福州大学学报
Journal of Fuzhou University
1999年 第27卷 第5期 No.5 Vol.27 1999

若干NP完全问题的特殊情形

王晓东

摘要:讨论了图算法中若干NP完全问题在所给的图是一棵树时的特殊情形.利用树结构的前序编号表示法提出了解树的最大独立集问题、最小顶点覆盖问题和最小支配集问题的线性时间算法.在渐近意义下这些算法都是最优算法.
关键词:图;树;NP完全问题;计算复杂性
中图分类号:TP3 文献标识码:A

Some Special Cases of NP-Complete Problems

WANG Xiao-dong

(Department of Computer Science and Technology, Fuzhou University，Fujian Fuzhou 350002, China)

Abstract: This paper discusses some special cases of NP-complete graph problems in which the given graph is a tree. By means of the pre-order labeling presentation of a tree, we present several linear time algorithms for graph problems on trees. These algorithms are all asymptotically optimal.
Keywords: graphs; trees; NP-complete problems; time complexities

1 引言

在图上定义的许多组合优化问题是NP完全问题.这类问题属于较难解的问题，至今没有找到多项式时间算法，也很可能根本没有多项式时间算法.遇到这类问题时，通常从以下几个方面来考虑并寻求解决办法.

1)特殊情形：仔细分析所遇到的NP完全问题，研究具体实例的特殊性，考虑是否必须在最一般的意义下来解此问题.也许可利用具体实例的特殊性，在特殊条件下解此问题.许多NP完全问题在特殊情形下可以找到多项式时间算法.例如求图G的最大团问题是NP完全问题，而在图G是平面图的情形下，该问题是多项式时间可解的.

2)动态规划和分枝限界方法：对于许多NP完全问题来说，用动态规划和分枝限界方法常可得到较高的解题效率.

3)概率分析：对于许多NP完全问题，其困难实例出现的概率很小,因此对这类NP完全问题常可设计出平均性能很好的算法.

4)近似算法：通常可以设计出解NP完全问题的多项式时间近似算法，以近似解来代替最优解.

5)启发式算法：在用别的方法都不能奏效时，也可以采用启发式算法来解NP完全问题.这类方法根据具体问题的启发式搜索策略来求问题的解，在实际使用时可能很有效，但有时很难说清它的道理.

本文考虑关于图的若干NP完全问题的特殊情形.当所给的图G是一棵树时，许多NP完全问题可在多项式时间内求解.特别地，对于图G的最小顶点覆盖问题、最大独立集问题和最小支配集问题等都是NP完全问题[1].而在图G是一棵树时，可以有效地解决.本文利用树的前序编号为工具，提出解决上述问题的O(n)时间算法.

2 树的前序标号表示法

给定一棵树T，在计算机中可以有多种表示方法〔2〕.在图论算法中，树是作为一般的图来表示的，通常采用邻接表表示法.针对所考虑问题的特殊性，提出树的前序标号表示法如下：

对于给定的用邻接表表示的有n个顶点的树T.

①任选一个顶点r作为树T的根结点；

②对以r为根的树作前序遍历，并且在遍历过程中对访问的顶点依次编号；

③用数组parent记录每个结点的父结点编号.即编号为i的结点的父结点编号为parent[i].

这个表示过程显然可在O(n)时间内完成.这种表示法实际上是树在前序标号意义下的父亲数组表示法[2].它具有以下重要性质：

1)对于i=2，…，n，有i>parent[i]，当i=1时parent[i]=1；

2)若将树T看作是一般的图G=(V，E)，则有：

V={1，2，…，n}，E={(i，parent[i])，i=2，…，n}；

3)对于任意j，2≤j ≤n，定义树T的子树T_j =(V_j，E_j)为:

V_j ={1，2，…，j }，E_j={(i，parent[i])，i=2，…，j }，则parent[1..j]是子树T_j 的前序标号表示.特别地，T_n=T；

4)标号为j 的结点是子树T_j 的叶结点，j =2，…，n.特别地，标号为n的结点是T的叶点.

在树的前序标号表示法下，许多关于树的运算得以简化.

3 最小顶点覆盖

顶点集S是图G=(V，E)的顶点覆盖，当且仅当对任意(u，v)∈E有u∈S或v∈S.最小顶点覆盖问题是对给定的图G找出使*|S@最小的顶点覆盖S.当所给的图是一棵树T时，可以设计出求T的最小顶点覆盖的贪心算法如下：

```
MIN-VERTEX-COVER(T)
begin
      for i:=1 to ndo
        cover[i]:=0;
      S:=∅;
      for i:=ndownto 2 do
        if (cover[i]=0)and (cover[parent[i]]=0) then
          begin
            S:=S∪{parent[i]};
            cover[parent[i]]:=1;
          end
end;{MIN-VERTEX-COVER}
```

该算法是一个贪心算法.算法中用数组cover来标记选入覆盖点集的树结点，即当结点i被选入覆盖点集，则cover[i]=1， 否则cover[i]=0.为了说明算法的正确性，必须证明关于树的最小顶点覆盖问题满足贪心选择性质并且具有最优子结构性质[2].

1)贪心选择性质：对于树T，存在一个T的最小顶点覆盖S，使parent[n]∈S.事实上，设s是T的一个最小顶点覆盖，若parent[n]∉S，则n∈S.否则S就不是T的一个顶点覆盖.这种情况下，令$\bar{S}$=S∪{parent[n]}-{n}，则$\bar{S}$仍为T的一个顶点覆盖，且$|\bar{S}|$=|S|-1+1=|S|.故$\bar{S}$是T的一个最小顶点覆盖，且parent[n]∈$\bar{S}$.

2)最优子结构性质:对T的任一最小顶点覆盖S,当n∈S时,显然S-{n}是T_{n-1}的一个顶点覆盖,下面证明S-{n}是T_{n-1}的一个最小顶点覆盖.不然，存在T_{n-1}的一个更小的顶点覆盖$\overline{S}$,且|$\overline{S}$|<|S|-1+1=，则$\overline{S}$∪{n}显然是T的一个顶点覆盖.但是$|\overline{S}\cup\{n\}|<|S|-1+1=|S|$.
这与S是T的一个最小顶点覆盖矛盾.

当n∉S时，设i=parent[n]，则必有i∈S，令$S_1=\{j|i\leqslant j\leqslant n\}\cap S$,则S-$S_1$是

T_{i-1}的一个最小顶点覆盖.事实上，由于S是T的一个顶点覆盖，则S-S_1是T_{i-1}的一个顶点覆盖.若在T_{i-1}中有一个更小的顶点覆盖S_{i-1}使$|S_{i-1}|<|S|-|S_1|$,则
S_{i-1}∪S_1是T的一个顶点覆盖，且$|S_{i-1}\cup S_1|\leqslant|S_{i-1}|+|S_1|<|S|-|S_1|+|S_1|=|S|$,
这与S是T的最小顶点覆盖矛盾.

根据上述的贪心选择性质和最优子结构性质，容易用数学归纳法证明算法MIN-VERTEX-COVER能正确找出T的最小顶点覆盖.

算法的for循环显然只需要O(n)的时间，从而整个算法所需的时间为O(n).

4 最大独立集

顶点集S是图G=(V，E)的独立集当且仅当S中任何2个顶点在G中是不相邻的.最大独立集问题是要对给定的图G找出使｜S｜达到最大的G的独立集S.当所给的图是一棵树T时，我们用树的前序标号表示法表示它，并设计一个找出其最大独立集的贪心算法如下：

```
MAXINDEPENDENT-SET(T)
begin
      for i:=1 to ndo
        cover[i]:=0;
      S:=∅;
      for i:=ndownto 2 do
        if cover[i]=0 then
          begin
            S:=S∪{i};
            cover[parent[i]]:=1;
          end;
      if cover[1]=0 then S:= S∪{1}
end; {MAX-INDEPENDENT-SET}
```

求树T的最大边独立集也可用类似的算法实现如下：

```
MAX-EDGE-INDEPENDENT-SET(T)
begin
      for i:=1 to ndo
        cover[i]:=0;
      S:=∅;
      for i:=ndownto 2 do
        if (cover[i]=0)and (cover[parent[i]]=0) then
          begin
            S:=S∪{(i, parent[i])};
            cover[parent[i]]:=1
          end
end;{MAX-EDGE-INDEPENDENT-SET}
```

5 最小支配集

顶点集D是图G=(V，E)的支配集当且仅当对任意u∈V-D存在v∈D使(u，v)∈E. 最小支配集问题是对给定图G找出使|D|最小的支配集D.当所给的图是一棵树T时，我们可以利用树的前序标号表示法设计出求最小支配集D的线性时间算法如下：

```
MIN-DOMINATE-SET(T)
begin
      for i:=1 to ndo
        cover[i]:=0;
      D:=∅;
      for i:=ndownto 2 do
        if cover[i]=0 then
          begin
            D:=D∪{parent[i]};
            cover[parent[i]]:=1;
            cover[parent[parent[i]]]:=1
          end
end;{MIN-DOMINATE-SET}
```

最小支配集问题同样具有贪心选择性质和最优子结构性质，从而保证了算法MIN-DOMINATE-SET的正确性，算法所需的计算时间也是O(n).

基金项目:福建省自然科学基金资助项目
作者简介：王晓东(1957-)，男，教授.
作者单位：福州大学计算机科学与技术系

参考文献:

[1] Garey M R, Johnson D S. Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness
[2] 傅清祥，王晓东.算法与数据结构BT2

收稿日期：1998-09-21