

# 平面图在信息学中的应用

海南省海南中学 刘才良

# 引言

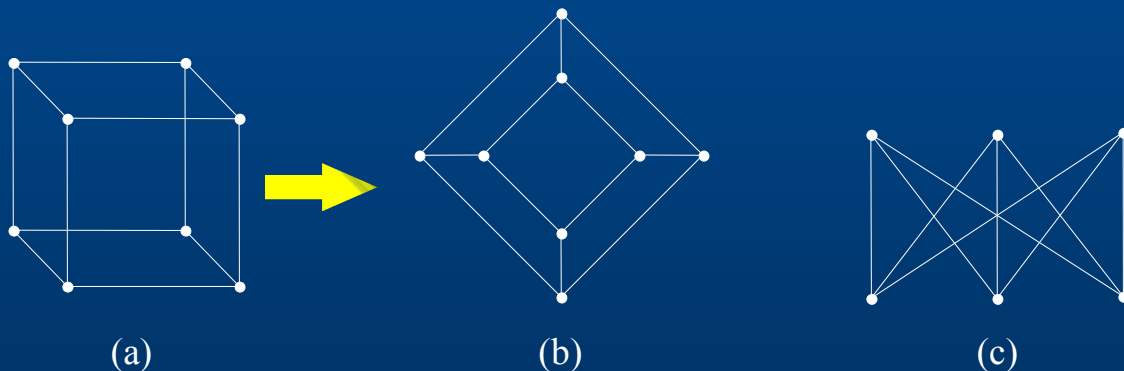
- 平面图是图论中一类重要的图，在实际生产中应用非常广泛。比如集成电路的设计就用到平面图理论。在信息学中，虽然有关平面图题目并不多见，但对于某些题目，如果通过建模转化，应用平面图的性质，将大大提高算法的效率。因此，掌握一些平面图理论会对我们有很大的帮助。

# 相关定义、定理及推论

## ● 平面图

- 一个无向图  $G = \langle V, E \rangle$ ，如果能把它画在平面上，且除  $V$  中的节点外，任意两条边均不相交，则称该图  $G$  为平面图。

例如：图 (a) 经变动后成为 (b)，故图 (a) 为平面图。而图 (c) 无论如何变动，总出现边相交，图 (c) 为非平面图。



# 相关定义、定理及推论

- 面

- 设  $G$  为一平面图，若由  $G$  的一条或多条边所界定的区域内不含图  $G$  的节点和边，这样的区域称为  $G$  的一个面，记为  $f$ 。包围这个区域的各条边所构成的圈，称为该面  $f$  的边界，其圈的长度，称为该面  $f$  的度，记为  $d(f)$ 。为强调平面图  $G$  中含有面这个元素，把平面图表示为  $G = \langle V, E, F \rangle$ ，其中  $F$  是  $G$  中所有面的集合。

# 相关定义、定理及推论

- 定理 1: 若  $G=\langle V, E, F \rangle$  是连通平面图, 则  $\sum_{f \in F} d(f) = 2|E|$ .
- 定理 2: 若  $G=\langle V, E, F \rangle$  是连通平面图, 则  $|V|-|E|+|F|=2$ .


首先假定  $G$  是树, 则  $|E|=|V|-1$ ,  $G$  只有一个无限面, 因此  $|V|-|E|+|F|=|V|-(|V|-1)+1=2$ .

现在假设  $G$  不是树, 由于  $G$  是连通的, 故  $G$  中至少存在一个基本圈  $C$ , 于是  $G$  必有一个有限面  $f$ , 而  $f$  的边界是由基本圈  $C$  及可能连同计算两次的一些边组成. 如果从  $G$  中删去基本圈  $C$  上的一条边后得到的平面图  $G_1=\langle V_1, E_1, F_1 \rangle$ , 则  $|V_1|=|V|$ ,  $|E_1|=|E|-1$ ,  $|F_1|=|F|-1$ , 故  $|V_1|-|E_1|+|F_1|=|V|-|E|+|F|$ , 仿此做下去, 最终得到  $G$  的一棵生成树  $T_0=\langle V_0, E_0, F_0 \rangle$ , 于是

$$|V|-|E|+|F|=|V_0|-|E_0|+|F_0|=2.$$

# 相关定义、定理及推论

- 推论 1：给定连通简单平面图  $G=\langle V, E, F \rangle$ ，若  $|V|\geq 3$ ，则  $|E|\leq 3|V|-6$  且  $|F|\leq 2|V|-4$ 。
- 推论 2：设  $G=\langle V, E, F \rangle$  是连通简单平面图，若  $|V|\geq 3$ ，则存在  $v\in V$ ，使得  $d(v)\leq 5$ 。

推论 1：  $|E|=O(|V|)$  

邻接表、散列表结构  $O(|V|)$

VS

邻接矩阵结构  $O(|V|^2)$

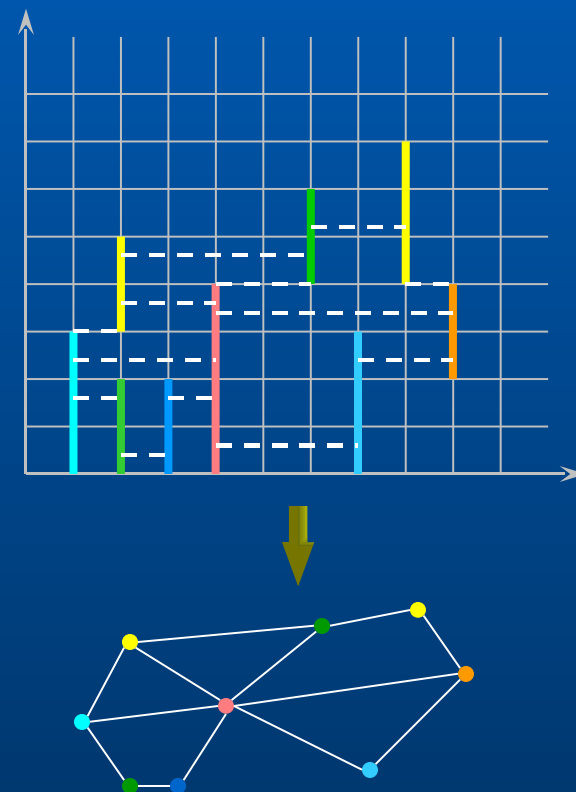
## 应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

平面上有  $N(N \leq 8000)$  条互不相连的竖直线段。如果两条线段可以被一条不经过第三条竖直线段的水平线段连接，则这两条竖直线段被称为“水平可见”的。三条两两“水平可见”的线段构成一个“三元组”。求给定输入中“三元组”的数目。  
(坐标值为 0 到 8000 的整数)

# 应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

## 分析

- 把线段看成点
- 若两条线段水平可见，则在对应两点之间连一条边，建立无向图  $G$
- 统计  $G$  中的三角形的数目



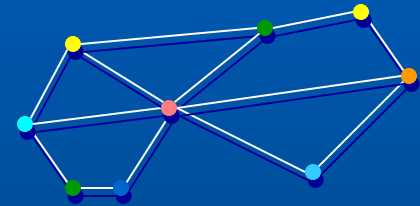


# 应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

如何建立图  $G$  ?

- 算法一

- 设数组  $C[I]$  ( $I=0..2Y_{max}$ ) ,  $C[2y]$  表示覆盖  $y$  点的最后一条线段,  $C[2y+1]$  表示覆盖区间  $(y,y+1)$  的最后一条线段
- 把线段按从左到右的顺序排序
- 依次检查每一条线段  $L(L=[y', y''])$ 
  - 检查  $L$  覆盖的所有整点和单位区间 ( $C[u]$ ,  $u=2y'..2y''$ )
  - 若  $C[u] \neq 0$  , 则  $G.AddEdge(C[u], L)$
  - $C[u] \leftarrow L$



时间性能分析

$\hookrightarrow O(M \log N)$

$\hookrightarrow O(N)$

$\hookrightarrow O(Y_{max})$

总计:  $O(NY_{max})$

# 应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

如何建立图  $G$  ?

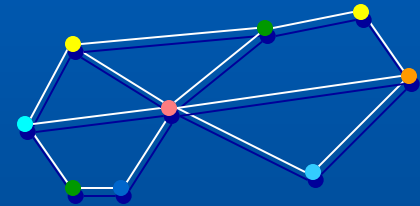
- 算法二

- 定义线段树  $T$  :

- 设节点  $N$  描述区间  $[a,b]$  的覆盖情况
      - 0 (无线段覆盖  $[a,b]$ )
      - 则  $N.Cover = L$  (线段  $L$  完全覆盖  $[a,b]$ )
      - 1 (其他情形)

- 线段树的存储:

使用完全二叉树的数组结构, 可以免去复杂的指针运算和不必要的空间浪费。



时间性能分析

排序:  $O(M \log N)$

检索:  $O(M \log Y_{max})$

插入:  $O(M \log Y_{max})$

总计:  $O(M \log Y_{max})$

空间性能分析

线段:  $O(N)$

线段树:  $O(Y_{max})$

边表:  $O(N)$

# 应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

## 统计图 $G$ 中三角形的数目

- 算法一

枚举所有的三元组，判断三个顶点是否两两相邻。由于总共有  $C_n^3$  个三元组，因此时间复杂度为  $O(N^3)$

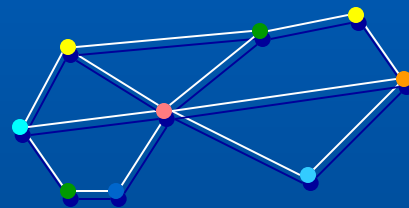
- 算法二

枚举一条边，再枚举第三个顶点，判断是否与边上的两个端点相邻。根据水平可见的定义可知  $G$  为平面图， $G$  中的边数为  $O(N)$ ，故算法二的复杂度为  $O(N^2)$

- 算法一与算法二的比较

算法一只是单纯的枚举，没有注意到问题的实际情况，而实际上三角形的数目是很少的，算法一作了许多无用的枚举，因此效率很低。

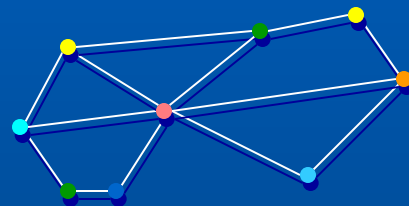
算法二从边出发，枚举第三个顶点，这正好符合了问题的实际情况，避免了许多不必要的枚举，所以算法二比算法一更加高效。



# 应用 - 例 1: 水平可见线段 (CEPC2001)

有没有更好的办法？

- 算法三—换个角度，从点出发  
每次选取度最小的点  $v$ ，由推论 2 知  $d(v) \leq 5$ ，只需花常数时间就可以计算含点  $v$  的三角形的数目。  
应用二叉堆可以提高寻找和删除点  $v$  的效率，总的时间复杂度仅为  $O(M \log N)$
- 算法二与算法三的比较  
算法二是以边作为出发点的，从整体上看，平面图中三角形的个数只是  $O(N)$  级的，而算法二的复杂度却是  $O(N^2)$ ，这种浪费是判断条件过于复杂造成的。算法三从点出发，则只需要判断某两点是否相邻即可。



## 应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

在同一水平面上有  $N(N \leq 500)$  个洞穴，洞穴之间有通道相连，且每个洞穴恰好连着三个通道。通道与通道不相交，每个通道都有一个难度值，现从 1 号洞穴开始遍历所有的洞穴刚好一次并回到洞穴 1，求通过通道难度值之和的最小值。（给定所有通道的信息和在外圈上的洞穴）

# 应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

## 分析

- 本题求的是最优路径，但最优路径具备什么性质并不明显，故考虑深度优先搜索。
- $N$  最大达到 500，考虑剪枝以提高效率。
- 基本剪枝条件：若当前路径的难度值的总和比当前最优值大则放弃当前路径。
- 为了找到强剪枝条件，考虑问题所具有的特性
  - 所有点的度数为 3
  - 所给的图是平面图
  - 外圈上的点已知

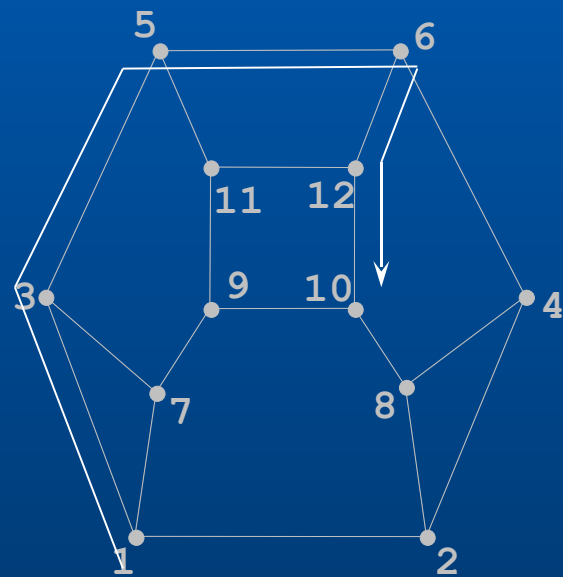
# 应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

- 情形一

考虑路径 1-3-5-6-12-10，由于每个洞穴必须被访问到，而 11 号洞穴只有一条可用通道 9-11，访问 11 后不能再回到 1，故该路径不可能遍历所有点。

- 剪枝条件一

在所有未访问的洞穴中，与其相邻的已访问过的洞穴（第 1 个与当前访问的最后一个除外）的个数小于等于 1。



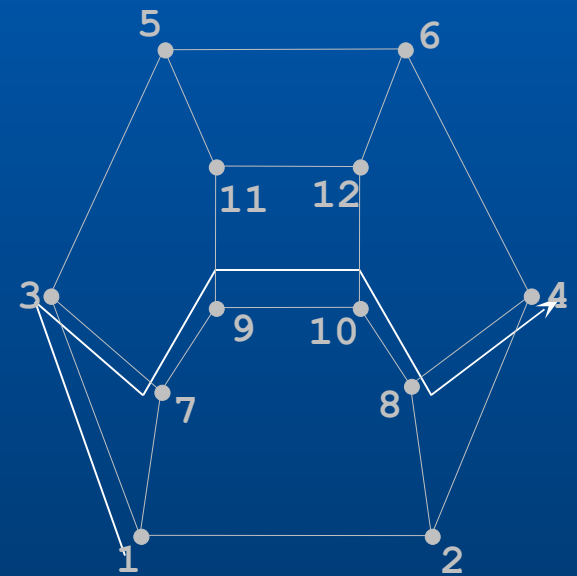
# 应用 - 例 2: 洞穴 (CEOI97)

- 情形二

路径 1-3-7-9-10-8-4 把图分成两部分，而且两部分中都有未访问过的点。由于图是平面图，其中必有一部分点不能被访问到。

- 剪枝条件二

设外圈上的点按连接顺序为  $1, a_2, \dots, a_k$ ，则访问的顺序只能为：  
 $1, \dots, a_2, \dots, a_3, \dots, \dots, a_k, \dots, 1.$





# 应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

给定一地图，要求用不超过 5 种颜色涂每一个区域，使得相邻区域的颜色不同。  
(区域数  $\leq 500$ )

分析:

把每个区域看成点，相邻区域之间连一条边，则问题转化为对每个点着色并使得相邻点颜色不同。

根据地图的平面性可知：转化后的图是平面图。

对于任意平面图  $G$ ，是否都能用不超过 5 种颜色着色？

# 应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

定理：对于任意平面图  $G$ ，都能用不超过 5 种颜色着色。

证明：只需考虑  $G$  是连通简单平面图的情形。

若  $|V| \leq 5$ ，则命题显然成立。

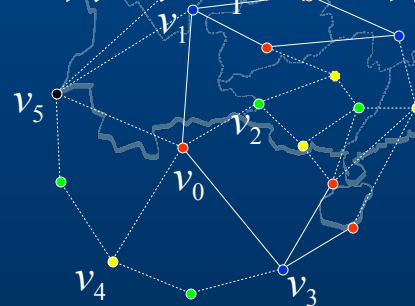
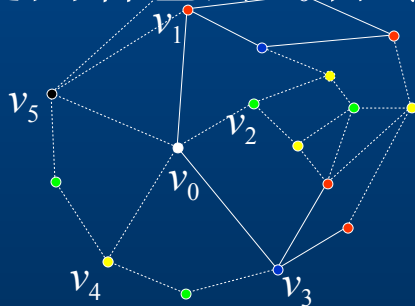
假设对所有的平面图  $G = \langle V, E \rangle$ ，当  $|V| \leq k$  时命题成立。现在考虑图  $G_1 = \langle V_1, E \rangle$ ， $|V_1| = k+1$  的情形。由推论 2 可知：存在  $v_0 \in V_1$ ，使得  $d(v_0) \leq 5$ 。在图  $G_1$  中删去  $v_0$ ，得图  $G_1 - v_0$ 。由归纳，图  $G_1 - v_0$  可用 5 种颜色着色。

若邻接结点使用颜色数不超过 4，则可对  $v_0$  着色

# 应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

若  $d(v_0)=5$  且各邻接点分别着不同的颜色, 则设与之相邻的点的按顺时针排列为  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ . 它们分别着不同的颜色  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ .

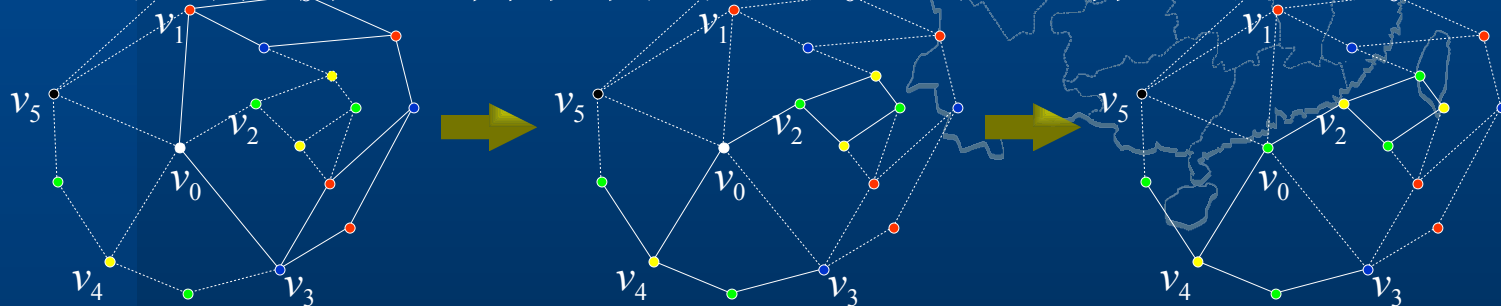
考虑点集  $V_{c_1, c_3} = \{v | v \in V(G_1 - v_0) \wedge \alpha(v) = c_1 \text{ 或 } c_3\}$  所诱导的  $G_1 - v_0$  的子图  $\langle V_{c_1, c_3} \rangle$ . 若  $v_1, v_3$  属于  $\langle V_{c_1, c_3} \rangle$  的不同的分图, 则在  $v_1$  所在的分图中, 调换颜色  $c_1$  与  $c_3$  后,  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  五个点是四着色的, 再令  $v_0$  着  $c_1$  色, 得到  $G_1$  的一种五着色.



# 应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

若  $v_1, v_3$  属于  $\langle V_{c_1, c_3} \rangle$  的同一的分图, 则点集  $V_{c_1, c_3} \cup \{v_0\}$  所诱导的  $G_1$  的子图中含有一个圈  $C$ , 而  $v_2, v_4$  不能同时在圈的内部或外部, 即  $v_2, v_4$  不是邻接点, 于是考虑  $V_{c_2, c_4} = \{v \mid v \in V(G_1 - v_0) \wedge \alpha(v) = c_2 \text{ 或 } c_4\}$  所诱导的子图  $\langle V_{c_2, c_4} \rangle$ ,  $v_2, v_4$  必属于  $\langle V_{c_2, c_4} \rangle$  的不同的分图. 做与上面类似的调整, 又可得到  $G_1$  的一种五着色.

故对任何连通简单平面图  $G$ ,  $G$  是五着色的.



# 应用 - 例 3: 地图着色 (ACM Shanghai 2000)

算法:

procedure Paint( $G$ :Graph);

- 找出度最小的点  $v_0$
- Paint( $G-v_0$ )
- 考虑图  $G$ ，若无法对  $v_0$  着色，则对  $v_0$  的相邻点，枚举所有点对，直到找到属于不同分图的点对，对其进行调整。
- 任选剩下的一种颜色，对  $v_0$  着色

时间复杂度:  $O(N^2)$

空间复杂度:  $O(N)$

# 总结

以上例子分别论述了平面图理论在几类信息学问题中的应用。我们研究平面图就是为了更深刻地认识平面图，提高算法效率，但有时候单独应用平面图理论还不够，还需要和其它理论知识综合起来应用。然而要达到理想的效果并非一朝一夕的事情，它还需要我们平时多积累、多思考，遇到问题时才能运用自如。相信随着对平面图的研究不断深入，平面图的应用一定会更加广阔。

谢谢  
!