极限法——解决几何最优化问题的捷径

长郡中学 金恺

概述

在平面几何问题中我们经常会遇到一些求极值的问题。在这些问题中，自变量和目标函数可能涉及到坐标、斜率、角度、周长、面积等等一些复杂的量，而且自变量往往还有复杂的约束条件，所以直接用求函数最值的方法无从下手或者极其复杂。

化无限为有限

在这些问题中，自变量往往有无穷多种取值方案（比如点在平面上），无法枚举每种取值方案来求最值。怎么办？

通过**极限法**，可以证明：

自变量取非特殊情况时函数不可能得到最优解，因为把自变量微调一个**无穷小量**能够使得目标函数变得更优。

从而只剩下有限个特殊情况需要考虑。枚举所有的特殊情况，就可找到最优解了。

化有限为少量

在另一些问题中，本就可以通过枚举有限个特殊情况求出最优解，但是枚举的量很大，时间复杂度较高；

尝试通过极限法减少需要枚举的情况数，降低时间复杂度。

极限法的本质就是对目标函数求导：

如果自变量不取定义域的***边界***（取边界时对应某些特殊情况）并且这一点的***导数不为 0***（导数为 0 时对应另一些特殊情况），则目标函数不可能为最优值。

例题一、巧克力

问题描述：

两个小孩一起买了一块凸 N 边形巧克力，想一刀把它割成两半，两半的面积必须相等。

找出用以分割巧克力的分割线的最短长度。

数学模型：

已知量： N 个点 $(X_i,Y_i),1\le i\le N$，构成一个凸包 P；

求：一条分割线 L；

约束条件： P 在 L 两侧的面积相等;

目标函数： L 的长度;

要求使目标函数值最小的一条 L。

问题分析

设 L 的两个端点为 A、 B；

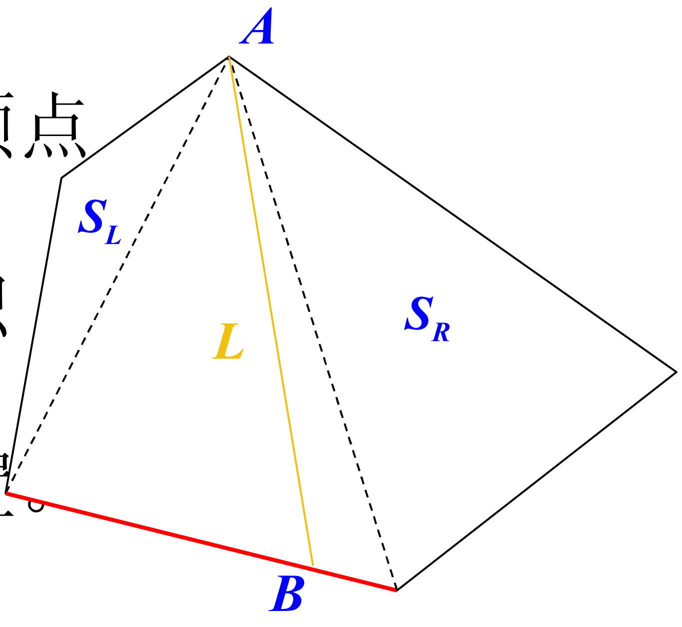
L 可能过 P 的顶点也可能不过，分开解决这两种情况：

1、A 在 P 的顶点上（B 在 P 的顶点上类似）

1) 枚举 P 中的一个顶点作为 A；

2) 由分割线两侧面积相等确定 B 所在的边；

3) 算出 B 的具体位置。



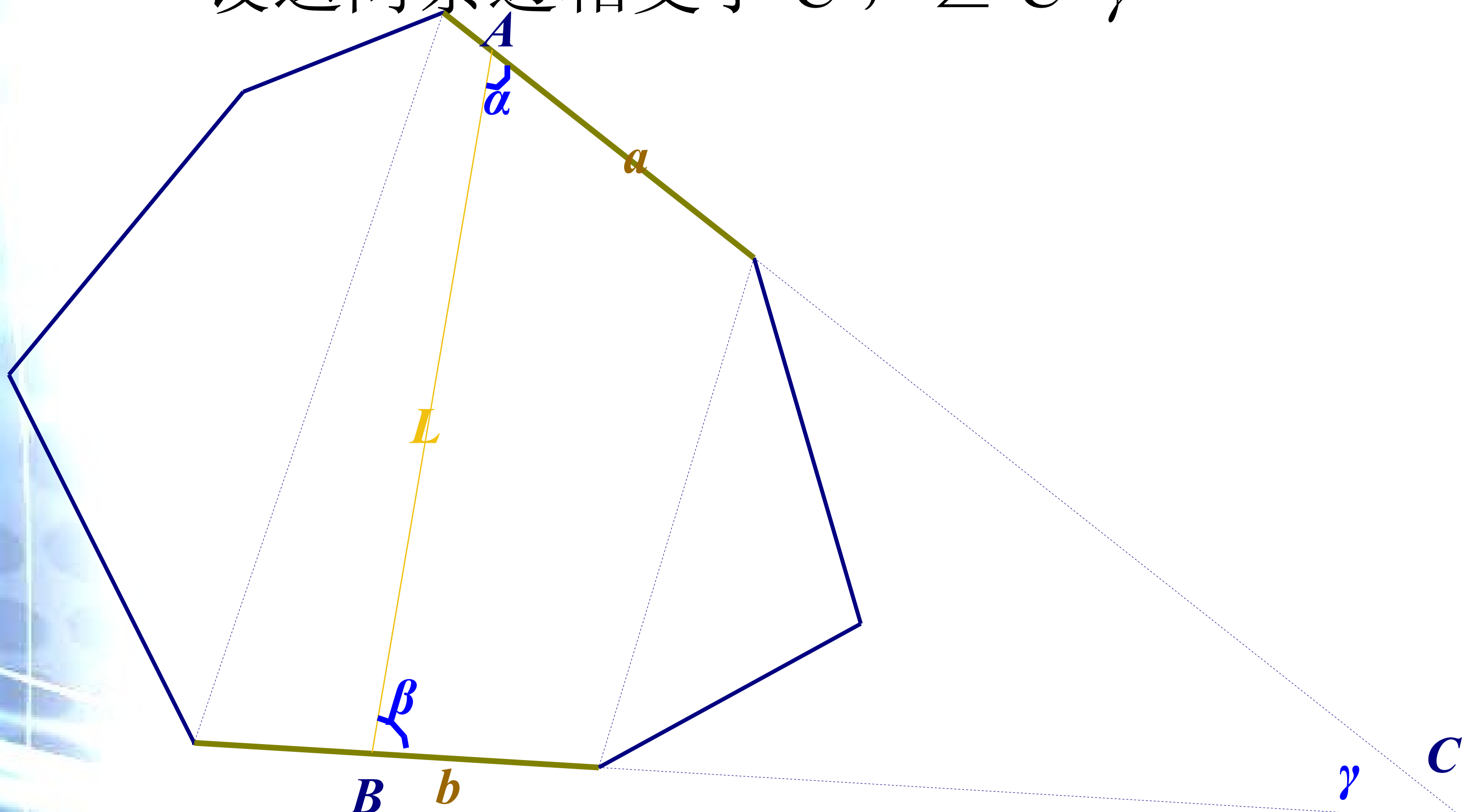
2、A、B 都在 P 的边｛不含端点｝上:

枚举 A、B 所在的两条边 a、b

设这两条边相交于 C，$\angle C=\gamma$

设$\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$。

下面将证明 $\alpha\neq\beta$ 时（即非特殊情况下），L 不是最优的分割线。不妨设 $\beta>\alpha$



先把 L 绕 B 点往交点 C 方向旋转一个微量 θ；

L 和 L' 都是分割线，所以 $S_{ABC}-S_{A'B'C}=\frac{1}{2}S_P$

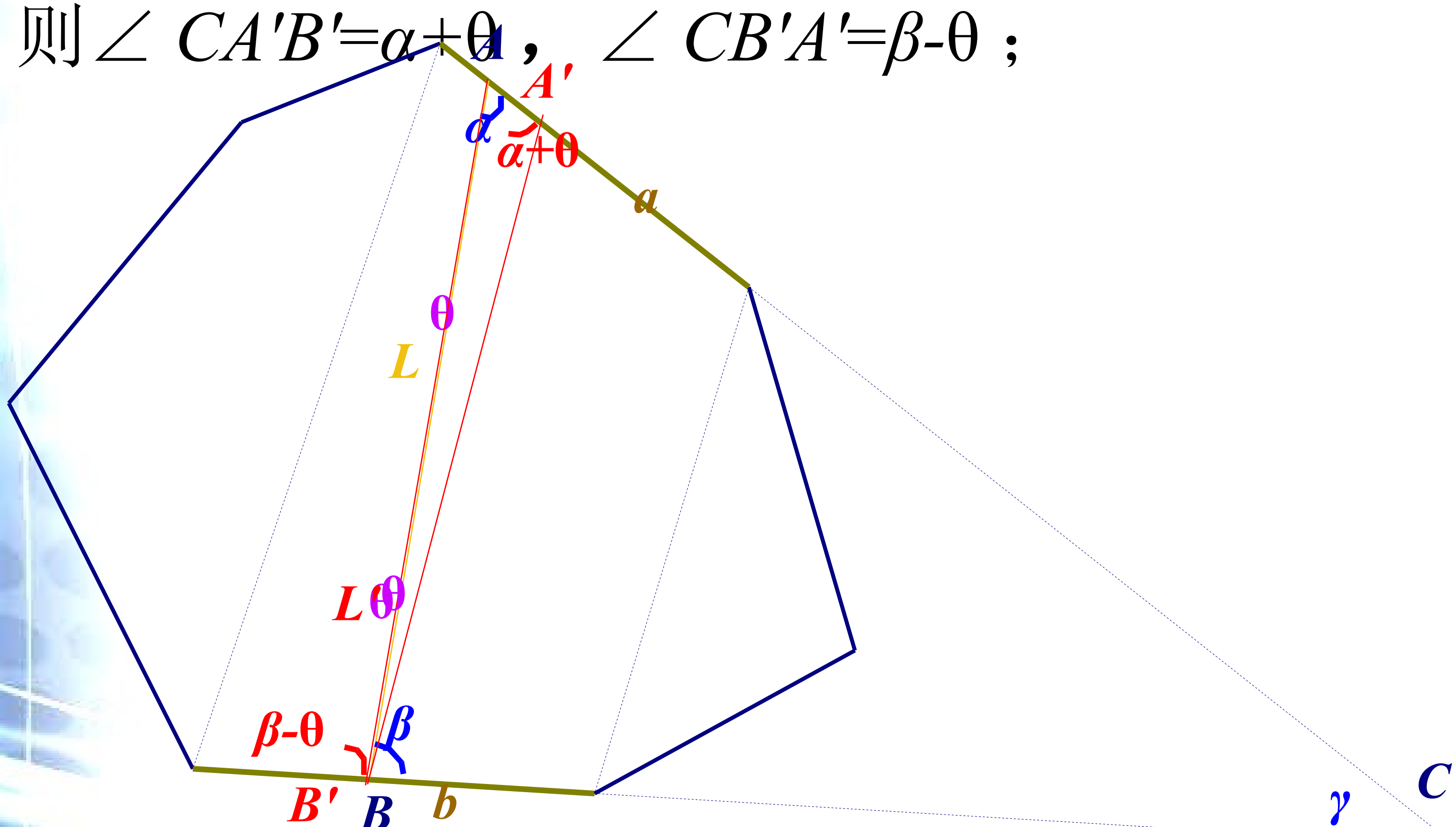
再平移一个微量到 L' 使 P 在 L' 两边的面积相等

；$\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\gamma=\frac{1}{2}A'C\cdot B'C\sin\gamma$

L' 仍与 a、b 相交，交点为 A'、 B'；

$AC\cdot BC=A'C\cdot B'C$，

则∠ $CA'B'=\alpha+\theta$， ∠ $CB'A'=\beta-\theta$；



由正弦定理：

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{L}{\sin\gamma}\qquad \frac{A'C}{\sin(\beta-\theta)}=\frac{B'C}{\sin(\alpha+\theta)}=\frac{L'}{\sin\gamma}$$

$$AC\cdot BC=\frac{L\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{L\sin\alpha}{\sin\gamma}=A'C\cdot B'C=\frac{L'\sin(\beta-\theta)}{\sin\gamma}\cdot\frac{L'\sin(\alpha+\theta)}{\sin\gamma}$$

$$\frac{L^2}{L'^2}=\frac{\sin(\beta-\theta)\sin(\alpha+\theta)}{\sin\beta\sin\alpha}=\frac{-\frac{1}{2}\left[\cos(\beta+\alpha)-\cos(\beta-\alpha-2\theta)\right]}{-\frac{1}{2}\left[\cos(\beta+\alpha)-\cos(\beta-\alpha)\right]}$$

$$=\frac{\cos(\beta-\alpha-2\theta)-\cos(\beta+\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)}\qquad >1$$

$$\pi>\beta>\alpha>0\ \therefore\ \pi>\beta-\alpha>0$$

$$\therefore\cos(\beta-\alpha-2\theta)>\cos(\beta-\alpha)$$

$\therefore L^2>L'^2$， $L'<L$

因此 L 不可能为最短的分割线。

结论

如果 a 、 b 平行即 C 在无穷远处，也有相同结论

若 L 是最短的分割线但不经过 P 的顶点，那么 L 与 P 的两个夹角必然相等。

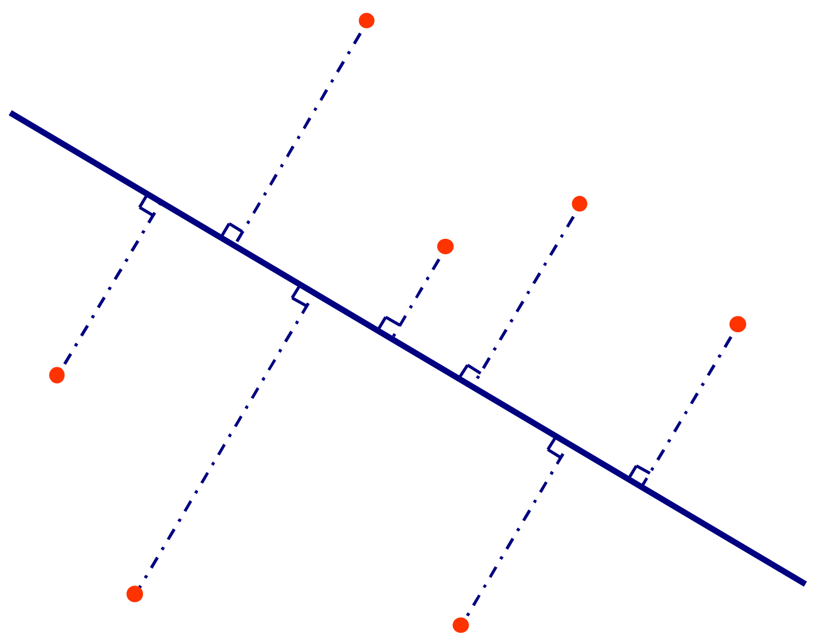
枚举 a 、 b 后，确定 L 的斜率，根据 P 在 L 两边面积相等，可算出 L 的位置。

需要枚举的 a 、 b 只有 N 对，可以用滑动指针的算法找到所有这样的边对，总复杂度为 $O(N)$

通过此题，我们已经初次接触到了极限法，并利用它得到了一个极其简单的结论。本题中极限法的作用是：把自变量的取值范围从*无穷*

例题二、太空站

问题描述：平面上有 $n(3\le n\le 10000)$ 个互不重合的已知点，求一条直线，使得所有已知点到这条直线的距离和最小。



数学模型

已知 n 点的坐标分别为： $V_1(x_1,y_1)$, $V_2(x_2,y_2),\ldots,V_n(x_n,y_n)$ 。直线 $l(ax+by+c=0(ab\neq0))$ 的费用定义为

$$f(l)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|ax_i+by_i+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

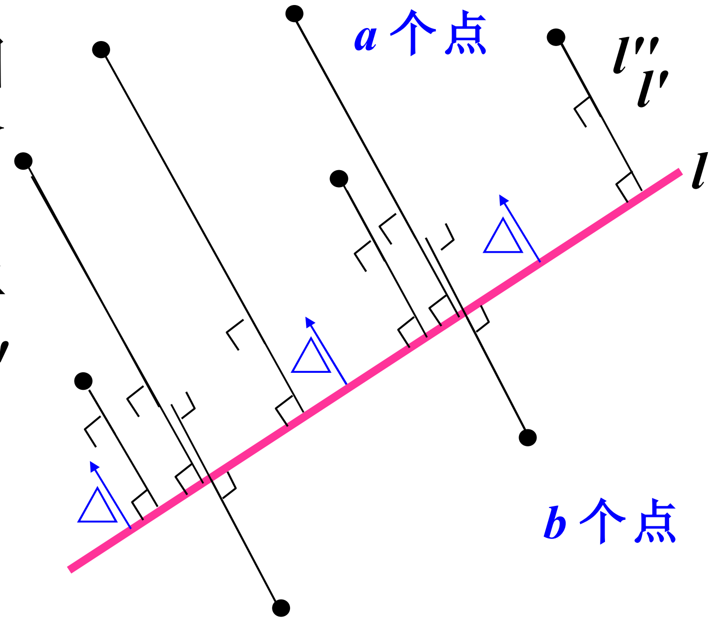
求 $\min\{f(l)\}$

想法：枚举所有的直线，得到最优值

平面中的直线有无穷多条

怎样的直线才有可能是我们要找的那一条呢？

① 规定直线 *l* 经过某一个已知点。



若 l 不经过任何已知点。设 l 两侧的点数分别有 a、b 个，$a \geq b$

将 l 往点多的一侧平移一个无穷小量△到 l' 则 $f(l')-f(l)=b\triangle-a\triangle=(b-a)\triangle\leq 0$ ∴ $f(l')\leq f(l)$

所以已知点相对于 l 的位置未发生改变，即 a、b 值未变。

可不断往同一个方向平移 l' 直至碰到一个已知点，到 l'' 处，同样有 $f(l'')\leq f(l)$。

l'' 经过某一个已知点，且费用不比 l 高。

② 直线 l 必经过两个已知点。

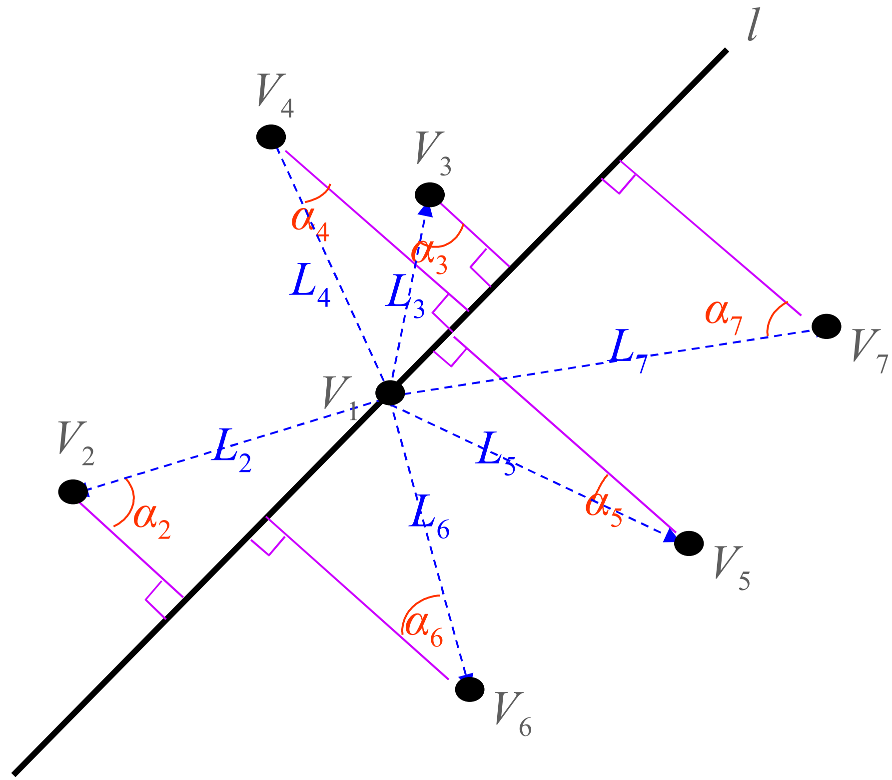
根据结论①，设 l 过 V_1，而不过其它已知点。

定义：

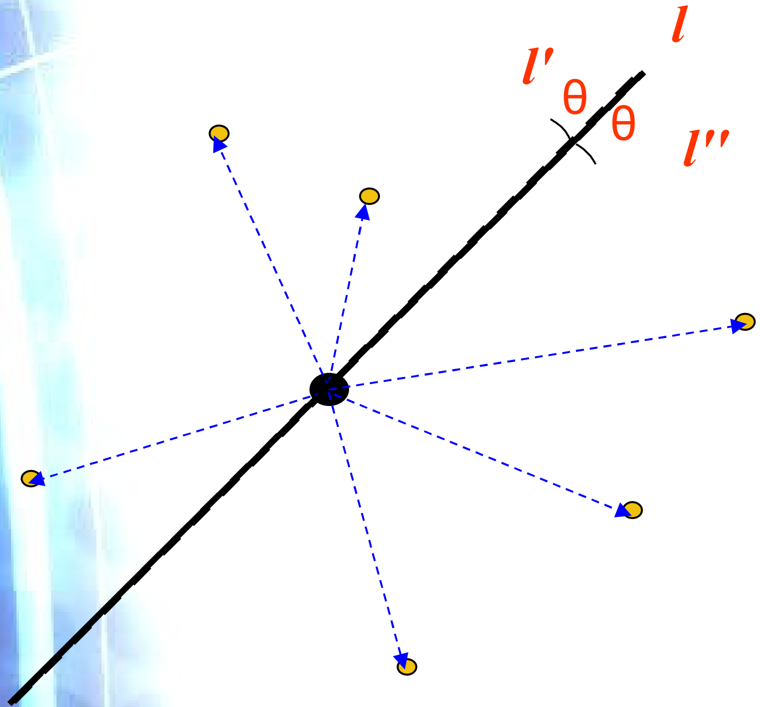
L_i—V_i 到 V_1 的距离

α_i—V_i 到 l 的垂线与 V_iV_1 的夹角

$$f(l)=\sum_{i=2} L_i\cos\alpha_i$$



证明②



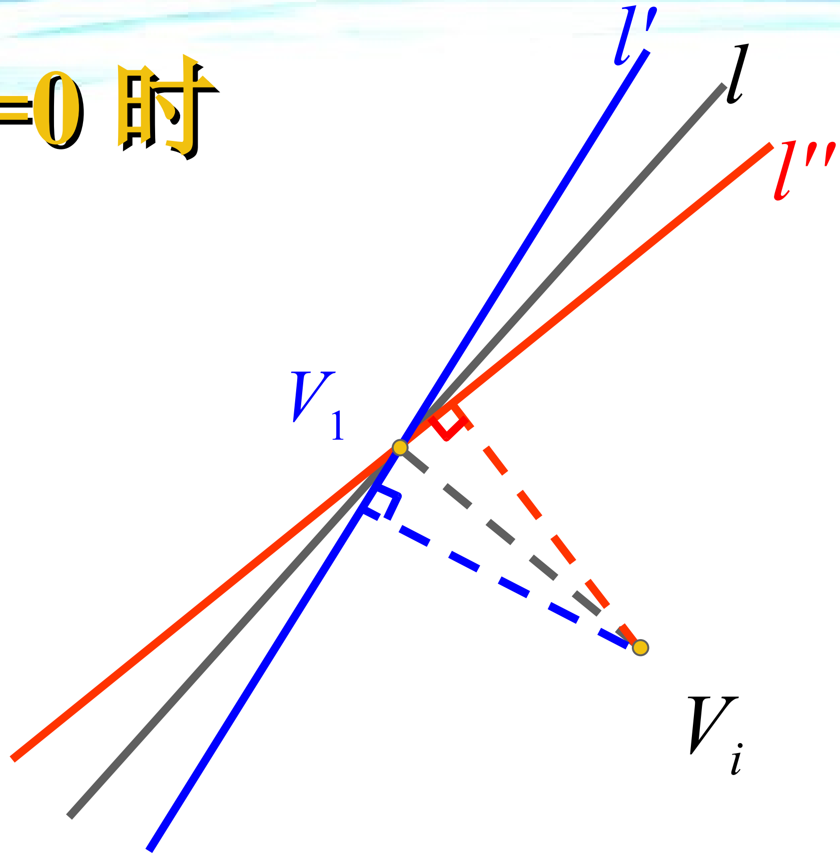
将 l 绕 V_1 逆时针旋转一个无穷小的角度 θ 到 l'；

将 l 顺时针旋转相同的角度 θ 到 l''；

θ 足够小，使旋转过程中不碰到其它的已知点。

单独的考虑一个已知点 $i(i>1)$ 到 l 的距离的改变

当 α_i=0 时



∵ 直角三角形中直角边 < 斜边

∴ 不论直线旋转到 l' 还是 l''， V_i 到直线的距离都严格减小了

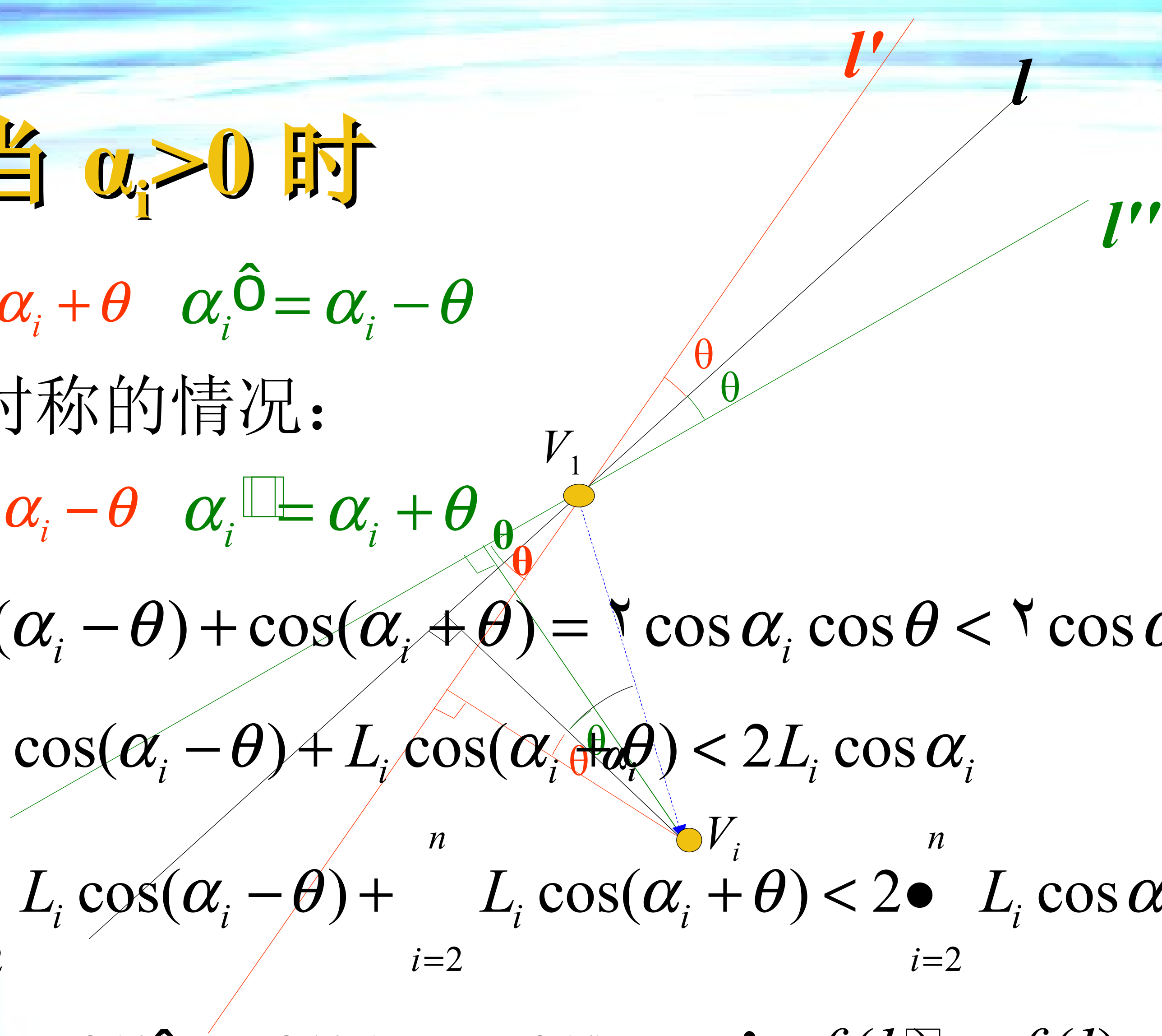
$$L_i\cos(\alpha_i-\theta)+L_i\cos(\alpha_i+\theta)<2L_i\cos\alpha_i$$

当 $\alpha_i>0$ 时

$\alpha_i' = \alpha_i + \theta \quad \alpha_i'' = \alpha_i - \theta$

对称的情况：

$\alpha_i' = \alpha_i - \theta \quad \alpha_i'' = \alpha_i + \theta$



$$\cos(\alpha_i - \theta) + \cos(\alpha_i + \theta) = 2\cos\alpha_i \cos\theta < 2\cos\alpha_i$$

$$L_i\cos(\alpha_i - \theta) + L_i\cos(\alpha_i + \theta) < 2L_i\cos\alpha_i$$

$$\sum_{i=2}^{n} L_i\cos(\alpha_i - \theta) + \sum_{i=2}^{n} L_i\cos(\alpha_i + \theta) < 2\cdot\sum_{i=2}^{n} L_i\cos\alpha_i$$

$$f(l') + f(l'') < 2f(l) \qquad \therefore f(l') < f(l)$$

或 $f(l'') < f(l)$

$\therefore l$ 不可能为最优的

算法一

待枚举的直线变为了有限条 (N^2 条)，得到一个有效的算法:

$min \leftarrow \infty$

枚举两个已知点

根据这两个点确定直线 h

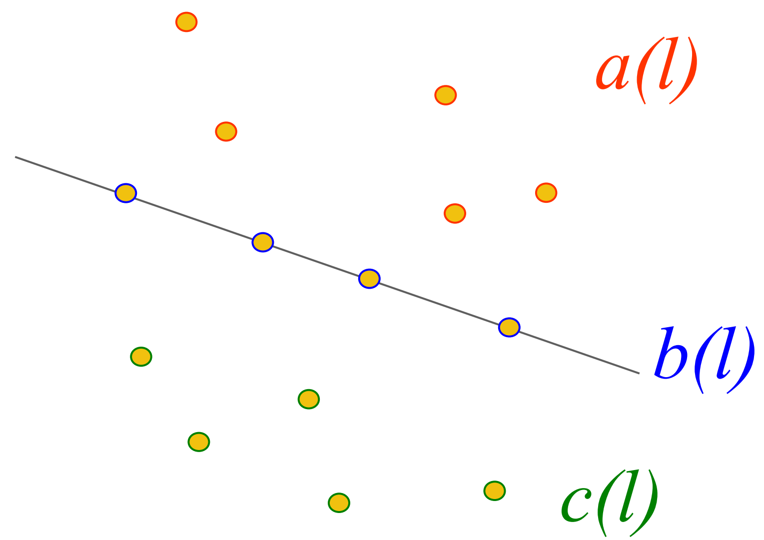
计算 $f(h)$

若 $f(h) < min$ 则 $l \leftarrow h,\ min \leftarrow f(h)$

时间复杂度为 $O(N^3)$

可再次用极限法进一步减少需要枚举的直线

③ 直线两侧的点数的关系



定义

$a(l)$： 直线 l 上方的已知点个数

$b(l)$： 直线 l 上的点数

$c(l)$： 直线 l 下方的已知点个数

若 l 最优则必有 $a(l)+b(l)>c(l)$ 且 $c(l)+b(l)>a(l)$

证明 $a(l)+b(l)>c(l)$

$\{c(l)+b(l)>a(l)$ 对称 $\}$

反证：若 $a(l)+b(l) \le c(l)$

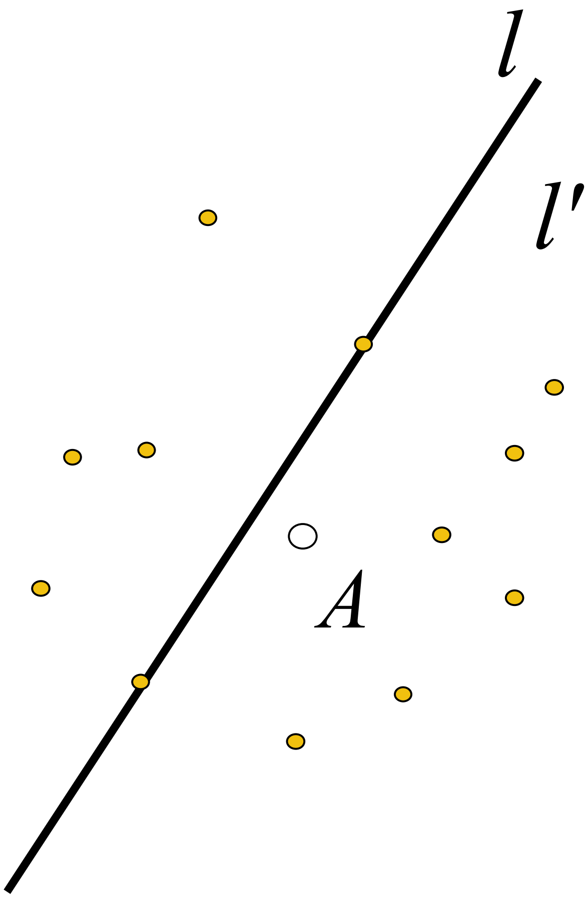
把 l 往下平移一个无穷小量到达 l'，根据①有：$f(l') \le f(l)$

l' 上没有任何已知点

在 l' 上任取 A， $A \sim V_1$， l' 绕 A 旋转，根据②有：$f(l')$ 不可能最优

➔$f(l)$ 不可能最优

结论成立



算法二

设 E 为满足①②③的直线的集合，原问题等价于计算 E 中所有直线的费用最小值。

$|E|\sim n$ 级，计算一条直线的费用为 $O(n)$。旋转法可以使得从 E 中的一条直线找下一条直线仅花费 $O(n)$ 的时间复杂度，旋转一周后能把所有的 E 中的直线找到（证明和详细方法见解题报告）；

时间复杂度降为 $O(n^2)$。

小结	原始值	结论①	结论②	结论③
l的取值范围	平面中的所有直线	过一个已知点的直线	过两个已知点的直线	过两点且平分所有点的直线
范围中的直线数	∞	∞	N^2	N
证明方法		平移微量	旋转微量	平移+旋转

极限法

一般 $\xrightarrow{\text{最优值不发生改变}}$ 特殊

解决平面最优化问题的一般规律

猜想：最优解是不是满足某个特殊性质？如果满足，是不是满足更特殊的性质？……

不断地提出猜想并且尝试证明，使得自变量的取值范围不断缩小，直至不能再小或者达到我们满意的地步，最后通过枚举和计算特殊情况解决原问题。

极限法是证明一个猜想的简单实用的分析工具！

总结

通过对前面两个例题的仔细分析，相信各位已经逐渐的了解了极限法的含义和用法，并且领略到了它的威力——极限法是解决平面最优化问题的一条捷径。

不过，极限法在证明中需要有比较扎实的平面几何功底，使用起来有一定的难度。

极限法的精髓要在分析的过程中去领会，灵活的应用更需要经验的积累。在做题的过程中，您将慢慢发现极限法的巨大威力：

化无限为有限　　　**化有限为少量**

Thanks !