

浅析解 “对策问题” 的两种思路

——从
《取石子》问题谈起

浅析解 “对策问题” 的两种思路

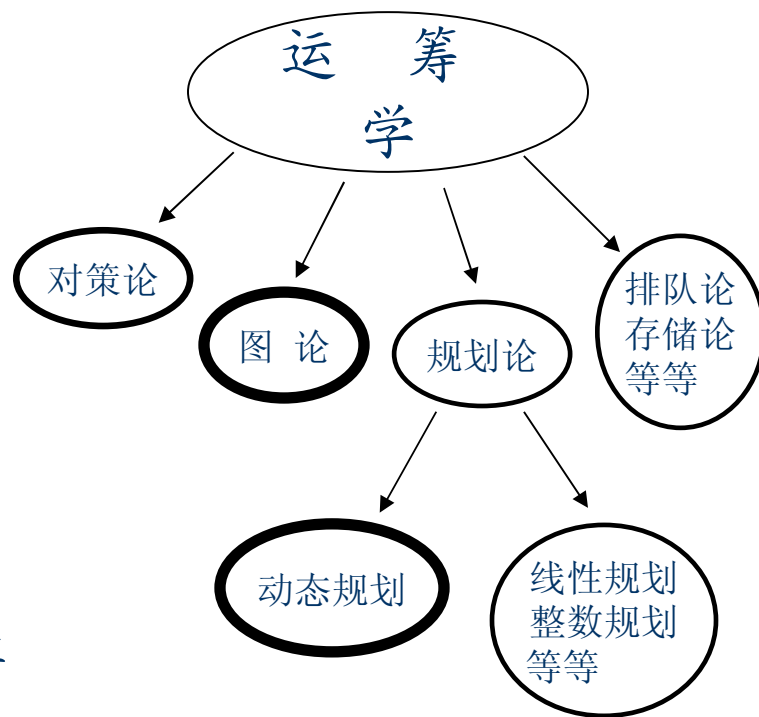
内容提要：

运筹学是一门十分年轻的学科，内容包括：规划论、图论、对策论、排队论等。

竞赛中最常出现的对策问题是：有两个局中人，在对方时刻采取最优策略的情况下，己方要么有必胜策略，要么必败。

本文所要探讨的正是此类“对策问题”。

由于对局的复杂性和取胜的多样性，文章将从一道经典的“对策问题”——《取石子》谈起，着重阐述两种基本思想方法。



浅析解 “对策问题” 的两种思路

问题描述

有 N 粒石子，甲乙两人轮流从中拿取，一次至少拿一粒，至多拿先前对方一次所取石子数目的两倍。甲先拿，开始甲可以拿任意数目的石子（但不得拿完）。最先没有石子可拿的一方为败方。

请问，甲能否获胜？（ $1 < N < 100$ ）

解 析

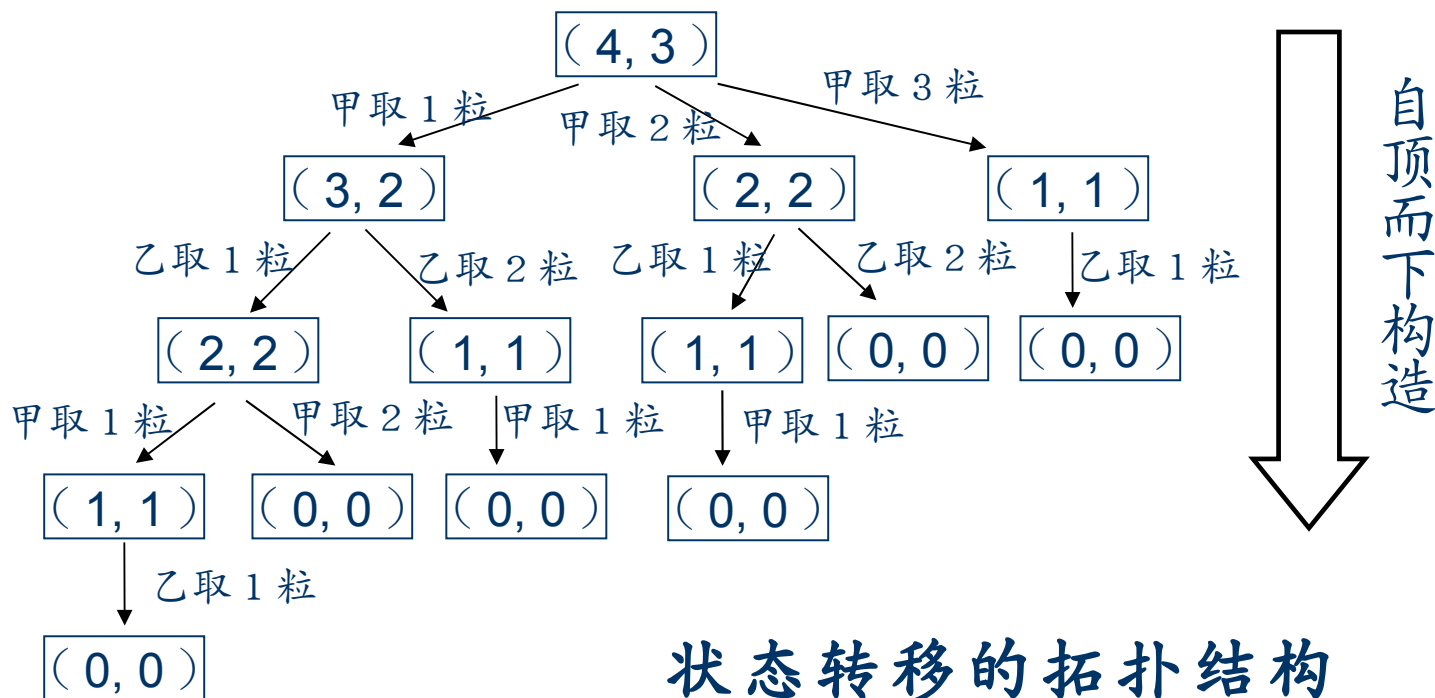
在本题中，影响胜败的有两个关键因素：

- .. 当前石子总数 N
- .. 当前一次最多可拿的石子数 K

用这两个因素（ N ， K ）来表示当前局面的“状态”。题目要求的是判断状态（ N ， $N-1$ ）是先手必胜还是必败。

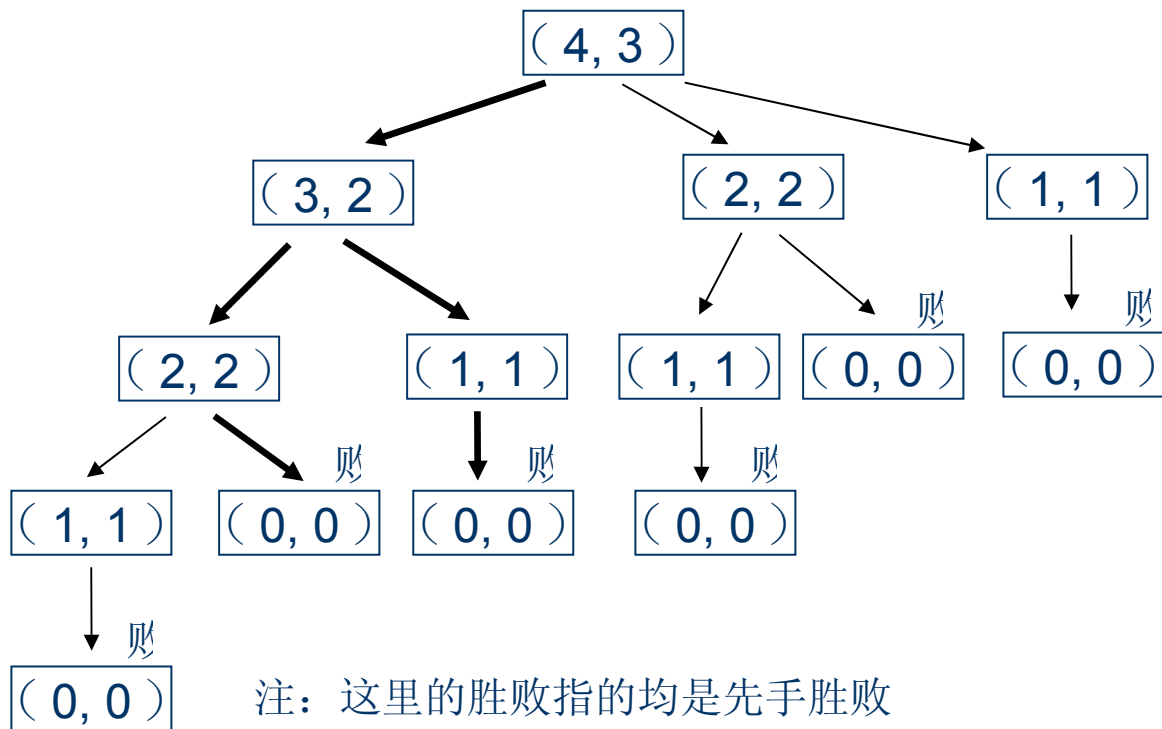
浅析解 “对策问题” 的两种思路

用一个简单例子分析：假设有 $N=4$ 粒石子，则一开始甲最多能取 3 粒，用 $(4, 3)$ 来表示初始状态。



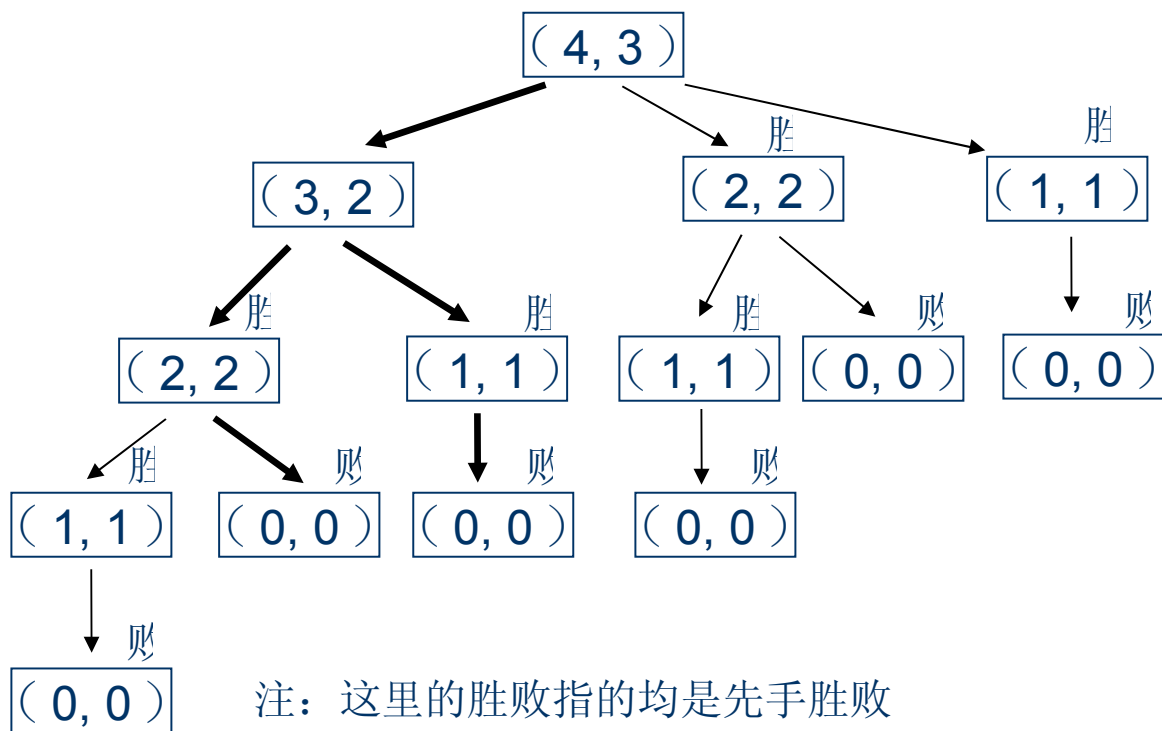
浅析解 “对策问题” 的两种思路

如果一个状态没有子状态，是结局，则根据题目条件判定胜负



浅析解 “对策问题” 的两种思路

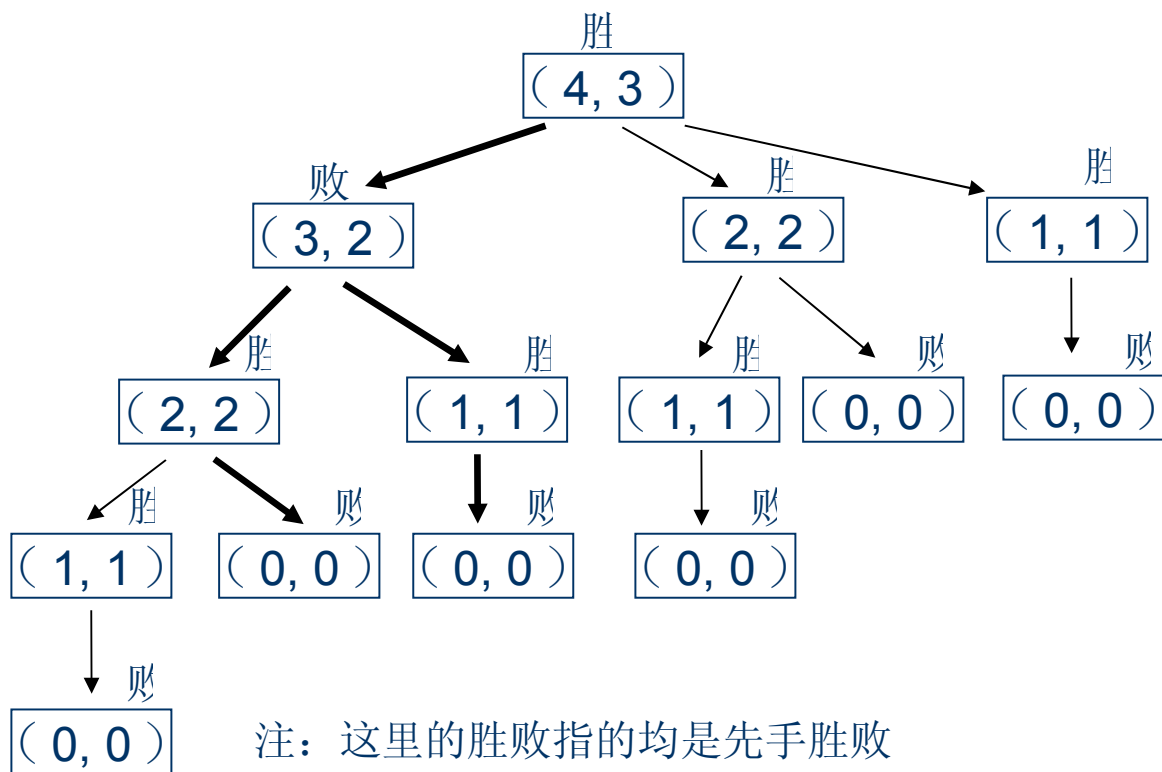
如果一个状态至少有一个子状态是先手败，则该状态是先手胜



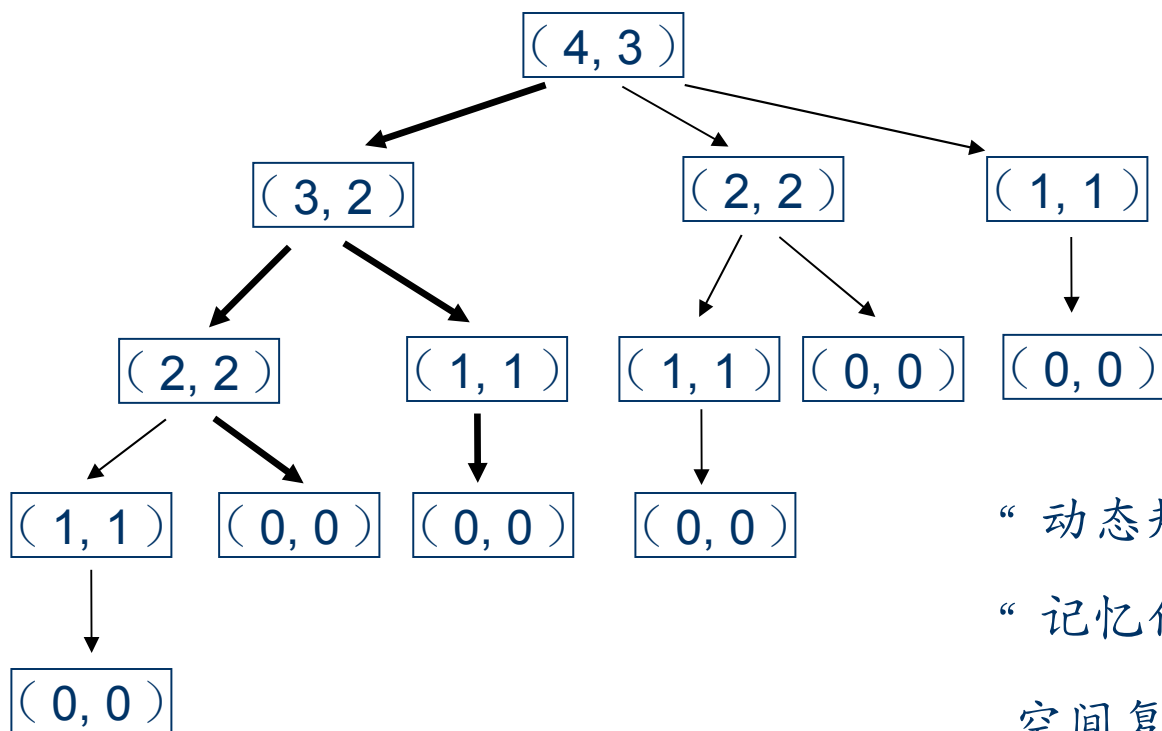
注：这里的胜败指的均是先手胜败

浅析解 “对策问题” 的两种思路

如果一个状态的所有子状态都是先手胜，则该状态是先手败



浅析解 “对策问题” 的两种思路



“动态规划” 或

“记忆化搜索”

空间复杂度

$O(N^2)$

时间复杂度

$O(N^3)$

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路一：一般性方法

- 状态
- 胜负规则
- 扩展规则
- 实现方法

“一般性方法”是从初始状态出发，自顶向下，考察所有状态，逐步构造出“状态转移的拓扑结构”，有通行的胜败规则和实现方

法，因此应用十分广泛。

例如 IOI96 的取数字，IOI2001 《Ioiwari》都可以用“一般性方法”来解决。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路一：一般性方法

● 状态

列举影响结局胜负的所有因素，综合描述成“状态”。根据对局时状态之间的变化，自顶而下构造出“状态转移的拓扑结构”。

● 胜负规则

.. 一个状态的胜负取决于其所有子状态的胜负。

- . | 如果一个状态没有子状态，是结局，则根据题目条件判定胜负
- . | 如果一个状态至少有一个子状态是先手败，则该状态是先手胜
- . | 如果一个状态的所有子状态都是先手胜，则该状态是先手败

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路一：一般性方法

● 扩展规则

在某些场合下，还可以记录一个状态先手胜（负）的最大（最小）利益，以数值形式描述，再根据题目中相应的条件，构成新的具有**针对性**的推算规则。例如 IOI2001 《Score》一题就是用扩展规则解决的。

● 实现方法

┆ 预先处理（关键）

┆ 列举状态；构造“状态转移的拓扑结构”；动态规划或记忆化搜索求状态先手胜负。

┆ 对局策略

┆ 依据已知的状态胜负，时刻把先手必败的状态留给对方。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路一：一般性方法

“一般性方法”也有它的不足。

● 基础

“一般性方法”是以“状态转移的拓扑结构”为基础设计的。

● 空间

“一般性方法”要考察**所有**状态的先手胜负。如果状态数目过多，甚至是无穷多，那“一般性方法”就无能为力了。

● 时间

“一般性方法”还要通过胜负规则来研究状态之间的关系。如果状态过多，关系复杂，就可能导致算法效率下降。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路一：一般性方法

由此可见，“一般性方法”并不能解决所有的“对策问题”。于是，各种各样的针对单独问题的特殊解法应运而生，不妨总的称之为“特殊性方法”。

为了弥补“一般性方法”的缺陷，“特殊性方法”势必是寻找一种“**决策规律**”，能依据当前状态，按照“**决策规律**”直接决定下一步的走法。

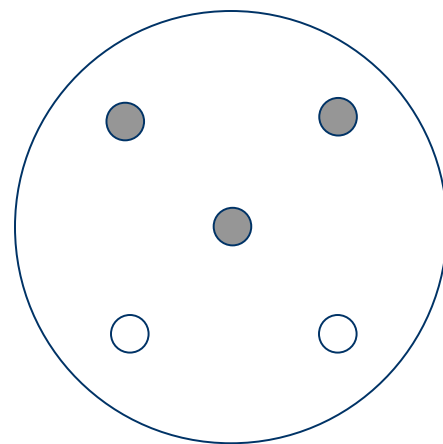
浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

先看一个简单的例子：

在一个圆形桌面上，甲、乙轮流放 5 分硬币，不许重叠，甲先放，首先放不下硬币的一方为负。甲如何取胜呢？

事实上，甲只要先在圆桌中心放下一枚硬币，此后无论乙怎么放，甲总在其关于中心对称处放一枚，最终甲必然获胜。



甲 ●

乙 ○

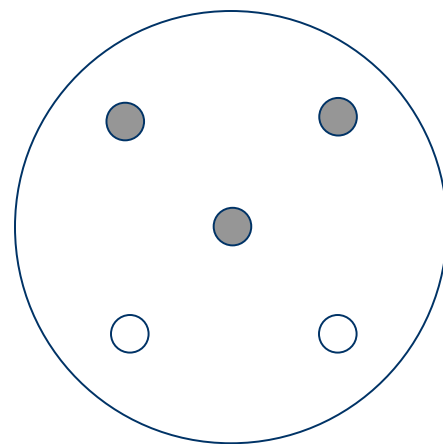
浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

先看一个简单的例子：

在一个圆形桌面上，甲、乙轮流放 5 分硬币，不许重叠，甲先放，首先放不下硬币的一方为负。甲如何取胜呢？

在这个例子中，甲找到了一种必胜的状态。这种状态是具有某种“平衡性”的，称之为“**平衡状态**”。每当乙破坏了“平衡”后，甲立即使其恢复“平衡”，直到结局。



甲 ● 乙 ○

浅析解 “对策问题” 的两种思路

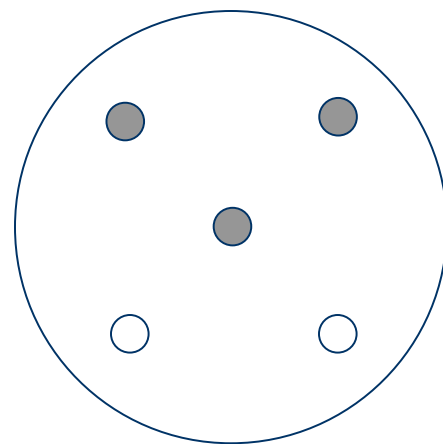
思路二：特殊性方法

先看一个简单的例子：

在一个圆形桌面上，甲、乙轮流放 5 分硬币，不许重叠，甲先放，首先放不下硬币的一方为负。甲如何取胜呢？



那么怎样寻找“对策问题”中的“**平衡状态**”呢？如何确定“**决策规律**”使我方在平衡被破坏后必然能恢复呢？



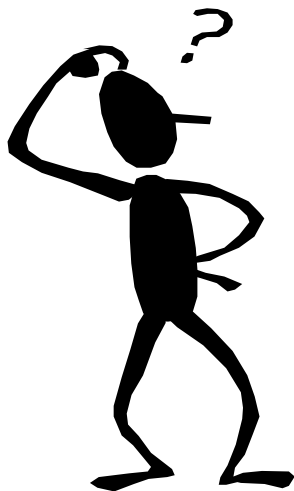
甲 ●

乙 ○

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

“一般性方法”是从初始状态开始，自顶而下建立“状态转移的拓扑结构”。现在，不妨反其道而行之，从结局或小规模残局开始，自底向上分析。



甲必败： 2 3 5 8 ……

甲必胜： 4 6 7 ……

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

“一般性方法”是从初始状态开始，自顶而下建立“状态转移的拓扑结构”。现在，不妨反其道而行之，从结局或小规模残局开始，自底向上分析。



甲必败： 2 3 5 8 ……

甲必胜： 4 6 7 ……

Fibonacci 数列

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

猜 想：

设 $\{F\}$ 为 Fibonacci 数列
($F_1=2$, $F_2=3$, $F_K=F_{K-1}+F_{K-2}$)

初始时有 N 粒石子，若 $N \in \{F\}$ 则先手必败，否则先手必胜。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

性质 1： 若 $K \geq N$ ，则状态 (N, K) 先手必胜。

性质 2： 若状态 $(N, N-1)$ 先手必败，则状态 (N, K) $K < N$ 先手必败。

性质 3： 若状态 (N, K) $K < N$ ，则最后一次取走的石子数目不超过 $2N/3$ 。

性质 4： $4F_{i-1}/3 < F_i$
($F_1=2$ ， $F_2=3$ ， $F_K=F_{K-1}+F_{K-2}$)。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

结论 1： 状态 (F_i, A) $A < F_i$ 先手必败。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

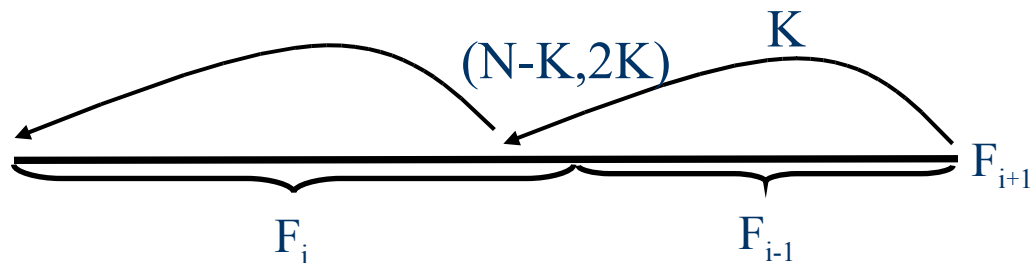
证 明：

(一) $F_1(=2)$, $F_2(=3)$ 时, 显然成立。

(二) 若 F_1 至 F_i 成立, 则 F_{i+1} 成立。

设先手取 K 粒石子。

(1) 若 $K \geq F_{i-1}$ 后手得状态 $(N-K, 2K)$ 后手获胜, 先手败
 $2K \geq 2F_{i-1} \geq F_{i-1} + F_{i-2} = F_i > N-K$ 由性质 1, 后手获胜。



浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

证 明：

(一) $F_1(=2)$ ， $F_2(=3)$ 时，显然成立。

(二) 若 F_1 至 F_i 成立，则 F_{i+1} 成立。

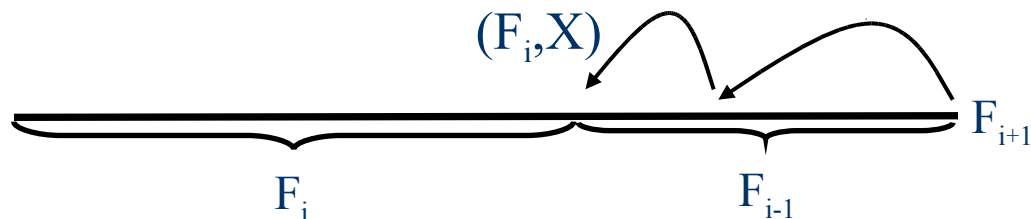
设先手取 K 粒石子。

(1) 若 $K \geq F_{i-1}$ 后手得状态 $(N-$ 后手获胜，先手

$K, 2K)$

(2) 若 $K < F_{i-1}$ 败

根据假设 (F_{i-1}, K) $K < F_{i-1}$ 必败，所以后手可以使先手面临 (F_i, X) 状态。



浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

证 明：

(一) $F_1(=2)$, $F_2(=3)$ 时, 显然成立。

(二) 若 F_1 至 F_i 成立, 则 F_{i+1} 成立。

设先手取 K 粒石子。

(1) 若 $K \geq F_{i-1}$ 后手得状态 $(N-$

后手获胜, 先手

(2) 若 $K <$

败手获胜, 先手

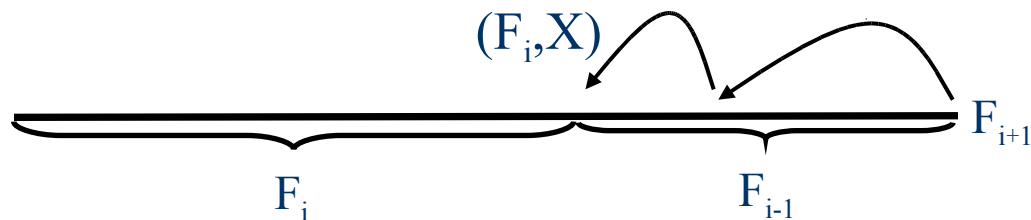
$K, 2K)$

F_{i-1}

由性质 3 : $X \leq 2F_{i-1}/3 \times 2 = 4F_{i-1}/3$ 败

由性质 4 : $X \leq 4F_{i-1}/3 < F_i$ 因此 (F_i, X) 是必

败



浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

证 明：

(一) $F_1(=2)$, $F_2(=3)$ 时, 显然成立。

(二) 若 F_1 至 F_i 成立, 则 F_{i+1} 成立。

设先手取 K 粒石子。

(1) 若 $K \geq F_{i-1}$ 后手得状态 $(N-$

后手获胜, 先手

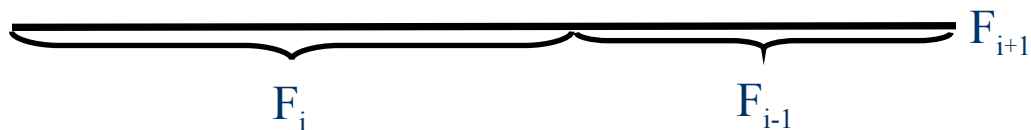
(2) 若 $K <$

败手获胜, 先手

由 (1) (2) 得 F_{i+1} 时, 结论成

由 (一) (二) 得结论 1 成立。

$K, 2K)$
 F_{i-1}



浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

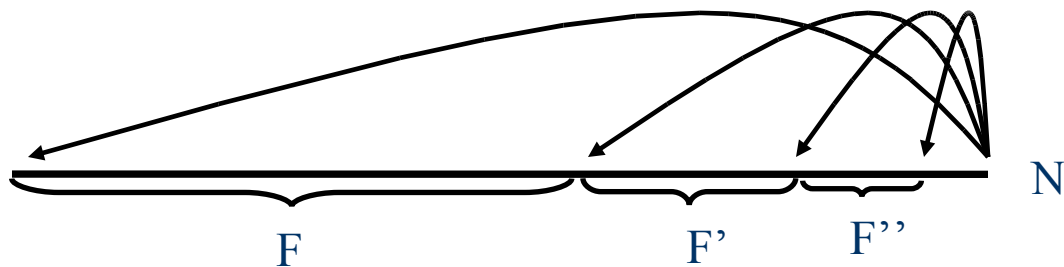
结论 2： 状态 $(N, N-1) \mid N \in \{F\}$ 且 $N > 2$ ，先手必胜。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

平衡状态：**Fibonacci 数**

决策规律：反复缩小范围，找最大
Fibonacci 数



浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

平衡状态：Fibonacci 数

决策规律：反复缩小范围，找最大 Fibonacci 数

特殊性方法

空间复杂度 $O(1)$

时间复杂度
 $O(\log N)$

大大降低



一般性方法

空间复杂度 $O(N^2)$

时间复杂度 $O(N^3)$

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

- 状态
- 逆向分析

“特殊性方法”是从结局或残局出发，自底而上分析，无须构造“状态转移的拓扑结构”，无须考察所有可能的状态与策略，

时间和空间复杂度相对于“一般性方法”都不高。

例如 POI99 《多边形》，IOI96 的取数字也可以用“特殊性方法”来解决。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

- 状态

列举影响结局胜负的所有因素，综合描述成“**状态**”，但并不需要构造出“**状态转移的拓扑结构**”。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

● 逆向分析

从简单的结局或残局开始，自底向上分析。

考察特殊情况下（譬如小规模，对称，极大极小等特殊值），先手胜或先手败的一类状态，并尝试从以下几个方面寻找共性：

- | 对称性
- | 简捷性
- | 奇异性

通过分析，将所得性质推广到一般情况，从而找出一类必胜或必败的“**平衡状态**”，同时也得到保持状态“平衡”的“**决策规律**”。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法 与 特殊性方法

《取石子》问题的推广：

- | 一次可取先前对方所取石子数的 3 倍
- | 一次可取先前对方所取石子数的 4 倍
- | 一次可取先前对方所取石子数的 5 倍
- |
- | 一次可取先前对方所取石子数的 K 倍

一般性方法
VS
特殊性方法

浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法与特殊性方法

● 思路方向

一般性方法：

自顶而下 考察所有状态胜负

特殊性方法：

自底而上 研究一类平衡状态

浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法与特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则

一般性方法：

有通行胜负规则

特殊性方法：

无通行胜负规则

浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法与特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则
- 实现方法

一般性方法：

关键是动态规划或记忆化搜索的预处理。

特殊性方法：

着重于事先的思考，再将“决策规律”转化成程序。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法与特殊性方法

- 思路方向
- 优点缺点
- 胜负规则
- 实现方法

一般性方法：

有通行规则可套用，应用面十分广泛；但是受“拓扑结构”限制，而且需考察所有状态，时空复杂度也有可能很高。

特殊性方法：

不受“拓扑结构”限制，无须考察所有状态，时空复杂度低，编程简单；但是无通行规则，思考难度大。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法 与 特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则
- 实现方法
- 优点缺点
- 核心思想

在“对策问题”中，一个状态要么是先手必胜，要么是先手必败！因此，在对局时，我方要做的就是占据必胜，把必败留给对方。

这正是解“对策问题”的核心思想！

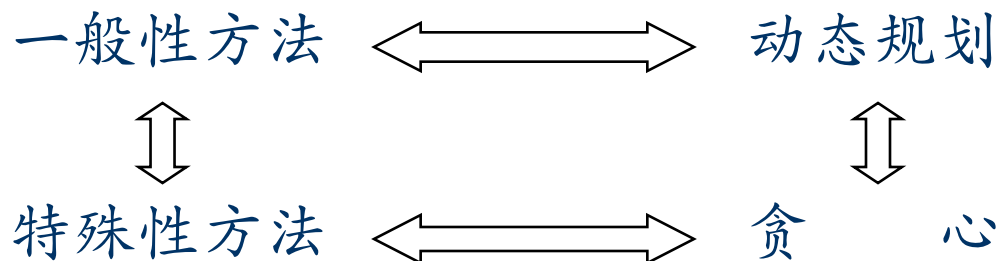
浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法与特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则
- 实现方法
- 优点缺点
- 核心思想
- 延伸类比

“一般性方法”从统一的角度，考察所有状态，来决定对局策略。

“特殊性方法”从特殊的角度，考察一类状态，来决定对局策略。



浅析解 “对策问题” 的两种思路

结 语

“对策论”是运筹学的一个重要分支。本文通过《取石子》问题，简单的阐述了解决一类“对策问题”的两种思路，也是我的一点心得，但并不能涵盖万一。

文中介绍的“一般性方法”与“特殊性方法”既是方法，也是思路，更是一种思想。在解其他类型的题目时，也同样可以应用这两种思考方法。

浅析解 “对策问题” 的两种思路

结 语

“ 纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。”

我们还需要不断努力，不断实践，不断探索。只有实践多了，方能：

- | 充分运用正向与逆向的思维
- | 从各个角度观察问题
- | 从一般到特殊，从特殊到一般
- | 取长补短，采取合理的实现方法

浅析解 “对策问题” 的两种思路

结 语

运筹于帷幄之中
决胜于千里之外