

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

نمونه سوال امتحان پایان ترم محاسبات عددی (گروه‌های ۱ تا ۴)
دی ماه ۱۳۹۳

"استفاده از ماشین حساب مجاز نیست."

۱. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید.

الف) تجزیه LU با محور گزینی را برای ماتریس A بدست آورید.

ب) با استفاده از این تجزیه، ماتریس $X \in R^{3 \times 2}$ جواب دستگاه $AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

۲.

الف) با استفاده از نرم افزار $MATLAB$ دو تابع $Lowersolve$ و $Uppersolve$ به ترتیب برای حل دستگاه های خطی پایین مثلثی $Lx=b$ و بالا مثلثی $Ux=b$ بنویسید.

ب) فرض کنید برای ماتریس دلخواه $A \in R^{n \times n}$ تجزیه LU محاسبه شده است یعنی ماتریس های پایین مثلثی L و بالا مثلثی U موجودند به طوری که $A=LU$. با استفاده از نرم افزار $MATLAB$ برنامه ای

بنویسید که با استفاده از این تجزیه و توابع قسمت الف، جواب دستگاه $\begin{cases} A^T x = b \\ Ax + A^T y = c \end{cases}$ را به ازای

بردارهای مفروض $b, c \in R^n$ محاسبه کند.

۳. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از تجزیه QR برای ماتریس A دستگاه

$$AX = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

را حل کنید.

۴. تابع $f(x) = x(\cos x - 1) + x^4$ را در نظر بگیرید.

الف) جمله عمومی روش نیوتن را برای محاسبه تقریبی جواب معادله $f(x) = 0$ بنویسید.
ب) مرتبه همگرایی این دنباله در صورت همگرایی به $0 = \alpha$ را محاسبه کنید.

۵. فرض کنید $k > 1$ یک عدد صحیح و $a > 0$ یک عدد حقیقی باشد. دنباله تکراری

$$x_{n+1} = \frac{x_n^k + kax_n}{kx_n^{k-1} + a}$$

را در نظر بگیرید.

الف) با فرض انتخاب x_0 مناسب و همگرایی دنباله x_n حد دنباله را بیابید.
ب) مقدار k را طوری تعیین کنید که این دنباله دارای حداکثر مرتبه همگرایی ممکن باشد.

۶. یک تکرار از روش نیوتن را برای حل دستگاه غیر خطی زیر با تخمین اولیه

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ به کار گیرید و تخمین } X_1 \text{ را بدست آورید:}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 20 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$$

۷. دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$y_1' = y_1 + 3y_2 - 1$$

$$y_2' = y_1 - 2y_2 + x$$

را با شرط های اولیه $y_1(0) = 1$ و $y_2(0) = 3$ در نظر بگیرید. با استفاده از روش تیلور مرتبه ۲ مقادیر تقریبی $y_1(0/1)$ و $y_2(0/1)$ را محاسبه کنید.

موفق باشید