# **第十一讲、完美图

本讲中我们将给出完美图的一些性质。我们将讨论强完美图猜想以及它的一些推论。我们还将提到完美图的另一些特例，例如分离图和排列图。

## 1．介绍

完美图的的任意诱导子图都满足最大团数等于染色数。我们将介绍一个多项式级的算法计算这个值。

有趣的是，目前的实践表明，当一个图中不存在所谓“奇阶洞”或“奇阶反洞”时，它就是一个完美图，这叫做完美图猜想。至今仍没有人能够证明或证伪它。

第 3 节我们将讨论完美图的判定。之后将给出完美图的一些性质以及它的一些特例，比如分离图、极限图、排列图和超完美图。

## 2．定义

完美图的定义见第十讲。一个不是完美图的例子是 5 阶无弦简单环。它的最大团数是 2，但染色数却是 3。但是它的任意诱导子图（本身除外）都是完美图。这样的图称为极小非完美图。

我们将长为 K 的无弦简单环称为 K 阶洞，它的补图称为 K 阶反洞。

引理 1：奇阶洞与奇阶反洞都是极小非完美图。

证明很简单，这里略去。

猜想 1：一个图是完美图，当且仅当它的任何诱导子图都不是奇阶洞或奇阶反洞。

这称为强完美图猜想（SPGC）。它尚未被证明。

## 3．完美图的性质

### 3．1 完美图的判定

这个问题的研究还未取得很大的进展，还不知道它是否有有效算法或是 NP 问题，而且即使 SPGC 成立也是这样。

### 3．2 完美图的独立数、团覆盖数、最大团数、染色数

虽然判定完美图是很困难的，但一旦知道一个图是完美图，我们能够得到它的很多性质。

定理 1：可以在多项式时间内求出完美图 G 的 I（G）、W（G）、X（G）。

【证明：这里只给出证明梗概，详细内容参见[BLS99]。

（译者注：本部分比较难理解，知识也较多，这里只能暂作直译）

定义 1：均衡矩阵 $F\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 关于图G的可行，如果：

$$F_{i,j}=\begin{cases}1, & \textit{if } i=j\\ 1, & \textit{if } (i,j) \textit{ is an edge of } G\\ \in\mathbb{R}, & \textit{otherwise}\end{cases}$$

对一个均衡矩阵 $M\in\mathbf{R}^{n\times n}$，令 $\lambda_{max}$（M）为M的最大的特征根。定义图G的函数θ（G）＝ $\mathrm{Min}\{\lambda_{max}(F)\mid F$ 关于G可行$\}$

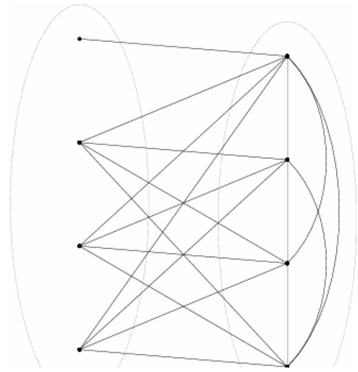
（注：均衡矩阵即关于左上/右下对角线对称的矩阵）

可以证明对于任何图 G，有 W（G）≤θ（G）≤X（G）。我们知道对于完美图 G，W（G）＝X（G），所以有 W（G）＝θ（G）＝X（G）。

接下来要做的是证明θ函数在有效时间内可以求出。可以得知θ（G）是一个半确定规划问题，这可以用椭圆逼近的方法解决。准确地说，对于任意ξ>0，可以在有效时间内得到一个有理数 R，满足|R－θ（G）|<ξ。由于 G 是完美图，我们知道θ（G）是整数，因此只要取ξ<1/2 就能准确得到θ（G）的值了。

这样我们得到了 W（G）与 X（G）的值，而 I（G）＝W（$\overline{G}$）、K（G）＝X（$\overline{G}$）。由于$\overline{G}$也是完美图，我们同样可以得到这两个值。】

## **4．完美图的另一些特例



本节介绍性地给出完美图的另一些特例。具体的细节参见[Gol80]。

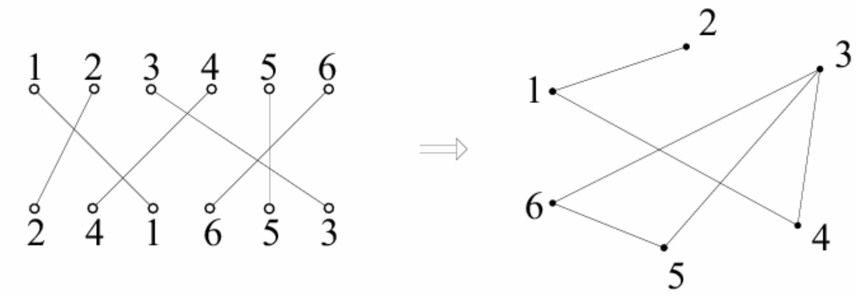
### 4．1 分离图

一个图 G＝（V，E）是分离图，如果 V 可以分割两个子集 I 和 C，其中 I 是一个独立集，C 是一个团。例如图 2。

【定理 2：G 是分离图，当且仅当 G 与它的补图都是弦图。】

### 4．2 排列图

假设π是 1..N 的一个排列。定理一个无向图 G＝（V，E），包含 N 个顶点 1..N。两个顶点 U、V 间有边当且仅当它们在π中是一对逆序对。更准确地说，(U<V) XOR (π(U)>π(V))为真。

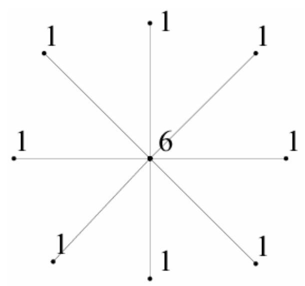



【定理 3：图 G 是排列图，当且仅当 G 与它的补图都是相似图。】

### 4．3 极限图

图 G 是极限图，如果存在顶点的一个权函数 W：V→N*和一个限值 T∈N*，满足任意顶点子集 I 是独立集，当且仅当 $\sum_{v\in I} W(v) \le T$。

图 4 是一个 T＝6 的极限图的例子：




（注：由于疏忽此图画错了，应该是 K1,6 而不是 K1,8，即周围只有 6 个顶点）。

可以证明【当 G 与它的补图都是区间图时】，G 是一个极限图，但反之不成立。

### 4．4 超完美图

对 G＝（V，E）的每个顶点 X，定义一个非负的权值 W（X），定义 V 的任意子集的权值等于各个元素权值的和。则有序对（G，W）称为一个带权图。对带权图（G，W）的一个“区间染色”是将每个顶点 X 映射到一个长度位 W（X）的开区间 Ix，且相邻的顶点对应的区间不相交。一种染色的“测度”定义为 $\bigcup_x Ix$ 的总长度。带权图的区间染色数 X（G，W）是将 G 的顶点区间染色得到的最小的测度值。

带权图（G，W）的“权最大团数”W（G，W）定义为 G 的权最大团的权值。

定义 2：图 G 是超完美图

【定理 4：所有相似图都是超完美图。】