



# 树的乐园

——一些与树有关的题目

栗师

# 讲题目的

- 重点针对树中的动态规划讲题。体会动态规划在树这个特殊的模型下的思想。同时，也涉及到了一些其他的算法。由于树的优美性，使得各式各样的算法都有了发挥的余地。

# 题目 1

给定一棵有  $n$  个节点的有根树，节点从 1 到  $n$  标号，不同的点标号不同。对于每一个节点，求在它的子孙节点中，有多少个节点的标号比它的标号小。

## 问题 2

- 给定一个有  $n$  个节点的树，节点从 1 到  $n$  标了号。现在，给每一个点一个  $w$  值， $w$  值的范围是 1 到  $m$ ，并且满足，如果两个节点  $i, j$  具有相同的  $w$  值，那么，在从  $i$  节点到  $j$  节点的唯一一条最短路径上，所有节点（除了  $i, j$ ）的  $w$  值都大于  $i$  的  $w$  值（也就是  $j$  的  $w$  值）。现在，要给出一个方案，使得这个方案的  $w$  值最小。



## 问题 3

- 某国有  $n$  个城市，这  $n$  个城市之间有  $n-1$  条高速公路，每一条高速公路连接两个城市，并且通过这些高速公路，任意两个城市都可以互相到达。现在，消防部队要在这个国家建立若干个消防站，一个消防站建立在某一个城市中。如果某个城市发生火灾，那么距离这个城市最劲的消防站将会调动消防部队到火灾城市，假设每一条高速公路都需要花费一单位的时间。为了安全，消防部队必须在  $M$  时间内到达火灾城市，请问，至少需要建立多少个消防站？

# 问题 4

- 把上面的题目扩展一下：
  - 1、如果走完每一条高速公路需要花费的时间不同，需要最少的消防站是多少？
  - 2、在1的基础上，如果每一个城市建立一个消防站都有一些费用，那么，最少需要用多少费用才能保证安全？

## 问题 5

- 给定一棵有  $n$  个节点的树，以及定义在边上的权值  $w$ ，选出一个最多有  $p$  个节点的集合  $S$ 。定义  $d[i] = \min\{\text{dis}[i, j], j \text{ 是 } S \text{ 中的节点}\}$ ，要求这样的  $S$ ，使得给定  $d[1] + d[2] + \dots + d[n]$  最小。

## 问题 6

- 给定一棵树，以及定义在树上的边的长度，现在，要询问有多少对节点的距离小于等于  $K$ 。



# 问题 7

- 给定一棵树。现在，两个人轮流操作这棵树，他们的操作是：从这棵树中删除一条边，这样，树就分成了两个部分，把不包含节点 1 的部分扔掉，只保留含有节点 1 的部分。最后，谁不能这样操作了就算输了。显然，不能操作了就是指只剩下节点 1 了。

# 动态规划思想

- 在树中，我们不难得到树中动态规划的基本思路：一般情况下，把树看成有根树，从下到上，以每一棵子树为阶段。考虑在整个树所形成的一个“方案”中，每一棵子树有哪些状态。把这些状态用函数表示出来，找到状态与状态之间的转移关系。