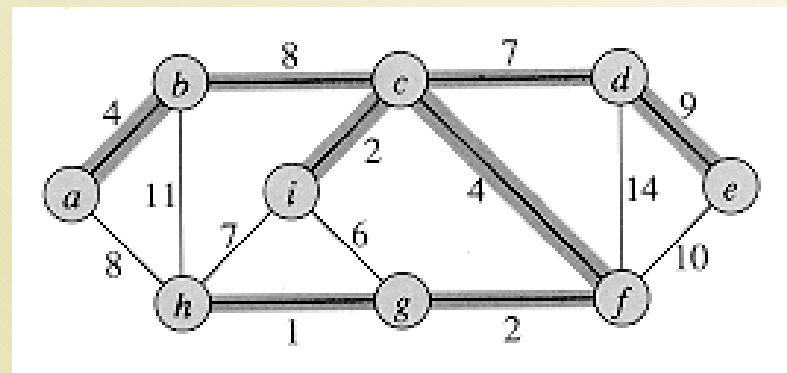
A collection of historical artifacts is arranged on a light-colored surface. In the top left, a portion of a wooden chessboard with a checkered pattern and several chess pieces is visible. Below the chessboard, there are two medals: one with a red ribbon and a white star, and another with a blue ribbon and a white star. A pair of round-rimmed glasses with thin metal frames lies diagonally across the center. In the bottom left corner, a small, round, vintage-style compass is partially visible.

最小生成树算法 及其应用

江苏省常州高级中学
吴景岳

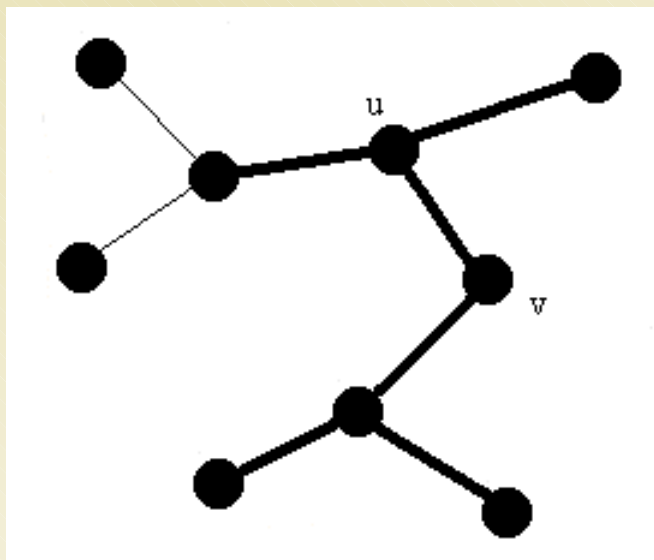
最小生成树


- 无向连通图的边的集合
- 无回路
- 连接图中所有的点
- 总权值最小



一般算法

A 是一棵最小生成树的子集，如果边 (u, v) 不属于 A 且 $A \cup \{(u, v)\}$ 仍然是某一棵最小生成树的子集，就称 (u, v) 为集合 A 的安全边。





一般算法

GENERIC-MST(G, w)

2. $A \leftarrow \Phi$

3. While A 没有形成一棵生成树

4. Do 找出 A 的一条安全边 (u, v)

5. $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$

6. Return A

最小生成树



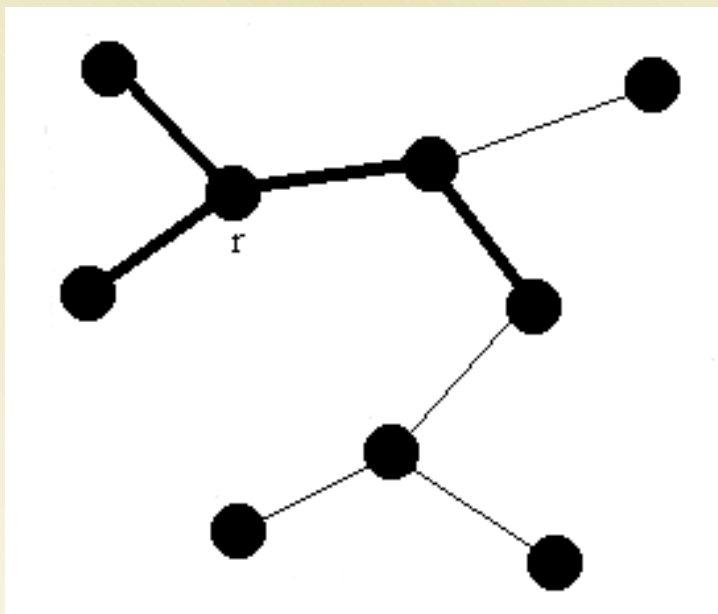
一般算法

Prim 算法

Kruskal 算法

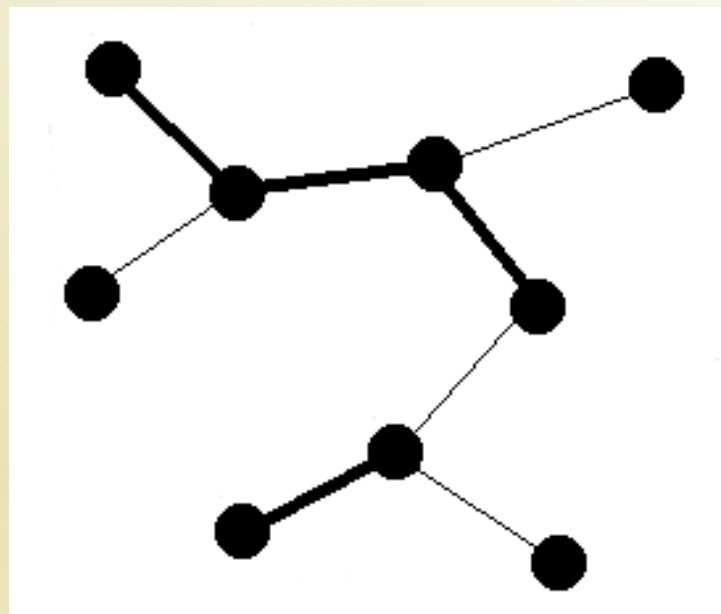
常用算法

◆ Prim 算法



从根结点出发，不断扩展。
。

◆ Kruskal 算法

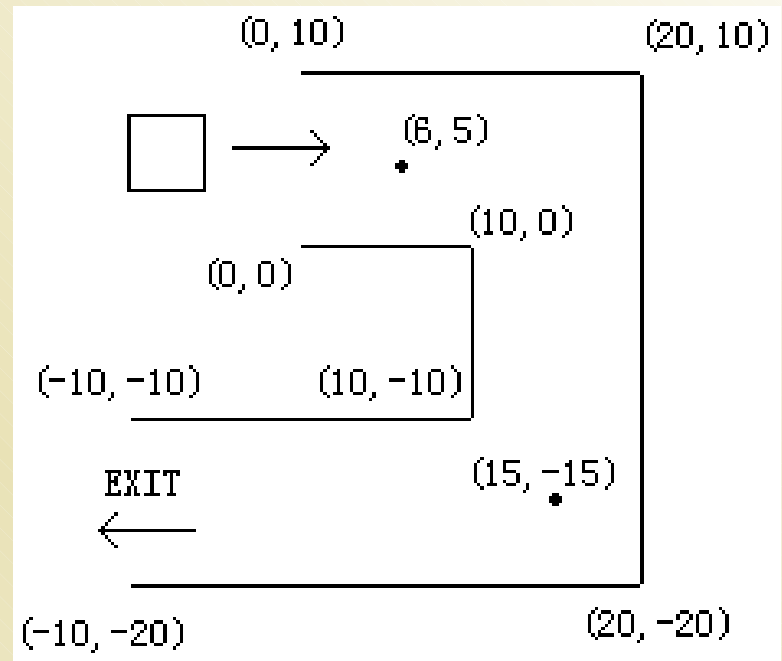


按照长度从小到大的顺序，
判断是不是安全边。

例 1——Robot

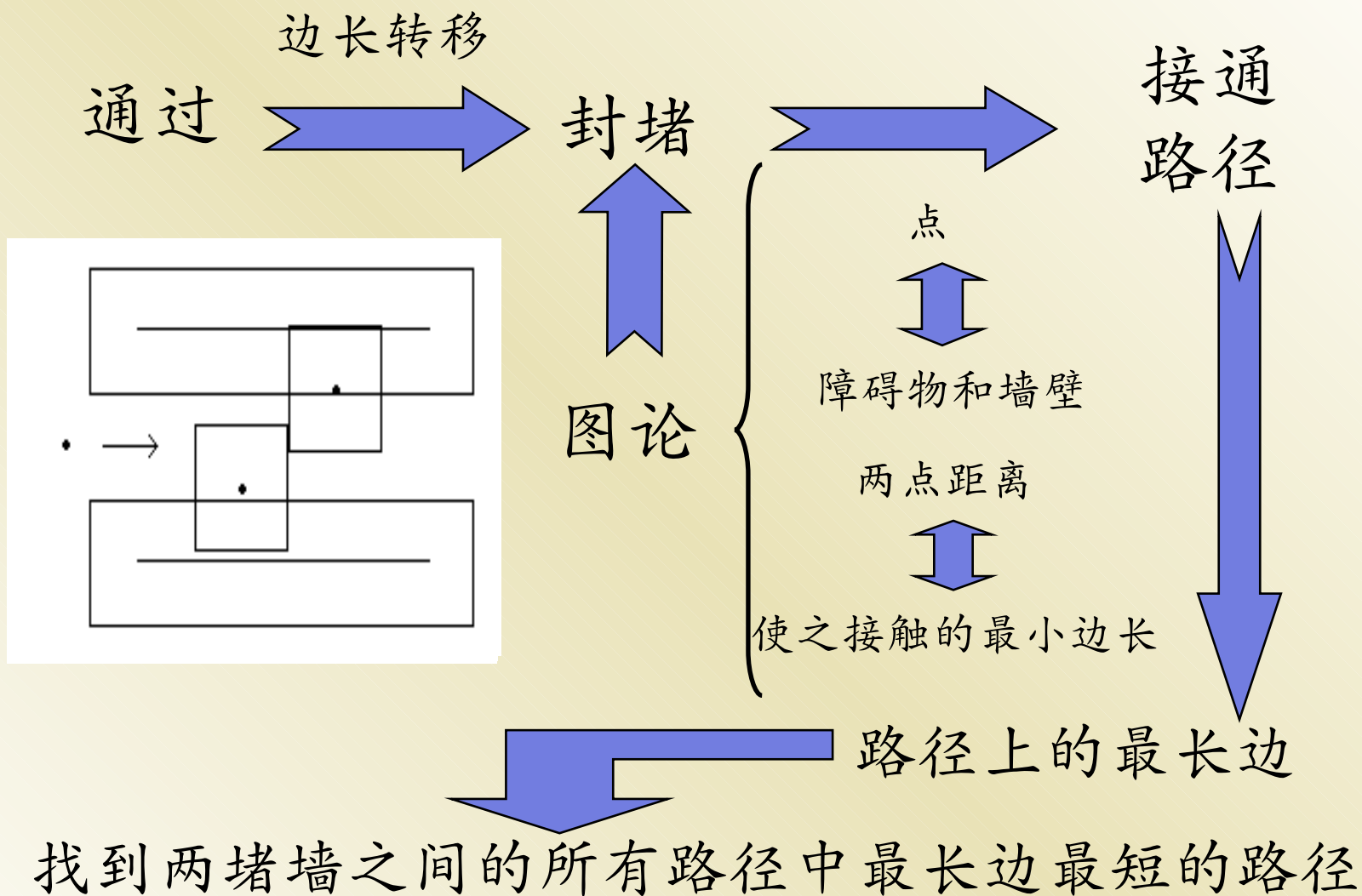
一条走廊由两堵平行的墙构成，只能有 90° 的拐弯。走廊里有障碍物，可看作点。

求能够通过该走廊的最大的正方形。（只能沿水平或竖直方向移动，不能碰到障碍物和墙壁）



最大的正方形的边长为
5

分析

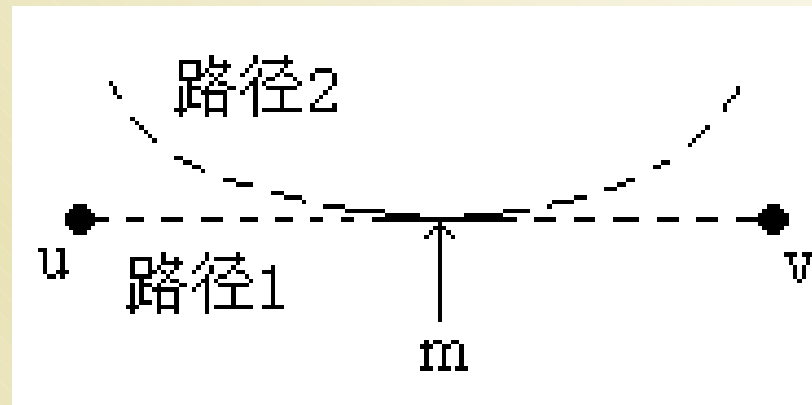


算法

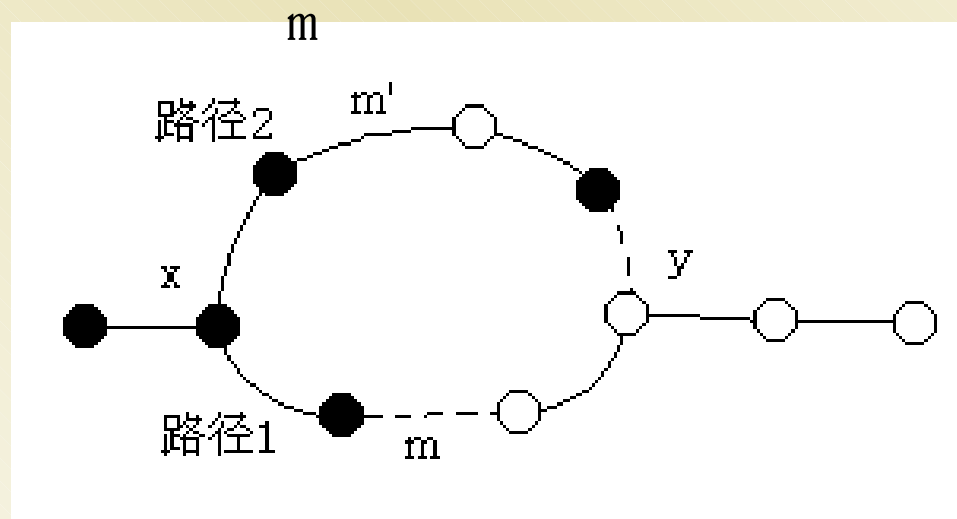
在两堵墙之间的所有路径中，最小生成树上的路径是最长边最短的！



反证法



路径 2 不包含



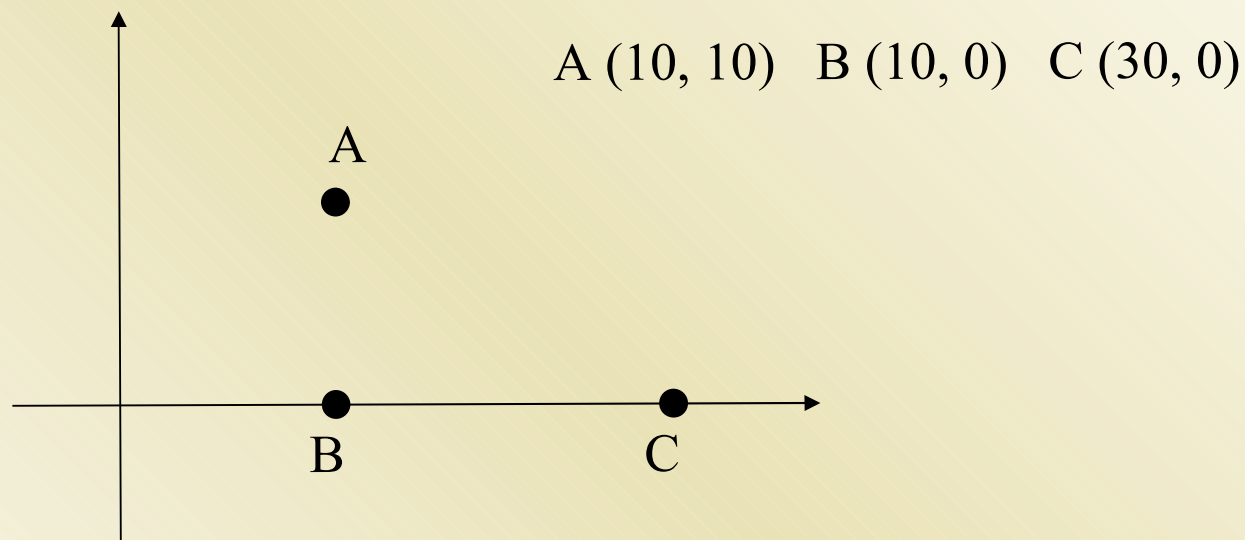


例 2—— 北极通讯网络

- 平面上有 n 座村庄（可以看作 n 个点）
- 为了让所有村庄都可以互相联系：
 - 所有村庄 无线电收发机 通讯距离不超过 d
 - k 座村庄 卫星设备 通讯距离无限

已知所有村庄的位置和卫星设备的数量 k ，请问如何分配可以使无线电收发机的通讯距离 d 最小。

例 2—— 北极通讯网络



数据限制：

$n \leq 500$, $k \leq 100$ 。

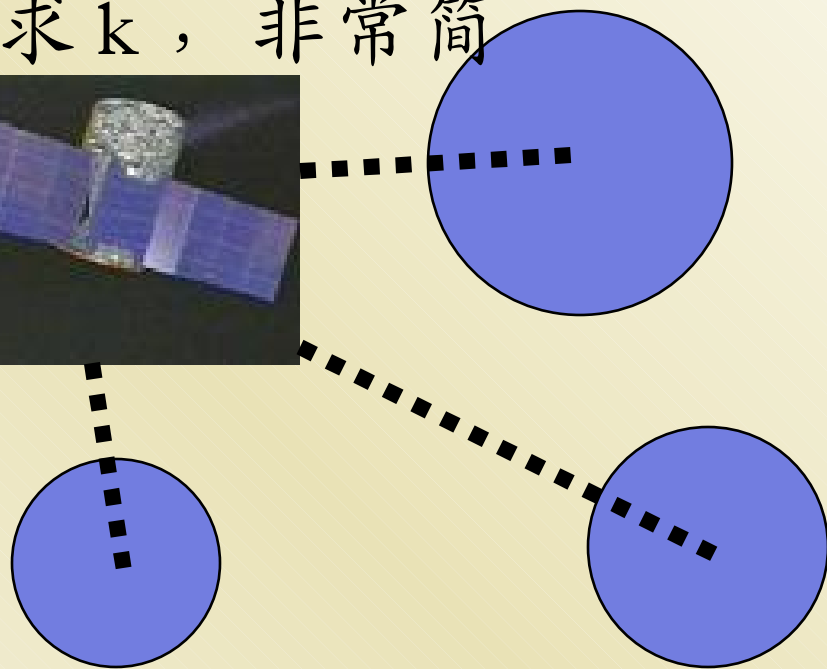
$K=2$ ——B 和 C , $\min(d)=d(A,B)=10$ 。


逆向思维

➤ 已知 k ，求 d ，比较困难。

➤ 已知 d ，求 k ，非常简

把所有可单互相通讯的村庄连接起来，构成一个图。卫星设备的台数就是图的连通支的个数。





逆向思维

找到一个最小的 d ，使得连通支的个数小于等于卫星设备的数目。

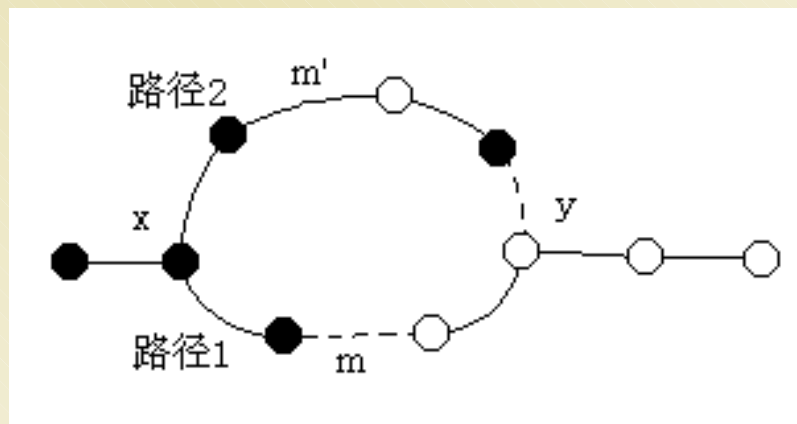
引理

如果去掉所有长度大于 d 的边后，最小生成树被分成 k 个连通支，那么图也被分成 k 个连通支。

证明提示：

2. 反证法

3. 构造回路





构造

最小生成树的第 k 长边

- ◆ 可行性。如果 d 等于第 k 长边的长度，将去掉前 $k-1$ 长的边，最小生成树将被分成 k 个连通支。由引理，原图也将被分成 k 个连通支，满足连通支个数小于等于 k 的要求。
- ◆ 最优性。如果 d 小于第 k 长边的长度，至少会去掉前 k 长的边，最小生成树至少被分成 $k+1$ 个连通支，原图也至少被分成 $k+1$ 个连通支，不满足要求。

总结

原问题

转化



图论问题



构造法

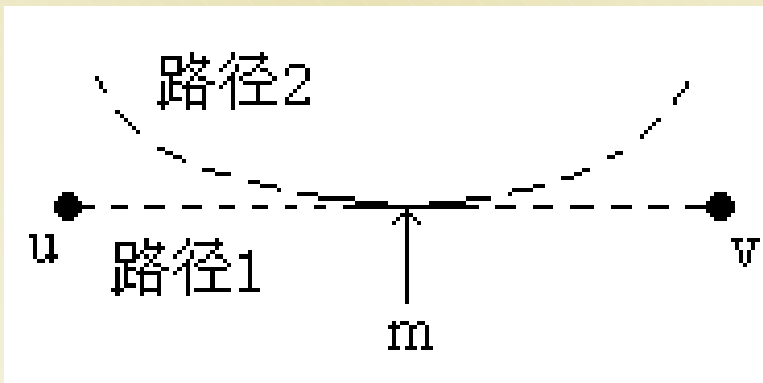
- ◆ 敏锐的洞察力
- ◆ 扎实的图论基础
- ◆ 严谨的思维

最小生成树的性质和有关定理

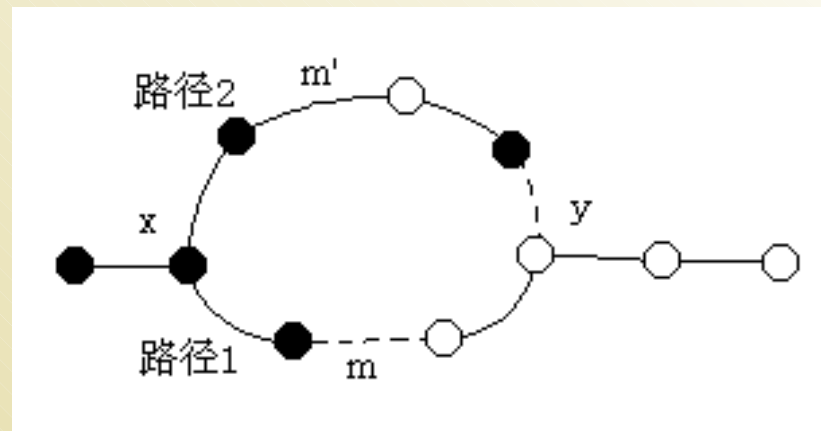


谢谢大家

反证法



路径 2 不包含
m



最小生成树上的路径
是最长边最短的