伸展树的
基本操作与应用

芜湖一中　杨思雨

引言

- 二叉查找树 (Binary Search Tree) 可以被用来表示有序集合、建立索引或优先队列等。
- 最坏情况下，作用于二叉查找树上的基本操作的时间复杂度，可能达到 O(n) 。
- 某些二叉查找树的变形，基本操作在最坏情况下性能依然很好，如红黑树、AVL 树等。

伸展树

- 伸展树 (Splay Tree) 是二叉查找树的改进。
- 对伸展树的操作的平摊复杂度是 $O(\log_2 n)$ 。
- 伸展树的空间要求、编程难度非常低。

伸展树

- 伸展树与二叉查找树一样，也具有有序性。
  即伸展树中的每一个节点 x 都满足：该节点左子树中的每一个元素都小于 x，而其右子树中的每一个元素都大于 x 。

- 伸展树可以自我调整，这就要依靠

伸展操作Splay(x,S)

伸展操作 Splay(x,S)

- 伸展操作 Splay(x,S) 是在保持伸展树有序性的前提下，通过一系列旋转操作将伸展树 S 中的元素 x 调整至树的根部的操作。

- 在旋转的过程中，要分三种情况分别处理：

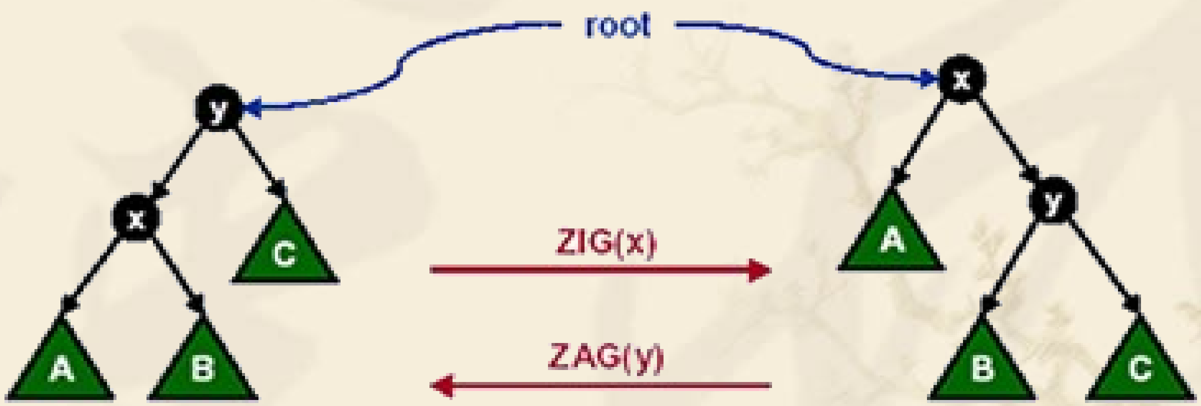
  1)Zig 或 Zag

  2)Zig-Zig 或 Zag-Zag

  3)Zig-Zag 或 Zag-Zig

伸展操作 Splay(x,S) 情况 1

- Zig 或 Zag 操作：
  节点 x 的父节点 y 是根节点。



伸展操作 Splay(x,S) 情况 2

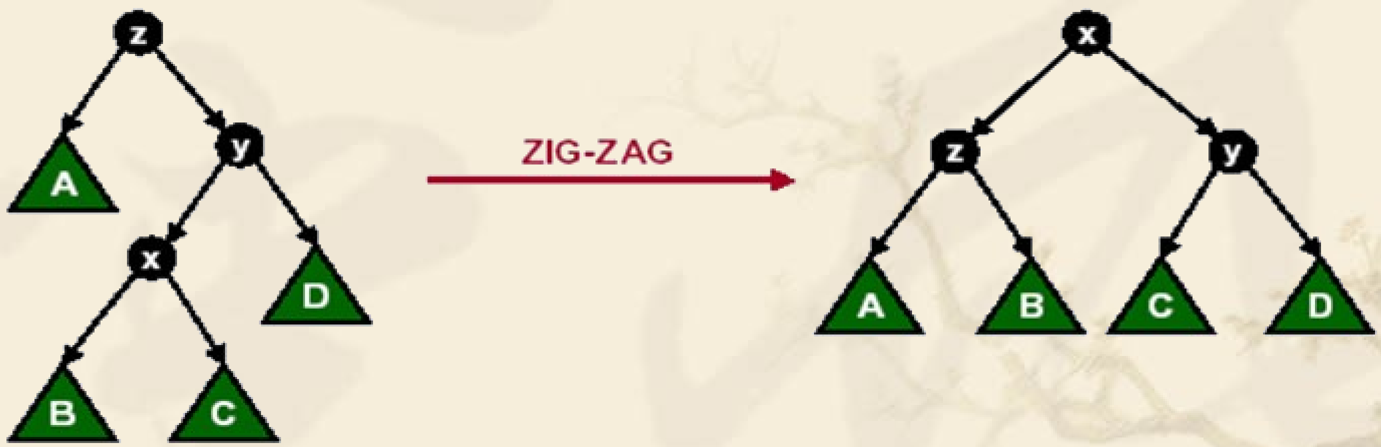
- Zig-Zig 或 Zag-Zag 操作：

  节点 x 的父节点 y 不是根节点，且 x 与 y 同时是各自父节点的左孩子或者同时是各自父节点的右孩子。

伸展操作 Splay(x,S) 情况 3

- Zig-Zag 或 Zag-Zig 操作：

  节点 x 的父节点 y 不是根节点， x 与 y 中一个是其父节点的左孩子而另一个是其父节点的右孩子。



伸展操作举例

Splay(1,S)

伸展树的基本操作

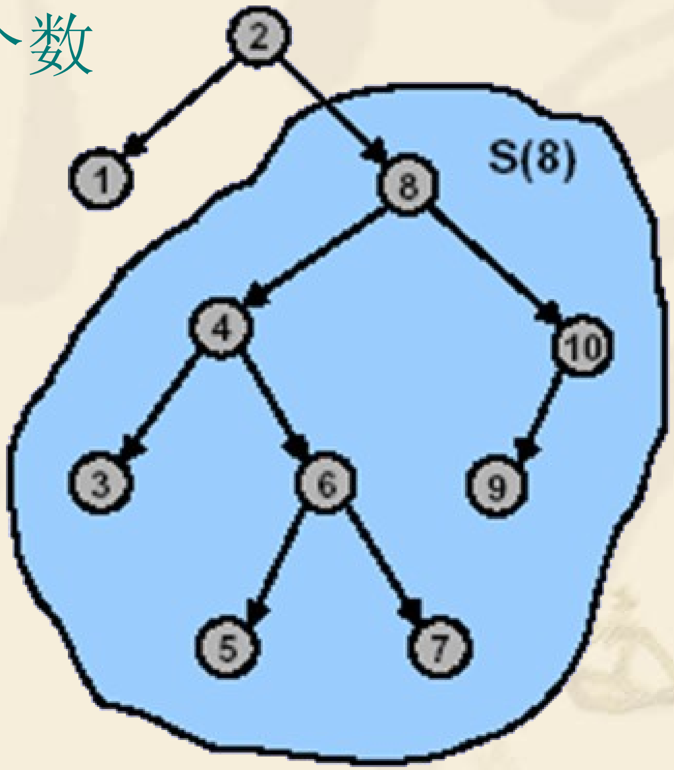
- 查找
- 插入
- 删除
- 求最大值
- 求最小值
- 求前趋
- 求后继
- 合并
- 分离

伸展操作是基础！

时间复杂度分析

- S(x) 表示以 x 为根的子树
- |S| 表示树 S 的节点个数
- 令 $\mu(S) = [\ \log_2|S|\ ]$

  ([ ] 表示取下整)
- $\mu(x)=\mu(S(x))$



$|S| = 10$
$\mu(2) = 3$
$\mu(8) = 3$
$\mu(4) = 2$
$\mu(6) = 1$
$\mu(5) = 0$

时间复杂度分析

集　　点的和
旋

- 用 1 元钱表示一个单位时间代价。
- 伸展树不变量：在任意时刻，伸展树中的任意节点 x 都至少有 $\mu(x)$ 元的存款。

时间复杂度分析

- 在 Splay 调整过程中，费用将会用在以下两个方面：

  (1) 为使用的时间付费。也就是每一次单位时间的操作，要支付 1 元钱。

  (2) 当伸展树的形状调整时，需要加入一些钱或者重新分配原来树中每个节点的存款，以保持不变量继续成立。

时间复杂度分析

- 用 μ(x) 和 μ'(x) 分别表示在进行一次旋转操作前后节点 x 处的存款。

- 分三种情况分析旋转操作的花费：

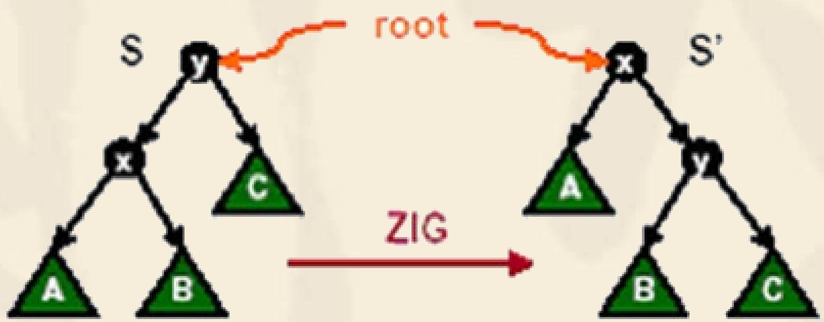
  (1)Zig 或 Zag

  (2)Zig-Zig 或 Zag-Zag

  (3)Zig-Zag 或 Zag-Zig

时间复杂度分析 情况 1

- Zig 或 Zag



- 为了保持伸展树不变量继续成立，需要花费：

$$
\begin{aligned}
\mu'(x)+\mu'(y)-\mu(x)-\mu(y) &= \mu'(y)-\mu(x) \\
&\le \mu'(x)-\mu(x) \\
&\le 3(\mu'(x)-\mu(x)) \\
&= 3(\mu(S)-\mu(x))
\end{aligned}
$$

$\mu(y) = \mu'(x)$

$\mu'(x) = \mu(S)$

此外我们花费另外 1 元钱用来支付访问、旋转的基本操作。所以，一次 Zig 或 Zag 操作的花费至多为 3(μ(S)-μ(x))+1

时间复杂度分析 情况 2

- Zig-Zig 或 Zag-Zag

- 为了保持不变量，需要花费：

$$
\begin{aligned}
\mu'(x)+\mu'(y)+\mu'(z)-\mu(x)-\mu(y)-\mu(z) &= \mu'(y)+\mu'(z)-\mu(x)-\mu(y) \\
&= (\mu'(y)-\mu(x))+(\mu'(z)-\mu(y)) \\
&\le (\mu'(x)-\mu(x))+(\mu'(x)-\mu(x)) \\
&= 2(\mu'(x)-\mu(x))
\end{aligned}
$$

与情况 1 一样，也需要花费另外的 1 元钱来支付单位时间的操作。

时间复杂度分析 情况 2

- Zig-Zig 或 Zag-Zag

- 当 $\mu'(x) < \mu(x)$ 时，显然 $2(\mu'(x) - \mu(x)) + 1 \le 3(\mu'(x) - \mu(x))$

  也就是进行 Zig-Zig 操作的花费不超过 $3(\mu'(x) - \mu(x))$
- 当 $\mu'(x) = \mu(x)$ 时，可以证明：

  $\mu'(x) + \mu'(y) + \mu'(z) < \mu(x) + \mu(y) + \mu(z)$

  也就是说我们不需要任何花费保持伸展树不变量，并且可以得到退回来的钱，并用其中的 1 元支付单位操作的费用。

- 一次 Zig-Zig 或 Zag-Zag 的花费至多为 $3(\mu'(x) - \mu(x))$

时间复杂度分析 情况 3

- Zig-Zag 或 Zag-Zig

  与情况 2 相似，可以证明

  一次 Zig-Zag 或 Zag-Zig 操作的花费至多为 3 (μ’(x) -μ (x))

时间复杂度分析

Zig	$3(\mu(S)-\mu(x))+1$
Zig-Zig	$3(\mu'(x)-\mu(x))$
Zig-Zag	$3(\mu'(x)-\mu(x))$
⋮	⋮
+	+
基本操作	$3(\mu(S)-\mu(x))+1$
Splay(x,S)	$O(\log_2 n)$

伸展树的应用　　例题描述

- 营业额统计 Turnover (HNTSC-02)

分析公司的营业情况是一项相当复杂的工作。经济管理学上定义了一种最小波动值来衡量营业情况：
每天的最小波动值 = min { | 该天以前某一天的营业额 - 该天的营业额 | }
第一天的最小波动值为第一天的营业额。

现在给出公司成立以来每天的营业额，编写一个程序计算公司成立以来每天的最小波动值的总和。
数据范围：天数 $n \le 32767$，每天的营业额 $ai \le 1{,}000{,}000$。
最后结果 $T \le 2^{31}$。

伸展树的应用　初步分析

- 本题的关键是要每次读入一个数，并且在前面输入的数中找到一个与该数相差最小的一个。

- 每次顺序查找前面输入的数，找出最小差值
  时间复杂度 $O(n^2)$

- 用线段树记录输入的数
  空间要求很大

- 红黑树或平衡二叉树
  编程太复杂，调试不方便

伸展树的应用　　算法描述

- 这题中，涉及到对于有序集的三种操作：
  插入、求前趋、求后继

❖ 每次读入一个数 p，将 p 插入伸展树 S， 同时 p 也被调整到伸展树的根节点。

❖ 求出 p 点左子树中的最大值和右子树中的最小值，这两个数就分别是有序集中 p 的前趋和后继。

❖ 进而求得最小差值，加入最后结果 T 。

伸展树的应用　解题小结

- 使用伸展树算法解决本题，时间复杂度为 $O(n\log_2 n)$，空间要求不大，编程和调试也都非常容易。

下面的表格对几种算法做出了比较：

	捸	段	AVL	伸展
度	$O(n^2)$	$O(n\log_2 a)$	$O(n\log_2 n)$	$O(n\log_2 n)$
空度	$O(n)$	$O(a)$	$O(n)$	$O(n)$
程度	很			

总结

- 伸展树有以下三个优点：

1) 时间复杂度低，伸展树的各种基本操作的平摊复杂度都是 $O(\log_2 n)$ 的。

2) 空间要求不高，伸展树不需要记录任何信息以保持树的平衡。

3) 算法简单。编程容易，调试方便。

总结

- 在信息学竞赛中，我们不能一味的追求算法有很高的时间效率，而应该合理的选择算法，找到时间复杂度、空间复杂度、编程复杂度三者之间的 平衡点

Thank you all!

谢谢