最短路算法及其应用

广东北江中学　　余远铭
yyming@hotmail.com

最短路问题是图论中的核心问题之一，它是许多更深层算法的基础。同时，该问题有着大量的生产实际的背景。不少问题从表面上看与最短路问题没有什么关系，却也可以归结为最短路问题。

一个在生活中常见的例子是：

乘汽车旅行的人总希望找出到目的地尽可能短的行程。如果有一张地图并在地图上标出了每对十字路口之间的距离，如何找出这一最短行程？

一种可能的方法是枚举出所有路径，并计算出每条路径的长度，然后选择最短的一条。

然而我们很容易看到，即使不考虑含回路的路径，依然存在数以百万计的行车路线！

实际上，其中绝大多数路线我们是没必要考虑的。

这时候，我们应该用一种系统的方法来解决问题，而不是通常人们所用的凑的方法和凭经验的方法。

定义

在最短路问题中，给出的是一有向加权图 G=(V,E)，在其上定义的加权函数 W:E→R 为从边到实型权值的映射。路径 P=(v0, v1,……, vk) 的权是指其组成边的所有权值之和：

$$w(p)=\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

定义 u 到 v 间最短路径的权为：

$$\delta(u,v)=\begin{cases}\min\{w(p): u \to v\} & \text{如果存在由 } u \text{ 到 } v \text{ 的通路} \\ \infty & \text{如果不存在}\end{cases}$$

从结点 u 到结点 v 的**最短路径**定义为 $w(p)=\delta(u,v)$ 权 的任何路径。

在乘车旅行的例子中，我们可以把公路地图模型化为一个图：结点表示路口，边表示连接两个路口的公路，边权表示公路的长度。我们的目标是从起点出发找一条到达目的地的最短路径。

边的权常被解释为一种度量方法，而不仅仅是距离。它们常常被用来表示时间、金钱、罚款、损失或任何其他沿路径线性积累的数量形式。

重要性质

定理 1 (最优子结构) 给定有向加权图 G=(V,E)，设 P=<v1, v2,…, vk> 为从结点 v1 到结点 vk 的一条最短路径，对任意 i,j 有 i<=j<=k，设 Pij=< vi, vi+1,…, vj> 为从 vi 到 vj 的 P 的子路径 , 则 Pij 是从 vi 到 vj 的一条最短路径。

证明：我们把路径 P 分解为 <v1,v2,…,vi,vi+1,… vj,…vk> 。则 w(P)=w(P1i)+w(Pij)+w(Pjk) 。现在假设从 vi 到 vj 存在一路径 P'ij，且 w(P'ij)<w(Pij)，则将 P 中的路径 Pij=(vi,vi+1,…vj) 替换成 P'ij，依然是从 v1 到 vk 的一条路径，且其权值 w(P1i)+w(P'ij)+w(Pjk) 小于 w(P)，这与前提 P 是从 v1 到 vk 的最短路径矛盾。（证毕）

推论

推论 1.1 给定有向加权图 G=(V,E), 源点为 s，则对于所有边 (u,v) ∈ E，有：

$$\delta(s,v) \le \delta(s,u) + w(u,v)$$

证明： 从源点 s 到结点 v 的最短路径 P 的权不大于从 s 到 v 的其它路径的权。特别地，路径 P 的权也不大于某特定路径的权，该特定路径为从 s 到 u 的最短路径加上边 (u,v) 。（证毕）

松弛技术

对每个结点 $v \in V$，我们设置一属性 d[v] 来描述从源 s 到 v 的最短路径的权的上界，称之为最短路径估计。我们通过下面的过程对最短路径估计和先辈初始化。

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
1. For   每个结点 ∈ V[G]
2.    Do  d[v] ← ∞
3.        π[v] ← NIL
4. d[s] ← 0
```

一次松弛操作可以减小最短路径的估计值 d[v] 并更新 v 的先辈域 π[v]

```
RELAX(u,v,w)
1.  If d[v] > d[u] + w(u,v)
2.     Then d[v] ← d[u] + w(u,v)
3.          π[v] ← u
```

常用算法

一、 Dijkstra 算法

二、 Bellman-Ford 算法

三、 SPFA 算法

Dijkstra 算法

Dijkstra 算法中设置了一结点集合 S，从源结点 s 到集合 S 中结点的最终最短路径的权均已确定，即对所有结点 v ∈ S，有 δ[v]= (s,v)。算法反复挑选出其最短路径估计为最小的结点 u ∈ V-S，把 u 插入集合 S 中，并对离开 u 的所有边进行松弛。

```
Dijkstra(G,w,s)
1.  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,S)
2.  S ← ∅
3.  Q ← V[G]
4.  While Q ≠ ∅
5.      Do  u ← EXTRACT-MIN(Q)
6.          S ← S U {u}
7.          For 每个顶点 v ∈ Adj[u]
8.              Do  RELAX(u,v,w)
```

Dijkstra 算法

适用条件： 所有边的权值非负

定理 2 每当结点 u 插入集合 S 时，有 d[u]= (s,u) 成立。

简证：我们每次选择在集合 V-S 中具有最小最短路径估计的结点 u，因为我们约定所有的边权值非负，所以有可能对结点 u 进行松弛操作的结点必不在集合 V-S 中（否则与结点 u 的定义矛盾），因此只会在集合 S 中。又由于我们选取结点进入 S 时， S 中的结点已全部进行过松弛操作了，所以 d[u] 的值不会再发生改变。因此 d[u]= (s,u) 。（证毕）

效率：

- 用一维数组来实现优先队列 Q， O( ) ，适用于中等规模的稠密图
- 二叉堆来实现优先队列 Q， O((E+V)logV) ，适用于稀疏图
- 用 Fibonacci 堆来实现优先队列 Q 的话， O(VlogV) ，可惜编程复杂度过高，理论价值远大于实用价值

Bellman-Ford 算法

Bellman-Ford 算法运用了松弛技术，对每一结点 $\in$ V，逐步减小从源 s 到 v 的最短路径的估计值 d[v] 直至其达到实际最短路径的权 δ(s,v)，如果图中存在负权回路，算法将会报告最短路不存在。

```
Bellman-Ford(G,w,s)
1.  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
2.  For i ← 1 to |V[G]|-1
3.      Do  For  每条边 (u,v) ∈  E[G]
4.          Do  RELAX(u,v,w)
5.  For  每条边 (u,v) ∈  E[G]
6.      Do  If d[v] > d[u] + w(u, v)
7.              Then Return FALSE
8.  Return TRUE
```

Bellman-Ford 算法

适用条件： 任意边权为实数的图

Bellman-Ford 算法的思想基于以下事实：“两点间如果有最短路，那么每个结点最多经过一次。也就是说，这条路不超过 n-1 条边。”（如果一个结点经过了两次，那么我们走了一个圈。如果这个圈的权为正，显然不划算；如果是负圈，那么最短路不存在；如果是零圈，去掉不影响最优值）

根据最短路的最优子结构（定理 1），路径边数上限为 k 时的最短路可以由边数上限为 k-1 时的最短路“加一条边”来求，而根据刚才的结论，最多只需要迭代 n-1 次就可以求出最短路。

效率：

Bellman-Ford 算法的运行时间为 O(VE)。很多时候，我们的算法并不需要运行 |V|-1 次就能得到最优值。对于一次完整的第 3-4 行操作，要是一个结点的最短路径估计值也没能更新，就可以退出了。

经过优化后，对于多数情况而言，程序的实际运行效率将远离 O(VE) 而变为 O(kE)，其中 k 是一个比 |V| 小很多的数。

SPFA 算法

我们用数组 d 记录每个结点的最短路径估计值，而且用邻接表来存储图 G 。我们采取的方法是动态逼近法：

设立一个先进先出的队列用来保存待优化的结点，优化时每次取出队首结点 u ，并且用 u 点当前的最短路径估计值对离开 u 点所指向的结点 v 进行松弛操作，如果 v 点的最短路径估计值有所调整，且 v 点不在当前的队列中，就将 v 点放入队尾。这样不断从队列中取出结点来进行松弛操作，直至队列空为止。

```
SPFA(G,w,s)
1.  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
2.  INITIALIZE-QUEUE(Q)
3.  ENQUEUE(Q,s)
4.  While Not EMPTY(Q)
5.      Do u ← DLQUEUE(Q)
6.          For 每条边 (u,v)∈E[G]
7.              Do tmp ← d[v]
8.                  Relax(u,v,w)
9.          If (d[v] < tmp) and (v 不在 Q 中 )
10.         ENQUEUE(Q,v)
```

SPFA 算法

适用条件： 任意边权为实数的图

定理 3　只要最短路径存在，上述 SPFA 算法必定能求出最小值。

证明：每次将点放入队尾，都是经过松弛操作达到的。换言之，每次的优化将会有某个点 v 的最短路径估计值 d[v] 变小。所以算法的执行会使 d 越来越小。由于我们假定图中不存在负权回路，所以每个结点都有最短路径值。因此，算法不会无限执行下去，随着 d 值的逐渐变小，直到到达最短路径值时，算法结束，这时的最短路径估计值就是对应结点的最短路径值。（证毕）

定理 4　在平均情况下， SPFA 算法的期望时间复杂度为 O(E) 。

证明：上述算法每次取出队首结点 u ，并访问 u 的所有临结点的复杂度为 O(d) ，其中 d 为点 u 的出度。运用均摊分析的思想，对于 |V| 个点 |E| 条边的图，点的平均出度为 $\frac{E}{V}$ ，所以每处理一个点的复杂度为 $O(\frac{E}{V})$ 。假设结点入队次数为 h ，显然 h 随图的不同而不同。但它仅与边权值分布有关。我们设 h=kV ，则算法 SPFA 的时间复杂度为 $T=O\left(\frac{E}{V}\right)\times O\left(\frac{n}{V}\times E\right)=O(kE)$ 在平均的情况下，可以将 k 看成一个比较小的常数，所以 SPFA 算法在一般情况下的时间复杂度为 O(E) 。（证毕）

小结

Dijkstra 算法的效率高，但是也有局限性，就是对于含负权的图无能为力。

Bellman-Ford 算法对于所有最短路长存在的图都适用，但是效率常常不尽人意。

SPFA 算法可以说是综合了上述两者的优点。它的效率同样很不错，而且对于最短路长存在的图都适用，无论是否存在负权。它的编程复杂度也很低，是高性价比的算法。

算法	时间复杂度	空间复杂度	编程复杂度	适用范围
Dijkstra	O(V^2) 或 O((E+V)logV)	O(V^2) 或 O(E+V)	简单或相对复杂	不含负权的图 (窄)
Bellman-Ford	O(VE)	O(E+V)	简单	实数图 (广)
SPFA	O(E)	O(E+V)	简单	实数图 (广)

我们应该根据实际需要，找到时空复杂度和编程复杂度的平衡点，在考场上用最少的时间拿尽可能多的分数。

例一 双调路径 (BOI2002)

题意简述：

- 如今的道路密度越来越大，收费也越来越多，因此选择最佳路径是很现实的问题。城市的道路是双向的，每条道路有固定的旅行时间以及需要支付的费用。路径由连续的道路组成。总时间是各条道路旅行时间的和，总费用是各条道路所支付费用的总和。同样的出发地和目的地，如果路径 A 比路径 B 所需时间少且费用低，那么我们说路径 A 比路径 B 好。对于某条路径，如果没有其他路径比它好，那么该路径被称为最优双调路径。这样的路径可能不止一条，或者说根本不存在。
- 给出城市交通网的描述信息，起始点和终点城市，求最优双条路径的条数。城市不超过 100 个，边数不超过 300 ，每条边上的费用和时间都不超过 100 。

例一 双调路径 (BOI2002)

分析：

- 这道题棘手的地方在于标号已经不是一维，而是二维，因此不再有全序关系。我们可以采用拆点法，让 d[i,c] 表示从 s 到 i 费用为 c 时的最短时间。

算法一：

标号设定算法是根据拓扑顺序不断把临时标号变为永久标号的。

在这题中，其实，我们并不需要严格的拓扑顺序，而只需要一个让标号永久化的理由。拓扑顺序能保证标号的永久化，但是还有其他方式。在本题中，标号永久化的条件是：从其他永久标号得不到费用不大于 c 且时间不大于 t 的临时标号（这里利用了费用和时间的非负性），即：所有的“极小临时标号”都可以永久化。这样，一个附加的好处是一次把多个临时标号同时变成永久的。

例一 双调路径 (BOI2002)

假设时间上限为 t，费用上限为 c，城市数为 n，边数为 m，则每个点上的标号不超过 O(nc) 个，标号总数为 O(n*n*c) 个，每条边考虑 O(nc) 次。如果不同顶点在同一费用的临时标号用堆来维护，不同费用的堆又组成一个堆的话，那么建立（或更新）临时标号的时间为 O(mnclognlogc)，总的时间复杂度为 O(nnc+mnclognlogc)，本题的规模是完全可以承受的。实际上由于标号的次数往往远小于 nnc，程序效率是相当理想的

算法二：

在本题中构图直接用 SPFA 算法。

在最坏情况下，费用最大值 c 为 100 * 100=10000，那么每个点将被拆成 10000 个点，由于原图边数不超过 300，所以我们构造的新图中边数不会超过 3000000 。

因此算法的时间复杂度是 O(k*3000000) 。写出来的程序运行的实际效果非常好，每个数据的速度都比官方参考程序（算法一）快，有几个甚至比官方程序快 3~4 倍！完全通过这题简直是轻而易举。这和我们对时间复杂度在理论上的分析是一致的。

例一 双调路径 (BOI2002)

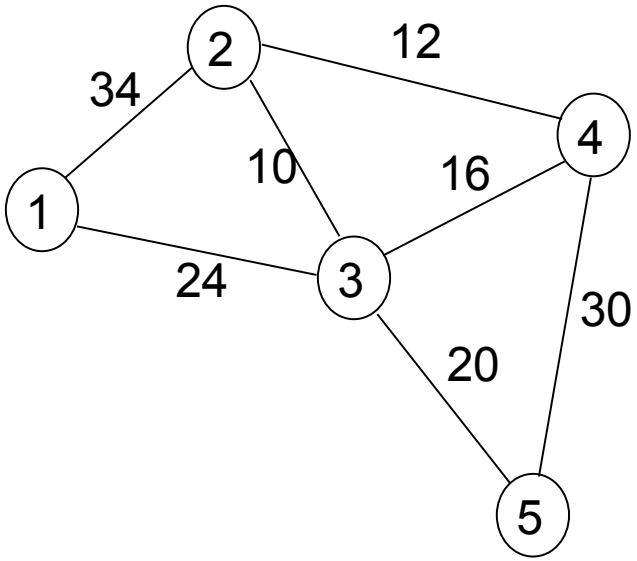
- 两个算法在空间上是同阶的，一样是 O(E) 。虽然算法一仅用到二叉堆，并不是特别复杂，但是因为要用两个堆，建立更新删除写起来还是有一定的工作量的。 SPFA 算法写起来极其简单，效率又高，而且适用范围广（可以处理含有负权的图），在很多情况下，是最短路问题上好的选择。

例二 网络提速（经典问题）

题意简述：

- 某学校的校园网由 n(1<=n<=50) 台计算机组成，计算机之间由网线相连，其中顶点代表计算机，边代表网线。不同网线的传输能力不尽相同。
- 现学校购买了 m(1<=m<=10) 台加速设备，每台设备可作用于一条网线，使网线上传输信息用时减半。多台设备可用于同一条网线，其效果叠加。
- 如何合理使用这些设备，使计算机 1 到计算机 n 传输用时最少，这个问题急需解决。校方请你编程解决这个问题。

例二 网络提速（经典问题）



- 如图，若 n=5， m=2，则将两台设备分别用于 1-3， 3-5 的线路，传输用时可减少为 22 秒，这是最佳解。

例二 网络提速（经典问题）

分析：

- 让我们重新描述一下问题：

给定含有 n 个顶点的带权无向图，一共可以进行 m 次操作，每次操作将一条边的权值除以 2 。问每次应该对哪条边进行操作，使得 1 到 n 的最短路径权和最小。

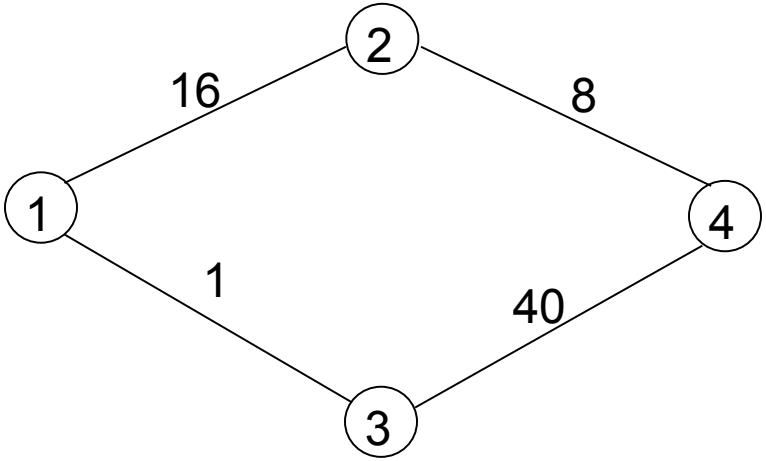
如果我们把 Dijkstra 算法直接用在原图上，得到的是没有使用任何加速设备顶点 1 到顶点 n 的最短路长，不是我们想要的结果。

能否用增量法做这题呢？就是，我们先求出使用前 m-1 台加速设备的最短路长，然后通过枚举之类算出第 m 台设备用在那条边上，行不行呢？

经过简单的举例后发现行不通。

例二 网络提速（经典问题）

一个明显的反例是：



如果我们只有一个加速设备的话，显然将它加在 1-2 上，那么最短路长 16 是最佳的。

但是，我们有两个的话，将两个都加在 3-4 上，则最短路长 11 是最优的。

所以要是我们的加速设备增多一台的话，可能导致前面的所有放置方案都不是最优值。

例二 网络提速（经典问题）

我们注意到一点，就是 n 和 m 都很小，特别是 m ，最大只有 10 。直觉和经验告诉我们，应该从数据规模小上面作文章。

从简单情形入手往往是解题的捷径。

没有 m 值，或者说 m=0 时，问题的解就是最简单的最短路径问题。 m 值的出现导致了最短路算法的失败。

关键是我们不知道应该在哪几条边用加速设备，而且每条边用多少次也不知道。方案与权值的分布还有 m 值的大小都有莫大的关联。

我们想想，有无 m 值的差异在哪，能够消除吗？

可以的。

例二 网络提速（经典问题）

构造图 G=(V,E)。设原图 $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$，将原图中的每个顶点 vi 拆成 m+1 个顶点 $v_{i,0}, v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots\ldots, v_{i,m}$，构造 V 使得：

$$V = \{v_{i,0}, v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots\ldots, v_{i,m} \mid v_i \in V_0\}$$

对于原图的每一条边，注意是无向的，$e_k = v_i v_j \in E_0$，将它拆成 (m+1)(m+2) 条有向边：

$$(e_k)_{0,0} = v_{i,0}v_{j,0} \quad (e_k)_{0,1} = v_{i,0}v_{j,1} \quad \cdots\cdots \quad (e_k)_{m,m} = v_{i,m}v_{j,m}$$

$$(e_k)'_{0,0} = v_{j,0}v_{i,0} \quad (e_k)'_{0,1} = v_{j,0}v_{i,1} \quad \cdots\cdots \quad (e_k)'_{m,m} = v_{j,m}v_{i,m}$$

构造 E 使得：

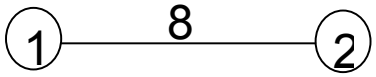
$$E = \{(e_k)_{p,q}, (e_k)'_{p,q} \mid e_k \in E_0, 0 \le p, q \le m\}$$

最后设定权函数 w。对于 $v_{i,p}v_{j,q} \in E$，w 满足：

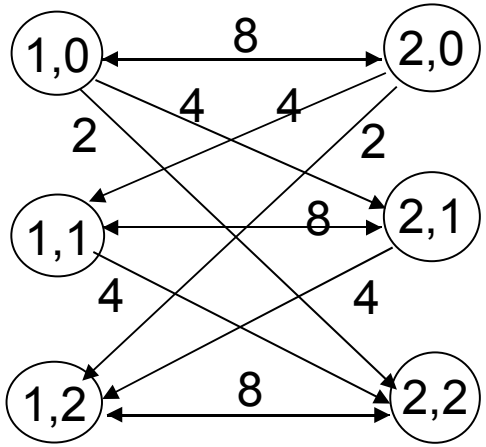
$$w(v_{i,p}v_{j,q}) = w(v_i, v_j) \times 2^{q-p}$$

例二 网络提速（经典问题）

解释一下图 G 的含义。
为了更清楚地说明问题，我们举出一个例子。下图 (a) 显示了某个 G0(n=2,m=2)，按照以上的构造方法得出 (b) 中的 G 。将图 G 分成三层，第 0 层由顶点 v1,0， v2,0 构成，第 1 层由顶点 v1,1， v2,1 构成，第 2 层由顶点 v1,2， v2,2 构成。可以看出，若两个顶点间有边相连，两个顶点在同一层的，则顶点之间是互连的，若不在同一层，则层号小的顶点为边的起始点，层号大的为边的终点。



(a)



(b)

例二 网络提速（经典问题）

层号代表已用的加速设备台数，例如 $v_{1,0}$ 到 $v_{2,1}$ 需要且恰好要用一台加速设备。我们无法从层号大的顶点到达层号小的顶点，这符合同一个设备不能使用多次的规定。

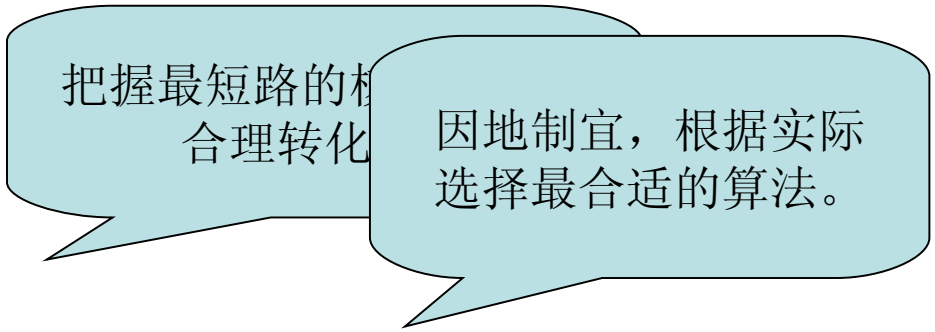
顶点 $v_{1,0}$ 到 $v_{n,m}$ 的最短路长就是添置 m 台加速设备后计算机 1 到计算机 n 的最少传输时间。

剩下的工作就是对图 G 使用 Dijkstra 算法求 $v_{1,0}$ 到 $v_{n,m}$ 的最短路长。相信大家都会，我就不多说了。

结语

- 我们从理论上研究问题的最终目的是更好地指导实践。
- 在题目中，往往不会直接告诉你，什么元素应该作为结点，什么元素应该作为边，应该如何构图。这就需要你根据题目的自身的特点，借鉴以往的解题经验，运用所学的相关知识，抽象出合适的模型，利用效率已有公论的算法高效求解。
- 实际中遇到的题目可能千奇百怪，模型的转化千变万化，从而导致解法也多种多样，不拘一格，本文实在难以涵盖万一，只要能对读者有所启发，那么我的目的也就达到了。

最后送上两句话：



万变不离其宗。

阵而后战，兵法之常；运用之妙，存乎一心。

谢谢大家