# 信息学中守恒法的应用

两个质量相等的小球，速度分别为 5m/s, 4m/s ，他们相向运动，碰撞之后速度分别变成多少？

动能动量守恒

10g C 和 10g $O_2$ 在密闭容器中反应一个小时。最后的总质量是多少？

质量守恒

**变化中的不变量**

# 数列操作问题 (1)

问题描述：

有一个数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ 。每次可以从中任意选 3 个相邻的数 $a_{i-1}, a_i, a_{i+1}$ ，进行如下操作

$$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1}+a_i, -a_i, a_i+a_{i+1})$$

1 4 9 2 7 6

$\Downarrow$

4+9 -9 9+2

1 13 -9 11 7 6

# 数列操作问题 (2)

问题：给定初始和目标序列，请判断能不能通过以上定义的操作，从初始变到目标状态。

1 6 9 4 2 0

1 6 13 -4 6 0

1 6 13 2 -6 6

7 -6 19 2 -6 6

Input.txt

1 6 9 4 2 0

7 –6 19 2 –6 6

Output.txt

YES

# 数列操作问题 (3)

$$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1}+a_i, -a_i, a_i+a_{i+1})$$

5 9 2 → 14 -9 11

$S_1=5$

$S_2=14$

$S_3=16$

$S_1$ 和 $S_2$ 交换

$S_1=14$

$S_2=5$

$S_3=16$

# 数列操作问题 (4)

$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1}+a_i, -a_i, a_i+a_{i+1})$

$x \quad y \quad z \Rightarrow x+y \quad -y \quad y+z$

$S_1=x$ | S₁ 和 S₂ 交换 | $S_1=x+y$

$S_2=x+y$ | | $S_2=x$

$S_3=x+y+z$ | | $S_3=x+y+z$

# 数列操作问题 (5)

1 6 9 4 2 0

$S_1=1$

$S_2=7$

$S_3=16$

$S_4=20$

$S_5=22$

$S_6=22$

{1,7,16,20,22,22}

相等

7 -6 19 2 -6 6

$S_1=7$

$S_2=1$

$S_3=20$

$S_4=22$

$S_5=16$

$S_6=22$

{1,7,16,20,22,22}

# 数列操作问题 (6)

$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1}+a_i, -a_i, a_i+a_{i+1})$

$x \quad y \quad z \Rightarrow x+y \quad -y \quad y+z$

$S_1=x$

$S_2=x+y$

$S_3=x+y+z$

**对 $(a_{i-1},a_i,a_{i+1})$ 的操作，相当于交换 $S_{i-1}$, $S_i$**

$S_1=x+y$

$S_2=x$

$S_3=x+y+z$

# 数列操作问题 (7)

**对 $(a_{i-1},a_i,a_{i+1})$ 的操作，相当于交换 $S_{i-1}, S_i$**

- $S_n$ 不可能被交换，所以初始和目标序列的 $S_n$ 应该相等
- 集合 $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$ 始终不变
- 经过若干操作后，序列 $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ 发生顺序的改变
- 反之，如果两个 $\{S_i\}$ 和 $\{S'_i\}(1<=i<=n-1)$ 完全相等，只是顺序不同。他们必然可以通过一系列操作互相转化 ( 前提是 $S_n$ 要相等 )

# 数列操作问题 (8)

- 输入数列 {Ai}, {Bi}
- 求出 $\{SA_i\}\{SB_i\}$
- 把 $SA_n$ 和 $SB_n$ 比较；再把 $\{SA_i\}\{SB_i\}$ （ 1<=i<=n-1 ）分别排序，然后直接比较。
- 如果都相等输出“ YES”，否则“ NO”
- 时间复杂度 O(nlogn) （排序复杂度）

小结：

数列变换的过程中，数字杂乱无章，没什么规律。

但是他们的和是有规律的。

抓住变化中的不变量，一切都变得很轻松。

# 棋子移动 (1)

问题描述：

- 有一列无限长的格子里面。某些格子里面放了棋子
- 如果某个格子里面有棋子，可以拿走这一颗，并且在这个格子的左边两个格子里面各放一颗。

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | | | 6 | | | 3 | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 1 | 5 | | | 3 | | | |

# 棋子移动 (2)

问题描述：

• 如果连续两个格子里面都有棋子，可以分别在两个格子里面各拿走一颗，并且在它们右边的格子里面放一颗。

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 1 | 5 | | | 3 | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | | | 6 | | | 3 | | | |

# 棋子移动 (3)

问题：

给定初始状态，要求用以上操作，使得：

•每个格子里面至多只有 1 个棋子（或者没有）。

•没有相邻的两个格子都有棋子。

简单的说：就是无法继续操作！

# 棋子移动 (4)

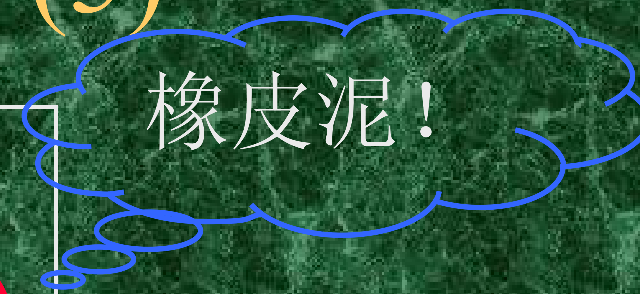
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | | 2 | | | 1 | | | |

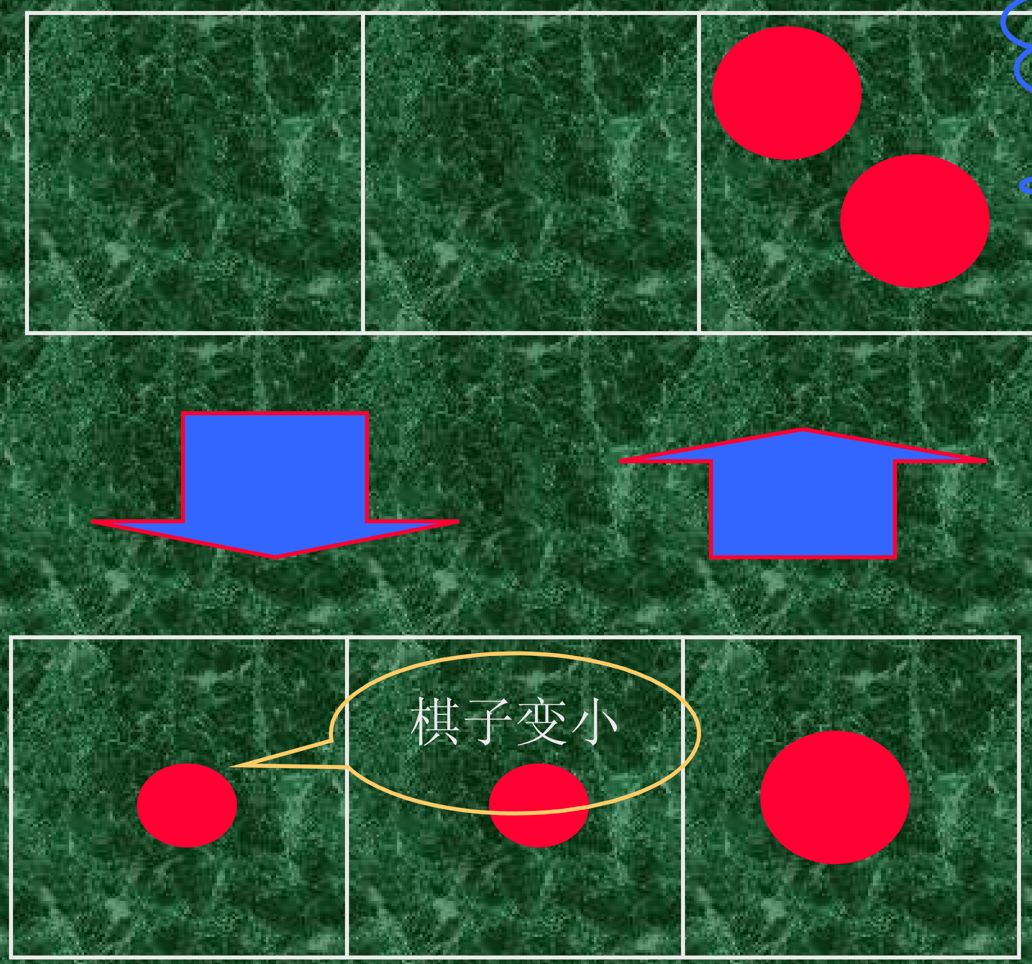
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | 1 | | 1 | | | |

# 棋子移动 (5)




Wi 第 i 个格子中橡皮泥的大小

$$W_i=W_{i-1}+W_{i-2}$$

# 棋子移动 (6)

Fibonacci 数列

$$W_i = W_{i-1} + W_{i-2}$$

| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | | 2 | | | 1 | | |

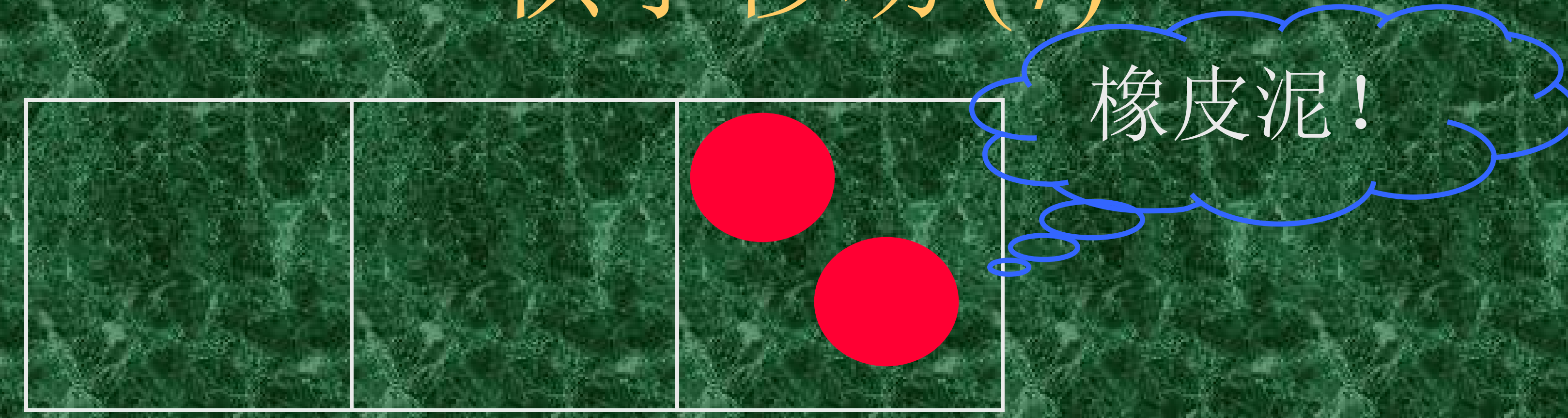
2*1+8*2+34*1=**52**

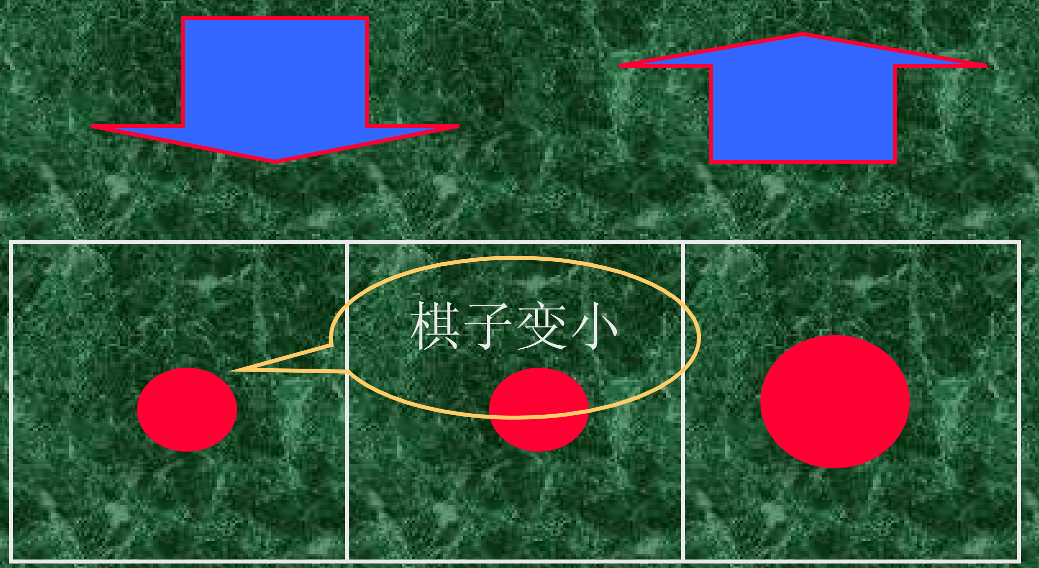
相等

| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | 1 | | 1 | | |

5*1+13*2+34*1=**52**

# 棋子移动 (7)




操作的过程中

橡皮泥的总量是保持

**不变**的。

# 棋子移动 (8)

| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  | 1 |  |  | 2 |  |  | 1 |  |  |

| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  |  |

$2*1+8*2+34*1=\mathbf{52}$

$52-34=\mathbf{18}$

$18-13=\mathbf{5}$

$5-5=\mathbf{0}$

# 棋子移动 (9)

- 棋子移动的过程纷繁复杂，也没什么规律可寻。
- 我们通过发现**“橡皮泥质量守恒”**，把复杂的移动规则，变成了简单的数字加减。
- “ 橡皮泥质量”就是变化中的不变量

还有一些细节：

高精度，解的存在性的证明，解的唯一性的证明。

格子有无穷多个，到底从什么地方开始标“质量”？

这些大家可以自己研究。这里只想揭示最本质的东西：守恒。

# 总结

- 问题往往纷繁复杂，直接分析困难重重
- 变化中往往存在一些不变量
- 不变量或者明显，或者隐藏在幕后
- 牢牢抓住不变量守恒，就能透过迷雾看到本质！

# 总结

给我一双慧眼吧！

信息学中最重要的慧眼，就是：

**“守恒”！**