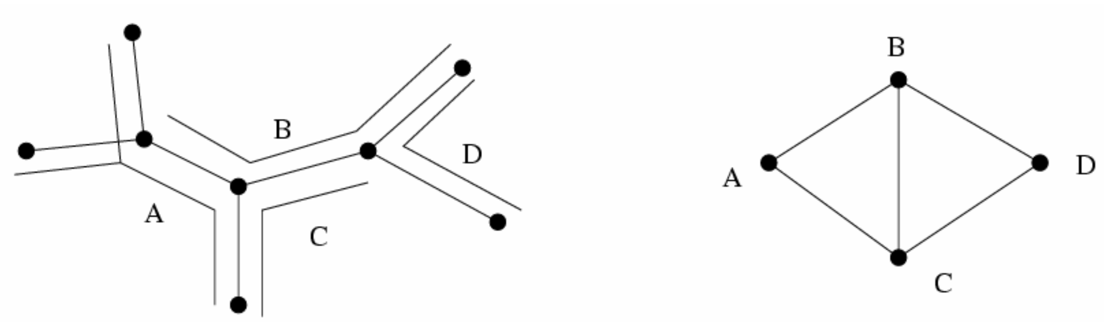
第七讲、弦图与相似图

本讲中我们将结束对弦图的讨论。我们还将给出子树的相交图的描述，它很好地推广了区间图性质。同时我们将总结弦图的一些结论。我们将介绍相似图以及有效地解决判定、最大团、顶点染色等问题的算法。

1．介绍

我们知道弦图有两个等价命题：不含无弦的环；有完美消除序列。现在我们给出另一个等价命题：弦图可以表示为某个树的某个子树集的相交图：

定理 1：有 N 个顶点的图 G＝（V，E）是弦图，当且仅当存在一棵树 T 的 N 棵子树 T1..Tn，满足（Vi，Vj）∈E，当且仅当 Ti∩Tj≠∅。（图 1）



这是我们要证明的首要结论。

我们同时介绍相似图的概念。

2．子树集的相交图

定义 2：给定一棵树 T 及其若干子树 T1..Tn。令 V＝{V1..Vn}，E＝{ViVj｜Ti∩Tj≠∅}，那么 G＝（V，E）称为子树集{Ti}的相交图。

这个定义有些不严密。我们申明：这里两个子树相交表示它们有公共边。另外，没有任何子树完全包含与另一棵子树。事实上这个申明并不是很实质，请看下面的引理：

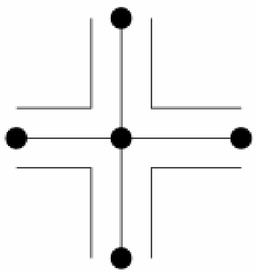
引理 3：已知子树集 T1..Tn，令 G 是它们的相交图，则存在另一个子树集 T1'..Tn'，满足它的相交图 G'与 G 同构，并且对任何 Ti'，Tj'，i≠j，都存在边 e 满足 e∈Ti'，e ∉Tj'。

证明：对于那些包含于其他树的子树，只要在其中某个顶点上增加一条新边即可。█

注意引理 2 的否命题是错的，因此我们可以将定义 2 如下描述：

定义 4：给定一棵树 T 及其若干子树 T1..Tn。令 V＝{V1..Vn}，E＝{ViVj｜Ti∩Tj∩E(T)≠∅}，那么 G＝（V，E）称为子树集{Ti}的边相交图。

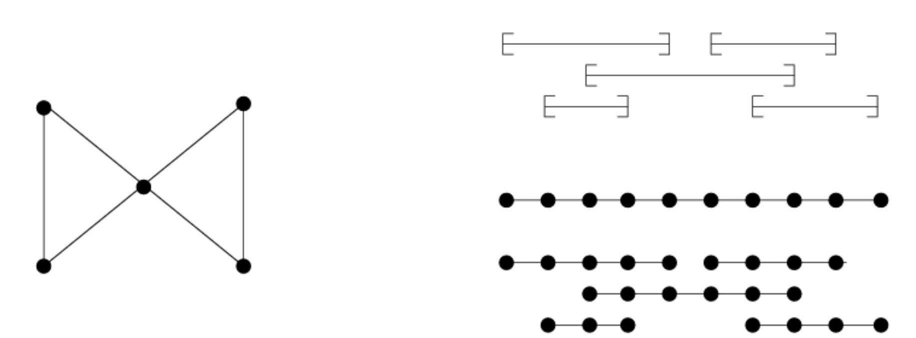
注意定义 4 中的子树不满足 Helly 性质（见定义 5）。显然，有定义 4 确定的图总是有定义 2 确定的图的子图。另外任何由定义 2 确定的图都能用定义 4 确定，证明类似引理 3，但反之则不一定。（见图 2，无弦环 C4）



因此我们可以假定子树互不包含且使用边相交。实际中，这些都将被用到，以上引理证明了这些假设不会改变图类型。以后我们将不在重申这些条件。

证明定理 1 之前，我们先回忆一下。我们曾证明 N 个顶点的区间图可以用一系列端点不重合的闭区间表示，并且这些端点可以离散到 1 至 2N 间的整数。事实上，我们证明了区间图是一条线段的若干子线段形成的相交图。因此，定理 1 是由区间图到弦图的一个更一般的描述。

容易得知线段的相交图是子树集的相交图的特例。图 3 表示前者可以转化为后者；图 4 是后者无法转化为前者的一个例子。



注：图 4 表明是一个一般性的方法：对于一棵树 T，对它的每个顶点定义一棵子树为该点于它的所有子节点诱导的子树，那么这些子树形成的相交图就是 T 本身。

3．定理 1 的证明

这里我们只处理两子树相交是顶点相交的情形（即定义 2 的情形）。

定义 5：令 A 为一个集合集，如果对于 A 的每个满足以下性质的子集 A1：对所有 Ai，Aj$\in$A1，都有 Ai$\cap$Aj$\neq\varnothing$；都有 $\bigcup_{A\in A1} A \neq \varnothing$，那么称 A 满足 Helly 性质。

Helly 性质表示两两相交等价于有共同的交集。

为了知道这对子树集成立，考虑这样的一种情况：T1，T2，T3 是 T 的三个子树两两相交，但却没有公共的交集。令 Vij 是 Ti 与 Tj 交集中的一个顶点，1<=i<j<=3，则这些顶点必须两两不同。由于树是连通的，从 V12 到 V13 有一条简单路径 P1，P1 在 T1 中。同理 T2

中有路径 P2 连接 V12 与 V23，T3 中有路径 P3 连接 P23 与 P13。这三条路径构成 T 中的一条回路。由于 V12、V23、V13 互不相同，这个回路至少包含一个长度不小于 3 的简单环，这与 T 是一个图矛盾。

对于多于三个的情况是类似的。

我们首先证明有子树集形成的相交图都是弦图。

证明：给定树 T 与子树集 T1..Tn，我们对|T| 用归纳法：

|T|＝1 时，T 是平凡图，即 Ti＝T，i=1..n。相交图是完全图，属于弦图。

|T|≥2 时，T 含有一个叶节点 V。有两种可能。如果没有子树恰在 V 相交，那么我们将 V 从 T 及所有包含它 Ti 中删去，相交图不会改变。由归纳假设，这个图是弦图；如果存在两个子树恰在 V 相交，由于 V 是叶节点，必有一个子树仅含 V 一个节点，不妨设为 Tn。注意与 Tn 相交的任何其他子树都包含 V，也就是说所有与 Tn 相交的子树两两相交。那么在相交图中 Tn 的所有相邻点形成一个团，即 Tn 代表的点是单纯点。根据归纳假设，T 中 V 后的相交图存在完美消除序列，将 Tn 代表的点加在最后，则整个相交图有完美消除序列，即这个图是弦图。即证。█

下面我们证明每个弦图都能表示为一个子树集的相交图。

证明：我们一步步地建立树 T，每增加一个顶点就增加一个子树。

令 G 是一个弦图，它有一个完美消除序列{V1..Vn}。首先令 T＝T1＝K1。对于 i＝2，3…n，注意 Vi 的前驱对应的子树两两相交。由于满足 Helly 性质，这些子树至少有一个公共点 P。在 T 中加入一个新顶点 Q，Q 只与 P 相联，并将 Q 与边（P，Q）加入所有 Vi 的前驱对应的子树，最后令 Ti＝{Q}。正确性易得。█

4．对弦图的最后补充和总结

我们现在有了弦图的三个等价条件：有完美消除序列、没有无弦环、能表示成子树集的相交图。事实上还有许多其他描述。以下的等价条件在[Gol80]中有描述，这里不加证明地给出。

定理 6：一个图 G 是弦图，当且仅当任何极小分离集 S 诱导的子图都是完全图。

所谓分离集 S 就是对任意两个连通但不相邻的顶点，满足 G－S 中这两个顶点不连通。

第五讲中已经证明过弦图的任何极小分离集必定是个团，下面证明任何不是弦图的图都存在不是团的最小分离集。

证明：假设图 G 不是弦图，则 G 一定存在长度大于 4 的无弦环 C。取 C 中任意两个不相邻顶点 A，B，取 A、B 的一个极小分离集（显然是存在的），那么这个集合一定包含 C 中的两个不相邻的顶点（否则 A，B 之间仍然连通），即不是一个团。即证。█

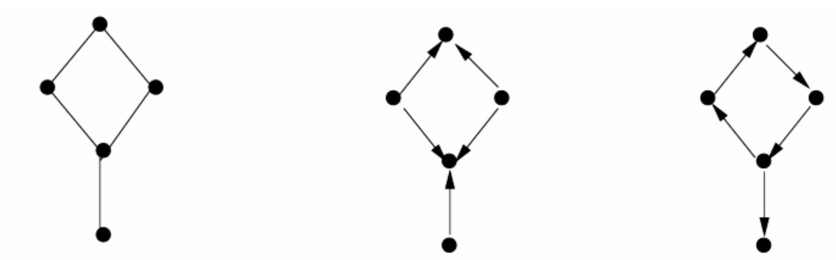
我们能够在线性时间内判定弦图[RTL76,TY84]，区间图也是如此[BL76,KM89,HM91,HPV96]；对于弦图，寻找最大割是 NP 难题，对于区间图尚不清楚复杂度；区间图的哈氏圈用线性时间解决[CPL93]，对于弦图尚不清楚。

5．相似图

给定一个无向图，我们能够通过某种方式给边定向。如果这种定向不形成环，称为无环的（注意原无向图可能有员）；如果对于任何顶点 X，Y，Z，X→Y，Y→Z，都有 X→Z，称为传递的。（过去有过定义）

定义 7：一个能够无环且具有传递性地定向的无向图 G 称为相似图。一个无环且具有传递性的有向图称为一个部分序。

注意相似图也可能有有环或不具传递性的定向方式。（图 5）



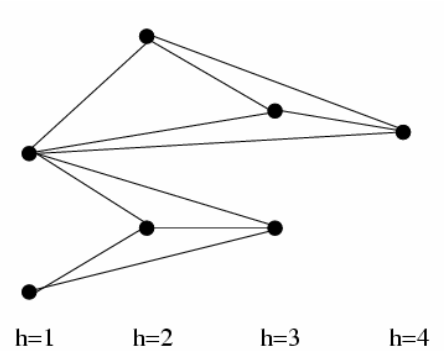
Golumbic 给出了一个用线性时间判定相似图的算法[Gol80]。回忆：如果 G 是区间图，则 G 补图是相似图。事实上，标号方式是显然的：两个区间对应的顶点不相邻，当且仅当它们不相交，因此可以从左到右给边定向。

6．相似图的顶点染色

首先简单地观察一下。令 P 是一个部分序中的一条有向边，则由传递性，P 上的每对顶点间都有弧，因此 P 上的顶点在原图 G 中是一个团。这是在线性时间内求出 W（G）与 X（G）的算法基础。

给定一个部分序，我们定义顶点上的函数 H：H（V）＝1＋MAX（H（W）| W→V），如果 V 的入度为零，令 H（V）＝1。（图 6）

由于没有环，这种定义是唯一确定的。在将顶点拓扑排序后，H 可以在线性时间内求出。



注意如果 V→W，由 H（W）≥H（V）＋1。也就是说对于给定的 I，H 值为 I 的顶点集构成一个独立集。令 K 是 H 的最大值，则我们可以给每个点染色 H（V），获得一个 K 染色方法。对于顶点 V，如果 H（V）>1，则它必定有一个前驱 W 满则 H（W）＝H（V）－1。于是存在着一个长度为 K 的有向路径，即原图中存在着大小为 K 的一个团。于是我们有：X（G）≤K≤W（G）。但对任何图都有 X（G）≥W（G），于是有 X（G）＝K＝W（G）。我们得到了以下结论：

定理 8：在一个部分序中，X（G）与 W（G）的值（包括一个最优染色方案和一个最大团）可用线性时间解决。