第十讲、区间图的判定与完美图

本讲中，我们将完成用 PQ 树判定区间图的讨论，并且介绍完美图与完美图定理。

1．介绍

怎样判定区间图是利用区间图有效地解决某些 NP 问题的前提与基础。本讲中，我们继续研究 Booth 与 Lueker 提出的 PQ 树模型，这是一种储存元素排列方式的数据结构，它能在线性时间内判定区间图，并建立一个得到该区间图（如果是的话）的区间集合。我们只给出算法的梗概，更详细的内容可以参考[BL76]。

我们还将总结一些在线性时间内判定区间图的其他方法。

最后，我们定义了完美图，它包含了一些我们已知的图的类型，例如弦图和相似图。我们同时定义伴完美图，并表述了完美图定理，它表明完美图与伴完美图是等价的。

2．PQ 树

PQ 树（定义见上讲）能够有效地储存满足一定约束的所有可能排列。

3．区间图的判定

回忆一下，区间图的判定可以简化为判定该图的所有极大团能否有一种排列方式，满足对任意顶点，包含它的极大团序号是连续的。我们用 PQ 树解决这个问题。令 PQ 树的叶节点集 X 表示图中的所有极大团。定义 L 是一个连续性约束集，L＝{Iv| v∈V}，Iv 是包含 v 的极大团集合。

初始时，我们允许所有可能的排列，之后一次加入 L 中的一个元素。

下面详细地讲一下操作步骤：（注：这些内容是译者自加的，有何缺误请大家指教）

我们的目标是在一棵 PQ 树上加入一个连续性约束，得到一个即满足原树约束，又满足新加入约束的新 PQ 树。

首先将新加入约束中的各元素在原 PQ 树中代表的顶点染色。我们分两类情况处理：根是 Q 节点和根是 P 节点。每种情况里又分两类任务：任务 1，将当前节点下所有染色的节点约束为连续的；任务 2，将当前节点下所有染色的节点与不染色节点都约束为连续的。下面我们会知道任务 1 会归结到任务 2，因此主要问题是任务 2。

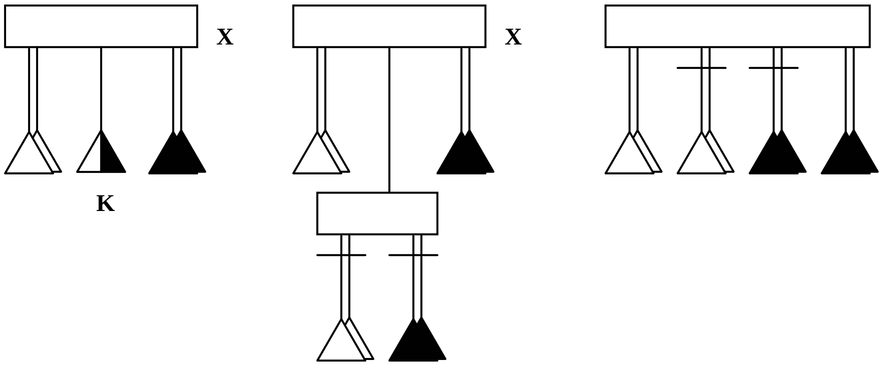
用 Type（V）表示某顶点是 P 节点还是 Q 节点。

定义函数 Solve（X，Typ，2）表示在以节点 X（X 的类型为 Typ）为根的子树中完成任务 2 的操作，函数返回一个以 X 为根的子树，其中 X 规定为 Q 节点（当然如 X 只有两个节点是 X 为 P、Q 节点是等价的）。

首先说明几个图例：矩形表示一个 Q 节点，圆形表示一个 P 节点，三角表示一棵非空子树，双三角表示零个或若干个相邻的子树。黑色表示所有叶节点都是染色的，白色表示所有叶节点都是不染色的，半黑半白表示叶节点中染色与不染色的叶节点都存在，用 CL 表示。树枝上的横线只为标注子树的来源，与 PQ 树本身无关。

1．Solve（X，Q，2）

显然若 CL（X）＝白色，不必进行任何处理。否则考虑 X 节点所有子节点，由于可翻转，不妨假设 X 最右侧的子节点不是白色。从右向左依次 X 的各子节点的颜色，如果不是形如若干黑－（零个或一个半黑半白）－若干白的形式（如图 1A），则必定无解，退出。否则如果中间没有半黑半白的子树，则不必作任何操作，否则假设第 K 个子树是半黑半白的。



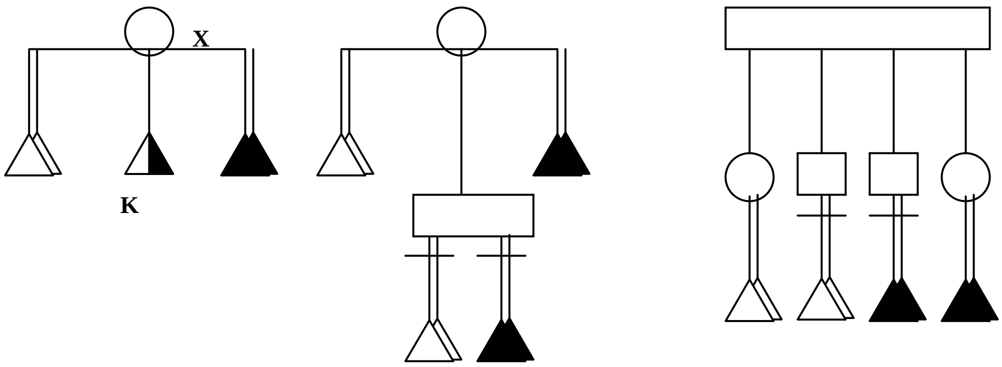
首先执行 Solve（K，Type（K），2），结束后 PQ 树的部分形态如图 1B 所示。根据 Q 节点的性质以及 Solve 函数的要求，可以将 PQ 树变形为图 1C 所示，即达到了 Solve 的目标。

2．Solve（X，Q，1）

这个过程是类似的，只不过可能有两个半黑半白的子树，分别作 1 类任务处理，在像上面一样操作就可以了。

3．Solve（X，P，2）

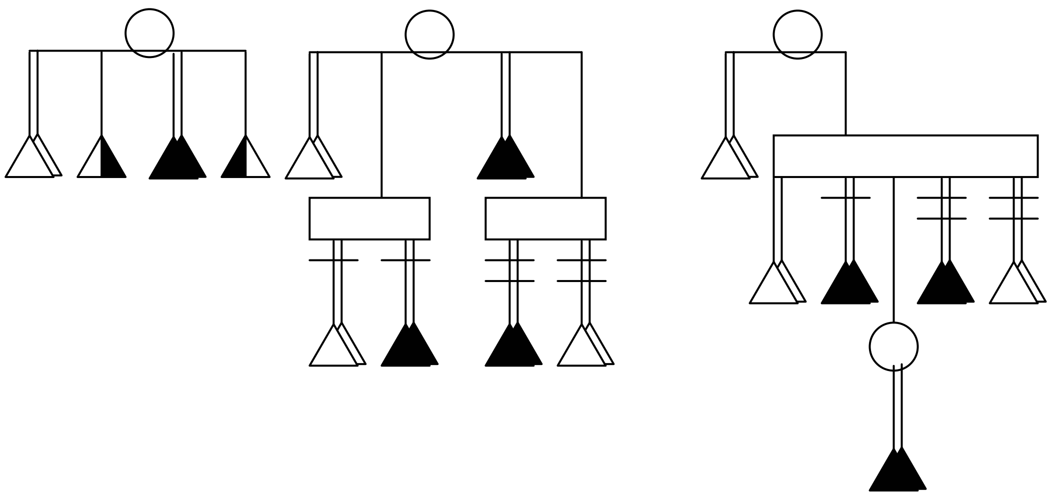
首先扫描各子树的颜色，显然最多只能有 1 个半黑半白子树（否则无解），先假设有一个半黑半白子树 K，不妨设如图 2A 排列。



同样先处理 Solve（K，Type（K），2），如图 B2，加入新约束后等效变化为图 B3,目标达到。

4．Solve（X，P，1）

这里仅用图例说明。



可以看到任务 2 不依赖于任务 1，任务 1 也不依赖于任务 1，因此第 4 部分 Solve 函数输出的子树根节点为 P 节点没有关系。以上算法递归地进行，直至 X 为叶节点回溯。另外操作时很容易对新增的顶点确定颜色，如果遇到仅有一个子树的节点，可以将它删去。

下面分析一下时间复杂度，假设涉及的元素有 N 个，约束条件有 T 个。建树只要 O（N）时间；对于每个约束，染色（包括内节点）需要 O（N），递归求解时每个节点至多操作一次，每次操作复杂度正比于它与它的某个子节点的度数和，总时间也是 O（N）。因此总复杂度为 O（NT）。

注意算法运行后，如果能够成功地加入所有约束，PQ 树将储存所有可行的极大团序列。利用第八讲中的方法，可以得到一个获得该区间图的区间集合。

4．区间图判定的其他算法

以上是第一个用线性时间解决区间图判定的算法。Korte 与 Mohring 之后提出了一个建立在改进 PQ 树基础上的算法；Hsu 与 Ma 给出了一个不使用 PQ 树的算法。

Habib、Paul、Vincent 在一篇未发表的论文中使用了一个用修改的 LexBFS 算法判定区间图的方法；Corneil、Olariu 与 Strwart 用五次 LexBFS 算法平判定了区间图，每次使用不同的方法处理“平局”，且每次从上一次的最后选择的顶点开始算法。

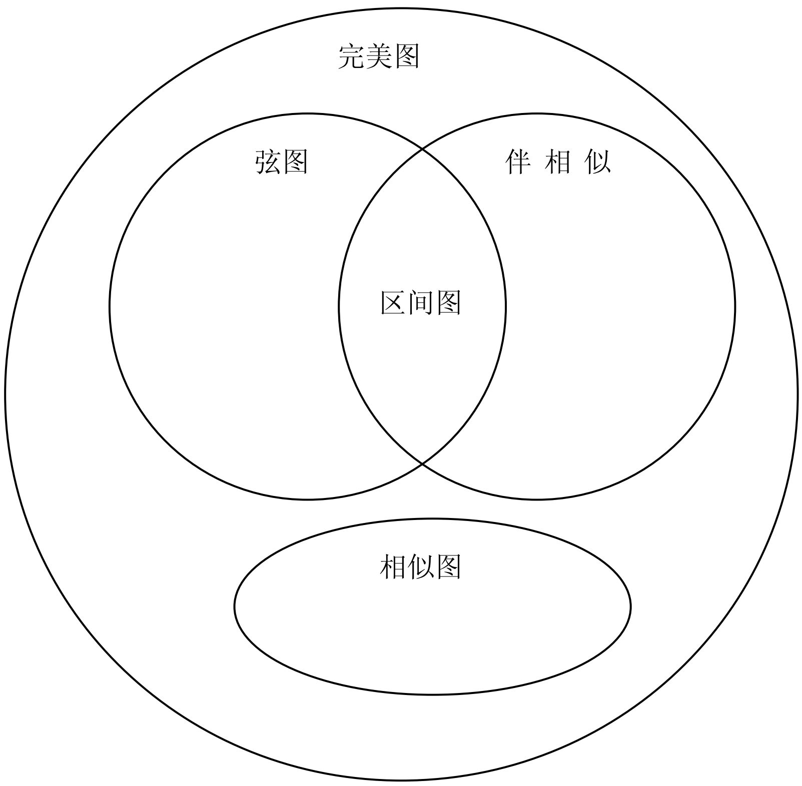
5．完美图

定义 1：一类图 C 具有遗传性质，如果 C 中的任意图的任意诱导子图都在 C 中。例如，区间图、弦图、相似图都具有遗传性质。

定义 2：一个图 G 是完美图，如果 W（G）＝X（G），且对于 G 的任意诱导子图 H，都有 W（H）＝X（H）。

由定义可知完美图具有遗传性质。另外，如果一类图 C 具有遗传性质，且 C 中的任意图 G 都有 W（G）＝X（G），那么 C 中的所有图都是完美图。这表明区间图、弦图、相似图都是完美图。

定义 5：一个图是伴完美图，如果有 I（G）＝K（G）（I 是独立数，K 是团覆盖数），且对于 G 的任意诱导子图 H，都有 I（H）＝K（H）。



注意对任意图 G，I（G）＝W（$\overline{G}$），且 K（G）＝X（$\overline{G}$），（将每个团中的元素染同一种颜色，不同的团染不同的颜色，则补图中同色的顶点不相邻，即 K

（G）≥X（$\overline{G}$）；又对于$\overline{G}$中的任意染色方法，染同一种颜色的顶点在 G 中必定是一个团，因此 X（$\overline{G}$）≥K（G））。

因此，图 G 是伴完美图的充要条件是$\overline{G}$是完美图。

【定理 1：（完美图定理）一个图是完美图，当且仅当它的补图是完美图。

这个定理的证明暂缺。☹】

于是我们得知：一个图是完美图，当且仅当它是伴完美图。一个推论是伴相似图是完美图。

图 3 总结了迄今为止我们所学的一些图的类型之间的关系。