第二讲、区间图

本讲中，我们将考虑区间图的一些应用。我们将考虑区间图于其他图有什么不同，以及各种区间图的共同点。

1．介绍

图论学习中常常要考虑一些特殊的图，区间图就是其中之一。我们之后将给出它的严格定义。但目前可以把区间图看作一系列区间的一种表示。有关一系列区间的问题在实际中有广泛的应用，例如日程安排问题、航班调度问题、交通灯的同步协调等。因此学习区间图不仅使我们了解它的数学构形，而且有着在实践中发挥作用的潜力。

学习区间图时，我们首先给出一个更精确的定义，接着将考虑区间图的一些应用，然后学习怎样判定一个图是否是区间图（同时看到一些不是区间图的图），最后看一些对区间图的等价的不同的表示法。

2．定义

一个区间是有两个端点的线段，端点可以是开的或闭的。给定一些区间，可以定义一个相交图（intersection graph）。

定义 1：给定一些区间，定义一个*相交图*的每个顶点 v 代表一个区间 Iv,顶点(v,w)间有边，当且仅当 Iv 交 Iw 非空。

定义 2：一个图 G 是区间图，如果它是若干区间的相交图。

定义 3：一个图 G＝（V，E）的诱导子图是由它的一个顶点子集 S 与 E 中所有两个端点都在 S 中的边组成的子图。

我们可以通过删去 G 中的一些顶点及与它们相联的边得到一个诱导子图。

3．区间图

区间图在一系列领域中有应用前途，例如：

考古学[Spi97]

计划拟定[CLRS00]

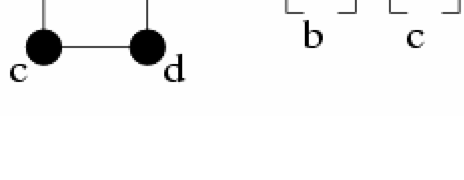
生物学[WG86]

请读者参考 PDF 文件的简述与参考文献。:-P

以下是一些不是区间图的例子：

1、k 阶简单环 Ck（k>=4）。

我们来看一下 C4（见图 3），假设它是区间图。由于 a 与 b,c 相联，它们对应的区间必须相交。但是 b 和 c 之间没有边，因此它们对应的区间不相交这样的情况只可能如图 3 右图所示。但由于 d 与 b,c 均相联，则 d 对应的区间（简记为区间 d）与区间 b,区间 c 都相交，那么它必将与区间 a 相交，这与 a,d 间无边矛盾。

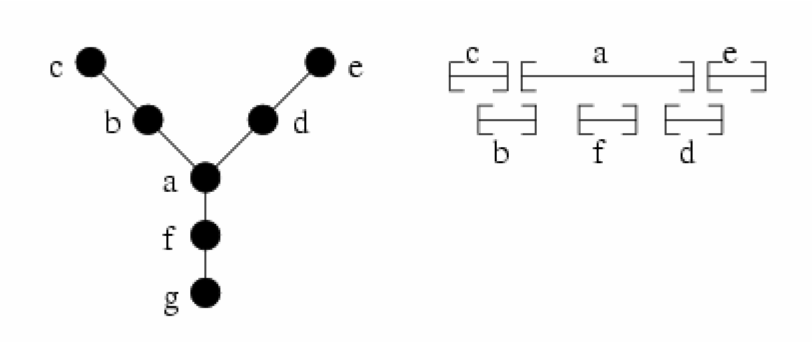


2、任何以 Ck（k＝4）为一个诱导子图的图。

这表明区间图在删除顶点及收缩边的操作下是封闭的。具体地说，如果我们从区间图中删除一个顶点，只要把它对应的区间从区间集中删去，结果仍是一个区间图。如果收缩一条边，只要把其端点所对应的区间合并成一个区间即可。

3、形如图 4 的树。

与 Ck 的方法类似，我们可以设计出前六个顶点对应的区间，但加入最后一个顶点 g 时，由于区间 g 必须与区间 f 相交，则它必须与区间 a 相交，矛盾。

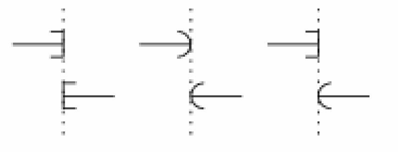


目前为止我们尚未给出开区间与闭区间或半开闭区间的区别。我们将证明知道它们是等价的。

定理 1：开区间、闭区间、半开闭区间对应的区间图是等价的。

注意这不是说我们可以随意地将开区间改为闭区间，或将闭区间改为开区间。这表示给定一个区间图，我们总能设计出一个只包含开区间或闭区间的区间集，使它对应与给定的图。

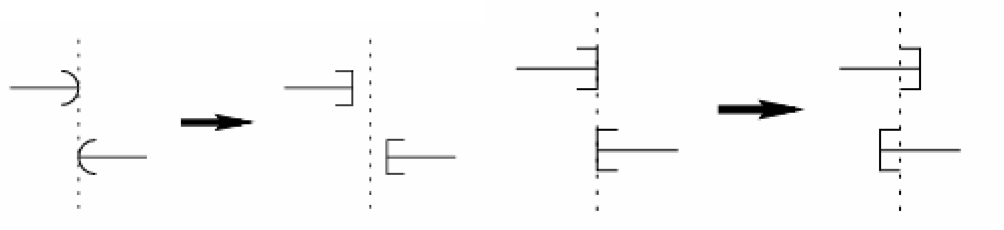
我们注意到如果不存在“重点”，即一个区间恰在另一个区间开始的点上结束，那么区间的开闭不影响区间图的形态，即区间的开闭可以随意改变。“重点”只可能有三种形态（见图 5，对称的情形被忽略了）。其中第一种情况下，两个区间相交，后两种情况则不相交。



4．定理 1 的证明

证明：我们只证明任意区间集能等价地转化为只包含闭区间的区间集。

首先看一些对于“重点”的操作。对于情况 2，两个区间不相交，我们将它们稍微拉开一段很小的距离，并改为闭区间。情况 3 同样可以这样操作。对于情况 1，将它们稍微拉近一段小距离（见图 6）。



下面给出正式证明：

给定一个区间集 I={I1,I2,…,In}，其中每个区间 Ii={Si,Fi}两端可以是开的或闭的。我

们再定义 I’={I1’,I2’,…,In’},其中 Ii={Si’,Fs’}两端都是闭的，其中{Si’,Fi’}如下取值：

$$
\begin{array}{lcl}
[s_i, f_i] & \rightarrow & [s_i - \frac{\epsilon}{2}, f_i + \frac{\epsilon}{2}] \\
[s_i, f_i) & \rightarrow & [s_i - \frac{\epsilon}{2}, f_i - \epsilon] \\
(s_i, f_i] & \rightarrow & [s_i + \epsilon, f_i + \frac{\epsilon}{2}] \\
(s_i, f_i) & \rightarrow & [s_i + \epsilon, f_i - \epsilon]
\end{array}
$$

其中ϵ的值将在之后给出。注意以上操作是之前提到的操作正式的定义。

引理 1：对于任意$i, j \in \{1, \ldots, n\},\ I_i \cap I_j \neq \emptyset$,有 $I_i' \cap I_j' \neq \emptyset$，反之亦成立。

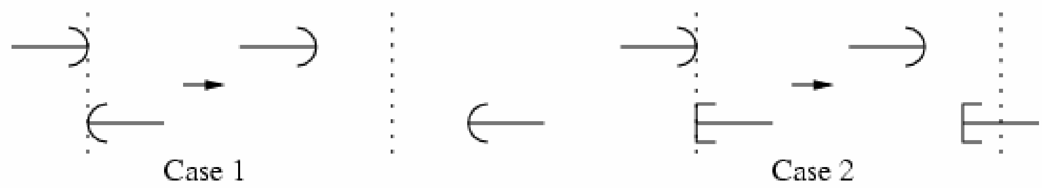
证明：

1、充分性

有两种情况，这两个区间或在某个“重点”相交，或有一段非空的公共开区间。情况 1 经操作后，两个区间将重合长为ϵ的一段区间。情况 2 中有三种可能。如这端都是闭，那么操作后它们的交集长度将增加ϵ；如这两端都是开的，操作后它们的交集长度将减少 2×ϵ；如这两端一开一闭，操作后它们的交集长度将减少ϵ/2。最坏情况下交集长度将减少 2×ϵ，如果令ϵ<=1/3*（那端交集的长度），则在所有情况下这两个区间仍然相交。充分性得证。

2、必要性

只要证明充分性的否命题，情况与充分性类似，只要满足ϵ<=1/3*（两靠近端点的距离）即可。（参见图 9）



最终，取ϵ<=1/3 $\min\{|x_i - x_j|, x_i, x_j \in \{s_1, \ldots, s_n, f_1, \ldots, f_n\}, x_i \neq x_j\}$可以保证引理 1 对于所有区间成立。

引理 1 中对所取的区间没有限制，因此操作后对应的区间图的形态不变，定理 1 得证。

■

定理 1 表明任何区间集可等价为一个有闭区间组成且没有“重点”的区间集，这样我们可以按左端点坐标从小到大的顺序给区间图的顶点编号。同时我们可以给每条边加上方向，即从左往右（弧头编号>弧尾编号）。这里我们给出一些定义：

定义 6：有向图 G＝（V，E）中顶点 Vi 的前驱集 Pred（Vi）＝{Vj | （Vj，Vi）$\in$E}；

后继集 Succ（Vi）＝{Vj | （Vi，Vj）$\in$E}。|Pred（Vi）| 称为 Vi 的入度；|Succ（Vi）| 称为 Vi 的出度。

注意：区间图中所有 Pred（Vi）中的元素对应的区间两两相交。这说明{Vi}$\cup$Pred（Vi）是一个团。