (۰٫۹۹۹)^{۱۸۰۰} - ۰٫۲۹۷۵۷ - \binom{۱۸۰۰}{۲} (۰٫۰۰۱)^۲ (۰٫۹۹۹)^{۱۷۹۸}$$

$$= ۰٫۲۶۹۲۵$$

b) $a = ۱۸۰۰ \times ۰٫۰۰۱ = ۱٫۸$

$$P_1 \simeq e^{-a} \frac{a^k}{k!} = e^{-۱٫۸} \frac{۱٫۸}{۱} = ۰٫۲۹۷۵۴$$

$$P_۲ = ۱ - \sum_{k=۰}^{۲} \frac{e^{-a} a^k}{k!} = ۱ - e^{-۱٫۸}\left(۱ + ۱٫۸ + \frac{۱٫۸^۲}{۲}\right) = ۰٫۲۶۹۳۸$$

3-17) a) $\binom{۱۲}{۱}(۰/۰۰۱)^{۱}(۰/۹۹۹)^{۱۱} = ۰/۰۱۱۸۹۹$

b) $\eta = ۱۲ \times ۰/۰۰۱ = ۰/۰۱۲$

$$e^{-\eta}\frac{\eta^{k}}{k!} = e^{-۰/۰۱۲} \times ۰/۰۱۲ = ۰/۰۱۱۸۵۷$$

3-18) a) $P_{۱} = \binom{۱۲}{۱}(۰/۰۱)^{۱}(۰/۹۹)^{۱۱} = ۰/۱۰۷۴۴$

$$P_{۲} = ۱ - (۰/۹۹)^{۱۲} = ۰/۱۱۳۶۱۸ \qquad = ۳۲۰۰$$

b) $\eta = ۰/۱۲$

$$P_{۱} = e^{-۰/۱۲} \times ۰/۱۲ = ۰/۱۰۶۴۲$$

$$P_{۲} = ۱ - e^{-۰/۱۲} = ۰/۱۱۳۰۸$$

3-19) $\displaystyle\sum_{k=0}^{۴} \frac{e^{-\eta}\eta^{k}}{k!} \qquad \eta = ۱/۷ \times ۲ = ۳/۴$

$$= e^{-۳/۴}\left(۱ + ۳/۴ + \frac{۳/۴^{۲}}{۲!} + \frac{۳/۴^{۳}}{۳!} + \frac{۳/۴^{۴}}{۴!}\right) = ۰/۷۴۴$$

— مکرراً دو تاس را می‌اندازیم. احتمال اینکه $T=7$ قبل از $T=8$ مشاهده شود؟

پرتابها آنقدر تکرار می‌شود که آخرین نتیجه ۷ یا ۸ باشد پس احتمال اینکه $T=7$ قبل از $T=8$ مشاهده شود مساوی است

با احتمال اینکه در یک آزمایش ساده با فرض اینکه نتیجه آزمایش ۷ یا ۸ است احتمال ۷ بودن نتیجه چیست؟

$$T=7 \qquad \{(2,5),(5,2),(1,6),(6,1),(3,4),(4,3)\}$$
$$T=8 \qquad \{(2,6),(6,2),(4,4),(3,5),(5,3)\}$$

$$P = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{5}{36}+\frac{6}{36}} = \frac{6}{11}$$

یا احتمال اینکه در n امین پرتاب دفعه اول $T=7$ باشد ($n-1$ بار قبلی نه $T=7$ و نه $T=8$) برابر است با $\frac{6}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$ پس بنابراین

در نتیجه جمع‌ها را حساب کنیم $P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} = \frac{6}{36}\,\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$

— بازی Craps

$12 = (3,9)\,(9,3)\,(4,8)\,(8,4)\,(5,7)\,(7,5)\,(6,6)$

$17 = (8,9)\,(9,8)$

$13 = (4,9)\,(9,4)\,(5,8)\,(8,5)\,(6,7)\,(7,6)$

$14 = (5,9)\,(9,5)\,(6,8)\,(8,6)\,(7,7)$

$15 = (6,9)\,(9,6)\,(7,8)\,(8,7)$

$16 = (7,9)\,(9,7)\,(8,8)$

احتمال اینکه نتیجه دفعه اول ۱۲ یا ۱۷ باشد $\pi_0 = \frac{7}{100} + \frac{2}{100} = 0/09$

احتمال اینکه نتیجه دفعه اول ۱۳ باشد $P_{13} = \frac{6}{100}$

احتمال برنده شدن در حالیکه دفعه اول ۱۳ آمده $q_{13} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{7}{100}+\frac{6}{100}} = \frac{6}{13}$

(احتمال اینکه در دفعات بعد ۱۳ قبل از ۱۲ ظاهر شود)

احتمال اینکه نتیجه دفعه اول ۱۳ شود و سرانجام برنده شود $\pi_{13} = P_{13}\, q_{13} = \frac{6}{100} \times \frac{6}{13} = \frac{36}{1300}$

به همین ترتیب

$$\pi_{14} = \frac{5}{100} \times \frac{5}{5+7} = \frac{25}{1200}$$

$$\pi_{15} = \frac{4}{100} \times \frac{4}{4+7} = \frac{16}{1100}$$

$$\pi_{16} = \frac{3}{100} \times \frac{3}{3+7} = \frac{9}{1000}$$

$$P = \pi_0 + \pi_{13} + \pi_{14} + \pi_{15} + \pi_{16} = 0/162$$

تعدادی ۱۲۰ تا در سال ← تعدادی در ماه $\lambda = ۱۰$

می‌خواهیم n چنان باشد که لااقل

$$P(k \leq n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = ۰٫۹۹$$

$$e^{-۱۰} \sum_{k=0}^{n} \frac{۱۰^k}{k!} \geq ۰٫۹۹ \rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{۱۰^k}{k!} \geq ۲۱۸۰۶٫۲$$

با محاسبه سمت چپ برای nهای مختلف

$$n = ۱۷ \rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{۱۰^k}{k!} = ۲۱۷۱۲ < ۲۱۸۰۶$$

$$n = ۱۸ \rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{۱۰^k}{k!} = ۲۱۸۶۸ > ۲۱۸۰۶$$

پس باید $\boxed{n \geq ۱۸}$ باشد. محاسبات این روش زیاد است.

راه دیگر این است که پواسن را با منحنی نرمال تقریب بزنیم (چون λ بزرگ است) داریم

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \simeq G\left(\frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - G\left(\frac{0-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$np \rightarrow \lambda$$

$$\underbrace{np}_{\lambda}\underbrace{(1-p)}_{1} \rightarrow \lambda$$

$$= G\left(\frac{n-۱۰}{\sqrt{۱۰}}\right) - G(-\sqrt{۱۰}) \geq ۰٫۹۹$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{n-۱۰}{\sqrt{۱۰}}\right) \geq ۰٫۹۹ + ۰٫۰۰۰۸$$

$$\rightarrow \frac{n-۱۰}{\sqrt{۱۰}} \geq ۲٫۳۶ \longrightarrow n \geq ۱۷٫۵ \rightarrow \boxed{n \geq ۱۸}$$

— محل ماکزیمم شدن $P_n(k)$.

$$\frac{P_n(k-1)}{P_n(k)} = \frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}} = \frac{kq}{(n-k+1)p}$$

اگر $\frac{kq}{(n-k+1)p} < 1$ یعنی $k < (n+1)p$ باشد $P_n(k-1) < P_n(k)$ خواهد بود

پس $P_n(k)$ تا بزرگترین عدد صحیحی که کوچکتر از $(n+1)p$ باشد افزایش یافته و بعد شروع به کاهش می‌کند.

یعنی $K_m = \lceil (n+1)p \rceil$

که $\lceil\ \rceil$ بیانگر جزء صحیح است.

اما اگر $(n+1)p$ خود عددی صحیح باشد $\frac{P_n(k-1)}{P_n(k)} = 1$ برای $k = (n+1)p$

لذا $P_n(k)$ در دو نقطه ماکزیمم خواهد بود.

$$K_{m_1} = (n+1)p - 1 \quad , \quad K_{m_2} = (n+1)p$$

— gambler ruin problem

الف -

از قضیه احتمال کل داریم

احتمال اینکه نهایتاً A_2 برنده شود به شرط سرمایه i = P_i = $P(W)$ = احتمال اینکه نهایتاً A_2 برنده شود

$$P(W) = p\,P(W/A_1) + q\,P(W/\bar{A}_1)$$

احتمال اینکه نهایتاً A_2 برنده شود به شرط سرمایه $i+1$ = P_{i+1} = $P(W/A_1)$ = احتمال اینکه نهایتاً A_2 برنده شود در حالی که در دور اول برنده شده است

مشابهاً

$$P(W/\bar{A}_1) = P_{i-1}$$

$$P_i = p\,P_{i+1} + q\,P_{i-1}$$

در این رابطه i را مقادیر مختلف $i = 1, 2, \dots, k-1$ می‌توانیم قرار دهیم. البته می‌دانیم $P_k = 1$ چون اگر B سرمایه‌ای نداشته باشد از همان ابتدا بازی به نفع A تمام شده است و نیز $P_0 = 0$ است.

$$P_1 = pP_2$$
$$P_2 = pP_3 + qP_1$$
$$\vdots$$
$$P_{k-2} = pP_{k-1} + qP_{k-3}$$
$$P_{k-1} = p + qP_{k-2}$$

ولی P_i را این‌گونه نوشت $P_i = (p+q)P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$ پس داریم

$$pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \longrightarrow p(P_{i+1} - P_i) = q(P_i - P_{i-1})$$
$$\longrightarrow P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1})$$

یعنی

$$P_2 - P_1 = \frac{q}{p} P_1$$
$$P_3 - P_2 = \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1$$
$$\vdots$$
$$P_i - P_{i-1} = \frac{q}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1$$
$$\vdots$$
$$1 - P_{k-1} = \frac{q}{p}(P_{k-1} - P_{k-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} P_1$$

با جمع این تساوی‌ها داریم

$$P_i - P_1 = P_1 \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j \Rightarrow P_i = P_1 \sum_{j=0}^{(i-1)} \left(\frac{q}{p}\right)^j$$

با جمع کل تساوی‌ها داریم

$$1 - P_1 = P_1 \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j \Rightarrow 1 = P_1 \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j \Rightarrow P_1 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j}$$

در نتیجه

$$P_i = \frac{\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{q}{p}\right)^j}{\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{q}{p}\right)^j} = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k} & p \neq q \\[2ex] \dfrac{i}{k} & p = q \end{cases}$$

ب) $P_i = \frac{95}{100}$

ج) $P_i = \dfrac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{95}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{100}} = 0.1317$

— در کنکور چهارجوابی

الف- اگر از n تست k تست را درست بزند نمره او برابر است با $k - \frac{n-k}{3}$ که می‌خواهیم مثبت باشد

$$k - \frac{(n-k)}{3} \geq 0 \longrightarrow k \geq \frac{n}{4}$$

احتمال مثبت شدن نمره $= \sum_{k \geq \frac{n}{4}} P_n(k)$ با فرض $p = \frac{1}{m}$

$$\boxed{\text{احتمال مثبت شدن نمره} = P_1 = \sum_{k \geq \frac{n}{4}} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}}$$

$n=5,\ m=4$

$$P_1 = 1 - \sum_{k<\frac{5}{4}} P_5(k) = 1 - P_5(0) - P_5(1) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0.367$$

$n=10,\ m=4$

$$P_1 = 1 - \sum_{k<\frac{10}{4}} P_{10}(k) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) - P_{10}(2) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9 - \binom{10}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0.474$$

$n \to \infty \ , m=4$

$$P_1 = 1 - \sum_{k<\frac{n}{4}} P_n(k) \simeq 1 - G\left(\frac{\frac{n}{4}-\frac{n}{4}}{\sqrt{n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$n=5 \ , m=3$

$$P_1 = 1-P_5(0)-P_5(1) = 1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.539$$

$n=10, \ m=3$

$$P_1 = 1-P_{10}(0)-P_{10}(1)-P_{10}(2) = 1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{10}-\binom{10}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^9$$
$$-\binom{10}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0.701$$

$n=20 \ , m=3$

$$P_1 = 1-P_{20}(0)-P_{20}(1)-P_{20}(2)-P_{20}(3)-P_{20}(4) = 0.848$$

$n\to\infty \ , m=3$

$$P_1 \simeq 1 - G\left(\frac{\frac{n}{4}-\frac{n}{3}}{\sqrt{n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}\right) \longrightarrow 1$$

$n=2 \ , m=2$

$$P_1 = 1-P_2(0) = 1-\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.75$$

$n=3 \ , m=2$

$$P_1 = 1-P_3(0) = 1-\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.875$$

$n=5 \ , m=2$

$$P_1 = 1-P_5(0)-P_5(1) = 1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.8125$$

$n=10 \ , m=2$

$$P_1 = 1-P_{10}(0)-P_{10}(1)-P_{10}(2) = 0.945$$

$n\to\infty \ , m=2$

$$P_1 = 1 - G\left(\frac{\frac{n}{4}-\frac{n}{2}}{\sqrt{n\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}}\right) \longrightarrow 1$$

ب - تیم‌هایی که کاملاً مشکوکند ($n=4$) جواب ندهند

تیم‌هایی که قطعاً بین دو پاسخ شک دارند ($n=2$) یکی را انتخاب کنند

تیم‌هایی که بین سه پاسخ شک دارند ($n=3$) در صورتی جواب دهند که تعداد تیم‌های مشکوک زیاد باشد

راه دیگر برای حل مسأله $T=7$ قبل از $T=8$

A : واقعهٔ آمدن ۷ قبل از ۸

B : در آزمایش اول ۷ بیاید $\qquad P(B)=\frac{6}{36}$

C : در آزمایش اول ۸ بیاید $\qquad P(C)=\frac{5}{36}$

D : " " هیچکدام نیاید ۷ و ۸ $\qquad P(D)=\frac{25}{36}$

$$P(A)=P(A/B)\,P(B)+P(A/C)\,P(C)+P(A/D)\,P(D)$$

روشن است که $P(A/B)=1$, $P(A/C)=0$

ولی $P(A/D)=P(A)$ زیرا مثل این است که آزمایش‌ها از ابتدا شروع شده و آنقدر تکرار شود که ۷ یا ۸ بیاید (و این به خاطر آن است که چون آزمایش‌ها مستقلند نتیجه آزمایش اول تأثیری روی نتایج آزمایش‌های بعدی ندارد) پس

$$P(A)=\frac{6}{36}+P(A)\left(\frac{25}{36}\right)$$

$$P(A)=\frac{\frac{6}{36}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}$$

- اصولاً اگر دو واقعهٔ مثلاً B و C در یک آزمایش ناسازگار باشند با تکرار آزمایش احتمال وقوع B قبل از C برابر است با $\frac{P(B)}{P(C)+P(B)}$