寄信人: kelefe (0_0)
标　题: 皮克定理zz
发信站: 逸仙时空 Yat-sen Channel (Sat Aug 12 11:48:22 2006)
来　源: 124.29.56.45

奥地利数学家皮克(Georg Pick, 1859---1943年)发现了一个计算点阵中多边形面积的公式：S=N+ L/2 -1, 其中多边形面积S, 内部格点数N, 边上格点数L

相关习题：ZOJ1032或POJ1265(同一个题)

（一）　皮克公式
一张方格纸上，上面画着纵横两组平行线，相邻平行线之间的距离都相等，这样两组平行线的交点，就是所谓格点。
如果取一个格点做原点O，如图1，取通过这个格点的横向和纵向两直线分别做横坐标轴OX和纵坐标轴OY，并取原来方格边长做单位长，建立一个坐标系。这时前面所说的格点，显然就是纵横两坐标都是整数的那些点。如图1中的O、P、Q、M、N都是格点。由于这个缘故，我们又叫格点为整点。
（图1）　（图2）
一个多边形的顶点如果全是格点，这多边形就叫做格点多边形。有趣的是，这种格点多边形的面积计算起来很方便，只要数一下图形边线上的点的数目及图内的点的数目，就可用公式算出。
那么格点与面积间有什么公式呢? 下面我们一起看看怎样寻求这公式。
我们要借助一个简单的例子--寻求格点多边形的面积和格点数之间的精确关系--通过特殊的情形归纳出一般的公式。
为简单起见，假定每个小方格的边长d=1。首先选择面积和格点数容易计算的格点多边形作为具体例子,加以讨论。例如边长是1或2的格点正方形(图2的OABC和OPQR),两腰是1的格点三角形(图2中的OAB),一腰是1,一腰是2的格点三角形(图2中的OPC),边长是2和4的格点矩形(图2中的OLMR)。我们把它们的面积S,内部格点数N和边上格点数L,列成一表如下：

图形	S	N	L	S－N	L/2
OABC	1	0	4	1	2
OPQR	4	1	8	3	4
OAB	1/2	0	3	1/2	3/2
OPC	1	0	4	1	2
OLMR	8	3	12	5	6

看过上表的前四列，我们可能感到很失望，S，N，L之间几乎看不出有什么联系来，不过，我们在前面已经看到，当S很大时，S和N的差(相对地说)是很小的。因此，我们在表上添了一列，包含S-N的值，这列数字是随着L增大而增大的。如果用2去除L，列到最后一列，我们立刻得到下面的有趣的关系：
S－N= L/2 －1
即

$$S=N+L/2-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

也就是说，
（格点数N）＋　（ ）与　面积S的差恰好是1。
公式（1）是我们从五个特例归纳出来的，它到底是正确的还是巧合呢？下面我们一起来验证一下。
（图3）
　像寻求公式的时候那样，我们在思索一个公式的证明时，也可以先从简单的特殊情形想起。现在我们就先考虑两边平行于坐标轴的格点矩形ABCD，如图（3）。假定这矩形的长宽分别是m和n。容易从图3看出，这时，面积S，内部的格点数N和边上的格点数L分别是

$$S=mn,$$
$$N=(m-1)(n-1), \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$
$$L=2(m+1)+2(n-1)=2(m+n).$$

（最后一式中，2（m+1）是上下两边的格点数，2（n－1）是左右两边除去顶点以外的格点数。）
　因此，
$N+L/2-1=(m-1)(n-1)+(m+n)-1=mn=S$。
这表明公式（1）对于矩形是成立的。
　有了矩形作基础，我们就不难讨论两腰分别和两坐标轴平行的格点直角三角形，例如上图中的△BCD或△ABD。由图形的对称性，容易看出△BCD和△ABD的面积

，内部格点数和边上格点数都是分别相等的。（事实上，如果把矩形ABCD绕它的中心即对角线的交点旋转180°，那么△ABD就和△CDB重合，而且格点也都一一重合起来了。）如果用L1表示BD线段内部的格点数（即不包含端点的格点数），那么，除去这L1个格点以后，矩形内部的格点就平均分配在△BCD和△ABD的内部。又前面已经算出，矩形内部的格点数是(m－1)(n－1)，所以这两个三角形内部都有

$$N= ((m-1)(n-1)-L1)/2$$

个格点。又容易看出，这两个三角形边上的格点数都是L＝m＋1＋n＋L1，而面积显然都是

$$S= mn/2$$

因此

$$N+ L/2 = ((m-1)(n-1)-L1)/2 +(m+n+1+L1)/2= mn/2 +1 = S+1$$

这表明公式（1）对于两腰平行于坐标轴的格点直角三角形是正确的。
现在我们进一步讨论一般的格点三角形。
（图4）
△ABC是一个三角形，如图4，方格纸上通过三顶点的直线围成一个矩形ALMN。三角形ALB，BMC，CNA都是直角三角形，因此都满足公式（1）。现在把图中四个三角形的面积，内部格点数和边上格点数，分别用不同的记号表示出来，列成下表：

三角形	面积	内部格点数	边上格点数
△ABC	S	N	L
△ALB	S1	N1	L1
△BMC	S2	N2	L2
△CNA	S3	N3	L3

利用前面所得到的关于矩形面积和格点的公式（2），由图4容易看出

$$\begin{aligned} &S+S1 +S2 +S3=mn, \\ &N+N1 +N2 +N3 +L-3=(m-1)(n-1), \\ &L+L1 +L2 +L3 -2L=2(m+n) \end{aligned} \qquad (3)$$

顺次用1，-1，-1/2 乘（3）式的三个式子，然后相加，就得到

$$S-(N+L/2)+[S1-(N1+L1/2)]+[S2-(N2+L2/2)]+[S3-(N3+L3/2)]+3 = -1$$

我们已经知道公式（1）对于直角三角形是成立的，因此，上式中有方括号的各项都等于-1。所以由上式得
$S-(N+ L/2)=-1$。
这表明对于格点三角形，公式（1）是正确的。
最后，讨论一般的具有n个顶点的格点多边形A1A2…An，如图5所示,我们可以用数学归纳法证明。当n＝3时，公式（1）已经证明。现在假定该公式对于n－1边形成立，要证明公式（图5）对于n边形也成立。联结An－1 A1，我们就把这个n边形分成一个格点三角形和一个n－1边格点多边形。