最多约数问题

解题报告

林径曲
N070320070

- 问题描述：正整数x 的约数是能整除x 的正整数。正整数x 的约数个数记为div(x)。例如：1，2，5，10 都是正整数10 的约数，且div(10)=4。设a 和b 是2 个正整数，a≤b，找出a 和b之间约数个数最多的数x。
- 编程任务：对于给定的2 个正整数a≤b，编程计算a 和b 之间约数最多的个数。
- 样例数据分析： 13 -16

13=1*13	div(13)=2
14=1*14=2*7	div(14)=4
15=1*15=3*5	div(15)=4
16=1*16=2*8=4*4	div(16)=5

13和16之间约数个数最多为5

设 $X=(p_1\hat{}n_1)(p_2\hat{}n_2)\cdots\cdots(p_m\hat{}n_m)$

根据乘法原理：$div(x)=(n_1+1)(n_2+1)\cdots..(n_m+1)$

这样我们就可以把问题简化为求一个数的质因子个数。

通过枚举该范围内的每个数的质因子个数，并根据公式求出每个数的约数个数后，得到最大约数个数。

这样直接的做法时间效率如何呢?

假设数据范围大到 1～1,000,000,000 ，遍历每个数的时间为 1,000,000,000 ，为每个数分解质因子的平均时间为 sqrt(1,000,000,000)=31623， 因此需要用的时间为 31623×1000,000,000

相当的庞大，根本不可能在 1s 内完成！

事实上，我们可以发现这样一个特点：范围内越大的数越有可能是含有最多约数的数。如果从小到大计算的话，就出现了重复计算。

解决方案：枚举素数，构成区间范围内的数

我们从2开始枚举，有1个2，2个2……n个2的情况，再从2的每种情况出发，枚举1个3，2个3……n个3的情况，构成一棵深度搜索的树。

我们在搜索的过程不断的更新最大约数值，然后对待搜索的枝条按一定条件判断，是否有继续搜索的必要，即进行剪枝。

剪枝1：如何判断当前的素数不是给定范围内的任何数的质因子?

例如：[2311，2316] 在这个范围内是不会有包含7为质因子的数，则2311/7=330 2316/7=330 ，但有一种情况需要考虑，如果上下界相等时，即[2310,2310]，那么两个数除以7得到的数也是相等的，但却包含着7这个质因子。我们可以看到(2310-1)/7=329≠330

不难证明在[down，up]范围内，对当前搜索的素数p满足

$(down-1)/p==up/p$ 则该范围内没有以p为质因子的数，可以不用继续搜索下去。

证明：假设在范围[a,b]中存在一个数x，有一个素数p，满足 $x/p=t$，t为一个整数，即x中含有p这个质因子。

$\because a \leq x \leq b$

$\therefore a-1 < x \leq b$

$\because x=p*t \quad (p>0)$

$\therefore (a-1)/p < t \leq b/p$

剪枝2：如何判断继续搜索该分支是否能得到比当前更大的最大约数个数?

例如：当前上界为200，当前枚举到素数为3，我们在这里可以进行这样的预测，计算一下200最多可能由多少个3表示：$\log_3 200=4.8$ ，于是我们可以先认为200最多由4个3表示，假设当前分支下的约数个数为total，那么按照前面的预测，最大约束个数可能为total*(4+1）=total*5，然而这不是最好的情况，因为如果不是由4个3表示，而是由4个不同的素数表示时，total*(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=total*16>total*5，如果在这种理想情况下得到的数仍小于当前最大约数个数时，则我们判定这个分支没有再继续搜索的必要了。

根据n+1 ≤ 2^n我们可以很容易证明这样的预测是正确的。

最后一个问题在于求素数上，如果数的范围在1～1,000,000,000，用筛法求素数的，由于空间的限制是不可能实现的。

但事实上我们只要求到sqrt(1,000,000,000)= 31623这个范围内的素数就可以了，因为如果存在超过这个范围的素数只可能有一个，如果有两个则乘积已超过1,000,000,000。所以当把所有素数都枚举完，却还不能达到或临近上界，则我们认为存在着一个超过31623的大素数，只要在当前的约数个数上乘于2就是最大约数个数。

算法复杂度分析：

假设要搜遍整棵树，对于上界n，它的树高为log(n)，把这棵树看成是满k叉树，那么要穷举完所有的叶节点就需要k^log(n)的时间，所以该算法的时间复杂度还是呈指数级的增长。但采取了剪枝1，剪枝2在搜索过程中不断的对树进行修剪，是可以去掉一大部分不必要的搜索，因此速度还是能够满足要求的。

Thank you for your attention!