平面图在信息学中的应用

海南省海南中学 刘才良

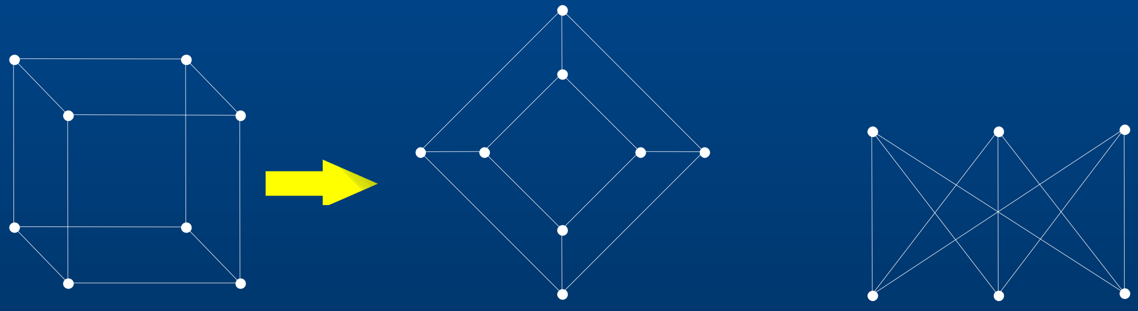
引言

- 平面图是图论中一类重要的图，在实际生产中应用非常广泛。比如集成电路的设计就用到平面图理论。在信息学中，虽然有关平面图的题目并不多见，但对于某些题目，如果通过建模转化，应用平面图的性质，将大大提高算法的效率。因此，掌握一些平面图理论会对我们有很大的帮助。

相关定义、定理及推论

- 平面图
  - 一个无向图 $G=<V，E>$，如果能把它画在平面上，且除 V 中的节点外，任意两条边均不相交，则称该图 G 为平面图。

例如：图 **(a)** 经变动后成为 **(b)**，故图 **(a)** 为平面图。而图**(c)**无论如何变动，总出现边相交，图 **(c)** 为非平面图。



(a) (b) (c)

相关定义、定理及推论

- 面
  - 设 G 为一平面图，若由 G 的一条或多条边所界定的区域内不含图 G 的节点和边，这样的区域称为 G 的一个面，记为 f。包围这个区域的各条边所构成的圈，称为该面 f 的边界，其圈的长度，称为该面 f 的度，记为 $d(f)$。为强调平面图 G 中含有面这个元素，把平面图表示为 $G=<V，E，F>$，其中 F 是 G 中所有面的集合。

相关定义、定理及推论

- 定理1：若 $G=<V，E，F>$ 是连通平面图，则 $\sum_{f\in F} d(f)=2|E|$.
- 定理2：若 $G=<V，E，F>$ 是连通平面图，则 $|V|-|E|+|F|=2$.

证明：

首先假定 G 是树，则 $|E|=|V|-1$， G 只有一个无限面，因此 $|V|-|E|+|F|=|V|-(|V|-1)+1=2$.

现在假设 G 不是树，由于 G 是连通的，故 G 中至少存在一个基本圈 C，于是 G 必有一个有限面 f，而 f 的边界是由基本圈 C 及可能连同计算两次的一些边组成 . 如果从 G 中删去基本圈 C 上的一条边后得到的平面图 $G_1=<V_1，E_1，F_1>$，则 $|V_1|=|V|$， $|E_1|=|E|-1$， $|F_1|=|F|-1$，故 $|V_1|-|E_1|+|F_1|=|V|-|E|+|F|$，仿此做下去，最终得到 G 的一棵生成树 $T_0=<V_0，E_0，F_0>$，于是 $|V|-|E|+|F|=|V_0|-|E_0|+|F_0|=2$.

相关定义、定理及推论

- 推论 1： 给定连通简单平面图 G=<V， E， F>，若 $|V|\geq 3$， 则 $|E|\leq 3|V|-6$ 且 $|F|\leq 2|V|-4$.
- 推论 2： 设 G=<V， E， F> 是连通简单平面图，若 $|V|\geq 3$， 则存在 $v\in V$， 使得 $d(v)\leq 5$.

推论 1： $|E|=O(|V|)$

邻接表、散列表结构O(|V|)
VS
邻接矩阵结构 O(|V|²)

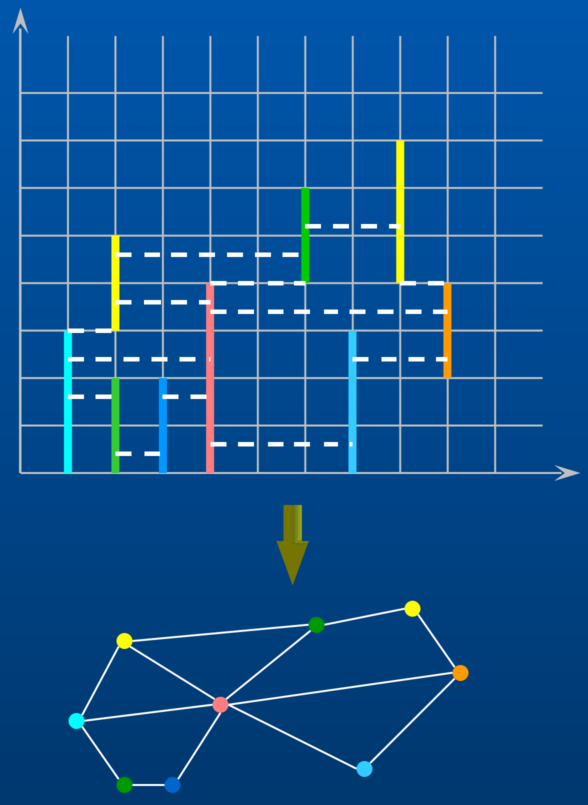
应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

平面上有 **N(N<=8000)** 条互不相连的竖直线段。如果两条线段可以被一条不经过第三条竖直线段的水平线段连接，则这两条竖直线段被称为“水平可见”的。三条两两“水平可见”的线段构成一个“三元组”。求给定输入中“三元组”的数目。（坐标值为**0** 到 **8000** 的整数）

应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

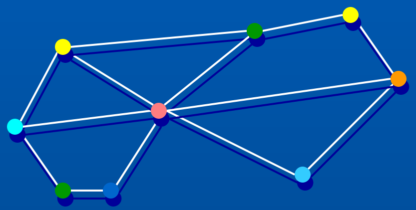
分析

- 把线段看成点
- 若两条线段水平可见，则在对应两点之间连一条边，建立无向图 *G*
- 统计 *G* 中的三角形的数目



应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

如何建立图 ***G***？



- 算法一
  - 设数组 C[I] （ I=0..2Y_{max} ）， C[2*y*] 表示覆盖 y 点的最后一条线段， C[2y+1] 表示覆盖区间 (y,y+1) 的最后一条线段
  - 把线段按从左到右的顺序排序
  - 依次检查每一条线段 *L*(*L*=[*y*′， *y*″])
    - 检查 *L* 覆盖的所有整点和单位区间（ C[*u*]， *u*=2*y*′..2*y*″ ）
    - 若 C[*u*]≠0， 则 G.AddEdge(C[*u*]， *L*)
    - C[*u*]←*L*

时间性能分析

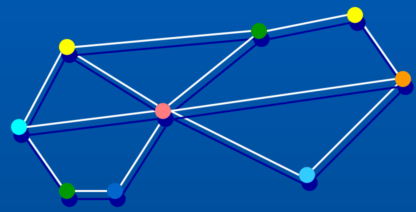
⇦O(*N*log*N*)

⇦O(*N*)

⇦O(Y_{max})

总计： O(NY_{max})

应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)



如何建立图 *G*？

- 算法二
  - 定义线段树 T：
    - 设节点 N 描述区间 [*a*,*b*] 的覆盖情况

      0　　　　(无线段覆盖 [*a*,*b*])
    - 则 N.Cover= L　　　　(线段 L 完全覆盖 [*a*,*b*])

      -1　　　　(其他情形)
  - 线段树的存储：

    使用完全二叉树的数组结构，可以免去复杂的指针运算和不必要的空间浪费。

时间性能分析

排序： $O(N\log N)$

检索： $O(N\log Y_{max})$

插入： $O(N\log Y_{max})$

总计： $O(N\log Y_{max})$

空间性能分析

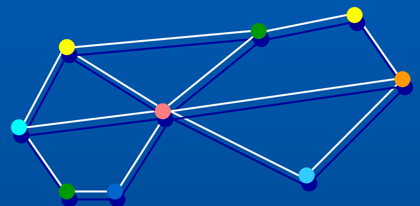
线段： $O(N)$

线段树： $O(Y_{max})$

边表： $O(N)$

应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

统计图 *G* 中三角形的数目



- 算法一

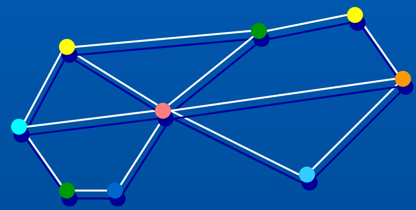
  枚举所有的三元组，判断三个顶点是否两两相邻。由于总共有 C_n^3 个三元组，因此时间复杂度为 O(N^3)
- 算法二

  枚举一条边，再枚举第三个顶点，判断是否与边上的两个端点相邻。根据水平可见的定义可知 *G* 为平面图， *G* 中的边数为 O(N)，故算法二的复杂度为 O(N^2)
- 算法一与算法二的比较

  算法一只是单纯的枚举，没有注意到问题的实际情况，而实际上三角形的数目是很少的，算法一作了许多无用的枚举，因此效率很低。

  算法二从边出发，枚举第三个顶点，这正好符合了问题的实际情况，避免了许多不必要的枚举，所以算法二比算法一更加高效。

应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)



有没有更好的办法?

- 算法三—换个角度，从点出发

  每次选取度最小的点 v ，由推论 2 知 $d(v)\leq 5$ ，只需花常数时间就可以计算含点 v 的三角形的数目 .

  应用二叉堆可以提高寻找和删除点 v 的效率，总的时间复杂度仅为 $O(N\log N)$

- 算法二与算法三的比较

  算法二是以边作为出发点的，从整体上看，平面图中三角形的个数只是 $O(N)$ 级的，而算法二的复杂度却是 $O(N^2)$ ，这种浪费是判断条件过于复杂造成的。算法三从点出发，则只需要判断某两点是否相邻即可。

应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

在同一水平面上有 **N(N<=500)** 个洞穴，洞穴之间有通道相连，且每个洞穴恰好连着三个通道。通道与通道不相交，每个通道都有一个难度值，现从 **1** 号洞穴开始遍历所有的洞穴刚好一次并回到洞穴 **1** ，求通过通道难度值之和的最小值。**(** 给定所有通道的信息和在外圈上的洞穴 **)**

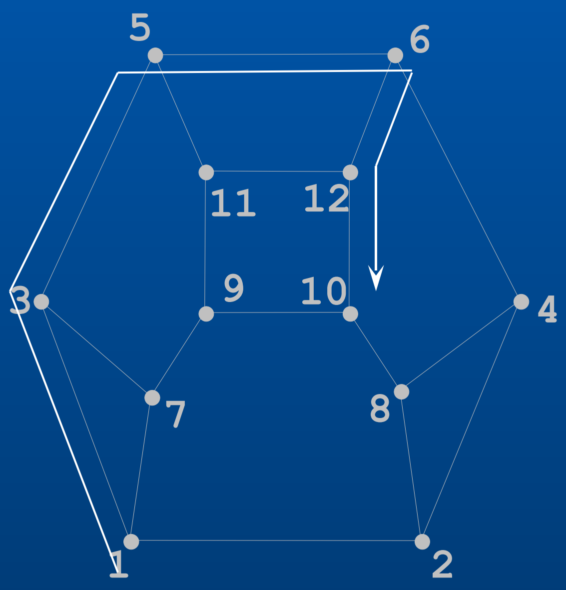
应用 – 例 2: 洞穴 (CEOI97)

分析

- 本题求的是最优路径，但最优路径具备什么性质并不明显，故考虑深度优先搜索。
- *N* 最大达到 500 ，考虑剪枝以提高效率。
- 基本剪枝条件：若当前路径的难度值的总和比当前最优值大则放弃当前路径。
- 为了找到强剪枝条件，考虑问题所具有的特性
  - 所有点的度数为 3
  - 所给的图是平面图
  - 外圈上的点已知

应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

- 情形一
  考虑路径 1-3-5-6-12-10 ，由于每个洞穴必须被访问到，而 11 号洞穴只有一条可用通道 9-11 ，访问 11 后不能再回到 1 ，故该路径不可能遍历所有点。
- 剪枝条件一
  在所有未访问的洞穴中，与其相邻的已访问过的洞穴（第 1 个与当前访问的最后一个除外）的个数小于等于 1 。



应用 – 例 2: 洞穴 (CEOI97)

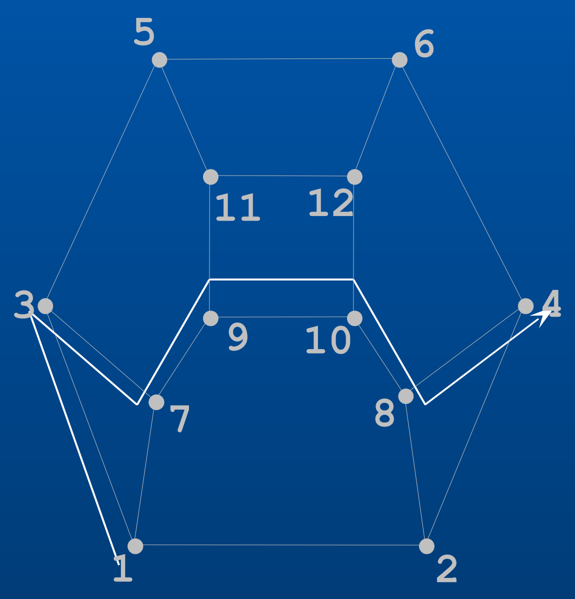
- 情形二

  路径 1-3-7-9-10-8-4 把图分成两部分，而且两部分中都有未访问过的点。由于图是平面图，其中必有一部分点不能被访问到。

- 剪枝条件二

  设外圈上的点按连接顺序为 $1,a_2,\ldots,a_k$，则访问的顺序只能为：

  $1,\ldots,a_2,\ldots,a_3,\ldots,\ldots,\ldots,a_k,\ldots,1.$



应用 – 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

给定一地图，要求用不超过 **5** 种颜色涂每一个区域，使得相邻区域的颜色不同。（区域数 **<=500** ）

分析：

把每个区域看成点，相邻区域之间连一条边，则问题转化为对每个点着色并使得相邻点颜色不同。

根据地图的平面性可知：转化后的图是平面图。

对于任意平面图 ***G***，是否都能用不超过 **5** 种颜色着色？

应用 – 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

定理：对于任意平面图 G，都能用不超过 **5** 种颜色着色 .

证明：只需考虑 G 是连通简单平面图的情形 .

若 $|V|\leq 5$，则命题显然成立 .

假设对所有的平面图 $G=<V, E>$，当 $|V|\leq k$ 时命题成立 . 现在考虑图 $G_1=<V_1, E>$，$|V_1|=k+1$ 的情形 . 由推论 2 可知：存在 $v_0\in V_1$，使得 $d(v_0)\leq 5$. 在图 G_1 中删去 v_0，得图 G_1-v_0. 由归纳，图 G_1-v_0 可用 5 种颜色着色 .

若邻接结点使用颜色数不超过 4，则可对 v_0 着色，得到一个最多是五色的图 G_1.

应用 – 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

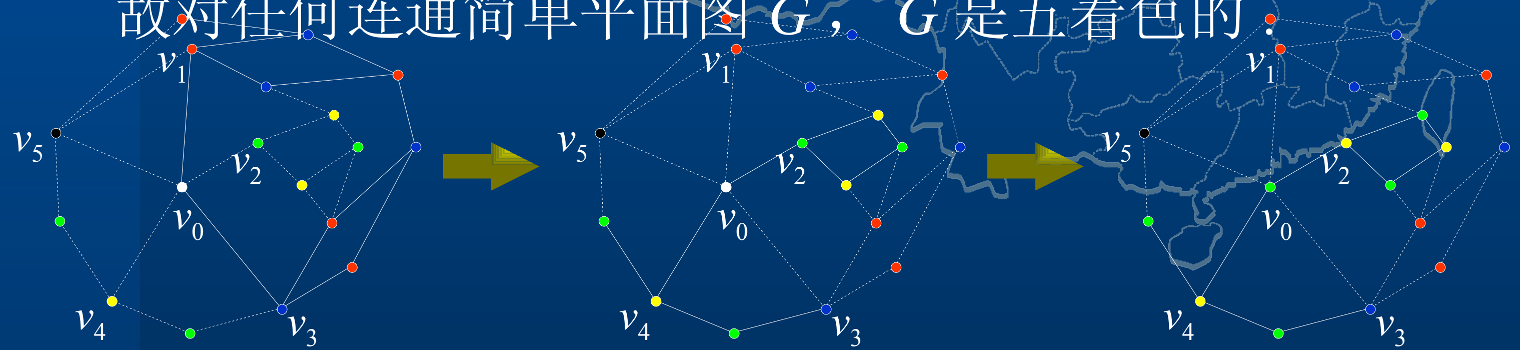
若 $d(v_0)=5$ 且各邻接点分别着不同的颜色，则设与之相邻的点的按顺时针排列为 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5. 它们分别着不同的颜色 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5.

考虑点集 $V_{c1,c3}=\{v|v\in V(G_1-v_0)\wedge \alpha(v)=c_1$ 或 $c_3\}$ 所诱导的 G_1-v_0 的子图 $\langle V_{c1,c3}\rangle$. 若 v_1,v_3 属于 $\langle V_{c1,c3}\rangle$ 的不同的分图，则在 v_1 所在的分图中，调换颜色 c_1 与 c_3 后， v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 五个点是四着色的，再令 v_0 着 c_1 色，得到 G_1 的一种五着色 .

应用 – 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

若 v_1,v_3 属于 $\langle V_{c1,c3}\rangle$ 的同一的分图，则点集 $V_{c1,c3}\cup\{v_0\}$ 所诱导的 G_1 的子图中含有一个圈 C，而 v_2,v_4 不能同时在圈的内部或外部，即 v_2,v_4 不是邻接点，于是考虑 $V_{c2,c4}=\{v|\ v\in V(G_1-v_0)\wedge\alpha(v)=c_2$ 或 $c_4\}$ 所诱导的子图 $\langle V_{c2,c4}\rangle$，v_2,v_4 必属于 $\langle V_{c2,c4}\rangle$ 的不同的分图 . 做与上面类似的调整，又可得到 G_1 的一种五着色 .

故对任何连通简单平面图 G， G 是五着色的 .



应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

算法：

procedure Paint(*G*:Graph);

- 找出度最小的点 v_0
- Paint(G-v_0)
- 考虑图 G，若无法对 v_0 着色，则对 v_0 的相邻点，枚举所有点对，直到找到属于不同分图的点对，对其进行调整.
- 任选剩下的一种颜色，对 v_0 着色

时间复杂度： **O(N^2)**

空间复杂度： **O(N)**

总结

以上例子分别论述了平面图理论在几类信息学问题中的应用。我们研究平面图就是为了更深刻地认识平面图，提高算法效率，但有时候单独应用平面图理论还不够，还需要和其它理论知识综合起来应用。然而要达到理想的效果并非一朝一夕的事情，它还需要我们平时多积累、多思考，遇到问题时才能运用自如。相信随着对平面图的研究不断深入，平面图的应用一定会更加广阔。

谢谢！