模线性方程的应用

——用数论方法解决整数问题

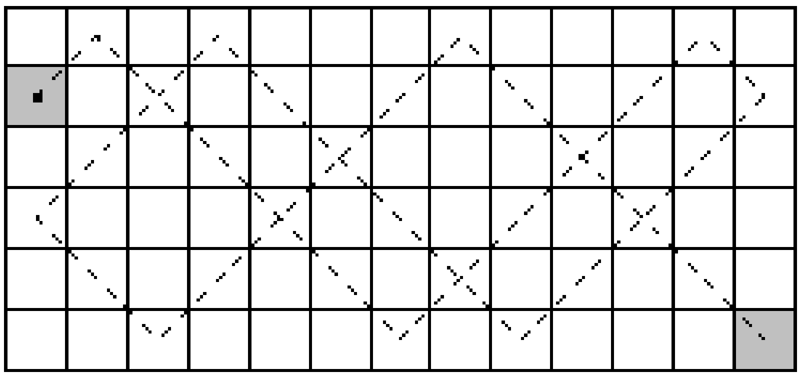
引言

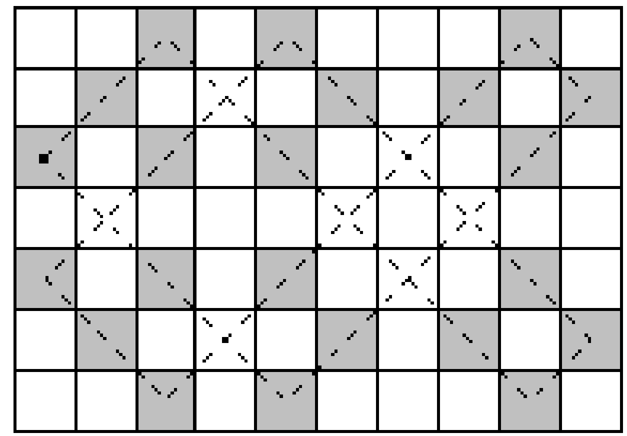
- 数论是数学的一支
- 它的研究对象是整数的性质

模线性方程

- 表现形式：
  - $ax \equiv c \pmod b$ 或 $ax+by=c$
- 定理：
  - 模线性方程有解的充要条件是 $\gcd(a,b) \mid c$
  - 若模线性方程有解，从模的意义上讲有且只有一解。
- 实现：
  - Extended-Euclid 算法

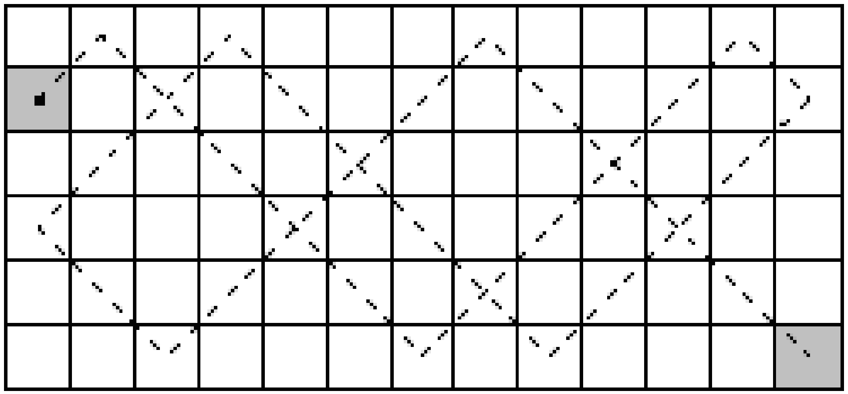
例题 —— ball

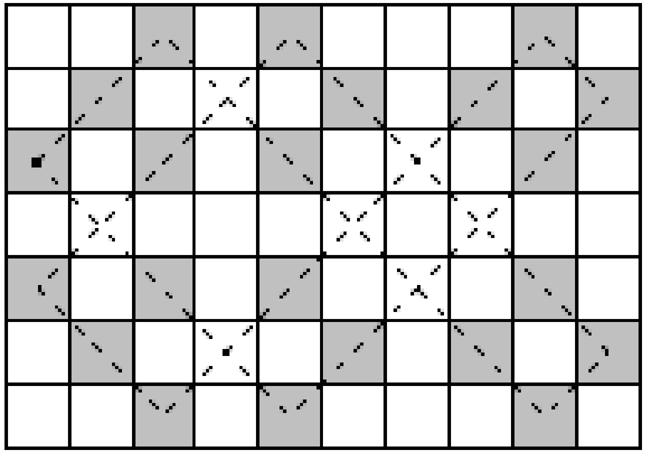


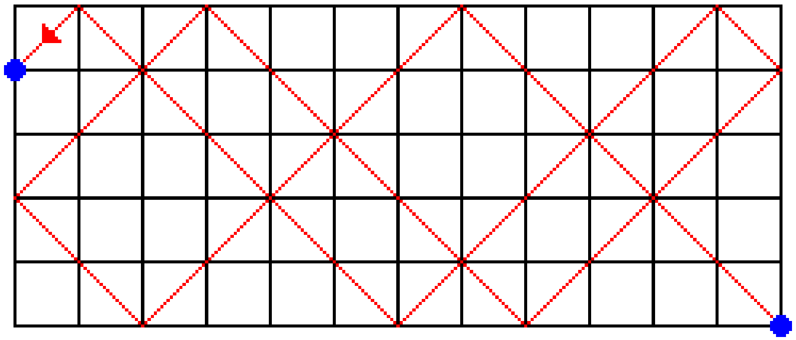


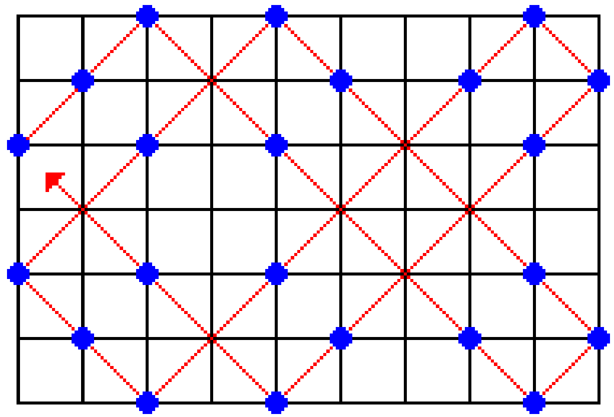
- 小球从棋盘左侧或下侧的某格出发，斜向上运动
- 碰到棋盘的边规则反弹，碰到角落沿原路返回
- 问小球第一次回到起点时，有几个格子滚过奇数次？

转化





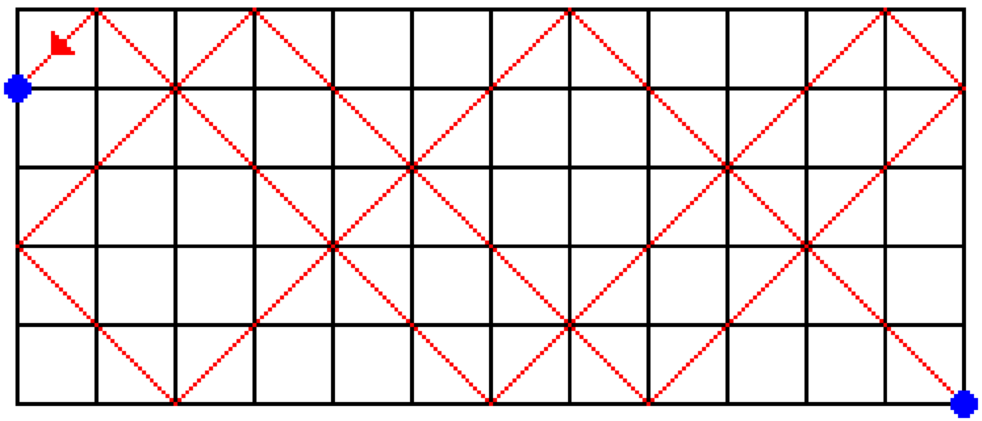




分析

- 设转化后的棋盘边长分别为 L 、H ，则小球将会作周期为 2Lcm(L,H) 的周期运动。
- 小球的运动有两种：
  - 撞到角上，沿原线路返回，以和出发相反的方向回到起点。
  - 没有撞到角上，以和出发相同的方向回到起点。

情况 1：撞到角上



- 条件：gcd(L,H)|a 。

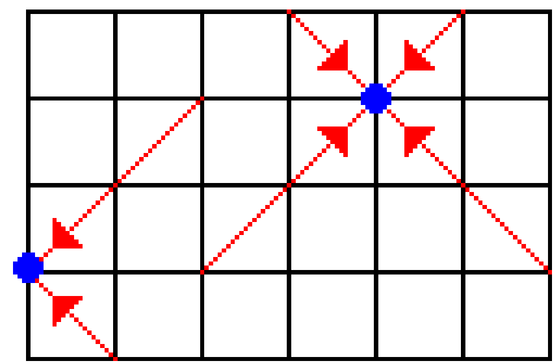
- 水平方向运动距离： qL
- 竖直方向运动距离： pH-a
- qL=pH-a 即 pH-qL=a

- 结论：只有两个点经过了奇数次。

情况 2：没有撞到角上

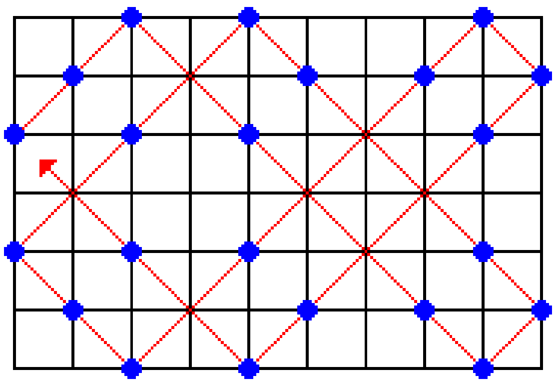
- 问题：小球滚过一个点至多几次？

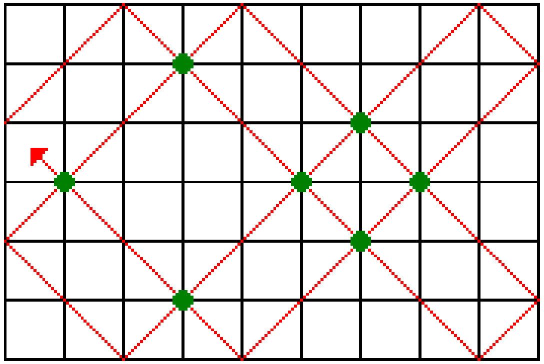
- 推论 1：小球能以两种方向滚过一个点两次。
  推论 2：小球的总路程为 2Lcm(L,H)
  推论 3：小球经过



- 结论：滚过四边上的点至多一次，滚过中间的点至多两次。

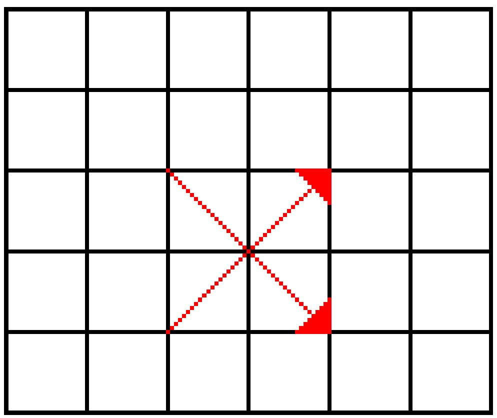
情况 2：没有撞到角上





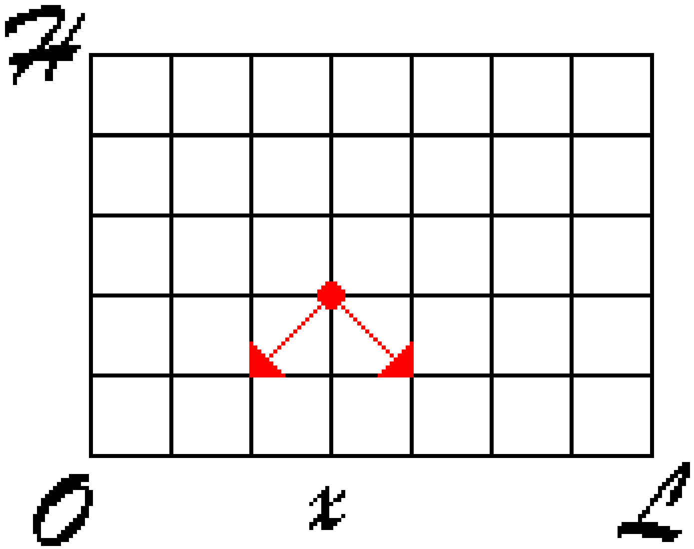
- 小球经过奇数次的点的个数 =2Lcm(L,H)-小球经过偶数次的点的个数 *2

情况 2： 没有撞到角上



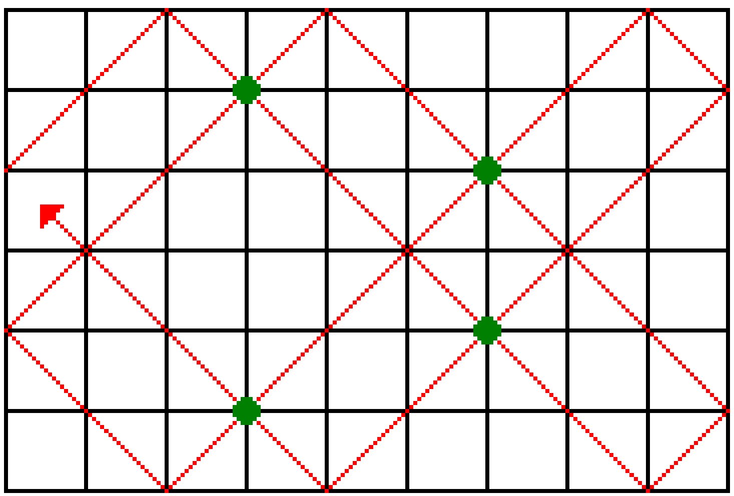
- 经过一个点两次时
  - 子情况 1： 水平方向相反，竖直方向相同；
  - 子情况 2： 水平方向相同，竖直方向相反。

水平方向相反，竖直方向相同



- 水平向右运动 / 水平向左运动
  - 距离：$2k_1L+x$ / $2k_2L-x$
  - $0 \le k_1 \le H/g$ / $0 \le k_2 \le H/g$
- 假设这个点在水平方向的投影为x
- 水平距离之差 $(2k_1L+x)-(2k_2L-x)$
- $(2k_1L+x)-(2k_2L-x) \equiv 0 \pmod{2H}$

水平方向相反，竖直方向相同



- $(2k_1L+x)-(2k_2L-x) \equiv 0 \pmod{2H}$
- $(k_1-k_2)L+x \equiv 0 \pmod{H}$ $0 \le k_1 < H/g$ $0 < k_2 \le H/g$
- 条件： gcd(L,H)|x
- 结论： x 共有 L/gcd(L,H)-1 个

对于任意的 x

- $(k_1-k_2)L+x\equiv 0 \pmod{H}$ $0\le k_1<H/g$ $0<k_2\le H/g$
- $(k_1-k_2)\equiv V \pmod{H/g}$ 只有一解。
- 无论 V 为何值，方程有且仅有 H/g 组解
- 结论：水平方向相反，竖直方向相同的情况下共有 (L/g-1)*H/g 组解

水平方向相同，竖直方向相反

- 类似的可以得到：
  - 水平方向相同，竖直方向相反的情况下共有(H/g-1)*L/g 组解

结论

- 所以问题的解为：当 g|a，答案为 2；否则为 $2LH/g-2((L/g-1)*H/g+(H/g-1)*L/g)$。

小结

- 简化复杂的问题
- 模线性方程的解的判定定理
- 分类讨论的思想
- 从反面思考问题

总结

- 数论问题的特点
  - 和整数有关
  - 数据量大，无法用一般方法解决
- 数论问题解决方法
  - 建立数论模型
  - 对定理的熟练掌握
  - 各种思维方法

谢谢！