线性方程组的解法讨论与应用

朱全民

线性方程组形式如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & + & \cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

常记为矩阵形式

$$Ax = B$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

一、高斯消元法

高斯（Gauss)消元法的基本思想是：通过一系列的加减消元运算，也就是代数中的加减消去法，将方程组化为上三角矩阵；然后，再逐一回代求解出 x 向量。现举例说明如下：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \ldots\ldots (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \ldots\ldots (2) \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

（一）消元过程

第一步：将(1)/3 使 x_1的系数化为 1 得

再将(2)、(3)式中 x_1的系数都化为零，即由(2)-2×(1) $^{(1)}$得

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 2 \quad \ldots\ldots \quad (1)^{(1)}$$

$$\frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)^{(1)}$$

由(3)-4×(1)[(1)]得

$$-\frac{14}{3}x_2-\frac{10}{3}x_3=-6 \quad \ldots\ldots \quad (3)^{(1)}$$

第二步：将(2)[(1)]除以2/3，使x_2系数化为1，得

$$x_2+2x_3=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)^{(2)}$$

再将(3)[(1)]式中x_2系数化为零，即

由(3)[(1)]-(-14/3)*(2)[(2)]，得

$$\frac{18}{3}x_3=-6 \quad \ldots\ldots \quad (3)^{(2)}$$

第三步：将(3)[(2)]除以18/3，使x_3系数化为1，得

$$x_3=-1 \quad \ldots\ldots \quad (3)^{(3)}$$

经消元后，得到如下三角代数方程组：

$$\begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=2 \quad \ldots\ldots \quad (1)^{(1)} \\ x_2+2x_3=0 \quad \ldots\ldots \quad (2)^{(2)} \\ x_3=-1 \quad \ldots\ldots \quad (3)^{(3)} \end{cases}$$

（二）回代过程

由(3)[(3)]得 x_3=1,

将x_3代入(2)[(2)]得x_2=-2,

将x_2 、x_3代入(1)[(1)]得x_2=1

所以，本题解为[x]=[1,2,-1]^T

（三）、用矩阵演示进行消元过程

第一步： 先将方程写成增广矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

第二步：然后对矩阵进行初等行变换

初等行变换包含如下操作

（1） 将某行同乘或同除一个非零实数

（2） 将某行加入到另一行

（3） 将任意两行互换

第三步：将增广矩阵变换成上三角矩阵，即主对角线全为 1，左下三角矩阵全为 0，形式如下：

$$\begin{bmatrix} A^{(n)} & B^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & . & . & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & . & . & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ . & 0 & 1 & \cdots & . & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ . & . & \vdots & \ddots & . & . & . \\ . & . & \vdots & \vdots & 1 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

示例：

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)/3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)*2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)*4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\div\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{10}{3} & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)*-\frac{14}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{3} & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\div\frac{18}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

（四）高斯消元的公式

综合以上讨论，不难看出，高斯消元法解方程组的公式为

1．消元

（1） 令

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$，（i,j=1,2,3,…,n）

$b_i^{(1)} = b_i$，（i=1,2,3,…,n）

（2） 对 k=1 到 n-1，若 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，进行

$l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$，（i=k+1,k+2,…,n）

$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} * a_{kj}^{(k)}$，（i,j= k+1,k+2,…,n）

$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} * b_k^{(k)}$，（i= k+1,k+2,…,n）

2．回代

若 $a_{nn}^{(n)} \neq 0$

$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$

$x_i = (b_i^{(i)} - \mathrm{sgm}(a_{ij}^{(i)} * x_j))/- a_{ii}^{(i)}$，（i = n-1,n-2,…,1）,(j = i+1,i+2,…,n)

（五）高斯消元法的条件

消元过程要求 $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ (i=1,2,…,n),回代过程则进一步要求 $a_{nn}^{(n)} \neq 0$,但就方程组 Ax=b

讲，$a_{ii}^{(i)}$是否等于0时无法事先看出来的。

注意A的顺序主子式D_i（i=1,2,…,n）,在消元的过程中不变，这是因为消元所作的变换是“将某行的若干倍加到另一行”。若高斯消元法的过程进行了k-1步($a_{ii}^{(i)}\neq 0, i<k$)，这时计算的$A^{(k)}$顺序主子式:

$D_1 = a_{11}^{(1)}$

$D_2 = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)}$

……

$D_k = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \ldots a_{k,k}^{(k)}$

有递推公式

$D_1 = a_{11}^{(1)}$

$D_i = D_{i-1} a_{ii}^{(i)} \quad (i=2,3,\ldots,n)$

所以有

定理：高斯消元法消元过程能进行到底的充要条件是系数阵A的1到n-1阶的顺序主子式不为0。

（六）选主消元

因为在高斯消元的过程中，要做乘法和除法运算，因此会产生误差。当$|a_{kk}^{(k)}|<<1$，此时用它作除数。会导致其他元素数量级严重增加，带来误差扩散，使结果严重失真。

例如：

$$\begin{cases} 0.00001x_1+x_2 = 1.00001 \\ 2x_1+x_2 = 3 \end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix} 0.00001 & 1 & 1.00001 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)*100000} \begin{pmatrix} 1 & 100000 & 100001 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)*2-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 100000 & 100001 \\ 0 & 199999 & 199997 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)\div 199999} \begin{pmatrix} 1 & 100000 & 100001 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

代入得到$x_1=0, x_2=1$。显然，严重失真

换主元，将两行交换，如下，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0.00001 & 1 & 1.00001 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 \\ 0.00001 & 1 & 1.00001 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)*0.00001} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

代入得到$x_1=1, x_2=1$,答案正确。

总结：在消元的过程中，如果出现主元相差比较大的情况，应选择如下图方框中的最大数作为主元。甚至可以在整个矩阵中找最大数作为主元，但此时需要做列变换，要记住个分量的顺序。

$$\left[A^{(k)}\quad B^{(k)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & b_2^{(2)} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & & \boxed{a_{kk}^{(k)}} & \cdots\ a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & \boxed{a_{nk}^{(k)}} & \cdots\ a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

（六）解的判断

设方程组的增广矩阵记为，则经过初等行变换可化为如下的阶梯形矩阵(必要是可重新排列未知量的顺序)：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii}\neq 0(i=1，2，\cdots，r)$．于是可知：

().1当 $d_{r+1}=0$，且 $r=n$ 时，原方程组有唯一解．

().2当 $d_{r+1}=0$，且 $r<n$ 时，原方程组有无穷多解．

().3当 $d_{r+1}\neq 0$，原方程组无解．

二、LU 分解法

求解线性代数方程组除了高斯消元法外，还常用 LU 分解法（三角形分解法）。LU 分解法的优点是当方程组左端系数矩阵不变，仅仅是方程组右端列向量改变，即外加激励信号变化时，能够方便地求解方程组。

设 n 阶线性方程组 Ax=b

假设能将方程组左端系数矩阵 A，分解成两个三角阵的乘积，即 A=LU ，式中，L 为主对角线以上的元素均为零的下三角矩阵，且主对角线元素均为 1 的上三角矩阵；U 为主对角线以下的元素均为零。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & O & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

所以有，LUx=b

令 Ux=y

则 Ly=b

由A=LU,由矩阵的乘法公式：

$a_{1j} = u_{1j}$ ， j=1,2,…,n

$a_{i1} = l_{i1}u_{11}$ ， i=1,2,…,n

推出

$u_{1j} = a_{1j}$, j=1,2,…,n

$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}$, i=1,2,…,n

这样就定出了U的第一行元素和L的第一列元素。

设已定出了U的前k-1行和L的前k-1列，现在确定U的第k行和L的第k列。由矩阵乘法：

$$a_{kj} = \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}$$

当r>k时，$l_{kr}=0$, 且$l_{kk}=1$，因为

$$a_{kj} = u_{kj} + \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}$$

所以，

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj} \qquad j = k, k+1, \ldots, n$$

同理可推出计算L的第k列的公式：

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}) / u_{kk} \qquad i = k, k+1, \ldots, n$$

因此得到如下算法——杜利特（Doolittle）算法:

(1) 将矩阵分解为 A=LU, 对 k=1, 2, …, n

$$
\text{公式1:}\begin{cases}
u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj} \qquad j = k, k+1, \ldots, n \\
l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{n} l_{kr} u_{rj}) / u_{kk} \qquad i = k, k+1, \ldots, n \\
l_{kk} = 1
\end{cases}
$$

(2) 解 L**y**=**b**

$$
\text{公式2}: y_k = b_k - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} y_r \qquad k = 1, 2, \ldots, n
$$

(3) 解 U**x**=**y**

$$
\text{公式3:}\ x_k = (y_k - \sum_{r=k+1}^{n} u_{kr} x_r) / u_{kk} \qquad k = n, n-1, \ldots, 1
$$

例：求解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 18 \\ 6 & 15 & 1 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \\ 22 \\ 47 \end{bmatrix}$$

解：

由公式 1 得出

$$L:\begin{pmatrix}1&&&\\2&1&&\\1&2&1&\\3&3&2&1\end{pmatrix},\quad U:\begin{pmatrix}2&4&2&6\\&1&2&3\\&&3&6\\&&&1\end{pmatrix}$$

于是化为两个方程组

$$\begin{pmatrix}1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 23\\ 22\\ 47\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & 2 & 6\\ & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

利用公式 2，3 可解 $y=(9,5,3,-1)^T,x=(0.5,2,3,-1)^T$

三、应用

问题 1：**维他命的配方**

维他命是一种好的药品，人们都需要摄入一定量的各种维生素，现在有若干种维他命，问能否利用这些维他命配制出适合人需求的各种维生素。

数据输入：

第一行：人们需补充的 V(1<=V<=25) 种维生素。

第二行：V 个数，第 i 个数为 Vi，表示人体对第 i 种维生素的需求量。（1<=Vi<=1000）

第三行：已知的 G (1<=G<=15) 种维他命。

以下 G*V 的整数矩阵：第 i 行第 j 个数为 Aij，表示第 i 种维他命中所含的第 j 种维生素的含量（1<=Aij<=1000）。

数据输出：

第一行：输出能否配制，若能输出 Yes，否则输出 No

第二行：若能配制，则输出 G 个整数，其中第 i 个整数 Gi，表示第 i 种维他命所取的数量，若有多种配置方案，输出一种即可。若不能配制，则第二行为空。

样例：

input.txt

```
4
100 200 300 400
4
50 50 50 50
30 100 100 100
20 50 150 250
50 100 150 200
```

output.txt

```
Yes
1 1 1 0
```

分析：因为不知道每种维他命的数量，如果采用枚举，很难估计每种维他命的上界，而且时间复杂度很高，下面我们尝试用解方程的方法。

设需要配制的维他命每种数量分别为 $x_1,\ldots x_n$,其中 n<=15,根据题意，可列出如下方程。

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 & 20 & 50 \\ 50 & 100 & 50 & 100 \\ 50 & 100 & 150 & 150 \\ 50 & 100 & 250 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}$$

用高斯消元法求解：

这里，虽然 x_4 可取任意值，显然，表示 x_4 的数量与答案无关，因此 $x_4=0$,代入，可得 $x_3=1$, $x_2=1$, $x_1=1$,因此，原问题的解为（1，1，1，0）。

问题2：虫食算（NOIP2005）

给出一个N（N<=26）进制的加法算式，如下：

```
  ABCED
+ BDACE
  EBBAA
```

其中有些是数字，有些是字母，字母可代表（1..N）中的任何一个数字，每个字母数字都不一样。

你的任务是，对于给定的N 进制加法算式，求出N个不同的字母分别导标的数字，使得该加法算式成立。输入数据保证有且仅有一组解。

【数据规模】

对于30%的数据，保证有N<=10;

对于50%的数据，保证有N<=15;

对于全部的数据，保证有N<=26。

分析：

显然，我们很容易想到如下算法，枚举N个未知数，由于每个未知数的取数值范围为0~n-1,共n种，因此时间复杂度为n^n,又因为每个未知数的数值都不相同，因此时间复杂度为n!，由于n可达到26，这样做显然比较高,因此需要寻找其他解法。

仔细分析，上述思路的局限性在于没有充分利用加法等式这个条件。我们只要分析有没有进位，由于有N个变量因此可以列出N个方程，N个方程N个未知数，由于原问题有唯一解，因此方程应该有唯一解。

如上例,可得如下方程组：

$D+E-A=x_1$

$E+C-A=x_1+x_2$

$C+A-B=x_2+x_3$

$B+D-B=x_3+x_4$

$A+B-E=x_4$

其中 x_i 属于 0、1，枚举每个 x_i，则时间复杂度为, 2^{n-1}，用 LU 分解方程的时间为 n^2, 当然这个时间复杂度还是较高，可以利用一些已知条件，确定一些 x_i 的值，如 A+0=A，显然不可能有进位等等，加入这样一些剪枝条件即可。

问题 3： 求最大异或值（SGU275）

给你 n 个非负整数 $A_1,A_2,\ldots\ldots,A_n$ 集合，要你求出一个子集 $A_{i1},A_{i2},\ldots,A_{ik}$（1<=i1<i2<…<ik<=n），使得 A_{i1} XOR A_{i2} XOR A_{i3} … XOR A_{ik} 的值最大。

【数据规模】

（$1<=n<=100$，$A_i<=10^{18}$）

分析：

设用“⊕”表示 XOR 操作。将问题进行转换成，求序列 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，使得：

$(x_1*A_1) \oplus (x_2*A_2)\ldots \oplus (x_n*A_n)$最大，

其中 $x_i=0$ 或 1

由于 XOR 操作时没有进位，所以我们把 $A_1,\ldots,A_n$ 的每个二进制位分离出来考虑。

设 $A_i=a(i,0)*2^0+a(i,1)*2^1+\ldots+a(i,k)*2^k$

可知，若答案的第 k 位是 1，则

$$a(1,k)*x_1 \oplus a(2,k)*x_2 \oplus \ldots \oplus a(n,k)*x_n=1$$

否则

$$a(1,k)*x_1 \oplus a(2,k)*x_2 \oplus \ldots \oplus a(n,k)*x_n=0$$

由此，我们可以对答案进行枚举。首先设答案的最高为为 1，得到一个方程，如果方程有解，则该位被确定为 1，否则为 0，继续枚举下面的每一位，直到每一位都确定为止。

因此时间复杂度为 $\log_2(10^{18})*n^2$

例如 n=3，$\{A_i\}=\{11，9，5\}$。首先我们把这三个数转成二进制，即：

$(11)_{10}=(1011)_2$；

$(9)_{10}=(1001)_2$；

$(5)_{10}=(0101)_2$

我们知道答案的最高位至多是第 4 位（也就是 2^3 位），我们设第 4 位为 1，得到方程：

$x_1 \oplus x_2=1$　　(1)

然后枚举第 3 位，设为 1，得到方程：

$x_3=1$　　(2)

然后枚举第2位，设为1，得到方程：

$x_1=1$　　(3)

此时仍然可以将(1)(2)(3)联立而不发生矛盾，继续枚举最后一位，先设为1，得到方程：
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3=1$ (4)
用(1)(2)(3)的主元对(4)进行消元，得到：
0=1　　$(4)^{(1)}$ 矛盾！可知(4)无法和前三个方程联立。
所以最低位不能为1，只能为0。这样我们就得到了答案$(1110)_2=(14)_{10}$

问题4： Puzzle（SGU260）

有N个格子，每个格子可能是黑色或者白色。目前有N种操作方式，第i种操作可以将，$A_{i,1},A_{i,2},\ldots\ldots,A_{i,ki}$这$K_i$个格子的颜色同时改变。（从黑到白，或者从白到黑）现在给出N个格子的初始状态，与这N种操作。请你判断是不是可以通过N种操作，将所有格子变成同一种颜色。如果可以请输出一种方案。

【数据规模】
（1<=n<=200）

分析：
通过一定的分析，就可以知道本题可以表示成一个N元逻辑方程。首先可以明确的是同一个操作使用超过两次是没有意义的。因为一个操作被使用了两次相当于什么都没有改变，于是可以：
设X_i表示第i种操作是否使用。如果使用则值为真，不使用则为假。
我们先判断是不是可以将所有的格子的颜色都变成黑，变成白则可以类似处理。
对于每个格子i，设可以将i的格子颜色改变的操作有C个，它们为$B_1,B_2,\ldots,B_C$。若i的初始颜色为黑，即我们不能让i颜色改变，所以有：
$$X_{B1} \oplus X_{B2} \oplus X_{B3} \oplus \ldots\ldots \oplus X_{BC} = False$$
若i的初始颜色为白，则有：
$$X_{B1} \oplus X_{B2} \oplus X_{B3} \oplus \ldots\ldots \oplus X_{BC} = True$$
总共有N个格子，即N个方程。有N种操作，即N个未知数。原问题就变成了判断N元Xor方程组有没有解的问题了，可以在$O(N^3)$的时间复杂度内用高斯消元的方法解决。

问题5：Nikifor（Ural1041）

现在有M个N维向量$P_1..P_m$，你需要从中“购买”N个向量，它们是**线性无关**的。同时每个向量有一个价格，在选出N个向量的同时，要求价格和最小。
所谓N个向量$Q_1..Q_n$线性无关，即对于其中任意N-1个向量（假设为Q1..Qn），方程：

$$Q_1X_1+Q_2X_2+\ldots+Q_{n-1}X_{n-1} = Q_n$$

没有实数解（$X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}$）。

【数据规模】
M<=2000 N<=50

分析：

本题我们采用贪心的方法。首先将所有向量按照价格从小到大排序。

之后从价格小的向量开始依次检查，倘若已经购买了的向量无法表示出当前检查的向量，则此向量也需要购买，否则就不需要购买。若发现已经购买了 n 个向量，就得到一组解，若检查完所有向量之后依然没有 n 个向量，就表示无解。

贪心正确性的证明：

首先我们需要证明购买的若干个向量是线性无关的。

考虑用数学归纳法，假设购买的前 t 个向量 $P_1..P_t$ 是线性无关的，现在发现向量 Q 也需要购买，我们证明 P1..Pt,Q 也是线性无关的：

由于 Q 需要购买，则方程 $P_1X_1+P_2X_2+\ldots+P_tX_t = Q$ 无解。

假设结论不成立，即存在（$Y_1,Y_2,..,Y_t$）使得 $P_1Y_1+P_2Y_2+..+P_{t-1}Y_{t-1}+QY_t = P_t$，

那么若 $Y_t=0$，即 $P_1Y_1+P_2Y_2+..+P_{t-1}Y_{t-1} = P_t$，则与 $P_1..P_t$ 是线性无关矛盾；

若 Yt 不为 0，于是有 $P_1(Y_1/Y_t)+P_2(Y_2/Y_t)+..+P_{t-1}(Y_{t-1}/Y_t)-Pt(1/Y_t) = Q$，则与“方程 $P_1X_1+P_2X_2+\ldots+P_tX_t = Q$ 无解”矛盾。

因此 P1..Pt,Q 也是线性无关的。

因此前 t+1 个向量也是线性无关，于是命题得证。

此外还有一个问题，在贪心过程中每次遇到需要购买的向量，我们就马上购买，但会不会造成之后无解呢？显然不会，下面我们再来证明一个结论：

设前 t 次购买的向量为 P1..Pt，第 t+1 次购买的向量为 P_{t+1}，那么若存在一组可行解（$P_1,P_2,\ldots,P_t,Q_1,\ldots,Q_s$），则一定会存在一组解（$P_1,P_2,\ldots,P_{t+1},W_1,\ldots,W_k$）。

证明：（$P_1,P_2,\ldots,P_t,Q_1,\ldots,Q_s$）是可行解，则它们一定可以表示所有的向量。

设 $P_1X_1+P_2X_2+\ldots+P_tX_t+Q_1Y_1+\ldots+Q_sY_s = P_{t+1}$，那么 $Y_1..Y_s$ 不可能全为 0。若全为 0，则方程简化为 $P_1X_1+P_2X_2+\ldots+P_tX_t = P_{t+1}$，但 $P_1..P_{t+1}$ 是线性无关的，因此这是不可能的。

不妨设 Ys 不为 0，那么我们只须将 Qs 替换为 P_{t+1}，则（$P_1,P_2,\ldots,P_{t+1},Q_1,\ldots Q_{s-1}$）同样也为可行解。

因此结论得到证明。

每次判断一个向量需不需要购买，实际上就是判断一个方程组有没有实数解，整个算法的时间复杂度为 $O(MN^2)$。