浅谈数形结合思想在信息学竞赛中的应用

安徽 周源

引子

- 数与形是数学中两个最古老而又最基本的对象
- 数形结合又是一种重要的数学思想
- 在算法和程序设计中，巧妙地运用数形结合思想，可以顺利的破解问题，化难为易，找到问题的解题思路。

- 数形结合思想常包括以下几个方面：
- 以形助数
  - [例一]Raney 的证明
  - [例二] 最大平均值问题
- 以数助形
  - [例三] 画室

安徽　周源

以形助数

数？？

opt(N)=max{…}

形！！

直线、圆……

f(i)=f(i-1)+f(i-2)

转化

- 繁杂代数关系后常隐藏着丰富的几何背景
- 借助背景图形的性质，可以使原本复杂的数量关系和抽象的概念显得直观，从而找到设计算法的捷径。

[例二] 最大平均值问题 (USACO)

- 读入一列正数， $a_1, a_2, \ldots, a_N$，以及数 F
  - 求一段长度大于等于 F 且平均值最大的子串

- 定义若 $i \le j$， $ave(i, j) = (a_i + \ldots + a_j) / (j-i+1)$
- 目标： $Max\{ave(a, b) \mid a \le b-F+1\}$
- 范围： $F \le N \le 100\ 000$

- 例如 N=4 的序列中， F=2
  - 2, 5, 2, 5
  - ave(2, 4) = (5 + 2 + 5) / 3 = 4 最大

初步分析

- $O(N^2)$ 算法
- 枚举一个 b ：称为检查点
  - 枚举符合条件 a ：称为被检查点，检查集合
  - 条件即为 $a \le b\text{-}F+1$
  - 同时检查 ave(a, b)

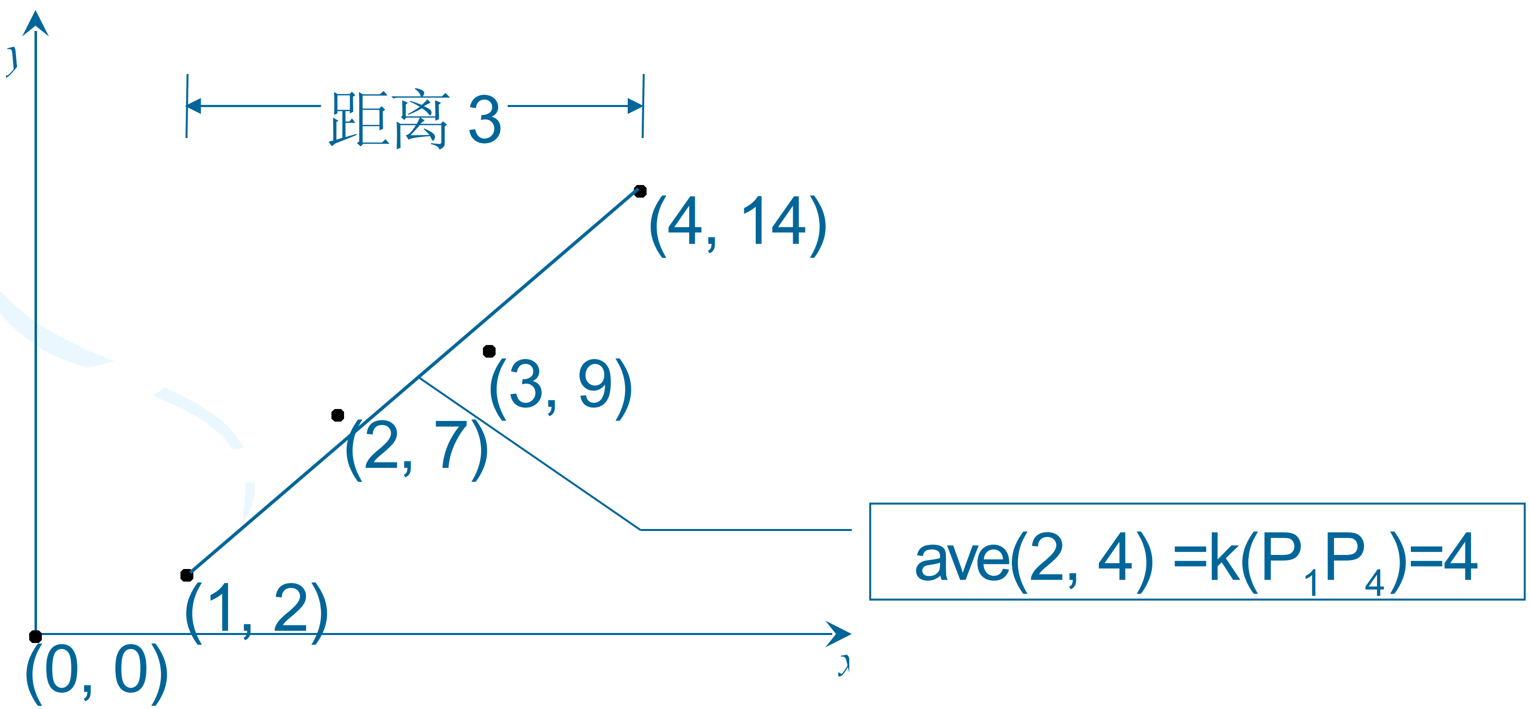
目标图形化

- 设部分和序列 S_i 为 $\{a_i\}$ 前 i 项和，$S_0=0$
- $ave(i, j) = [S_j - S_{i-1}] / [j - (i-1)]$
- 过两点的直线：$P_{i-1}(i-1, S_{i-1})$，$P_j(j, S_j)$

- 问题转化：
- 平面上已知 $N+1$ 个点，$P_i(i, S_i)$，$0 \le i \le N$
- 求横向距离大于等于 F 的两点连线的最大斜率

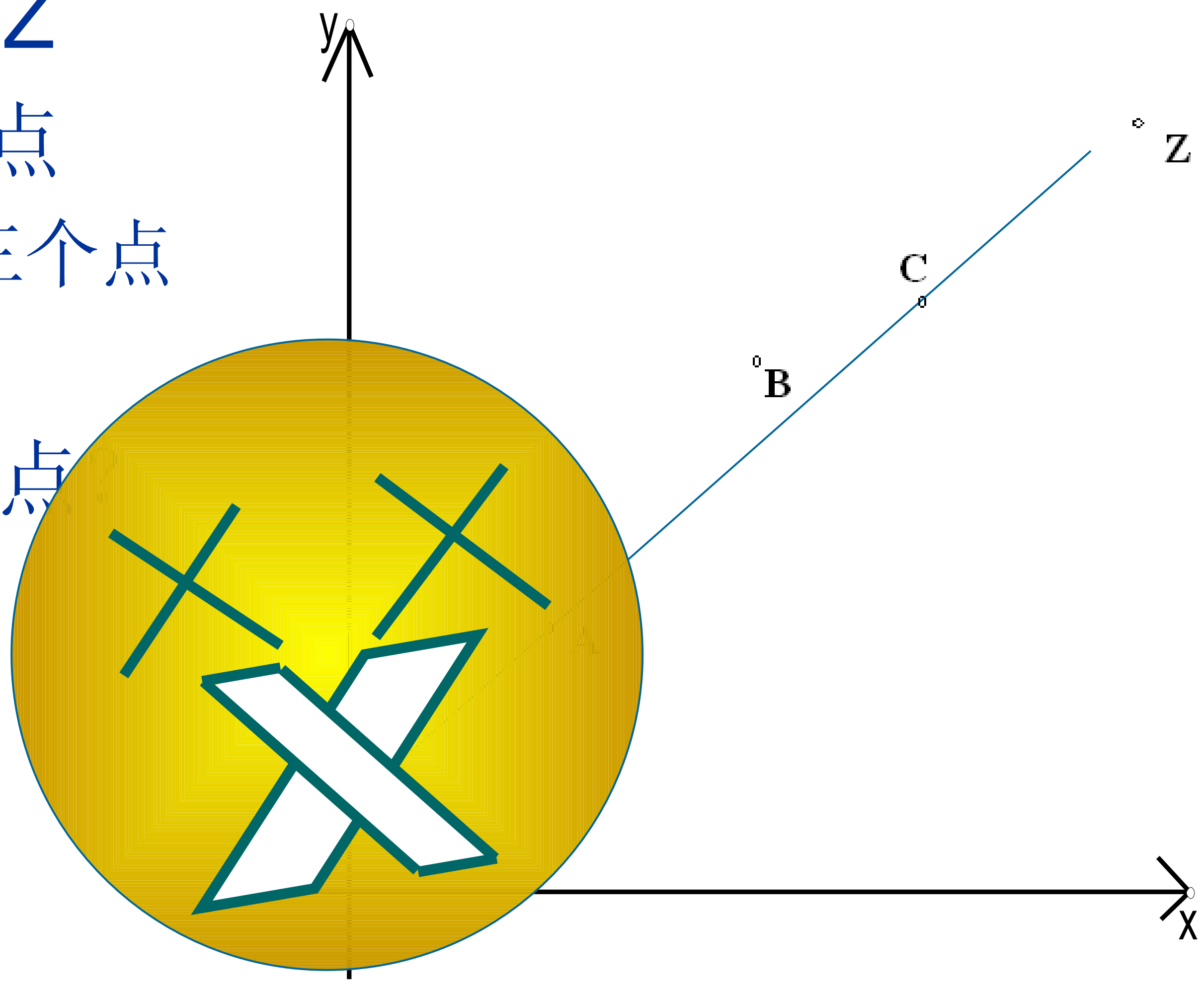
目标图形化

- 数列 $\{a_i\}=(2, 5, 2, 5)$， F=2
- 部分和 $\{S_i\}=(0, 2, 7, 9, 14)$



构造下凸折线

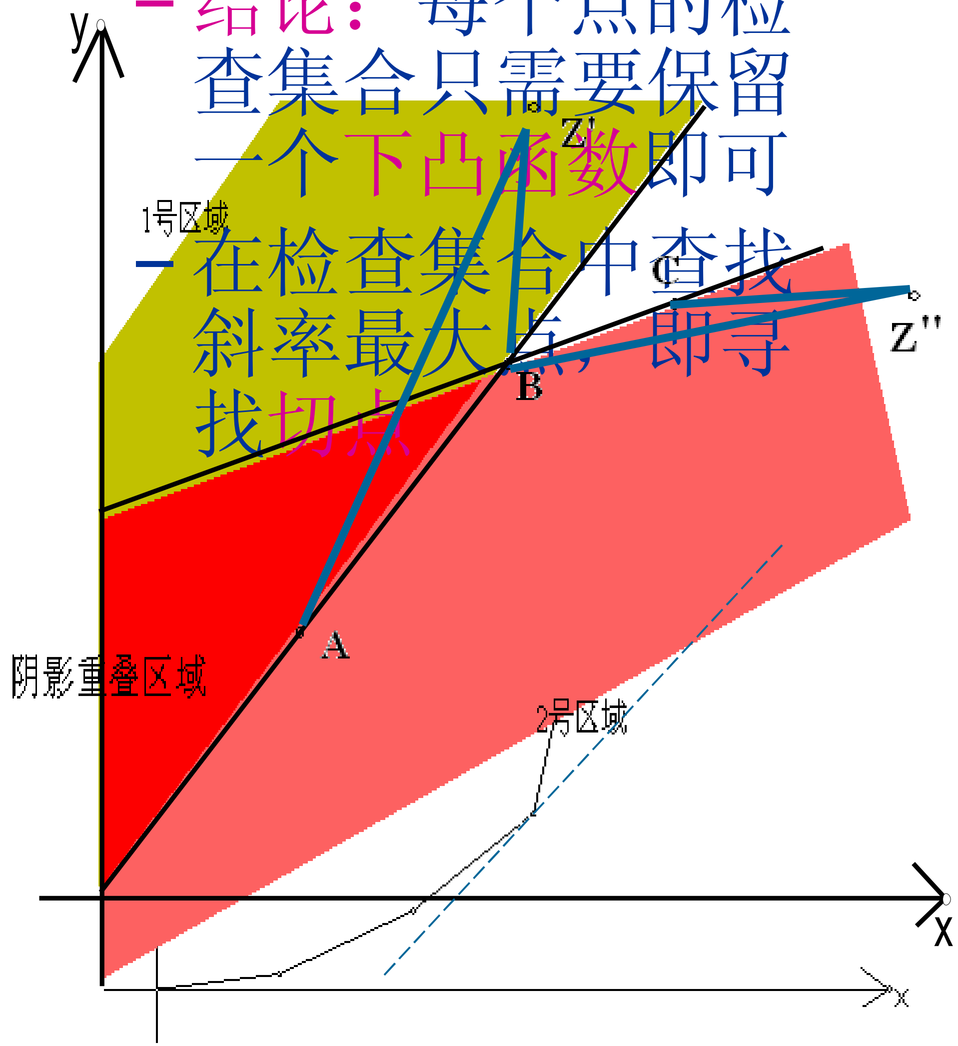
- 考察检查点 Z
- 三个被检查点
  - 从左到右三个点
  - A, B, C
- 若 B 是上凸点



构造下凸折线

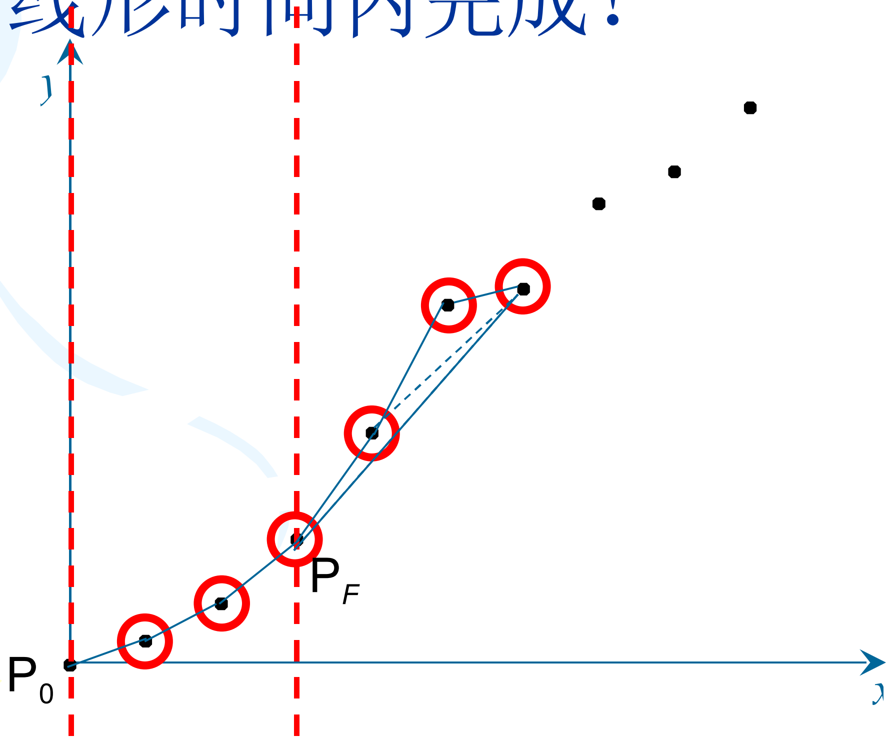
- 若 B 不多余
  - **k(BZ)** 有可能最大
- 若 k(BZ) 大于 k(AZ)
  - **Z** 在 **1** 号区域
- 若 k(BZ) 大于 k(CZ)
  - **Z** 在 **2** 号区域
- 若 k(BZ) 最大
  - **Z** 在阴影重叠区域！
- 与 B 在 Z 左方矛盾

- 结论：每个点的检查集合只需要保留一个下凸函数即可
- 在检查集合中查找斜率最大点，即寻找切点



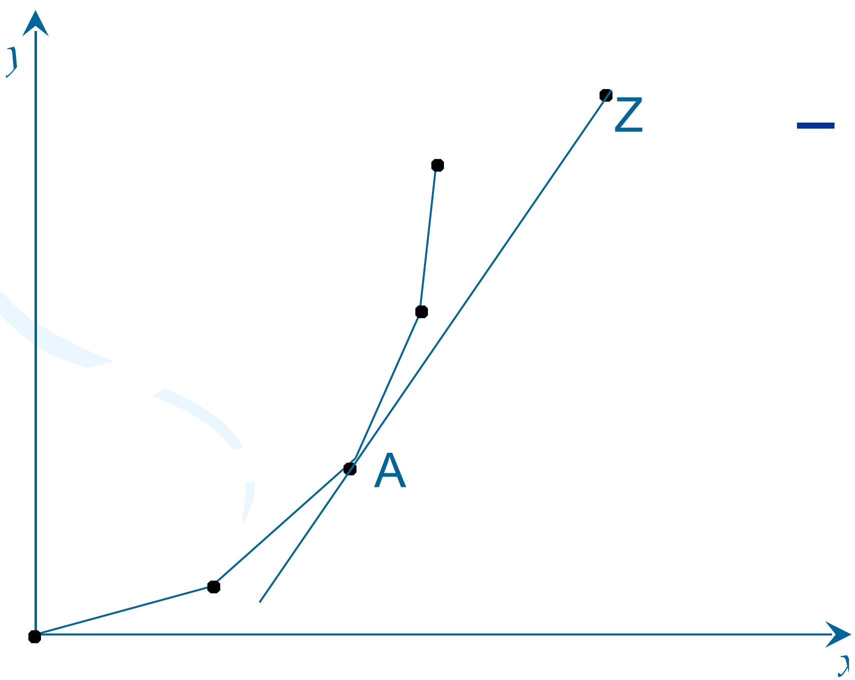
维护下凸折线

- 目标：得到每一个检查集合的下凸折线
- 类似于求凸包过程
- 线形时间内完成！



最后的优化：利用单调性

- 每次如何寻找切线？
- 二分法：$O(\log_2 N)$
- 利用折线斜率单调性： O(1)
  - 更快，更简单
  - 请同学们自行思考



安徽　周源

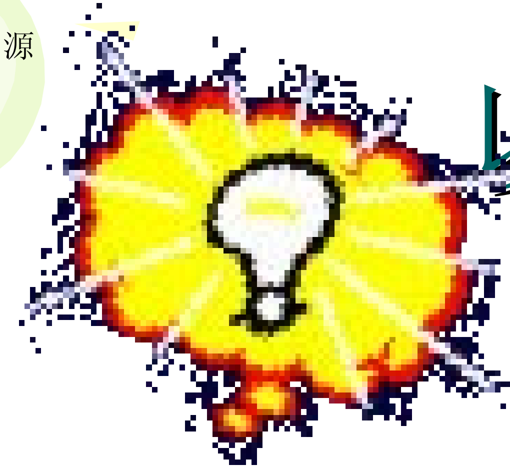
[例二] 最大平均值问题 (USACO)

– 小结

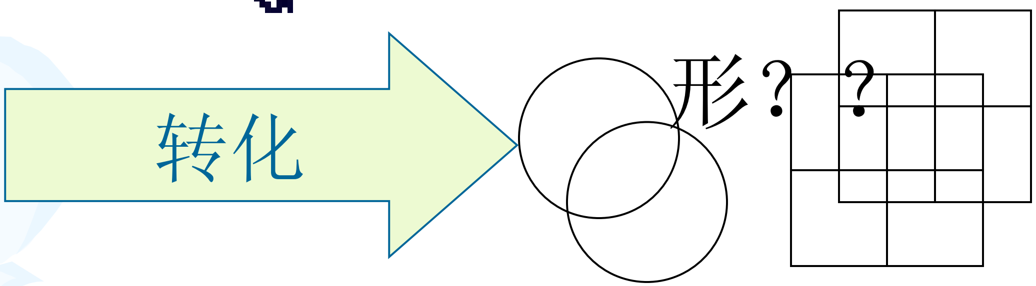
- 一开始就确立了以平面几何为思考工具的正确路线
- 重要结论：检查集合中有用的点构成一个下凸函数
- 类似于计算几何中求凸包的方法维护一个下凸折线
- 利用下凸函数斜率单调性得到找切线的简单方法

- 围绕平面几何为中心，以斜率为主线
- 整个解题过程一气呵成
- 避免了令人头晕的代数式变换
- 堪称以形助数的经典例题。

安徽 周源



以数助形



数！！

$x^2+y^2=1$

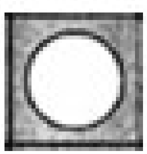
$(10101)_2$……

- 一些试题给出的描述中图形极为复杂，容易使选手陷入“迷魂阵”
- 以数助形，一举抓住其本质特征，不失为解题的一种好方法。

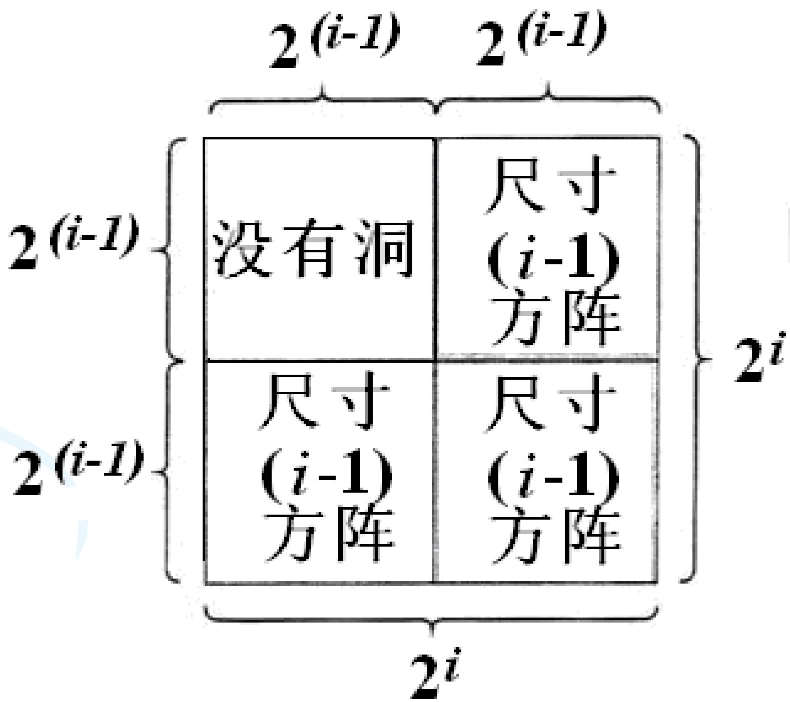
安徽 周源

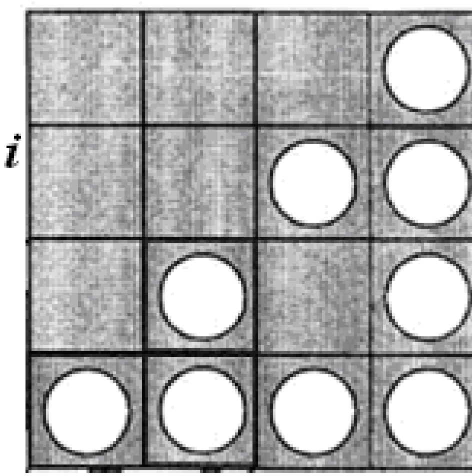
[例三]画室 (POI oi V Stage I)

- 定义尺寸为 0 的方阵为一个 1*1 的矩阵，在其唯一的一个方格中有一个小孔。
- 对于 *i*>0，递归的定义尺寸为 *i* 的方阵：



尺寸为0的方阵



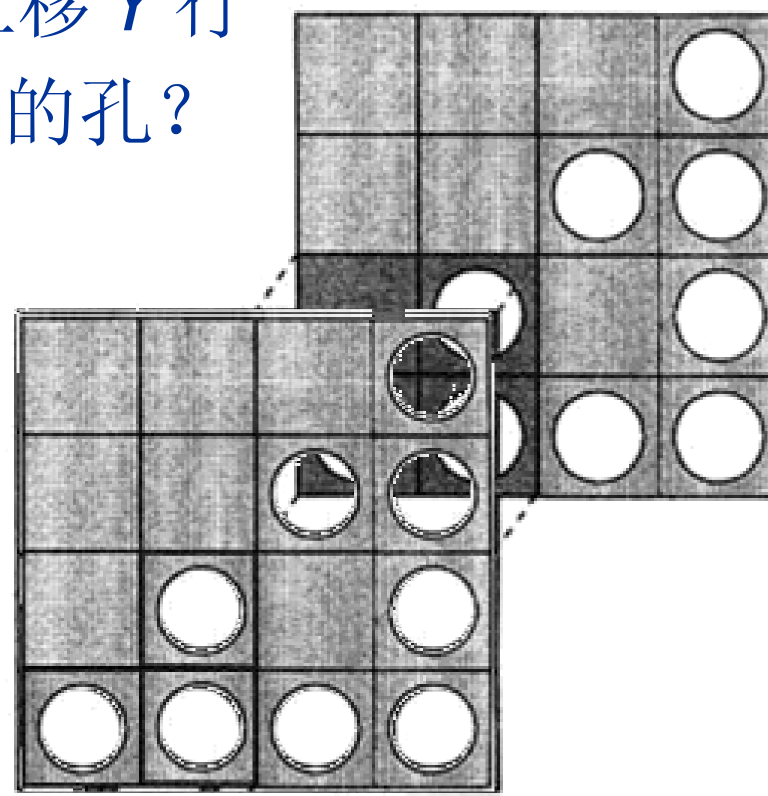


尺寸为2的方阵

安徽　周源

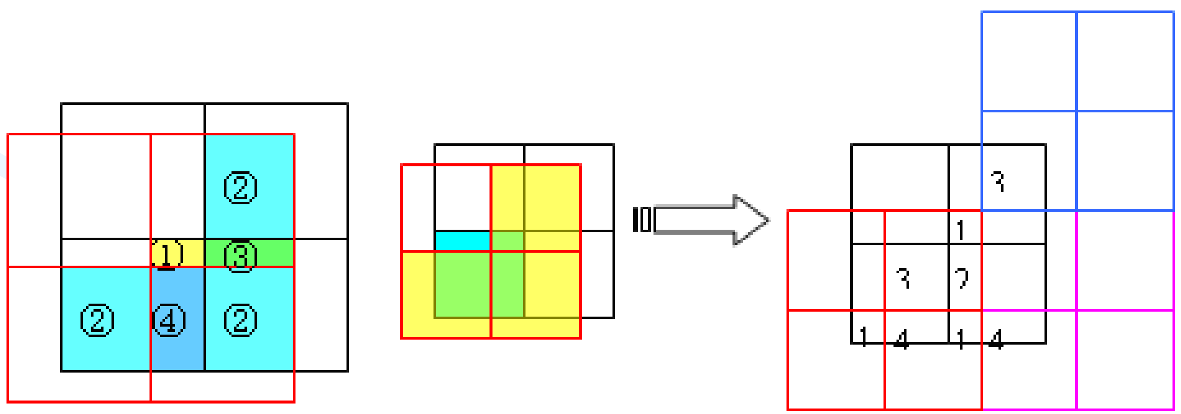
[例三]画室 (POI oi V Stage I)

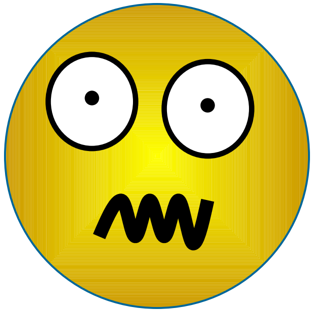
- 已知尺寸 N，和两个参数 X 和 Y
- 准备两个尺寸为 N 的方阵叠放在一起
- 上面的方阵右移 X 列，上移 Y 行
- 求两个方阵有多少个公共的孔?
- 如 $N=2, X=2, Y=2$
- 有 3 个公共孔



初步分析

- 直接分析两个方阵相交后的情况是可行的
- 集训队前辈解题报告的一个附图
- 结论：“形”的路子很坎坷





目标数值化

- 将行列按图示方法从 **0** 开始编号
- 每个方格都有唯一坐标 P(*x*, *y*)
- P(*x*, *y*) 内有小孔　？

(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)

列：0　1　2　3

行：0　1　2　3

尺寸为2的方阵

目标数值化

- 将 x, y 化为二进制
  - $a_1a_2a_3 \dots a_N$ 和 $b_1b_2b_3 \dots b_N$
- 考察 a_1 和 b_1 对方格位置的影响
  - **$a_1=0$ 且 $b_1=1$ 时方格内必无孔！**
- 方格的有孔性质
  - 当且仅当不存在 $1 \le i \le N$
  - 满足 $a_i=0$ 且 $b_i=1$ 时
  - 方格 P 内有小孔。

(0, 1)	(0, 1)
(1, 0)	(1, 1)

(a_1, b_1) 分布图

动态规划解题

简单的动态规划算法！

- 题目即求满足下列条件的方格 P(*x*, *y*) 个数
  - $0 \le x, y$，$x+X, y+Y \le 2^N-1$
  - (*x*, *y*)，(*x*+*X*, *y*+*Y*) 都满足有孔性质
- 算法简述
  - 以位数为阶段
  - 通过记录 *x*+*X* 和 *y*+*Y* 进位情况保证无后效性
  - 时间复杂度：O(*N*)
  - 空间复杂度：O(1)

安徽　周源

［例三］画室 (POI oi V Stage I)

- 小结
  - “形”：情况复杂，不宜讨论
  - “数”：方格的有孔性质和有公共孔性质
  - 更简单的解题
- 面对复杂的图形
- 化形归数
- 往往是抓住题目要害的好方法

总结

客 事物

抽象

数学

数　　　　形

数形 合思想

总结

本质化工具

数 ⟺ 互相转化 ⟺ 形

形象化工具

辩证矛盾关系

多元性

个体差异性

数形 合思想

以数助形

［例三］画室

解法不唯一

但是较好的

感觉不同

不同的人对难度

以形助数

［例二］最大平均值问题

一定程度上

唯一的解法

总结

数 形 辩证矛盾关系

多元性

数形 合 思想

个体差异性

将抽象的数学、计算机语言与直观的图形结合起来

将抽象思维与形象思维结合起来

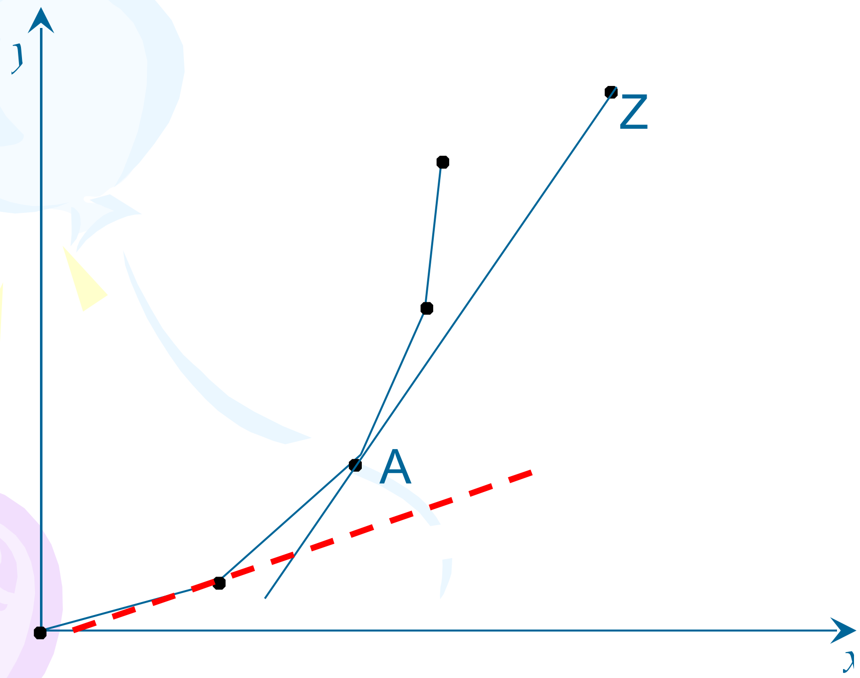
实现抽象概念与具体形象的联系和转化

更快更好更 的解

谢谢大家

Thanks

[例二] 关于找切线的方法



- 利用折线斜率单调性：
- 若已知一条切线 ZA
- A 左方点可删去
- 平摊复杂度 O(1)
- 实现方法
  - 设一个不回溯指针