O興~

« 上一篇：PKU 1963 Cave Exploration，一道搞了我很久的模拟题，强调常数级的优化
下一篇：PKU 3146 Interesting Yang Hui Triangle，2006 ACM/ICPC 上海赛区的第I题 »

差分约束系统(System Of Difference Constraints)

我很懒的 @ 2006-12-12 19:10

（本文假设读者已经有以下知识：最短路径的基本性质、Bellman-Ford算法。）

比如有这样一组不等式：

```
X1 - X2 <= 0
X1 - X5 <= -1
X2 - X5 <= 1
X3 - X1 <= 5
X4 - X1 <= 4
X4 - X3 <= -1
X5 - X3 <= -3
X5 - X4 <= -3
```

不等式组(1)

全都是两个未知数的差小于等于某个常数（大于等于也可以，因为左右乘以-1就可以化成小于等于）。这样的不等式组就称作差分约束系统。

这个不等式组要么无解，要么就有无数组解。因为如果有一组解{X1, X2, ..., Xn}的话，那么对于任何一个常数k，{X1 + k, X2 + k, ..., Xn + k}肯定也是一组解，因为任何两个数同时加一个数之后，它们的差是不变的，那么这个差分约束系统中的所有不等式都不会被破坏。

差分约束系统的解法利用到了单源最短路径问题中的三角形不等式。即对于任何一条边u -> v，都有：

```
d(v) <= d(u) + w(u, v)
```

其中d(u)和d(v)是从源点分别到点u和点v的最短路径的权值，w(u, v)是边u -> v的权值。

显然以上不等式就是d(v) - d(u) <= w(u, v)。这个形式正好和差分约束系统中的不等式形式相同。于是我们就可以把一个差分约束系统转化成一张图，每个未知数Xi对应图中的一个顶点Vi，把所有不等式都化成图中的一条边。对于不等式Xi - Xj <= c，把它化成三角形不等式：Xi <= Xj + c，就可以化成边Vj -> Vi，权值为c。最后，我们在这张图上求一次单源最短路径，这些三角形不等式就会全部都满足了，因为它是最短路径问题的基本性质嘛。

话说回来，所谓单源最短路径，当然要有一个源点，然后再求这个源点到其他所有点的最短路径。那么源点在哪呢？我们不妨自已造一个。以上面的不等式组为例，我们就再新加一个未知数X0。然后对原来的每个未知数都对X0随便加一个不等式（这个不等式当然也要和其它不等式形式相同，即两个未知数的差小于等于某个常数）。我们索性就全都写成Xn - X0 <= 0，于是这个差分约束系统中就多出了下列不等式：

```
X1 - X0 <= 0
X2 - X0 <= 0
X3 - X0 <= 0
X4 - X0 <= 0
X5 - X0 <= 0
```

不等式组(2)

对于这5个不等式，也在图中建出相应的边。最后形成的图如下：

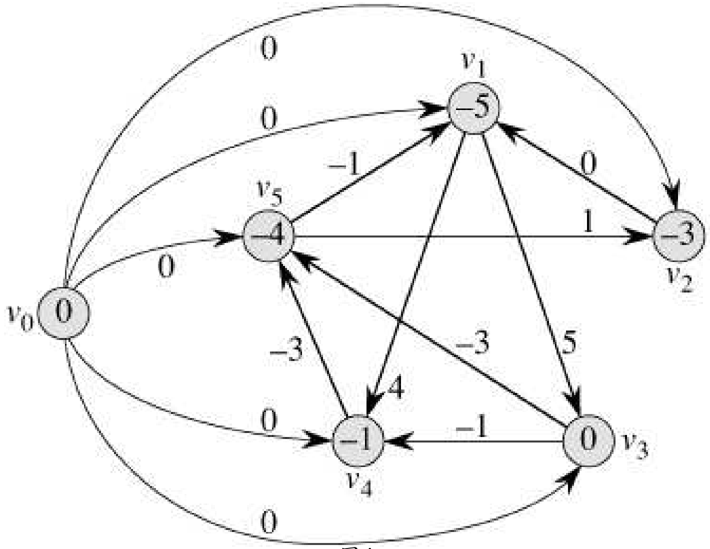


图1

图中的每一条边都代表差分约束系统中的一个不等式。现在以V0为源点，求单源最短路径。最终得到的V0到Vn的最短路径长度就是Xn的一个解啦。从图1中可以看到，这组解是{-5, -3, 0, -1, -4}。当然把每个数都加上10也是一组解：{5, 7, 10, 9, 6}。但是这组解只满足不等式组(1)，也就是原先的差分约束系统；而不满足不等式组(2)，也就是我们后来加上去的那些不等式。当然这是无关紧要的，因为X0本来就是个局外人，是我们后来加上去的，满不满足与X0有关的不等式我们并不在乎。
也有可能出现无解的情况，也就是从源点到某一个顶点不存在最短路径。也说是图中存在负权的圈。这一点我就不展开了，请自己参看最短路径问题的一些基本定理。

其实，对于图1来说，它代表的一组解其实是{0, -5, -3, 0, -1, -4}，也就是说X0的值也在这组解当中。但是X0的值是无可争议的，既然是以它作为源点求的最短路径，那么源点到它的最短路径长度当然是0了。因此，实际上我们解的这个差分约束系统无形中又存在一个条件：

```
X0 = 0
```

也就是说在不等式组(1)、(2)组成的差分约束系统的前提下，再把其中的一个未知数的值定死。这样的情况在实际问题中是很常见的。比如一个问题表面上给出了一些不等式，但还隐藏着一些不等式，比如所有未知数都大于等于0或者都不能超过某个上限之类的。比如上面的不等式组(2)就规定了所有未知数都小于等于0。

对于这种有一个未知数定死的差分约束系统，还有一个有趣的性质，那就是通过最短路径算法求出来的一组解当中，所有未知数都达到最大值。下面我来粗略地证明一下，这个证明过程要结合Bellman-Ford算法的过程来说明。
假设X0是定死的；X1到Xn在满足所有约束的情况下可以取到的最大值分别为M1、M2、......、Mn（当然我们不知道它们的值是多少）；解出的源点到每个点的最短路径长度为D1、D2、......、Dn。
基本的Bellman-Ford算法是一开始初始化D1到Dn都是无穷大。然后检查所有的边对应的三角形不等式，一但发现有不满足三角形不等式的情况，则更新对应的D值。最后求出来的D1到Dn就是源点到每个点的最短路径长度。
如果我们一开始初始化D1、D2、......、Dn的值分别为M1、M2、......、Mn，则由于它们全都满足三角形不等式（我们刚才已经假设M1到Mn是一组合法的解），则Bellman-Ford算法不会再更新任合D值，则最后得出的解就是M1、M2、......、Mn。
好了，现在知道了，初始值无穷大时，算出来的是D1、D2、......、Dn；初始值比较小的时候算出来的则是M1、M2、......、Mn。大家用的是同样的算法，同样的计算过程，总不可能初始值大的算出来的结果反而小吧。所以D1、D2、......、Dn就是M1、M2、......、Mn。

那么如果在一个未知数定死的情况下，要求其它所有未知数的最小值怎么办？只要反过来求最长路径就可以了。最长路径中的三角不等式与最短路径中相反：

```
d(v) >= d(u) + w(u, v)
也就是 d(v) - d(u) >= w(u, v)
```

所以建图的时候要先把所有不等式化成大于等于号的。其它各种过程，包括证明为什么解出的是最小值的证法，都完全类似。

用到差分约束系统的题目有ZJU 2770，祝好运。

Tags: acm zju 最短路径 差分约束 bellman-ford difference constraint

阅读全文(64次) / 评论 / 丢小纸条 / 文件夹: program

最新评论

Acm_Eagle @ 2007-04-12 19:27

狂顶....最近几天在看差分约束系统,一直找不到资料,偶然发现您的博客...有关于这方面的资料,真是Thank you very much 受益丰浅啊..感激不尽

> 我也很感谢你能认可我写的文章。
> 我最近做毕业设计比较忙，所以很久没练ACM题目了。等放假了有空了
> 我会重新开始训练。到时候一定会写更多对学习者有用的文章。

评论 / 与网志内容无关的留言请丢小纸条

* 姓名

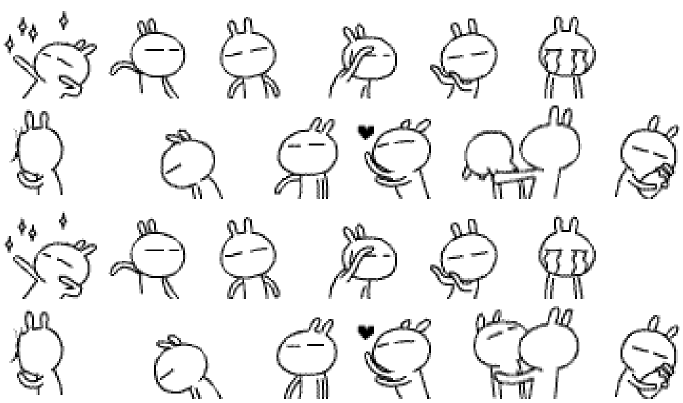
Email

主页

记住我 ☑ 记住我

* 评论

表情



发表评论

分类小组论坛
杂谈，娱乐、八卦，文学、艺术，体育，旅游、同城，象牙塔，情感，时尚、生活，星座，科技

相关法律法规
全国人大常委会关于维护互联网安全的决定
中华人民共和国计算机信息系统安全保护条例
中华人民共和国计算机信息网络国际联网管理暂行规定
计算机信息网络国际联网安全保护管理办法

计算机信息系统国际联网保密管理规定