# 浅析“最小表示法”思想在字符串循环同构问题中的应用

安徽省芜湖市第一中学
周　源

# 前言

“最小表示法”比起动态规划、贪心等思想，在当今竞赛中似乎并不是很常见。但是在解决判断“同构”一类问题中却起着重要的作用。

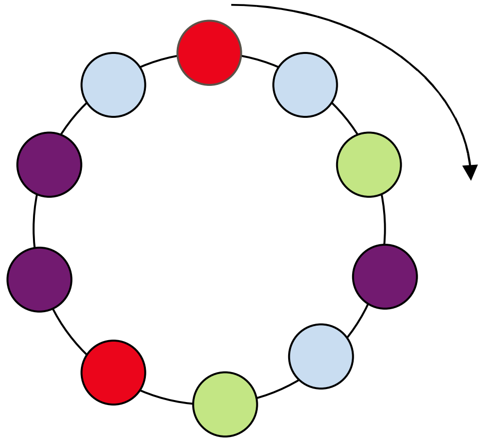
本文即将讨论字符串中的同构问题，如何巧妙地运用最小表示法来解题呢，让我们继续一起思考吧。

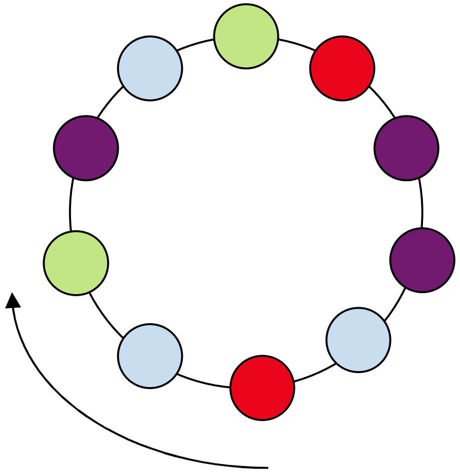
# 问题引入

有两条环状的项链，每条项链上各有 N 个多种颜色的珍珠，相同颜色的珍珠，被视为相同

问题：判断两条项链是否相同。

简单分析：由于项链是环状的，因此循环以后的项链被视为相同的，如图的两条项链就是一样的。





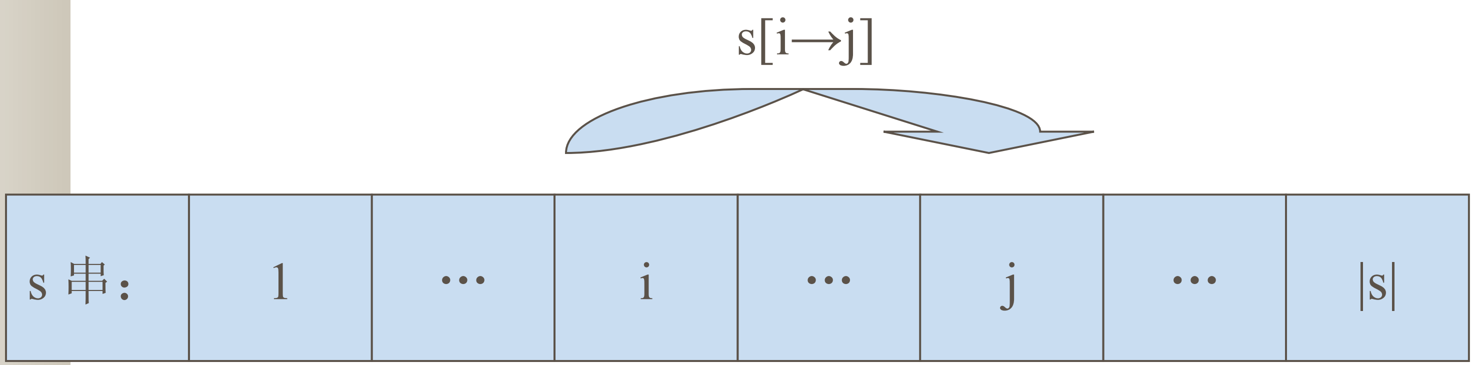
# 明确几个记号和概念

(1). $|s|$=length(s)，即 s 的长度。

(2). s[i] 为 s 的第 i 个字符。

(3). $s[i \to j]$=copy(s, i, j-i+1) 。

这里 $1 \leq i \leq j \leq |s|$ 。



# 明确几个记号和概念

(4)．定义 s 的一次循环 $s^{(1)}=s[2\rightarrow|s|]+s[1]$；

$s$ 的 $k$ 次循环 $(k>1)$ $s^{(k)}$ 为 $s^{(k-1)}$ 的一次循环；

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s 串： | 1 | 2… | i | … | j | … | \|s\| |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S^{(1)}$ 串： | 2… | i | … | j | … | \|s\| | 1 |

# 明确几个记号和概念

(5)．如果字符串 s1 可以经过有限次循环得到 s2，则称 s1 和 s2 是循环同构的。例如：

s1=‘a　b　c　d’

↓ 一次循环

‘b　c　d　a’

↓ 一次循环

s2=‘c　d　a　b’

s1 和 s2 是循环同构的！

# 明确几个记号和概念

(6). 设有两个映射 $f_1$， $f_2$:A→A，定义 $f_1$ 和 $f_2$ 的连接 $f_1 \cdot f_2(x)=f_1(f_2(x))$。

# 问题的数学语言表达形式

给定两个长度相等的字符串，$|s1|=|s2|$，

判断它们是否是循环同构的。

# 枚举算法

易知， s1 的不同的循环串最多只有 |s1| 个，

即 $s1, s1^{(1)}, s1^{(2)}, \cdots s1^{(|s1|-1)}$，

所以只需要把他们一一枚举，

然后分别与 s2 比较即可。

# 枚举算法

**Time Limit Exceeded!**

优点：思维简单，易于实现。

时间复杂度是 $O(N^2)$ 级（ $N=|s1|=|s2|$ ）。

如果 N 大一些，几十万，几百万……

# 构造新的算法

首先构造新的模型：
S=s1+s1 为主串， s2 为模式串。
如果 s1 和 s2 是循环同构的，
那么 s2 就一定可以在 S 中找到匹配！

# 匹配算法：理论的下界

在 S 中寻找 s2 的匹配是有很多 O(N) 级的算法的。

本题最优算法的时空复杂度均为 O(N) 级。

这已经是理论的下界了。

# 小结：枚举和匹配算法

很容易得到的枚举算法显然不能满足大数据的要求，
于是我们从算法的执行过程入手，
探查到了枚举算法的实质：模式匹配。

最后，通过巧妙的构造、转换模型，
直接套用模式匹配算法，得到了 O(N) 级的算法
。

# 探索新的算法

但是问题是否已经完美解决了呢？

## KMP 算法的缺点：

难理解，难记忆；

可扩展性不强。

# [ 引例 ]

有两列数 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 和 $b_1, b_2 \cdots b_n$ ，不记顺序，判断它们是否相同。

相同的两列数

$\{a_n\}$： 4 2 6 3

$\{b_n\}$： 6 2 3 4

# [ 分析 ]

由于题目要求“不记顺序”，因此每一列数的不同形式高达 n！种之多！

如果要一一枚举，显然是不科学的。

如果两列数是相同的，那么将它们排序之后得到的数列一定也是相同的。

$\{a_n\}$ ： 4 2 6　　排序后　　$\{a_n\}$ ： 2 3 4

$\{b_n\}$ ：3 6 2 3　　　　　　　$\{b_n\}$ ：6 2 3 4

4　　　　　　　　　　　　　　6

相同

# 小结：引例

这道题虽然简单，却给了我们一个重要的启示：当某两个对象有多种表达形式，且需要判断它们在某种变化规则下是否能够达到一个相同的形式时，可以将它们都按一定规则变化成其所有表达形式中的最小者，然后只需要比较两个“最小者”是否相等即可！

# 定义：“最小表示法”

设有事物集合 $T=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$，

映射集合 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$。

任意 $f \in F$ 均为 T 到 T 的映射，$f_i: T \rightarrow T$。

如果两个事物 $s,t \in T$，

有一系列 F 的映射的连接 $f_{i1} \bullet f_{i2} \bullet \ldots \bullet f_{ik}(s)=t$，

则说 s 和 t 是 F 本质相同的。

# 定义：“最小表示法”

其中 F 满足两个条件：

(1)．任意 t∈T，一定能在 F 中一系列映射的连接的作用下，仍被映射至 t 。即任意一个事物 t∈T，它和自己是 F 本质相同的。

即“本质相同”这个概念具有自反性。

(2)．任意 s,t∈T，若在 F 的一系列映射作用下，s 和 t 是 F 本质相同的。那么一定有另一系列属于 F 的映射作用下，t 和 s 是 F 本质相同的。

即“本质相同”这个概念具有对称性。

# 定义：“最小表示法”

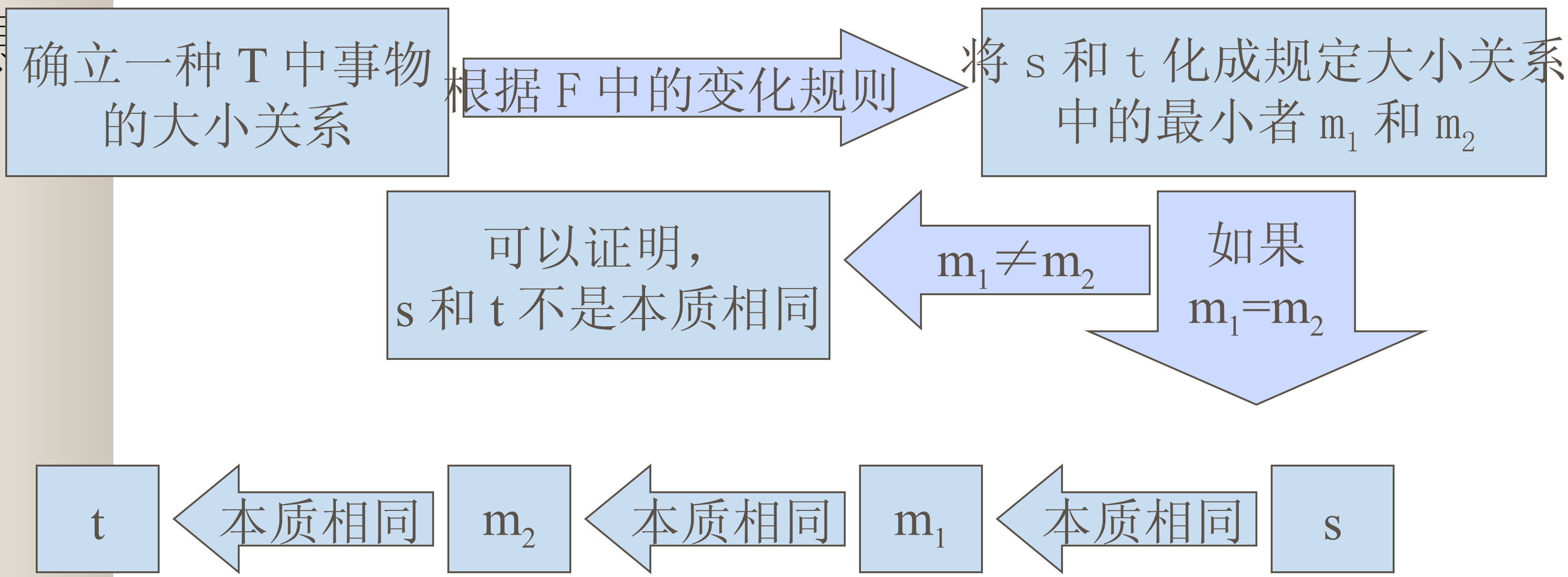
另外，根据“本质相同”概念的定义很容易知道，“本质相同”这个概念具有传递性。

即若 $t_1$ 和 $t_2$ 是 F 本质相同，$t_2$ 和 $t_3$ 是 F 本质相同，那么一定有 $t_1$ 和 $t_3$ 是本质相同的。

# 定义：“最小表示法”

给定 T 和 F，如何判断 T 中两个事物 s 和 t 是否互为 F 本质相同呢？

“最小表示法”就是可以应用于此类题目的一种思想



# "最小表示法"在本题的应用

在本题中，
事物集合表示的是不同的字符串，
映射集合则表示字符串的循环法则，
"事物中的大小关系"就是字符串间的大小关系。

最直接最简单的方法：

~~分别求出 s1 和 s2 的最小表示比较它们是否相同~~

# “最小表示法”在本题的应用

现在换一种思路：

设函数 M(s) 返回值意义为：

从 s 的第 M(s) 个字符引起的 s 的一个循环表示是 s 的最小表示。

若有多个值，则返回最小的一个。

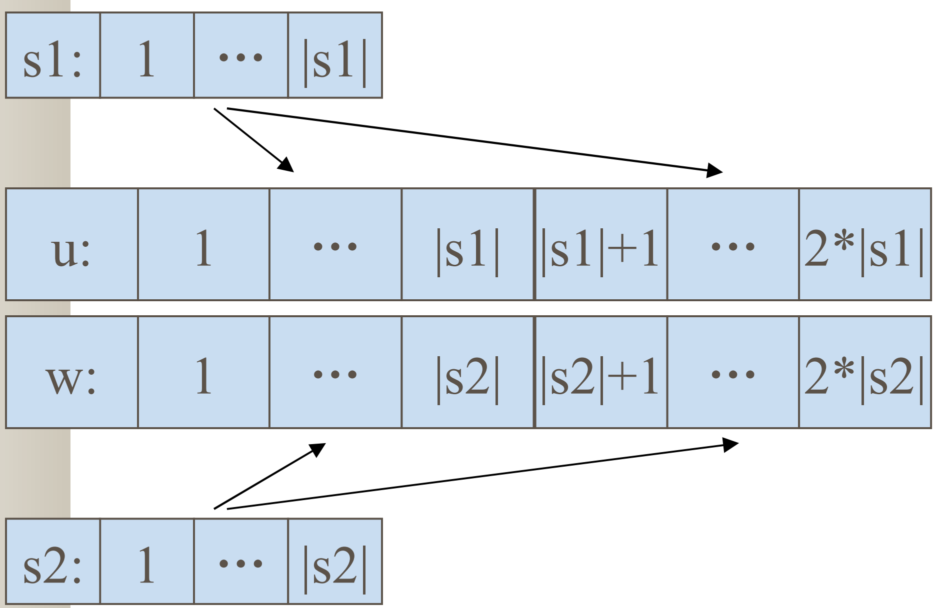
s=‘b b b a a b’

如 M(‘bbbaab’)=4

# “最小表示法”在本题的应用

## 现在换一种思路：

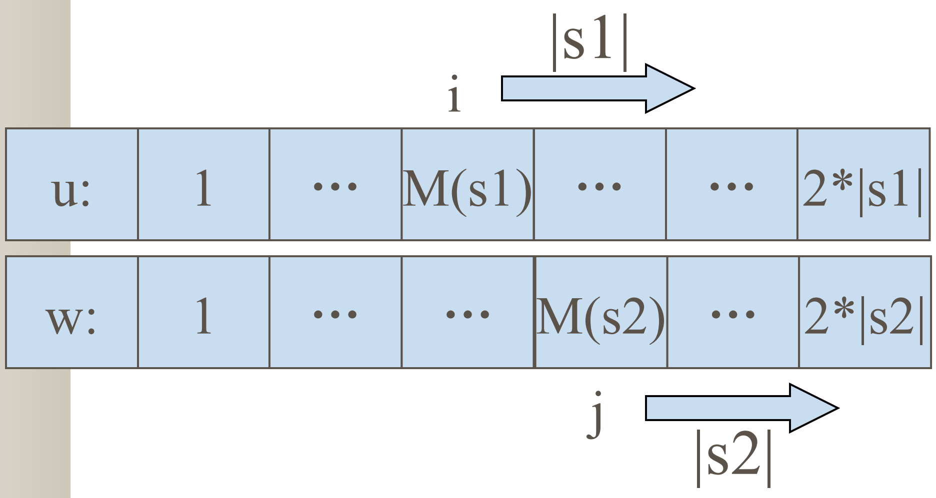
设 u=s1+s1 ， w=s2+s2 并设指针 i,j 指向 u,w 第一个字符



# “最小表示法”在本题的应用

## 现在换一种思路：

如果 s1 和 s2 是循环同构的，那么当 i,j 分别指向 M(s1),M(s2) 时，一定可以得到 $u[i \to i+|s1|-1]=w[j \to j+|s2|-1]$，迅速输出正确解。



# “最小表示法”在本题的应用

现在换一种思路：

同样 s1 和 s2 循环同构时，当 i,j 分别满足 $i \le M(s1), j \le M(s2)$ 时，
两指针仍有机会达到 $i=M(s1), j=M(s2)$ 这个状态。

问题转化成，两指针分别向后滑动比较，如果比较失败，如何正确的滑动指针，新指针 i’,j’ 仍然满足 $i' \le M(s1), j' \le M(s2)$

# "最小表示法"在本题的应用

设指针 i,j 分别向后滑动 k 个位置后比较失败 ($k \geqslant 0$)，即有

$u[i+k] \neq w[j+k]$

设 $u[i+k]>w[j+k]$，同理可以讨论 $u[i+k]<w[j+k]$ 的情况。

当 $i \le x \le i+k$ 时，我们来研究 $s1^{(x-1)}$。

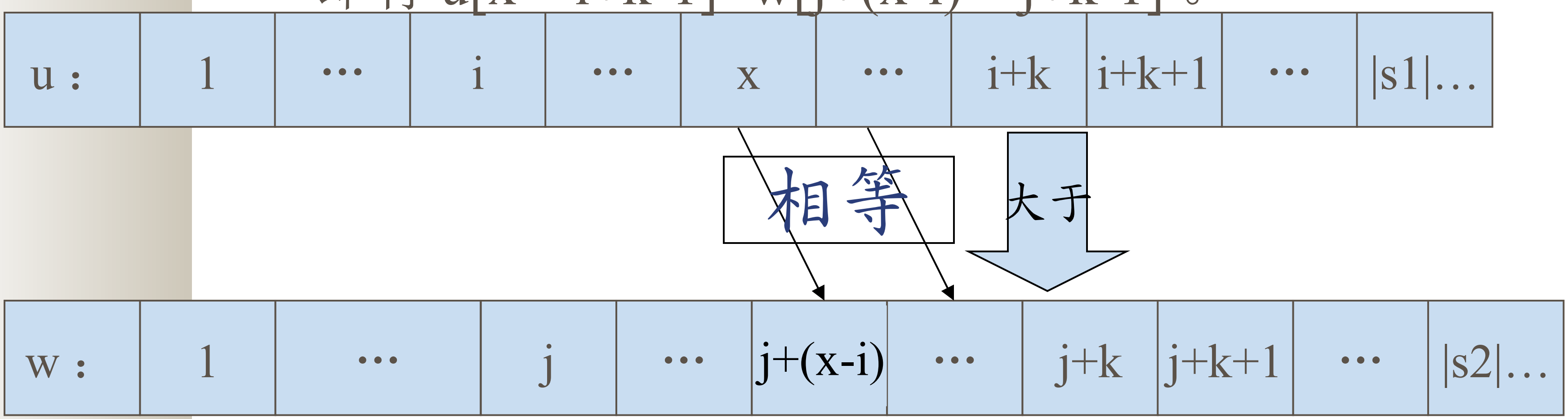
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| u : | 1 | … | i | … | x | … | i+k | i+k+1 | … | \|s1\|… |

大于

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w : | 1 | … | j | … | … | … | j+k | j+k+1 | … | \|s2\|… |

# "最小表示法"在本题的应用

因为 u[x] 在 u[i] 后 (x-i) 个位置，
对应的可以找到在 w[j] 后 (x-i) 个位置的 w[j+(x-i)]，
同样对应的有 u[x+1] 和 w[j+(x+1-i)]， u[x+2] 和 w[j+(x+2)-i]，
直到它们都是相等的
u[i+k-1] 和 w[j+k-1]。
即有 u[x→i+k-1]=w[j+(x-i)→j+k-1]。



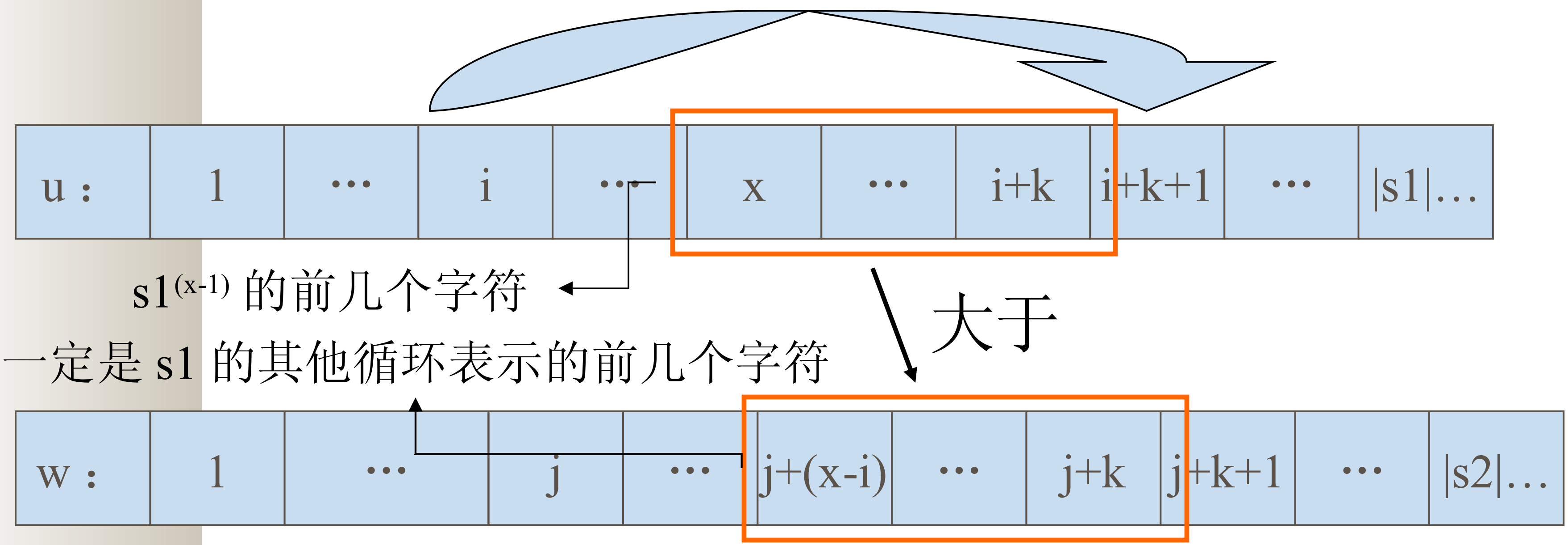
# “最小表示法”在本题的应用

很容易就得到 u[x→i+k]>w[j+(x-i)→j+k]。

所以 $s1^{(x-1)}$ 不可能是 s1 的最小表示！

因此 M(s1)>i+k，

指针 i 滑到 u[i+k+1] 处仍可以保证小于等于 M(s1)！



# “最小表示法”在本题的应用

同理，当 $u[i+k]<w[j+k]$ 的时候，可以将指针 j 滑到 $w[j+k+1]$ 处！

也就是说，两指针向后滑动比较失败以后，

**指向较大字符的指针向后滑动 k+1 个位置。**

下面让我们将这种方法应用于一个实例。

# “最小表示法”在本题的应用

设 s1=‘babba’，　s2=‘bbaba’

比较失败时 k=1

i

u=‘b a b b a b a b b a’
w=‘b b a b a b b a b a’

j

不相等

因为
u[i+k]<w[j+k]
所以移动指针 j

# “最小表示法”在本题的应用

设

s1=‘babba’，s2=‘bbaba’。

比较失败时 k=0

u=‘b a b b a b a b b a’

w=‘b b a b a b b a b a’

i

j

因为 u[i+k]>w[j+k]

所以移动指针 i

不相等

# “最小表示法”在本题的应用

设

s1='babba'，s2='bbaba'。

比较失败时 k=2

i

u='b a b $\boxed{b}$ a b a b b a'

w='b b a b $\boxed{a}$ b b a b a'

j

因为

u[i+k]>w[j+k]

所以移动指针 i

不相等

# “最小表示法”在本题的应用

设

s1= ‘ babba ’ ， s2= ‘ bbaba ’。

i ⇨ ⇨ ⇨ ⇨

u=‘b a b b $\boxed{a\ b\ a\ b\ b}$ a’

w=‘b b $\boxed{a\ b\ a\ b\ b}$ a b a’

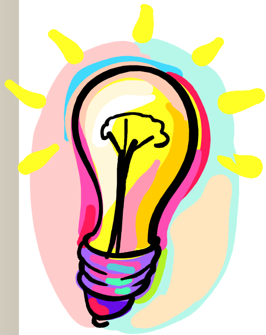
j ⇨ ⇨ ⇨ ⇨

$u[5\rightarrow 9]=w[3\rightarrow 7]$ ！

所以 s1 和 s2 是循环同构的！

# “最小表示法”在本题的应用

在这个例子中，算法正确出解。



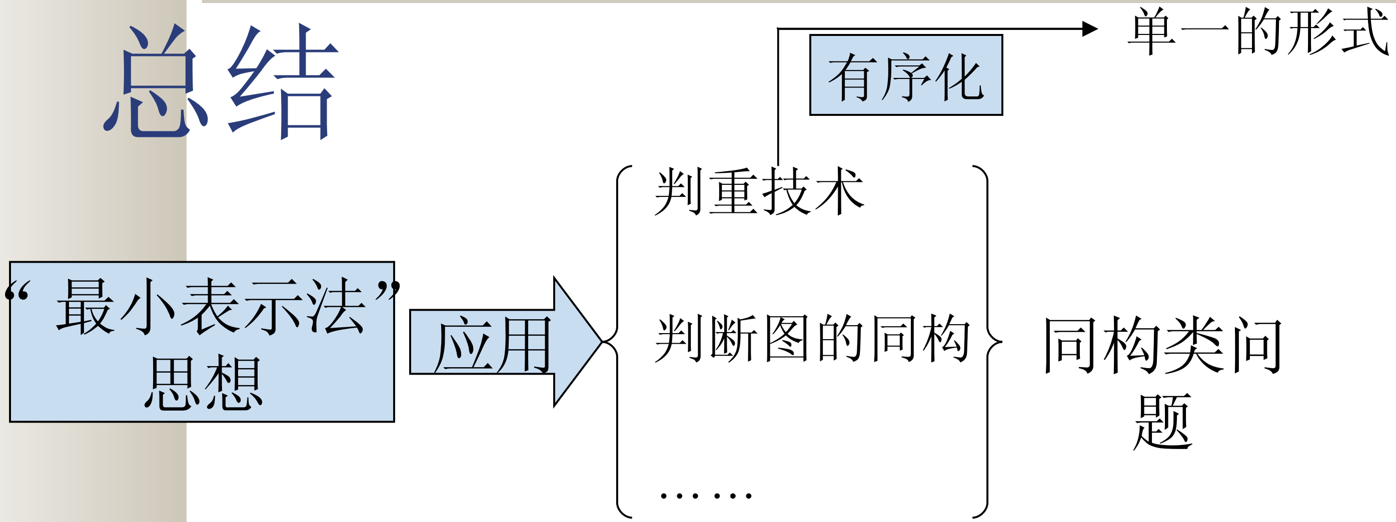
算法的具体描述和证明请同学们自行完成，这里不再赘述。

# 小结：“最小表示法”思想

经过努力，我们终于找到了一个与匹配算法本质不同的线性算法。

| 比较点 | 匹配算法 | “最小表示法”思想 |
|---|---|---|
| 时间复杂度 | O(N) 级 | 同样优秀的线性算法 |
| 辅助空间 | 记录 next 数组<br>O(N) 级 | 只需要记录两个指针<br>常数级别 |
| 算法实现 | 难懂，难记忆 | 简洁，便于记忆 |
| 可扩展性 | 受 next 数组严重制约 | 很强 |

# 总结




“最小表示法”是判断两种事物本质是否相同的一种常见思想，它的通用性也是被人们认可的——无论是搜索中判重技术，还是判断图的同构之类复杂的问题，它都有着无可替代的作用。仔细分析可以得出，其思想精华在于引入了“序”这个概念，从而将纷繁的待处理对象化为单一的形式，便于比较。

# 总结

有序化

单一的形式

“最小表示法”思想

应用

判重技术

判断图的同构

……

同构类问题

与其他思想综合运用

找到更简单，更优秀的算法！

然而值得注意的是，在如今的信息学竞赛中，试题纷繁复杂，使用的算法也不再拘泥于几个经典的算法，改造经典算法或是将多种算法组合是常用的方法之一。正如本文讨论的问题，单纯的寻求字符串的最小表示显得得不偿失，但利用“最小表示法”的思想，和字符串的最小表示这个客观存在的事物，我们却找到了一个简单、优秀的算法。

# 总结

解决实际问题时，只有深入分析，敢于创新，才能将问题

化纷繁为简洁，

化无序为有序。

# 谢谢大家

# Thank you!