

# 染色法和构造法在棋盘上的应用

广东北江中学 方奇

# 目录

- 1 基本概念
- 2 棋盘的覆盖
  - (1) 同形覆盖
  - (2) 异形覆盖
  - (3) 小结
- 3 马的遍历
  - (1) 马的哈密尔顿链
  - (2) 马的哈密尔顿圈
- 4 其它问题
  - (1) Worm world
- 5 结语

# 1 基本概念

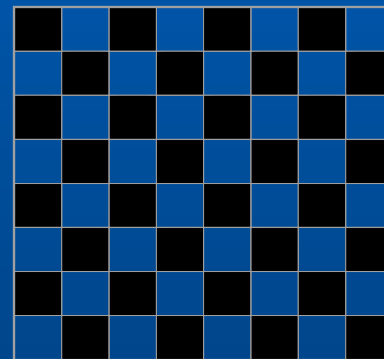
## ● 棋盘

所谓  $m \times n$  棋盘，指由  $m$  行  $n$  列方格构成的  $m \times n$  矩形。每个方格成为棋盘的格，第  $i$  行  $j$  列的格记为  $a(i, j)$ 。当  $i+j$  为奇（偶）数时，称  $a(i, j)$  为奇（偶）格。

## ● 染色法

用不同颜色对棋盘格子进行染色，起到分类的效果。

类似国际象棋盘上的黑白二染色，称为“自然染色”。



## ● 构造法

直接列举出某种满足条件的数学对象或反例导致结论的肯定与否定，或间接构造某种对应关系，使问题根据需要进行转化的方法，称之为构造法。

## 2 棋盘的覆盖

- 棋盘的覆盖

指用若干图形去覆盖棋盘。覆盖的每个图形也由若干格子组成，称为覆盖形。约定任两个覆盖形互不重叠，任一覆盖形中任一格总与棋盘上某格重合。

按覆盖效果，可分为完全覆盖、饱和覆盖、无缝覆盖和互异覆盖。

完全覆盖：各个覆盖形的总格子数等于棋盘的总格子数

按覆盖形，可分为同形覆盖（只有一种覆盖形）和异形覆盖（有多种覆盖形）。

## 2-1 同形覆盖

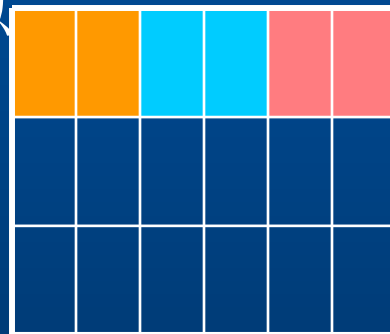
- 例 1 给出  $m, n, k$ ，试用若干  $1 \times k$  的矩形覆盖  $m \times n$  的棋盘。

- 分析

- 有定理 1： $m \times n$  棋盘存在  $1 \times k$  矩形的完全覆盖的充分必要条件是  $k \mid m$  或  $k \mid n$ 。

- 证明：

- 充分性是显然的。用构造法。当  $k \mid n$  时，每一行用  $n/k$  个  $1 \times k$  的矩形恰好完全覆盖。  $k \mid m$  情况类似



- 必要性。当  $n, m$  均不能被  $k$  整除时，设

- $m = m_1 \times k + r, 0 < r < k$

- $n = n_1 \times k + s, 0 < s < k$

- 并约定  $r \geq s$ （否则旋转  $90^\circ$ ）

# 2-1 同形覆盖

1	2	3	...	k	1	2	3	...	k	.....	1	2	3	...	s
2	3	4	...	1	2	3	4	...	1	.....	2	3	4	...	s+1
3	4	...	...	2	3	4	...	...	2	.....	3	4	...	...	:
:	:			:	:	:			:	.....	:	:			:
k	1	...	...	k-1	k	1	...	...	k-1	.....	k	1	...	...	s+k-1
1	2	3	...	k	1	2	3	...	k	.....	1	2	3	...	s
2	3	4	...	1	2	3	4	...	1	.....	2	3	4	...	s+1
3	4	...	...	2	3	4	...	...	2	.....	3	4	...	...	:
:	:			:	:	:			:		:	:			:
k	1	...	...	k-1	k	1	...	...	k-1	.....	k	1	...	...	s+k-1
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	.....	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:		:	:	:	:	:
1	2	3	...	k	1	2	3	...	k	.....	1	2	3	...	s
2	3	4	...	1	2	3	4	...	1	.....	2	3	4	...	s+1
3	4	...	...	2	3	4	...	...	2	.....	3	4	...	...	:
:	:			:	:	:			:	.....	:	:			:
r	r+1	...	...	r+k-1	r	...	...	...	r+k-1	.....	r	r+1	...	...	r+s-1

$$m=m_1*k+r \quad n=n_1*k+s \quad r \geq s$$

## 2-1 同形覆盖

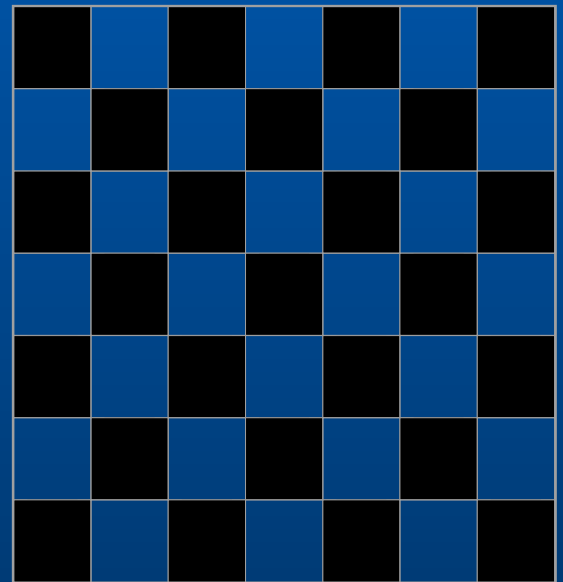
- 由上面的定理 1 , 可彻底解决  $m*n$  棋盘的  $p*q$  矩形完全覆盖问题
- 定理 2  $m*n$  棋盘存在  $p*q$  矩形的完全覆盖充分必要条件是  $m, n$  满足下列条件之一:
  - ( i )  $p \nmid x$  且  $q \nmid y$
  - ( ii )  $p \mid x, q \mid x$ , 且存在自然数  $a, b$  , 使  $y=ap+bq$
  - 其中  $\{x, y\} = \{m, n\}$

## 2-2

# 异形覆盖

- 例 2 设有  $m*n$  的棋盘，当  $m*n$  为奇数时，尝试删去一个格子，剩下部分用若干  $1*2$  的矩形覆盖；当  $m*n$  为偶数时，尝试删去两个格子，剩下部分用若干  $1*2$  的矩形覆盖。

- 分析：
- 1 先来考虑  $m*n$  为奇数的情况
- 一方面，将棋盘自然染色。无论怎么放，一个  $1*2$  的矩形必盖住一个黑格和一个白格，而棋盘上的黑格比白格多 1，于是只能去掉一个黑格（即偶格）。

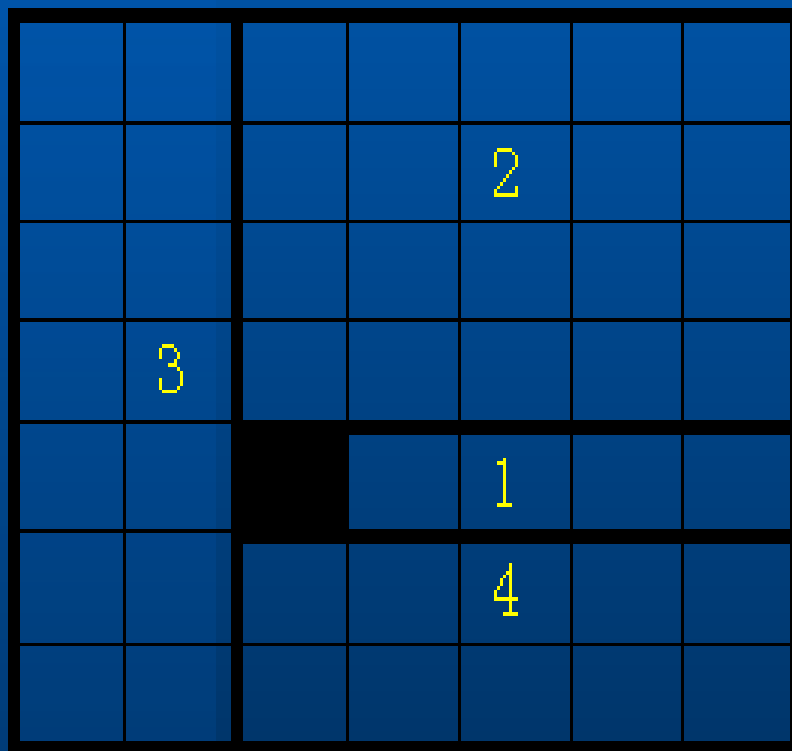




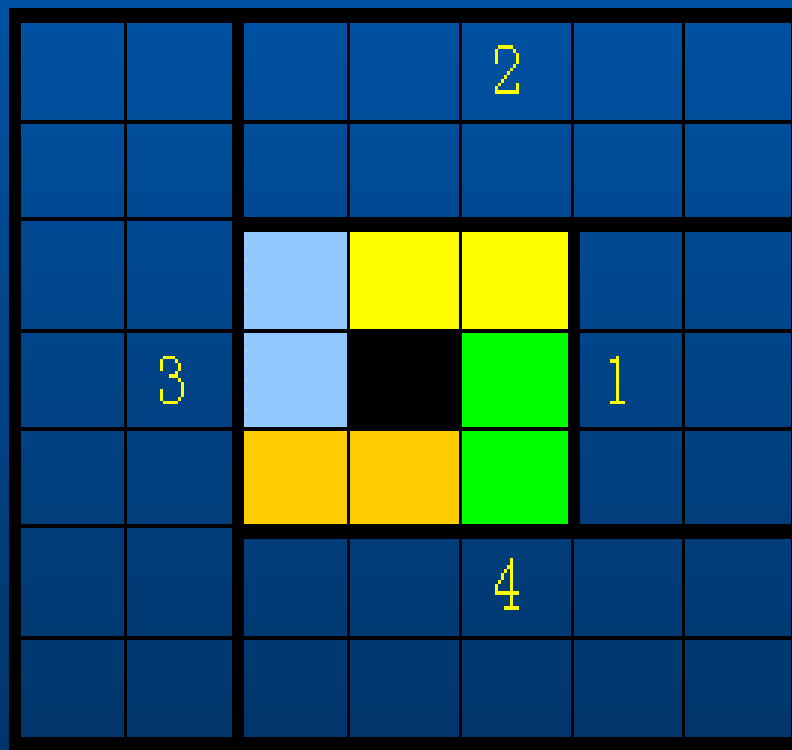
## 2-2 异形覆盖

- 另一方面，设去掉偶格为  $a(i, j)$ ，用构造法必能得到可行解

- $i$  与  $j$  同为奇数

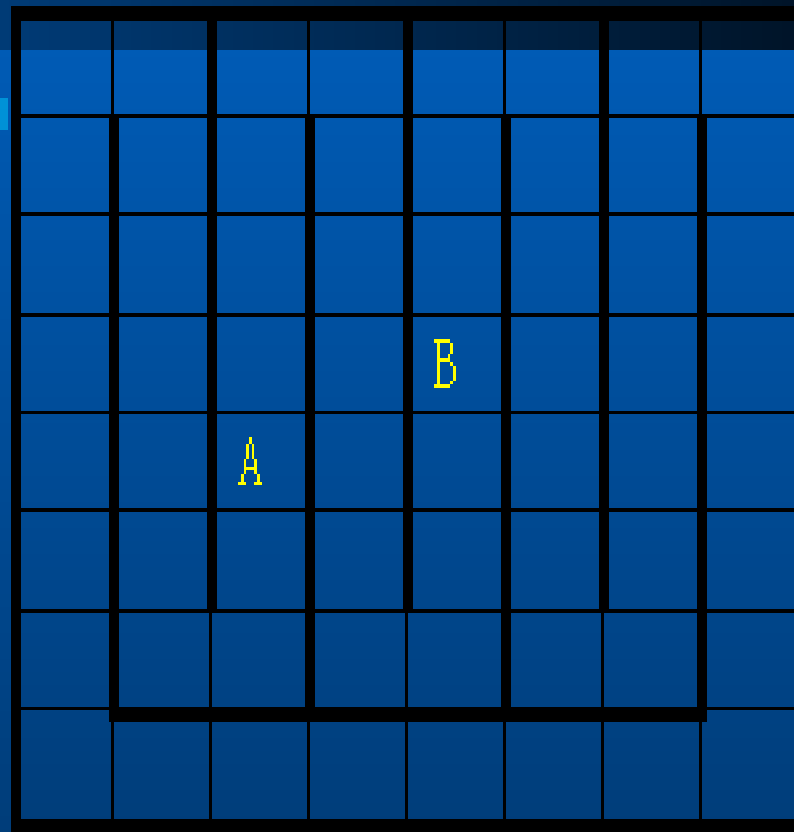


- $i$  与  $j$  同为偶数



## 2-2 异形覆盖

- 2 再考虑  $m*n$  为偶数的情况
- 类似地，由自然染色法得知，去掉的两格必定异色，即一个奇格，一个偶格（不然两种格子总数不等）
- 另一方面，用构造法，总可以用一些粗线将棋盘隔成宽为 1 的长条路线，使从任一格出发可以不重复地走遍棋盘并回到出发点。



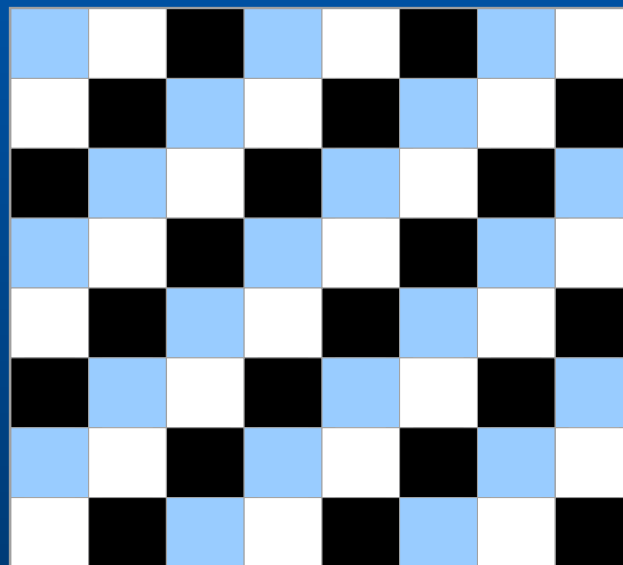
## 2-2 异形覆盖

- 针对染色法，上面的例子都是利用“各类颜色格子总数必须相等”这一条件推出矛盾，但有些时候，只考虑这个条件是不够充分的。

- 例 3 8\*8 棋盘剪去哪个方格才能用 21 个 1\*3 的矩形覆盖？

- 分析

- 考虑到对称性，  
只有剪去  
 $a(3,3)$ 、 $a(3,6)$ 、 $a(6,3)$ 、 $a(6,6)$  中的某一个 才能  
满足题意。



蓝色： 21 个

白色： 22 个

黑色： 21 个

## 2-3 小结

- 覆盖类问题其实是一个难度较大的课题，这里只讨论了一些简单的情况，以说明染色法与构造法的应用
- 需要补充的是，染色法的种类形形色色、五花八门。考虑到可推广性和易操作性，本文只着重研究了“间隔染色法”（即自然染色法的推广）

### 3 马的遍历

- 马行走规则
- 从  $2 \times 3$  的矩形一个角按对角线跳到另一个角上
- 马的遍历
- 从一个格出发按跳马规则不重复地走遍所有格
- 棋盘中马的遍历问题分两类
- (1) 马的哈密尔顿链
- (2) 马的哈密尔顿圈

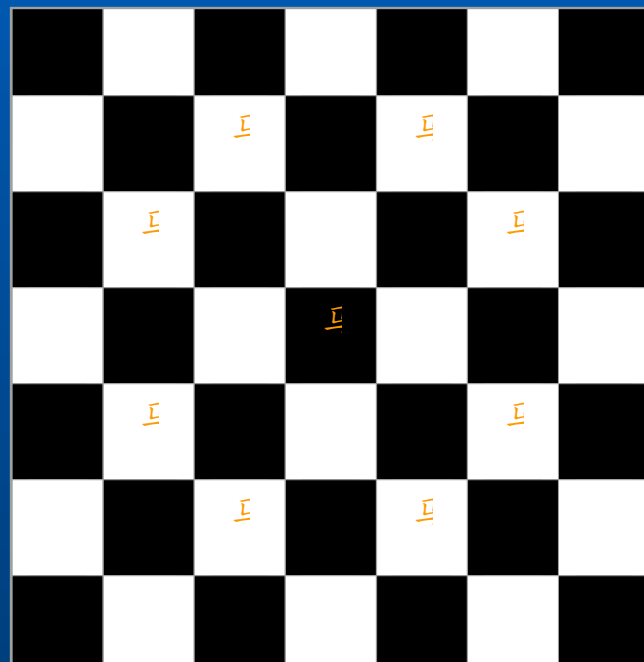
## 3-2 马的哈氏链

- 通常有三种方法
- 1 **贪心法**——每一步跳向度最小的点（度数指可一步到达且未经过的点的个数）
- 2 **分治法**——将棋盘分成几个小棋盘，分别找哈氏链，再接起来
- 3 **镶边法**——先在一个小棋盘中找到哈氏链，然后在棋盘四周镶边，已产生大棋盘的哈氏链。
- 按上述方法不难得到下面结论：
- $n \times n$  棋盘存在哈氏链的充要条件是  $n > 3$ 。

## 3-2 马的哈氏圈

- 例 4 求  $n \times n$  棋盘的哈氏圈

- 分析：
- 将棋盘自然染色，考察无解情况。
- 马无论怎么走，都必须按黑格—白格—黑格—白格... 如此循环。由于要回到起点（起点与终点同色），途经两种颜色的格子数必相等，可知  $n$  为奇数时无解。
- 因为大小限制， $n < 6$  时也无解



## 3-2 马的哈氏圈

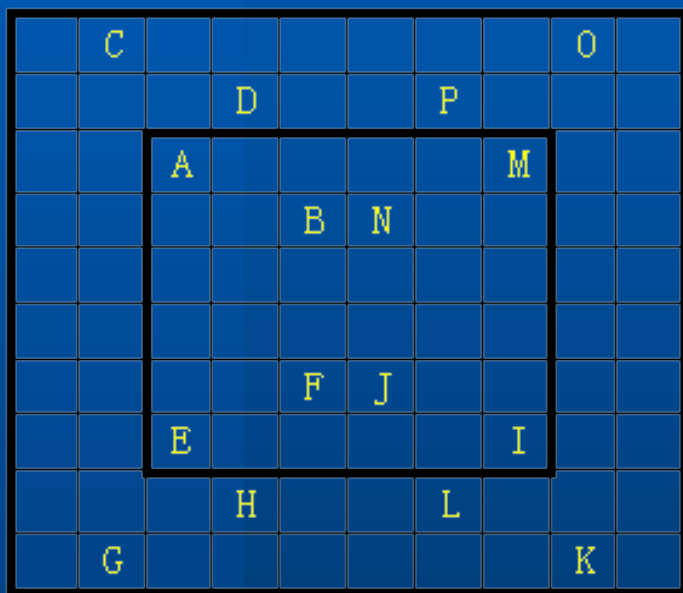
- 当  $n \geq 6$  且为偶数时, 用镶边法构造
- $n \times n$  的大矩形是由  $(n-4) \times (n-4)$  的小矩形套上一个宽为 2 的环组成的。而宽为 2 的环有一个特点, 就是可用四条回路 A、B、C、D 刚好覆盖
- 假设  $(n-4) \times (n-4)$  的棋盘已找到哈氏圈
- 那么只要设法将 A、B、C、D 四条回路嵌入其中, 则  $n \times n$  的矩形的哈氏圈就构造出来了

A	B	C	D	A	B	C	D
C	D	A	B	C	D	A	B
B	A					D	C
D	C					B	A
A	B					C	D
C	D					A	B
B	A	D	C	B	A	D	C
D	C	B	A	D	C	B	A



## 3-2 马的哈氏圈

- 1)  $n$  除以 4 余 2 时,
- 在内矩形四个角 (A、E、I、M) 上分别开口。

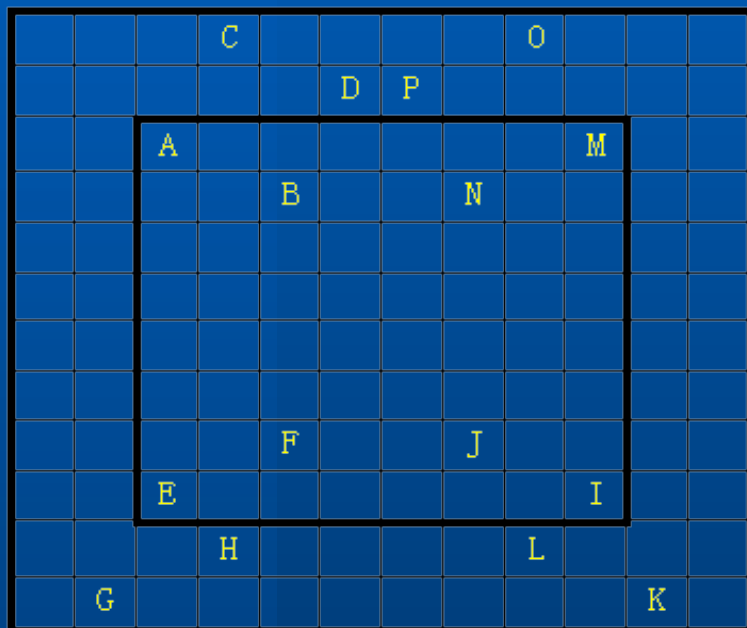


1	16	19	26	7	4
20	25	2	5	18	27
15	26	17	8	3	6
24	21	32	11	28	9
35	14	23	30	33	12
22	31	34	13	10	29

- 1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A、B 上对接, 变成 A-C-...-D-B
- 2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E、F 上对接, 变成 E-G-...-H-F
- 3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I、J 上对接, 变成 I-K-...-L-J

## 3-2 马的哈氏圈

- 2)  $n$  除以 4 余 0 时
- 在内矩形四个角 (A、E、I、M) 上分别开口。



1	54	47	38	49	52	31	26
46	39	2	53	32	27	22	51
55	64	37	48	3	50	25	30
40	45	56	33	28	23	4	21
63	36	61	44	57	20	29	24
60	41	34	15	12	5	8	19
35	62	43	58	17	10	13	6
42	59	16	11	14	7	18	9

- 1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A、B 上对接，变成 A-C- . . . -D-B
- 2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E、F 上对接，变成 E-G- . . . -H-F
- 3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I、J 上对接，变成 I-K- . . . -L-J

## 3-2 马的哈氏圈

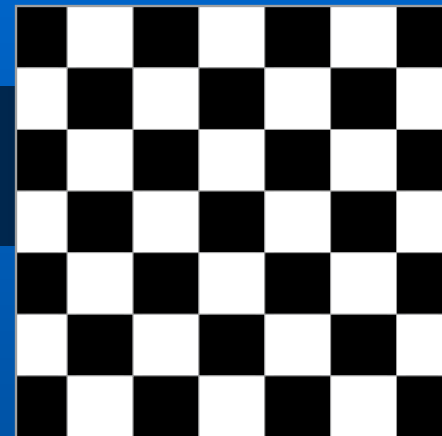
- 一个猜想：
- $m*n$  ( $m \leq n$ ) 棋盘不存在哈氏圈的充要条件是：
- $m, n$  满足下列条件之一
- (1)  $m, n$  都是奇数
- (2)  $m=1, 2$  或  $4$
- (3)  $m=3$  且  $n=4, 6, 8$
- 还没有证明

## 4 其它应用

- 例 5 蠕虫世界 (Uva)
- 蠕虫在一张  $N \times N$  的网上爬行。每个网格上有一个数字，蠕虫不能经过相同的数字两次。开始的时候，蠕虫任意选择一个格子作为起始点。它爬行只能沿水平或竖直方向，且不能超出网外。蠕虫如何移动才能到达尽可能多的网格呢？右面是一个样例。

6	8	18	15	24	20	2	20
6	2	15	2	17	15	3	7
0	11	18	16	20	15	1	11
6	2	6	13	4	17	20	16
5	12	7	2	3	5	18	23
7	13	3	2	2	11	4	23
16	23	10	2	4	12	5	20
17	12	10	1	13	12	6	20

## 4 其它应用



### ● 分析:

- 采用“染色法”贪心出一个上界。
- 1 自然染色
- 2 设  $T_{\text{free}}, T_{\text{black}}, T_{\text{white}}$  分别记录三类格子数量
- 对每一种数字 ( 1 , 2 , 3..... ) 分析
- 1 ) 只存在标有该数字的白色格子,  $T_{\text{white}} \leftarrow T_{\text{white}} + 1$
- 2 ) 只存在标有该数字的黑色格子,  $T_{\text{black}} \leftarrow T_{\text{black}} + 1$
- 3 ) 存在标有该数字的黑白两色格子,  $T_{\text{free}} \leftarrow T_{\text{free}} + 1$
- 3 估价上界
- $L_{\text{max}} = (T_{\text{white}} + T_{\text{free}}) * 2 + 1$  ( $T_{\text{white}} + T_{\text{free}} < T_{\text{black}}$ )
- $T_{\text{white}} + T_{\text{free}} + T_{\text{black}}$  ( $T_{\text{white}} + T_{\text{free}} \geq T_{\text{black}}$ )
- ( 假设  $T_{\text{white}} \leq T_{\text{black}}$ , 否则交换即可 )

## 5 结语

● 染色法       $\hat{0}$       ● 存在问题

● 构造法       $\square$       ● 可行性问题

● 在以棋盘为模型的问题中，综合运用这两种方法，双管齐下，往往能收到事半功倍的效果！

谢谢！