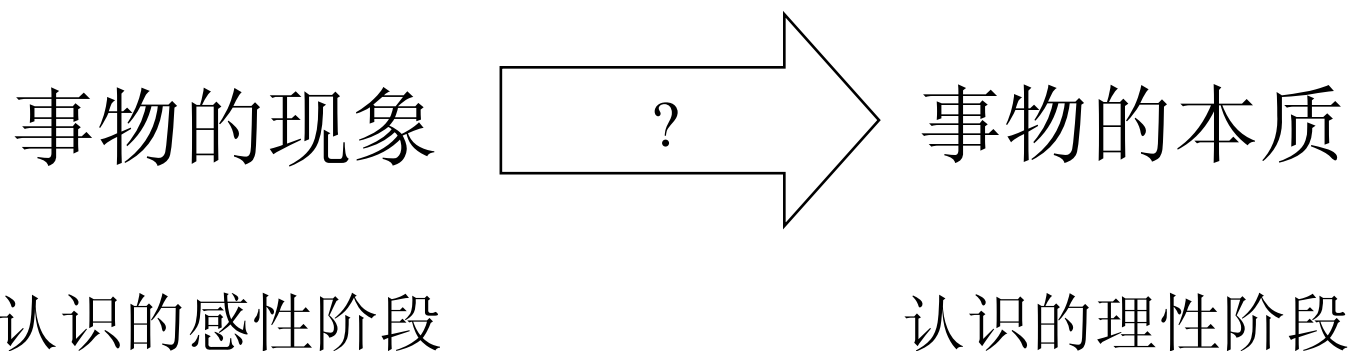




由感性认识到理性认识

—— 透析一类博弈游戏的解答过程

认识事物的过程



人们认识事物，总是**从简单入手**。

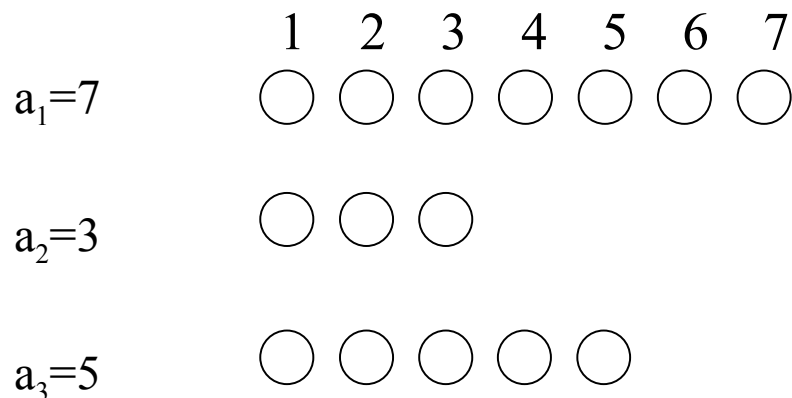
并不是人人都能从简单的事物中得到**一般性的规律**。

究竟如何才能**由浅入深**呢？

游戏

输 甲乙两人面对若干排石子。

- 每一排石子的数目可以任意确定。
- 两人轮流按下列规则取走一些石子：
 - 每一步必须从某一排中取走两枚石子；
 - 这两枚石子必须是**紧紧挨着的**；
 - 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。



规则分析

$a_1=7$ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

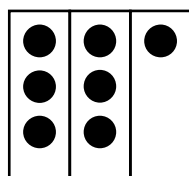
$a_1=2$ ○ ○

$a_2=3$ ○ ○ ○

- 如果一排有 7 枚石子
- 而你取了 3、4 这两枚石子，
- 可以看作是将这一排分成了两排，
- 其中一排有 2 枚石子，另一排有 3 枚石子。
- 👉 局面的排数可能会随着游戏的进行而增加。

从简单入手

用一个无序多元组 (a_1, a_2, \dots, a_n) ，来描述游戏中的一个局面。

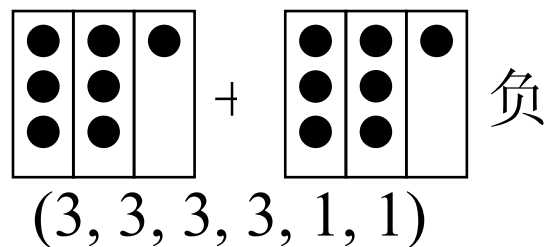
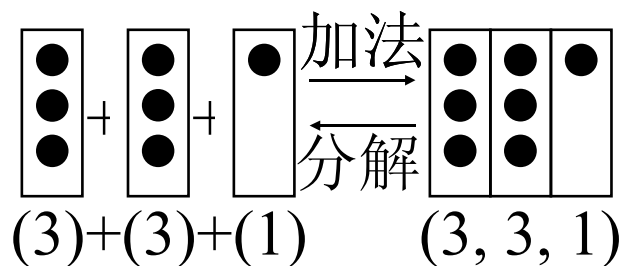


$(3, 3, 1)$

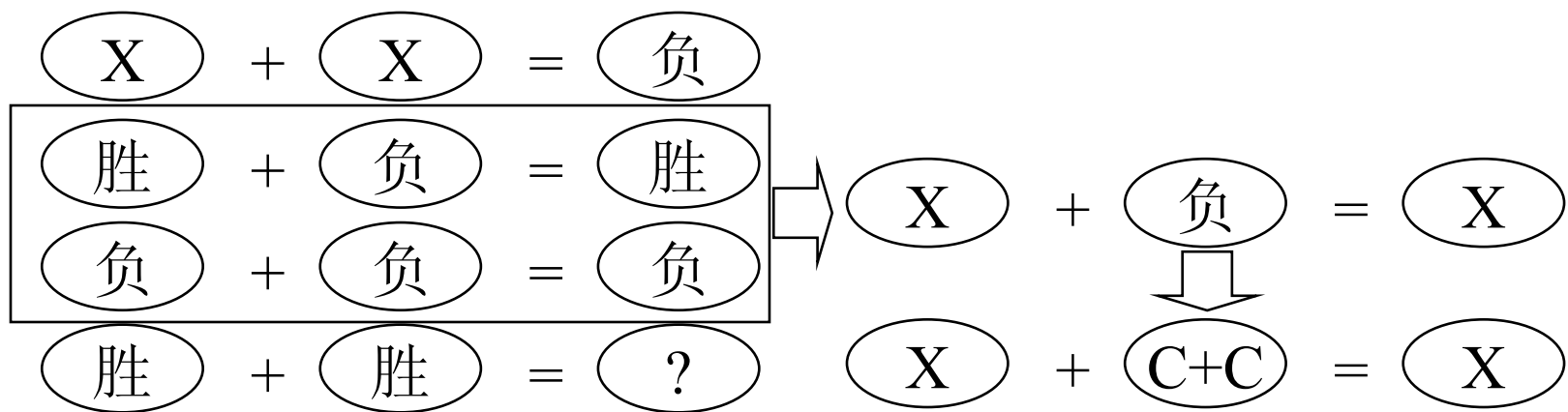
若先行者有必胜策略，则称为“胜局面”。

□ 若后行者有必胜策略，则称为“负局面”。

□ 若初始局面可以分成两个相同的“子局面”，则乙有必胜策略。



局面的分解



局面与集合

认我们只关心局面的胜负。

☒ 一个局面可以用一个集合来描述。

我 这实质上是简化了局面的表示。

能不能进一步简化一个局面的表示呢？

$$\textcircled{X} + \textcircled{C+C} = \textcircled{X}$$

$$(2, 2, 2, 7, 9, 9) = (2, 2, 2, 7) + (9) + (9) \longrightarrow (2, 2, 2, 7)$$

↓
用集合 {2, 7} 来表示 ←————— (2, 7)
↓

类比

□ 局面的加法

- 胜 + 负 = 胜;
- 负 + 胜 = 胜;
- 负 + 负 = 负;
- 胜 + 胜 = 不定

□ 二进制数的不进位加法：对二进制数的每一位，采用 01 加法。

$$\begin{array}{r}
 0011 \\
 + 1010 \\
 \hline
 1001
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1010 \\
 + 1010 \\
 \hline
 0000
 \end{array}$$

常 二进制的 01 加法 VS 局面的加法

- ✓ $1 + 0 = 1$; 胜 + 负 = 胜;
- ✓ $0 + 1 = 1$; 负 + 胜 = 胜;
- ✓ $0 + 0 = 0$; 负 + 负 = 负;
- ✗ $1 + 1 = 0$; 胜 + 胜 = 不定。

□ 二进制数的加法 VS 局面的加法

$$\begin{array}{l}
 \text{法} \\
 \text{胜} + \text{负} = \text{胜} \quad !0 + 0 = !0 \\
 \text{负} + \text{负} = \text{负} \quad 0 + 0 = 0
 \end{array}$$

$$\text{胜} \hat{=} !0, \text{负} \square 0 \quad \leftarrow \text{胜} + \text{胜} = ? \quad !0 + !0 = ?$$

🖱 局面的加法，与二进制数的加法，性质完全相同。

联想

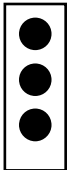
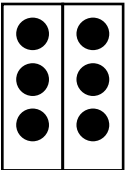
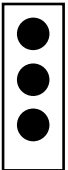
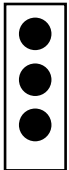
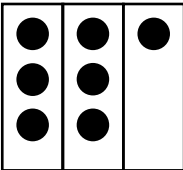
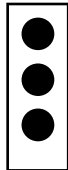
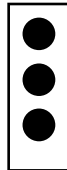
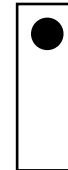
能否用一个二进制数，来表示一个局面呢？

用符号 $\#S$ ，表示局面 S 所对应的二进制数，简称局面 S 的值。

□ $\#S=0 \Leftrightarrow S$ 负， $\#S \neq 0 \Leftrightarrow S$ 胜。

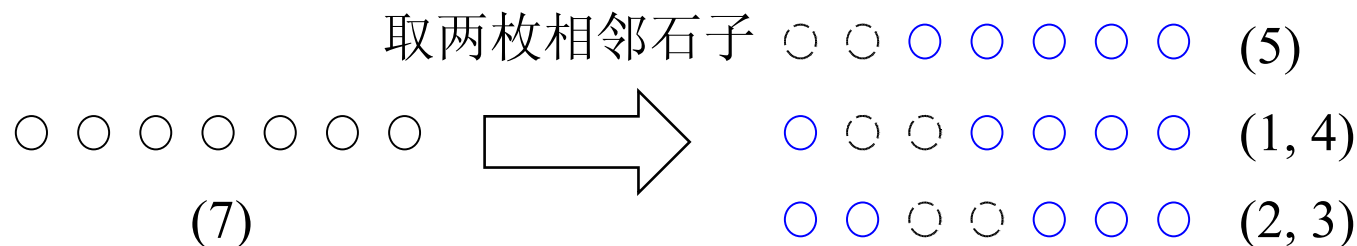
$\#S = \#(a_1, \dots, a_n) = f(a_1) + \dots + f(a_n)$ 。

紧关键就在于函数 $f(x)$ 的构造。

S			=		+				=		+		+	
	(3)	(3, 3)	=	(3)	+	(3)		(3, 3, 1)	=	(3)	+	(3)	+	(1)
#S	$\#(3$	$\#(3, 3) = \#(3) + \#(3)$		$\#(3, 3, 1) = \#(3) + \#(3) + \#(1)$		$\#(3, 3, 1) = f(3) + f(3) + f(1)$								
)													

构造

集合 $g(x)$: 表示局面 (x) , 下一步可能局面的值的集合。



$$g(7) = \{\#(5), \#(1, 4), \#(2, 3)\}$$

□ 可以证明, 令函数 $f(x)$ 为 $g(x)$ 中没有出现的最小非负整数, 满足要求。

如果 $g(x) = \{0, 1, 2, 5, 7, 8, 9\}$, 则 $f(x) = 3$ 。

令 $G(x)$ 为 $g(x)$ 在非负整数集下的补集。

👉 令 $f(x) = \min\{G(x)\}$, 满足要求。

例子

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	0	0	1	1	2	0	3	?

$\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$ (5) $\#(5)=f(5)=0$
 $\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$ (1, 4) $\#(1, 4)=f(1)+f(4)=0+2=2$
 (7) $\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$ (2, 3) $\#(2, 3)=f(2)+f(3)=1+1=0$

$g(7)=\{0, 2\}$, $G(7)=\{1, 3, 4, 5,$
 $f(7)=\min\{G(7)\}=\min\{1, 3, 4, 5, \dots\}=1$

$a_1=7$ $\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$ $\#(7, 3, 5)=f(7)+f(3)+f(5)=1+1+0=0$

$a_2=3$ $\circ \circ \circ$ 局面 (7, 3, 5) 是负局面

$a_3=5$ $\circ \circ \circ \circ \circ$ 后走者（乙）有必胜策略



推广

游把游戏规则改变一下

- 一次取紧紧相邻的两枚石子；
- 一次取紧紧相邻的三枚石子；
- 一次取紧紧相邻的任意多枚石子；
- 一次取某一排中的任意两枚石子，不要求紧紧相邻；
- 一次取某一排中的任意多枚石子，不要求紧紧相邻；

➤

□ 此类博弈游戏的特点

- 甲乙两人取石子；
- 每一步只能对某一排石子进行操作；
- 每一步操作的约束，只与这排石子的数目或一些常数有关；
- 操作在有限步内终止，并不会出现循环；
- 谁无法继续操作，谁就是输家。



此类博弈游戏的一般性解法

多判断一个局面，究竟谁有必胜策略

- 设局面 $S=(a_1, a_2, \dots, a_n)$;
- S 的值 $\#S=f(a_1)+\dots+f(a_n)$ (二进制数的加法) ;
- 如果 $\#S \neq 0$, 则先行者有必胜策略;
- 如果 $\#S=0$, 则后行者有必胜策略。

□ 函数 $f(x)$ 的求法

- $f(0)=0$;
- $g(x)$ 表示局面 (x) , 下一步可能局面的值的集合;
- 令 $G(x)$ 为 $g(x)$ 在非负整数集下的补集;
- 则 $f(x)=\min\{G(x)\}$ 。



小结（一）优点 & 缺点

➤ 优点

- 适用范围广，可以直接用于大多数此类游戏
- 与穷举相比，速度快，时空复杂度低

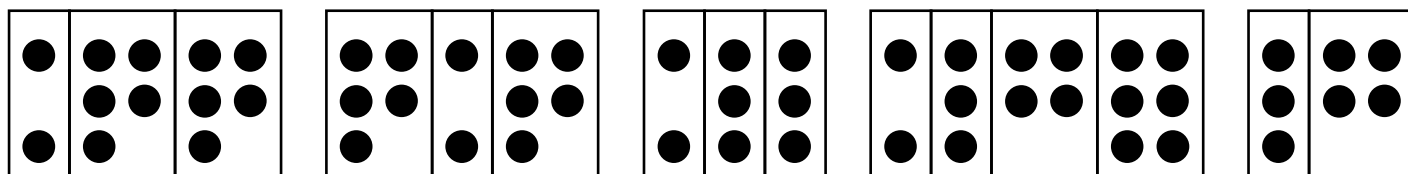
➤ 缺点

➤ 另一个游戏

- 有若干堆石子，两人互取。无法取子者输。
- 一次只能在一堆中取，至少一枚，至多不限。
- 对于这个游戏，可以证明令 $f(x)=x$ ，就满足要求。
- 有些游戏可以直接推导出函数 $f(x)$ 的表达式

小结（二） 如何优化算法

- 可以看作是对搜索算法的优化。
- 优化算法的过程，可以看作是对局面的表示进行了简化。
- 本质：避免了对相同局面的穷举，即避免重复搜索。



无序组: (2, 5, 5) (5, 2, 5) (2, 3, 3) (2, 3, 4, 6) (3,

4)
集合: {2} {2} {2} {2, 3, 4, 6} {3,

4}
二进制数: 01 01 01 01

小结（三）如何由浅入深

从简单入手

由此及彼

胜 + 负 = 胜

去粗取精

$X + X = \text{负}$

$\text{负} + \text{负} = \text{负}$

$X + C + C = X$

胜 + 胜 = 不定

由此及彼

采用 0 和 1 表示胜

负

去伪存真

采用二进制数表示局面

去粗取精

采用集合表示局面

由表及里

本质：简化局面的表示

进一步简化

由浅入深

$F(x) = \min \{G(x)\}$



由感性认识到理性认识的途径

- 去伪存真
- 去粗取精
- 由此及彼
- 由表及里



总结

- ◆ 此类游戏的一般性解法

- $F(x) = \min\{G(x)\}$

- ◆ 算法优化的本质

- 避免重复搜索

- ◆ 如何由浅入深

- 去伪存真，去粗取精

- 由此及彼，由表及里