线性方程组的解法讨论与应用 ***R

线性方程组形式如下:

常记为矩阵形式

$$Ax = B$$

其中

一、高斯消元法

高斯(Gauss)消元法的基本思想是:通过一系列的加减消元运算,也就是代数中的加减消去法,将方程组化为上三角矩阵;然后,再逐一回代求解出 x 向量。现举例说明如下:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6....(1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4....(2) \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2....(3) \end{cases}$$

(一) 消元过程

第一步:将(1)/3使 x_1 的系数化为1得

再将(2)、(3)式中 x_1 的系数都化为零,即由(2)-2×(1)(1)得

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 2 \dots (1)^{(1)}$$

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \dots (2)^{(1)}$$

由(3)-4×(1)⁽¹⁾得

$$-\frac{14}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_3 = -6 \quad \quad (3)^{(1)}$$

第二步:将(2)⁽¹⁾除以2/3,使x₂系数化为1,得

再将(3)⁽¹⁾式中
$$x_2$$
 系数化为零,即 $x_2 + 2x_3 = 0$ $(2)^{(2)}$

由(3)⁽¹⁾-(-14/3)*(2)⁽²⁾,得

第三步:将(3)⁽²⁾除以18/3,使
$$x_3$$
系数化为1,得 (3)⁽²⁾

经消元后,得到如下三角代数方程组:
$$x_3 = -1$$
 $(3)^{(3)}$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 2 & \dots & (1)^{(1)} \\ x_2 + 2x_3 = 0 & \dots & (2)^{(2)} \\ x_3 = -1 & \dots & (3)^{(3)} \end{cases}$$

(二) 回代过程

由(3)⁽³⁾得 x₃=1,

将 x₃代入(2)⁽²⁾得 x₂=-2,

将 x₂ 、x₃代入(1)⁽¹⁾得 x₂=1

所以,本题解为[x]=[1,2,-1][™]

(三)、用矩阵演示进行消元过程

第一步: 先将方程写成增广矩阵的形式

第二步: 然后对矩阵进行初等行变换

初等行变换包含如下操作

- (1) 将某行同乘或同除一个非零实数
- (2) 将某行加入到另一行
- (3) 将任意两行互换

第三步:将增广矩阵变换成上三角矩阵,即主对角线全为 1,左下三角矩阵全为 0,形式如下:

示例:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(1)/3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(2)-(1)/2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(3)(1)/4}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(2)-(1)/2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(3)(2)-(1/4)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{3} & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(2)+(1/3)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(四) 高斯消元的公式

综合以上讨论,不难看出,高斯消元法解方程组的公式为

1. 消元

(1)
$$\Rightarrow$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}, \quad (i,j=1,2,3,...,n)$$

$$b_{i}^{(1)} = b_{i}, \quad (i=1,2,3,...,n)$$

(2) 对 k=1 到 n-1, 若
$$a_{kk}^{(k)} \neq 0$$
, 进行
$$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \qquad (i=k+1,k+2,...,n)$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} * a_{kj}^{(k)}, \quad (i,j=k+1,k+2,...,n)$$

$$b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - l_{ik} * b_{k}^{(k)}, \quad (i=k+1,k+2,...,n)$$

2. 回代

若
$$a_{nn}^{(n)} \neq 0$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = (b_i^{(i)} - sgm(a_{ij}^{(i)} * x_j) / - a_{ii}^{(i)}$$
, (i = n-1,n-2,...,1) ,(j = i+1,i+2,...,n)

(五) 高斯消元法的条件

消元过程要求 $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ (i=1,2,...,n),回代过程则进一步要求 $a_{nn}^{(n)} \neq 0$,但就方程组 Ax=b

讲, aii(i)是否等于0时无法事先看出来的。

注意 A 的顺序主子式 D_i (i=1,2,...,n),在消元的过程中不变,这是因为消元所作的变换是"将某行的若干倍加到另一行"。若高斯消元法的过程进行了 k-1 步($a_i^{(i)} \neq 0, i < k$),这时计算的 $A^{(k)}$ 顺序主子式:

$$D_1 = a_{11}^{(1)}$$
 $D_2 = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)}$
......
 $D_k = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} a_{k,k}^{(k)}$
有递推公式
 $D_1 = a_{11}^{(1)}$
 $D_i = D_{i-1} a_{ii}^{(i)}$ (i=2,3,...,n)

所以有

定理: 高斯消元法消元过程能进行到底的充要条件是系数阵 A 的 1 到 n-1 阶的顺序主子式不为 0。

(六) 选主消元

因为在高斯消元的过程中,要做乘法和除法运算,因此会产生误差。当| a_{kk} ^(k)|<<1,此时用它作除数。会导致其他元素数量级严重增加,带来误差扩散,使结果严重失真。

例如:

$$\begin{cases}
0.00001x_1+x_2=1.00001 \\
2x_1+x_2=3
\end{cases}$$

解:

$$\begin{pmatrix}
0.00001 & 1 & 1.00001 \\
2 & 1 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{(1)^{\bullet}100000}
\begin{pmatrix}
1 & 100000 & 100001 \\
2 & 1 & 3
\end{pmatrix}
\xrightarrow{(1)^{\bullet}2-(2)}
\begin{pmatrix}
1 & 100000 & 100001 \\
0 & 199999 & 199997
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)+199999}
\begin{pmatrix}
1 & 100000 & 100001 \\
0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

代入得到 $x_1=0, x_2=1$ 。显然,严重失真

换主元,将两行交换,如下,

代入得到 x₁=1,x₂=1,答案正确。

总结:在消元的过程中,如果出现主元相差比较大的情况,应选择如下图方框中的最大数作为主元。甚至可以在整个矩阵中找最大数作为主元,但此时需要做列变换,要记住个分量的顺序。

$$\left[A^{(k)} \ B^{(k)} \right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \ a_{12}^{(1)} \ \cdots \cdots \ b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} \ \cdots \cdots \ b_2^{(2)} \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ a_{nk}^{(k)} \ \cdots \ a_{nn}^{(k)} \ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

(六)解的判断

设方程组的增广矩阵记为 ,则 经过初等行变换可化为如下的阶梯形矩阵(必要是可重新排列未知量的顺序):

$$\bar{\mathbf{A}} \; = \; \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{i\neq}$ $0(i=1, 2, \dots, r)$. 于是可知:

- ().1当 d_{r+1} =0,且 r=n 时,原方程组有唯一解.
- ().2当 d_{r+1} =0,且 r < n 时,原方程组有无穷多解.
- $().3 \pm d_{r+1} \neq 0$,原方程组无解.

二、LU分解法

求解线性代数方程组除了高斯消元法外,还常用LU分解法(三角形分解法)。LU分解法的优点是当方程组左端系数矩阵不变,仅仅是方程组右端列向量改变,即外加激励信号变化时,能够方便地求解方程组。

设n阶线性方程组Ax=b

假设能将方程组左端系数矩阵 A,分解成两个三角阵的乘积,即 A=LU ,式中,L 为主对角线以上的元素均为零的下三角矩阵,且主对角线元素均为1 的上三角矩阵;U 为主对角线以下的元素均为零。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ l_{21} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix}$$

所以有,LUx=b

♦ Ux=y

则 Ly=b

由 A=LU, 由矩阵的乘法公式:

$$a_{1j} = u_{1j}$$
, $j=1, 2, \dots, n$

$$a_{i1} = 1_{i1}u_{11}$$
, $i=1, 2, \dots, n$

推出

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$1_{i1} = a_{i1}/u_{11}, i=1, 2, \dots, n$$

这样就定出了U的第一行元素和L的第一列元素。

设已定出了U的前k-1行和L的前k-1列,现在确定U的第k行和L的第k列。由矩阵乘法:

$$a_{kj} = \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}$$

当 r>k 时, 1_{kr}=0, 且 1_{kk}=1, 因为

$$a_{kj} = u_{kj} + \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}$$

所以,

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}$$
 $j = k, k+1,..., n$

同理可推出计算 L 的第 k 列的公式:

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}) / u_{kk}$$
 $i = k, k+1, ..., n$

因此得到如下算法——杜利特(Doolittle)算法:

(1) 将矩阵分解为 A=LU, 对 k=1, 2, …, n

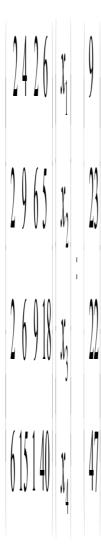
(2) 解 Ly=b

公式2:
$$y_k = b_k - \sum_{r=1}^{k-1} I_{kr} y_r$$
 $k = 1, 2, ..., n$

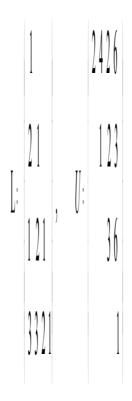
(3) 解 Ux=y

公式3:
$$x_k = (y_k - \sum_{r=k+1}^n u_{kr} x_r)/u_{kk}$$
 $k = n, n-1,...,1$

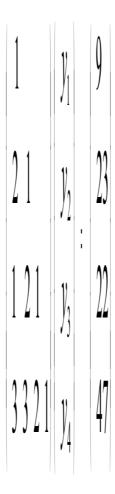
例:求解方程组



解: 由公式1得出



于是化为两个方程组



利用公式 2, 3 可解 $y=(9,5,3,-1)^T, x=(0.5,2,3,-1)^T$

三、应用

问题1: 维他命的配方

维他命是一种好的药品,人们都需要摄入一定量的各种维生素,现在有若干种维他命,问能否利用这些维他命配制出适合人需求的各种维生素。

数据输入:

第一行:人们需补充的 V(1<=V<=25) 种维生素。

第二行: V 个数, 第 i 个数为 Vi, 表示人体对第 i 种维生素的需求量。 (1<=Vi<=1000)

第三行: 已知的 G (1<=G<=15) 种维他命。

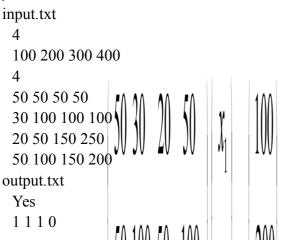
以下 G*V 的整数矩阵: 第 i 行第 j 个数为 Aij,表示第 i 种维他命中所含的第 j 种维生素的含量(1<=Aij<=1000)。

数据输出:

第一行:输出能否配制,若能输出Yes,否则输出No

第二行: 若能配制,则输出G个整数,其中第i个整数Gi,表示第i种维他命所取的数量,若有多种配置方案,输出一种即可。若不能配制,则第二行为空。

样例:



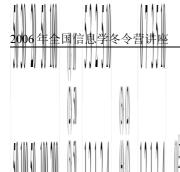
分析:因为不知道**排种维性命的**数量,如果采用枚举,很难估计每种维他命的上界,而且时间复杂度很高,**从**面联们尝试用解方程的方法。

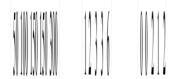
设需要配制的维他命每种数量分别为[x₁,].x_n,其中 n<=15,根据题意,可列出如下方程。



用高斯消元法求解:

这里,虽然 x_4 可取任意值,显然,表示 x_4 的数量与答案无关,因此 x_4 =0,代入,可得 x_3 =1, x_2 =1, x_1 =1,因此,原间解的解制(1, 1, 1, 1) 。





11111

1111

问题2. 虫食第(NOIP2005)

ABCED + BDACE

11111

EBBAA

其中有些是数字,有些是字母,字母可代表(1..N)中的任何一个数字,每个字母数字都不一样。

你的任务是,对于给定的 N 进制加法算式,求出 N 个不同的字母分别导标的数字,使得该加法算式成立。输入数据保证有且仅有一组解。

【数据规模】

对于 30%的数据, 保证有 N<=10:

对于 50%的数据, 保证有 N<=15;

川川对于**全部的**数据,保证有 N<=26。

加显然,我们很容易想到如下算法,枚举 N 个未知数,由于每个未知数的取数值范围为 0~n-1, 共 n 种,因此时间复杂度为 nⁿ, 又因为每个未知数的数值都不相同,因此时间复杂度为 n!, 由于 n 可达到 26,这样做显然比较高,因此需要寻找其他解法。

仔细分析,上述思路的局限性在于没有充分利用加法等式这个条件。我们只要分析有没有进位,由于有N个变量因此可以列出N个方程,N个方程N个未知数,由于原问题有唯一解,因此为程应该有唯一解。

如上例,可得如下方程组:

 $D+E-A=x_1$

 $E+C-A=x_1+x_2$

 $C+A-B=x_2+x_3$

 $B+D-B=x_3+x_4$



 $A+B-E=x_4$

其中 x_i 属于 0、1,枚举每个 x_i ,则时间复杂度为, 2^{n-1} ,用 LU 分解方程的时间为 n^2 , 当 然这个时间复杂度还是较高,可以利用一些已知条件,确定一些 x_i 的值,如 A+0=A,显然不可能有进位等等,加入这样一些剪枝条件即可。

问题 3: 求最大异或值 (SGU275)

给你 n 个非负整数 $A_1,A_2,.....,A_n$ 集合,要你求出一个子集 $A_{i1},A_{i2},...,A_{ik}$ (1<=i1<i2<... <ik<=n),使得 A_{i1} XOR A_{i2} XOR A_{i3} ... XOR A_{ik} 的值最大。

【数据规模】

$$(1 \le n \le 100, A_i \le 10^{18})$$

分析:

设用" \oplus "表示 XOR 操作。将问题进行转换成,求序列 $x_1,x_2,...,x_n$,使得: $(x_1*A_1) \oplus (x_2*A_2)... \oplus (x_n*A_n)$ 最大,

其中 xi=0 或 1

由于XOR操作时没有进位,所以我们把A₁,...,A_n的每个二进制位分离出来考虑。

设 A_i=a(i,0)*2⁰+a(i,1)*2¹+...+a(i,k)*2^k 可知,若答案的第 k 位是 1,则

$$a(1,k)*x_1 \oplus a(2,k)*x_2 \oplus ... \oplus a(n,k)*x_n=1$$

否则

$$a(1,k)*x_1 \oplus a(2,k)*x_2 \oplus ... \oplus a(n,k)*x_n=0$$

由此,我们可以对答案进行枚举。首先设答案的最高为为1,得到一个方程,如果方程有解,则该位被确定为1,否则为0,继续枚举下面的每一位,直到每一位都确定为止。

因此时间复杂度为 log₂(10¹⁸)*n²

例如 n=3, $\{A_i\}=\{11, 9, 5\}$ 。首先我们把这三个数转成二进制,即:

- $(11)_{10}=(1011)_2;$
- $(9)_{10}=(1001)_2$;
- $(5)_{10}=(0101)_2$

我们知道答案的最高位至多是第4位(也就是23位),我们设第4位为1,得到方程:

$$x_1 \oplus x_2 = 1$$
 (1)

然后枚举第3位,设为1,得到方程:

$$x_3=1$$
 (2)

然后枚举第2位,设为1,得到方程:

 $x_1 = 1$ (3)

此时仍然可以将(1)(2)(3)联立而不发生矛盾,继续枚举最后一位,先设为 1,得到方程: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 1$ (4)

用(1)(2)(3)的主元对(4)进行消元,得到:

0=1 (4)⁽¹⁾ 矛盾! 可知(4)无法和前三个方程联立。

所以最低位不能为 1, 只能为 0。这样我们就得到了答案 $(1110)_2=(14)_{10}$

问题 4: Puzzle (SGU260)

有 N 个格子,每个格子可能是黑色或者白色。目前有 N 种操作方式,第 i 种操作可以将, $A_{i,l},A_{i,2,.....,A_{i,k}}$ 这 K_i 个格子的颜色同时改变。(从黑到白,或者从白到黑)现在给出 N 个格子的初始状态,与这 N 种操作。请你判断是不是可以通过 N 种操作,将所有格子变成同一种颜色。如果可以请输出一种方案。

【数据规模】

 $(1 \le n \le 200)$

分析:

通过一定的分析,就可以知道本题可以表示成一个N元逻辑方程。首先可以明确的是同一个操作使用超过两次是没有意义的。因为一个操作被使用了两次相当于什么都没有改变,于是可以:

设X_i表示第 i 种操作是否使用。如果使用则值为真,不使用则为假。

我们先判断是不是可以将所有的格子的颜色都变成黑,变成白则可以类似处理。

对于每个格子 i,设可以将 i 的格子颜色改变的操作有 C 个,它们为 $B_1,B_2,...,B_c$ 。若 i 的 初始颜色为黑,即我们不能让 i 颜色改变,所以有:

$$X_{B1} \oplus X_{B2} \oplus X_{B3} \oplus \dots \oplus X_{BC} = False$$

若 i 的初始颜色为白,则有:

$$X_{B1} \oplus X_{B2} \oplus X_{B3} \oplus \dots \oplus X_{BC} = True$$

总共有N个格子,即N个方程。有N种操作,即N个未知数。原问题就变成了判断N元 Xor 方程组有没有解的问题了,可以在 $O(N^3)$ 的时间复杂度内用高斯消元的方法解决。

问题 5: Nikifor (Ural1041)

现在有 $M \wedge N$ 维向量 $P_{1..}P_{m}$,你需要从中"购买" $N \wedge P_{m}$ 个向量,它们是**线性无关**的。同时每个向量有一个价格,在选出 $N \wedge P_{m}$ 个向量的同时,要求价格和最小。

所谓N个向量 $Q_1...Q_n$ 线性无关,即对于其中任意N-1个向量(假设为Q1...Qn),方程:

$$Q_1X_1+Q_2X_2+...+Q_{n-1}X_{n-1}=Q_n$$

没有实数解 $(X_1, X_2, ..., X_{n-1})$ 。

【数据规模】

 $M \le 2000 N \le 50$

分析:

本题我们采用贪心的方法。首先将所有向量按照价格从小到大排序。

之后从价格小的向量开始依次检查,倘若已经购买了的向量无法表示出当前检查的向量,则此向量也需要购买,否则就不需要购买。若发现已经购买了n个向量,就得到一组解,若检查完所有向量之后依然没有n个向量,就表示无解。

贪心正确性的证明:

首先我们需要证明购买的若干个向量是线性无关的。

考虑用数学归纳法,假设购买的前 t 个向量 $P_1...P_t$ 是线性无关的,现在发现向量 Q 也需要购买,我们证明 P1...Pt ,Q 也是线性无关的:

由于Q需要购买,则方程 $P_1X_1+P_2X_2+...+P_tX_t=Q$ 无解。

假设结论不成立,即存在 $(Y_1,Y_2,...,Y_t)$ 使得 $P_1Y_1+P_2Y_2+...+P_{t-1}Y_{t-1}+QY_t=P_t$,

那么若 $Y_1=0$, 即 $P_1Y_1+P_2Y_2+...+P_{t-1}Y_{t-1}=P_t$, 则与 $P_1...P_t$ 是线性无关矛盾:

若 Yt 不为 0,于是有 $P_1(Y_1/Y_t)+P_2(Y_2/Y_t)+..+P_{t-1}(Y_{t-1}/Y_t)-Pt(1/Y_t)=Q$,则与"方程 $P_1X_1+P_2X_2+...+P_tX_t=Q$ 无解"矛盾。

因此P1..Pt,Q也是线性无关的。

因此前 t+1 个向量也是线性无关,于是命题得证。

此外还有一个问题,在贪心过程中每次遇到需要购买的向量,我们就马上购买,但会不会造成之后无解呢?显然不会,下面我们再来证明一个结论:

设前 t 次购买的向量为 P1..Pt,第 t+1 次购买的向量为 P_{t+1} ,那么若存在一组可行解 $(P_1,P_2,...,P_t,Q_1,...,Q_s)$,则一定会存在一组解 $(P_1,P_2,...,P_{t+1},W_1,...,W_k)$ 。

证明: $(P_1,P_2,...,P_t,Q_1,...,Q_s)$ 是可行解,则它们一定可以表示所有的向量。

设 $P_1X_1+P_2X_2+...+P_tX_t+Q_1Y_1+...+Q_sY_s=P_{t+1}$, 那么 $Y_1...Y_s$ 不可能全为 0。若全为 0,则方程简化为 $P_1X_1+P_2X_2+...+P_tX_t=P_{t+1}$,但 $P_1...P_{t+1}$ 是线性无关的,因此这是不可能的。

不妨设 Ys 不为 0,那么我们只须将 Qs 替换为 P_{t+1} ,则($P_1,P_2,...,P_{t+1},Q_1,...Q_{s-1}$)同样也为可行解。

因此结论得到证明。

每次判断一个向量需不需要购买,实际上就是判断一个方程组有没有实数解,整个算法的时间复杂度为 $O(MN^2)$ 。