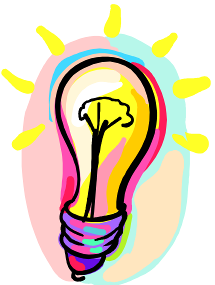
求 N! 的高精度算法

本文中的算法主要针对 Pascal 语言

这篇文章的内容

- 你了解高精度吗？
- 你曾经使用过哪些数据结构？
- 你仔细思考过如何优化算法吗？

在这里，你将看到怎样成倍提速求 N! 的高精度算法



关于高精度

- Pascal中的标准整数类型

- 高精度算法的基本思想

Pascal 中的标准整数类型

数据类型	值域
Shortint	-128 ～ 127
Byte	0 ～ 255
Integer	-32768 ～ 32767
Word	0 ～ 65535
Longint	-2147483648 ～ 2147483647
Comp	-9.2e18 ～ 9.2e18

Comp 虽然属于实型，实际上是一个 64 位的整数

Back

高精度算法的基本思想

- Pascal 中的标准整数类型最多只能处理在 $-2^{63} \sim 2^{63}$ 之间的整数。如果要支持更大的整数运算，就需要使用高精度
- 高精度算法的基本思想，就是将无法直接处理的大整数，分割成若干可以直接处理的***<u>小整数段</u>***，把对大整数的处理转化为对这些***<u>小整数段</u>***的处理

数据结构的选择

- 每个小整数段保留尽量多的位
- 使用Comp类型
- 采用二进制表示法

每个小整数段保留尽量多的位

- 一个例子：计算两个 15 位数的和
  - 方法一
    - 分为 15 个小整数段，每段都是 1 位数，需要 15 次 1 位数加法
  - 方法二
    - 分为 5 个小整数段，每段都是 3 位数，需要 5 次 3 位数加法
  - 方法三
    - Comp 类型可以直接处理 15 位的整数，故 1 次加法就可以了
  - 比较
    - 用 Integer 计算 1 位数的加法和 3 位数的加法是一样快的
    - 故方法二比方法一效率高
    - 虽然对 Comp 的操作要比 Integer 慢，但加法次数却大大减少
    - 实践证明，方法三比方法二更快

使用 Comp 类型

- 高精度运算中，每个小整数段可以用 Comp 类型表示
- Comp 有效数位为 19 ～ 20 位
- 求两个高精度数的和，每个整数段可以保留 17 位
- 求高精度数与不超过 m 位整数的积，每个整数段可以保留 18–m 位
- 求两个高精度数的积，每个整数段可以保留 9 位
- 如果每个小整数段保留 k 位十进制数，实际上可以认为其只保存了 1 位 10^k 进制数，简称为***高进制数***，称 1 位高进制数为***单精度数***

Back

采用二进制表示法

- 采用二进制表示，运算过程中时空效率都会有所提高，但题目一般需要以十进制输出结果，所以还要一个很耗时的进制转换过程。因此这种方法竞赛中一般不采用，也不在本文讨论之列

算法的优化

- 高精度乘法的复杂度分析
- 连乘的复杂度分析
- 设置缓存
- 分解质因数求阶乘
- 二分法求乘幂
- 分解质因数后的调整

Back

高精度乘法的复杂度分析

- 计算 n 位高进制数与 m 位高进制数的积
  - 需要 n*m 次乘法
  - 积可能是 n+m–1 或 n+m 位高进制数

连乘的复杂度分析（1）

- 一个例子：计算 5*6*7*8
  - 方法一：顺序连乘
    - 5*6=30， 1*1=1 次乘法
    - 30*7=210， 2*1=2 次乘法
    - 210*8=1680， 3*1=3 次乘法

    共 6 次乘法
  - 方法二：非顺序连乘
    - 5*6=30， 1*1=1 次乘法
    - 7*8=56， 1*1= 1 次乘法
    - 30*56=1680， 2*2=4 次乘法

    共 6 次乘法

特点： n 位数 *m 位数 =n+m 位数

Back

连乘的复杂度分析（2）

- 若“ n 位数 *m 位数 =n+m 位数”，则 n 个单精度数，无论以何种顺序相乘，乘法次数一定为 n(n-1)/2 次
  - 证明：
    - 设 F(n) 表示乘法次数，则 F(1)=0 ，满足题设
    - 设 k<n 时， F(k)=k(k-1)/2 ，现在计算 F(n)
    - 设最后一次乘法计算为“ k 位数 *(n-k) 位数”，则
    - F(n)=F(k)+F(n-k)+k (n-k)=n(n-1)/2 （与 k 的选择无关）

设置缓存（1）

- 一个例子：计算 9*8*3*2
  - 方法一：顺序连乘
    - 9*8=72， 1*1=1 次乘法
    - 72*3=216， 2*1=2 次乘法
    - 216*2=432， 3*1=3 次乘法

    共 6 次乘法
  - 方法二：非顺序连乘
    - 9*8=72， 1*1=1 次乘法
    - 3*2=6， 1*1=1 次乘法
    - 72*6=432， 2*1=2 次乘法

    共 4 次乘法

特点： n 位数 *m 位数可能是 n+m-1 位数

设置缓存（2）

- 考虑 k+t 个单精度数相乘 $a_1*a_2*\ldots*a_k*\mathbf{a}_{\mathbf{k+1}}*\ldots*\mathbf{a}_{\mathbf{k+t}}$
  - 设 $a_1*a_2*\ldots*a_k$ 结果为 m 位高进制数（假设已经算出）
  - $\mathbf{a}_{\mathbf{k+1}}*\ldots*\mathbf{a}_{\mathbf{k+t}}$ 结果为 1 位高进制数
  - 若顺序相乘，需要 t 次“ m 位数 *1 位数” ，共 mt 次乘法
  - 可以先计算 $\mathbf{a}_{\mathbf{k+1}}*\ldots*\mathbf{a}_{\mathbf{k+t}}$，再一起乘，只需要 m+t 次乘法

在设置了缓存的前提下，计算 m 个单精度数的积，如果结果为 n 位数，则乘法次数约为 n(n–1)/2 次，与 m 关系不大

- 设 $S=a_1a_2\ldots a_m$， S 是 n 位高进制数
- 可以把乘法的过程近似看做，先将这 m 个数分为 n 组，每组的积仍然是一个单精度数，最后计算后面这 n 个数的积。时间主要集中在求最后 n 个数的积上，这时基本上满足“ n 位数 *m 位数 =n+m 位数”，故乘法次数可近似的看做 n(n-1)/2 次

Back

设置缓存（3）

- 缓存的大小
  - 设所选标准数据类型最大可以直接处理 t 位十进制数
  - 设缓存为 k 位十进制数，每个小整数段保存 t–k 位十进制数
  - 设最后结果为 n 位十进制数，则乘法次数约为
  - $k/(n-k)\sum_{(i=1..n/k)} i=(n+k)n/(2k(t-k))$，其中 k 远小于 n
  - 要乘法次数最少，只需 k (t–k) 最大，这时 k=t/2
  - 因此，缓存的大小与每个小整数段大小一样时，效率最高
  - 故在一般的连乘运算中，可以用 Comp 作为基本整数类型，每个小整数段为 9 位十进制数，缓存也是 9 位十进制数

Back

分解质因数求阶乘

- 例： $10!=2^8*3^4*5^2*7$
  - n! 分解质因数的复杂度远小于 nlogn ，可以忽略不计
  - 与普通算法相比，分解质因数后，虽然因子个数 m 变多了，但结果的位数 n 没有变，只要使用了缓存，乘法次数还是约为 n(n-1)/2 次
  - 因此，分解质因数不会变慢（这也可以通过实践来说明）
  - 分解质因数之后，出现了大量求乘幂的运算，我们可以优化求乘幂的算法。这样，分解质因数的好处就体现出来了

二分法求乘幂

- 二分法求乘幂，即：
  - $a^{2n+1}=a^{2n}*a$
  - $a^{2n}=(a^n)^2$
  - 其中， a 是单精度数
- 复杂度分析
  - 假定 n 位数与 m 位数的积是 n+m 位数
  - 设用二分法计算 a^n 需要 F(n) 次乘法
  - $F(2n)=F(n)+n^2$ ， $F(1)=0$
  - 设 $n=2^k$ ，则有 $F(n)=F(2^k)=\sum_{(i=0..k-1)}4^i=(4^k-1)/3=(n^2-1)/3$
- 与连乘的比较
  - 用连乘需要 n(n-1)/2 次乘法，二分法需要 $(n^2-1)/3$
  - 连乘比二分法耗时仅多 50%
  - 采用二分法，复杂度没有从 n^2 降到 nlogn

二分法求乘幂之优化平方算法

- 怎样优化
  - $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
  - 例： $12345^2=\underline{\mathbf{123}^2}*10000+\underline{\mathbf{45}^2}+2*\underline{\mathbf{123*45}}*100$
  - 把一个 n 位数分为一个 t 位数和一个 n-t 位数，再求平方
- 怎样分
  - 设求 n 位数的平方需要 F(n) 次乘法
  - $F(n)=F(t)+F(n-t)+t(n-t)$， $F(1)=1$
  - 用数学归纳法，可证明 F(n) 恒等于 $n(n+1)/2$
  - 所以，无论怎样分，效率都是一样
  - 将 n 位数分为一个 1 位数和 n–1 位数，这样处理比较方便

二分法求乘幂之复杂度分析

- 复杂度分析
  - 前面已经求出 $F(n)=n(n+1)/2$，下面换一个角度来处理
  - $S^2=(\sum_{(0\le i<n)}a_i 10^i)^2=\sum_{(0\le i<n)}a_i^2 10^{2i}+2\sum_{(0\le i<j<n)}a_i a_j 10^{i+j}$
  - 一共做了 $n+C(n,2)=n(n+1)/2$ 次乘法运算
  - 普通算法需要 n^2 次乘法，比改进后的慢 1 倍
- 改进求乘幂的算法
  - 如果在用改进后的方法求平方，则用二分法求乘幂，需要 $(n+4)(n–1)/6$ 次乘法，约是连乘算法 $n(n–1)/2$ 的三分之一

分解质因数后的调整（1）

- 为什么要调整
  - 计算 $S=2^{11}3^{10}$，可以先算 2^{11}，再算 3^{10}，最后求它们的积
  - 也可以根据 $S=2^{11}3^{10}=6^{10}*2$，先算 6^{10}，再乘以 2 即可
  - 两种算法的效率是不同的

Back

分解质因数后的调整（2）

- 什么时候调整
  - 计算 $S=a^{x+k}b^x=(ab)^x a^k$
  - 当 $k<x\log_a b$ 时，采用 $(ab)^x a^k$ 比较好，否则采用 $a^{x+k}b^x$ 更快
  - 证明：
    - 可以先计算两种算法的乘法次数，再解不等式，就可以得到结论
    - 也可以换一个角度来分析。其实，两种算法主要差别在最后一步求积上。由于两种方法，积的位数都是一样的，所以两个因数的差越大，乘法次数就越小
    - ∴ 当 $a^x b^x-a^k>a^{x+k}-b^x$ 时，选用 $(ab)^x a^k$，反之，则采用 $a^{x+k}b^x$。
    - $\because a^x b^x-a^k>a^{x+k}-b^x$
    - $\therefore (b^x-a^k)(a^x+1)>0$
    - $\therefore b^x>a^k$
    - 这时 $k<x\log_a b$

总结

- 内容小结
  - 用 Comp 作为每个小整数段的基本整数类型
  - 采用二进制优化算法
  - 高精度连乘时缓存和缓存的设置
  - 改进的求平方算法
  - 二分法求乘幂
  - 分解质因数法求阶乘以及分解质因数后的调整
- 应用
  - 高精度求乘幂（平方）
  - 高精度求连乘（阶乘）
  - 高精度求排列组合

结束语

求 N! 的高精度算法本身并不难，但我们仍然可以从多种角度对它进行优化。

其实，很多经典算法都有优化的余地。我们自己编写的一些程序也不例外。只要用心去优化，说不准你就想出更好的算法来了。

也许你认为本文中的优化毫无价值。确实是这样，竞赛中对高精度的要求很低，根本不需要优化。而我以高精度算法为例，不过想谈谈<u>**如何**</u>优化一个算法。我想说明的只有一点：**算法是可以优化的。**