构造法

——解题的最短路径

构造法——解题的“最短路径”

- 构造法及其特点
- 常用的构造法
- 构造法的优、缺点

Back

构造法及其特点

- 什么叫构造法：

　　直接列举出满足条件的对象或反例，导致结论的肯定与否定，间接构造某种对应关系，使问题根据需要进行转化的方法。

- 构造法绝不是简单的尝试，也不是一时的运气
- 构造法使用的前提：存在性
- 构造法特别适用于竞赛中求单个可行解的题目

Back

常用的构造法

- 直接构造
- 分类构造
- 归纳构造

Back

构造法的优、缺点

- 优点：

  时空复杂度小，编程复杂度小

- 缺点：

  思维复杂度大

Back

直接构造

- 一种直接对目标对象进行考察的构造方法。
- 探索是直接构造的灵魂，在构造的背后，往往隐蔽着反反复复的尝试。
- 实际应用中，首先对于目标对象进行观察，发现一般性的规律，加以概括总结后运用至构造中。
- 在熟悉的事物中寻找，在特殊的事物中寻找，接合目标，不断地调整甚至改变方案，直至实现构造

例一：三臂起重机（1）

给出了三个数 p、q、n，要构造若干个三元组，符合以下四个要求：

（1）三元组必须具备形式（i，i+p，i+p+q）（i，i+q，i+p+q）之一。

（2）所有三元组中的元素不得超过 n+p+q。

（3）1，2，……，n+p+q 这 n+p+q 个数每个至多出现一次。

（4）这些三元组必须涵盖 1，2，……，n 这 n 个自然数。

$n \leqslant 300000$，$p+q \leqslant 60000$。

例一：三臂起重机（2）

很自然想到构造法。观察以下几个例子：

p=1,q=1	p=2,q=4	p=3,q=1	p=1,q=3
(1,2,3)	(1,3,7)	(1,4,5)	(1,2,5)
(4,5,6)	(2,4,8)	(2,3,6)	(3,4,7)
(7,8,9)	(5,9,11)	(7,10,11)	(6,9,10)
……	(6,10,12)	……	(8,11,12)
	……		……

容易得出下面类似贪心的方法：

- 设已经构造了 s 个三元组（x_1,y_1,z_1）、（x_2,y_2,z_2）、……（x_s,y_s,z_s），满足 $x_1<x_2<\cdots\cdots<x_s$ 。
- 取上面 s 个三元组中没有出现过的最小自然数 r

  1. r+p 没有出现过　$(x_{s+1},y_{s+1},z_{s+1})=(r,r+p,r+p+q)$

  2. r+p 出现过　$(x_{s+1},y_{s+1},z_{s+1})=(r,r+q,r+p+q)$

例一：三臂起重机（3）

这个方法马上被下面的例子推翻：		但是如果换一种填法：	
p=3,q=2	?处无论填5还是6均已出现过	p=2,q=3	交换一下p、q的位置，再应用上面的填法
(1,4,6)		(1,3,6)	
(2,5,7)		(2,4,7)	
(3,?,8)		(5,8,10)	
		(9,11,14)	
		……	

启发我们，应用上述填法的条件是：$p \leqslant q$，即当 $p>q$ 时，先交换p、q的位置。这仅仅是一个猜想，需要经过实践以及证明。

经过许多尝试，这种构造法仍然满足要求。因此，我们猜测本题完整的构造方法如下：

例一：三臂起重机（4）

- 若 p>q，则交换 p、q 的值，不影响构造的结果。
- 设已经构造了 s 个三元组（x_1,y_1,z_1）、（x_2,y_2,z_2）、……（x_s,y_s,z_s），满足 $x_1<x_2<\cdots\cdots<x_s$。
- 取上面 s 个三元组中没有出现过的最小自然数 r

  1．r+p 没有出现过　　$(x_{s+1},y_{s+1},z_{s+1})=(r,r+p,r+p+q)$

  2．r+p 出现过　　$(x_{s+1},y_{s+1},z_{s+1})=(r,r+q,r+p+q)$

✓从题面上看来，p、q 的位置应当是对称的，为什么会需要假设“p≤q”的情况呢?

例一：三臂起重机（5）

证明：若 r+p 出现过，那么 r+q 必定未出现。

反证法，设 r+p、r+q 均已出现。

1. $r+q=x_i+p$ （$1\leqslant i\leqslant s$），$q\geqslant p$

→ $r=x_i+p-q\leqslant x_i$，

与 r 是“前 s 个三元组中未出现的最小自然数”矛盾

3. $r+q=x_i+p+q$ （$1\leqslant i\leqslant s$），$r=x_i+p$，

→ x_i+p 未出现，

与“若 r+p 未出现，则优先选择 r+p” 矛盾

例一：小结

构造需要反复尝试

例二：区间染色问题（1）

给出了 n 个区间，已知对于 [t0,t1] 的任一点，都至少被一个区间所覆盖，要求对其中若干个区间进行染色，使得仅被一个染色区间覆盖的区域长度不少于 2/3(t1-t0)。

如：对下面的三个区间进行染色，红色部分为仅被一个染色区间覆盖的区域

例二：区间染色问题（2）

设这 n 个区间为 $[a_1, b_1]$，$[a_2, b_2]$，……，$[a_n, b_n]$，且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$

去除操作

前提：不存在无解情况

目的：区间之间的关系更简单明了

- $a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n$
- $b_1<b_2<\cdots\cdots<b_n$
- $b_1<a_3<b_2$，$b_2<a_4<b_3$，……，$b_{n-2}<a_n<b_{n-1}$

例二：区间染色问题（3）

1） 取 $[a_1, b_1]$、$[a_3, b_3]$、$[a_5, b_5]$…… 这些编号为奇数的区间。

i 为奇数

¿¿¿¿¿¿

n

1） 取 $[a_2, b_2]$、$[a_4, b_4]$、$[a_6, b_6]$…… 这些编号为偶数的区间。

i 为偶数

¿¿¿¿¿¿

n

1） 取 $[a_1, b_1]$、$[a_2, b_2]$、$[a_3, b_3]$…… 全部的 n 个区间。

$$l_3 = a_2 - a_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i+1} - b_{i-1} + b_n - b_{n-1}$$

例二：区间染色问题（4）

只需证：若 l_1 、 $l_2<2/3(t1-t0)$，必然有 $l_3\geqslant 2/3(t1-t0)$

变形得：

$$l_3=\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i+2(b_n-a_1)$$

$$l_1+l_2=\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} b_i,$$

$b_n\geqslant t1, a_1\leqslant t0$

$\Rightarrow$ $l_3\geqslant 2(t1-t0)-(l_1+l_2)>2(t1-t0)-4/3(t1-t0)=2/3(t1-t0)$

这就证明了：l_1 、 l_2 、 l_3 中间必然有一个不小于 $2/3(t1-t0)$，上述构造成立。

例二：小结

本题采用的方法特别之处在于：同时构造了多组情形，证明必然有一组符合要求。

对于某些题目，很难直接给出一种“必行”的构造方法，这时就需要我们为它“量身定做”多个构造方法，相辅相成。某种构造成立——导出结论的成立；不成立——却为其他的构造法创造了条件。

构造A不成立

构造B不成立

构造C不成立

⇒ 构造D成立

Back

分类构造

当所研究的问题包含有多种可能情况，并难以统一处理时，就需按所有可能出现的各种情况分类进行讨论，得出各种情况的相应结论，最后综合总结出问题的正确解答，这种方法称为分类法。

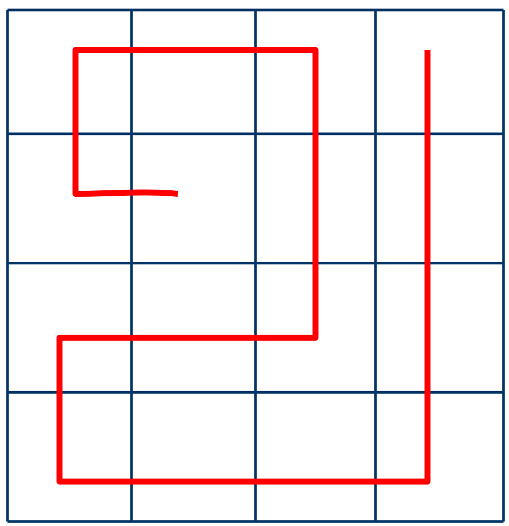
分类构造是分类的思想与构造法相结合的产物，简单说来，就是在分类的基础上进行构造。分类构造的步骤如下：

分析问题性质 ⇒ 对问题进行分类 ⇒ 针对每一类进行构造 ⇒ 合成整个问题的解

分类的各种思想在这里同样可以得到很好的应用，如按照剩余系分类（奇偶分类）、按照数据大小分类、按照题目中所涉及到的定义概念分类、按照参数的变化等等。

例三：棋盘遍历问题（1）

有一个n*n的正方形，某人从(x， y)出发，要求出一条符合要求的路线，经过每个格子一次且仅一次。

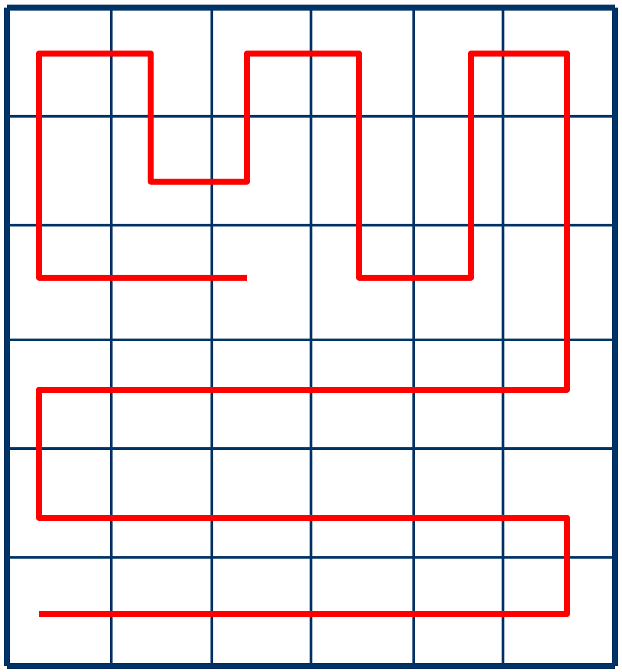


左图是
n=4， x=2， y=2
的情况

- ✓路线尽可能简单，转弯尽可能少——迂回状折线
- ✓特点：在边界处的方向与n、x、y的奇偶性有关

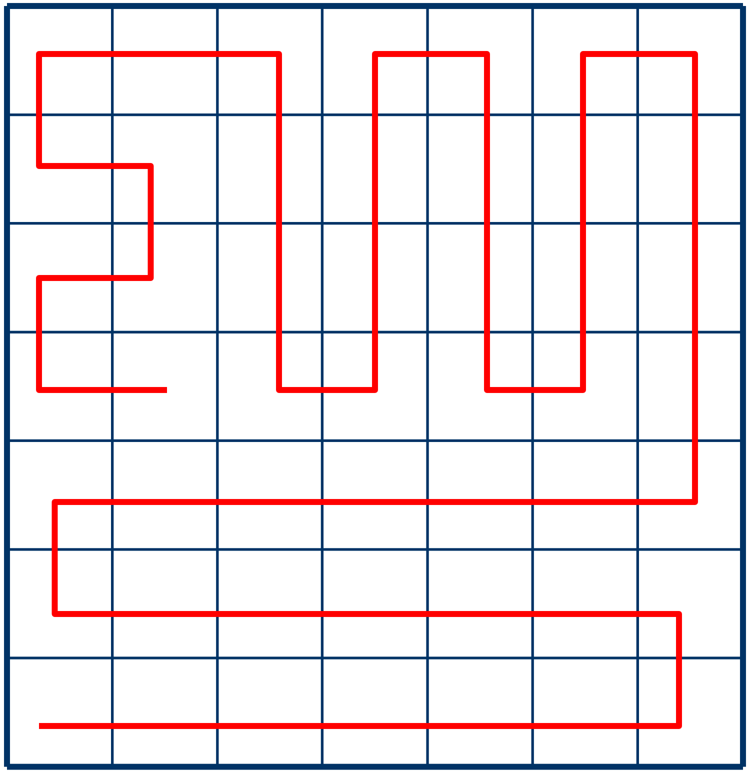
例三：棋盘遍历问题（2）

- 一旦n、x、y的奇偶性确定，路线在边界处的情况就可以唯一确定



- n是偶数，不妨设x、y均为奇数，否则适当地旋转、翻转棋盘。

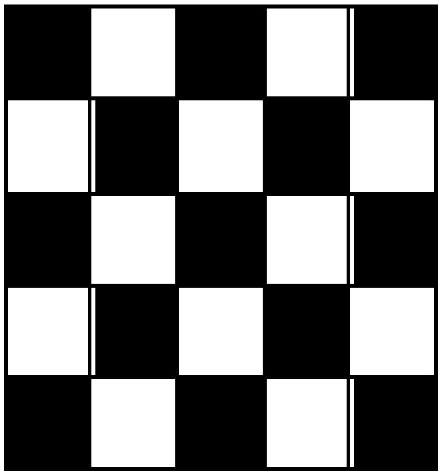
例三：棋盘遍历问题（3）



- n 为奇数

ii. x 、 y 奇偶性相同，不妨设 x 、 y 均为偶数，否则适当地旋转、翻转棋盘

例三：棋盘遍历问题（4）



- n 为奇数

ii. x 、 y 奇偶性不同，此时问题无解

先对棋盘进行黑白二染色，如左图

n 为奇数

遍历棋盘要走奇数步　终止点是黑格

x 为奇数、 y 为偶数　出发点是白格

黑格数 = 白格数

n 为奇数　黑格数 = 白格数 +1

矛盾

例三：小结

本题的分类并不是凭空得来的，而是基于“迂回性折线”的特点。这种路线到了边界处会出现不同的情形，需要我们区别对待。

构造的分类标准

与

选择的构造方法

息息相关。

Back

归纳构造

这里所说的归纳就是指数学归纳法。数学归纳法一直被人们津津乐道，因为有限的几步，跨越了无限的空间。它被频繁采用并衍生出多种形式：如第二归纳法、多起点归纳法、曲线归纳法等等。

归纳构造利用了归纳的思想，是构造法的一个经典的实现形式。在竞赛中，采用得比较普遍的仍然是一般归纳法＋构造法的形式。在这里，我们概括出这种方法一般的步骤如下：

构造 i=1 的情况

假设 i=j 已经构造出来，构造 i=j+1 的情况

利用归纳法，推广到 i=n 的情况

例四：赛程安排问题（1）

有 2^m 个选手，每一天安排若干场比赛，且每个选手每天仅可以参加一场比赛，试给出一种赛程的安排表，使得在 2^m-1 天内任意两个选手都至少比赛过一场。

分析：将赛程表设计成如下 2^m*2^m 的矩阵（除去第一行），记为 P_m。

	第一天	第二天	……	第 2^m-1 天	第 2^m 天
选手 1					
选手 2					
……					
选手 2^m-1					
选手 2^m					

例四：赛程安排问题（2）

容易知道，这个矩阵有以下几个特点：

2) 第 i 行第一列的数为 i，

3) 第 i 行的数的并集等于{1，2，3，……，2^m}

4) 第 j 列的数的并集等于{1，2，3，……，2^m}

5) 若第 i 行第 j 列的数字为 k，那么第 k 行第 j 列的数字为 i 。

采用归纳构造的基本思想是：首先构造出 P_m，在 P_m 的基础上构造出 P_{m+1}。

P_{m+1} 是一个 $2^{m+1}*2^{m+1}$ 的矩阵，启发我们将它均分成四个 2^m*2^m 的矩阵，实现从 P_m 到 P_{m+1} 的过渡。为了适应规模的增大，对于 P_m 中的元素进行适当的加减运算。

例四：赛程安排问题（3）

设 P_m 已经填好，将 P_{m+1} 均分为四份 A、B、C、D。

A	B
C	D

令 $A=D=P_m$， $B=C=P_m+2^m$（表示把 P_m 中的元素都加上 2^m 后形成的新矩阵）。

⇒ $P_{m+1}=$

P_m	P_m+2^m
P_m+2^m	P_m

可以验证，这样构造出来的矩阵仍然满足要求1）、2）、3）、4）。根据这张表可以给出相应的赛程安排。

例四：赛程安排问题（4）

有 2^n 个选手参加比赛。已知两个选手比赛时总是强的一方胜，且不会出现某两个选手一样强的情况。每个选手每天至多同一个对手比赛。试给出一种赛程的安排表，使得在 $n*(n+1)/2$ 天内确定所有选手的强弱。

分析：为了方便起见，用 A>B 表示选手 A 比选手 B 强。

首先尝试一般的归纳构造：

设结论对于 n 成立，考虑 n+1 时，共 2^{n+1} 名选手分为两个组 A 、B，每组 2^n 个人，由归纳假设，只需 $n*(n+1)/2$ 天即可确定两个组各自的顺序，假设已经排成：$A_1>A_2>A_3>\cdots\cdots>A_{2^n}$，$B_1>B_2>B_3>\cdots\cdots>B_{2^n}$，那么现在要在 $(n+1)*(n+2)/2-n*(n+1)/2=n+1$ 天内完成两个组的合并。

这一步是整个问题的关键所在，也是问题的瓶颈！

例四：赛程安排问题（5）

问题转化为：

已知 $A_1>A_2>A_3>\cdots\cdots>A_{2^n}$， $B_1>B_2>B_3>\cdots\cdots>B_{2^n}$，在 n+1 天之内确定这 2^{n+1} 个人的顺序。

这一步仍然需要采用归纳法来解决。经过许多次尝试，我们发现一般的归纳构造在“分　合”这一步上都无法胜任。想到数学归纳法的一个常用技巧——加强命题！

命题加强为：

$k+1=2^n$（k 、 1 、 n 均为正整数），已知 $A_1>A_2>A_3>\cdots\cdots>A_k$， $B_1>B_2>B_3>\cdots\cdots>B_1$，决定这 2^n 名选手强弱只需 n 天。

上述命题仍然可以采用归纳构造来解决。

例四：赛程安排问题（6）

当 n=1 时， k=1=1 ，安排 $A_1 \Leftrightarrow B_1$ ，结论显然成立。

假设对于 n 时已经有了安排方法，考虑 n+1 的情况。

不妨设 $k \leqslant 1$ ， $k+1=2^{n+1}$ 。安排第一天的比赛如下：

A_1	A_2	……	A_k	逐渐弱 →
B_{2^n}	B_{2^n-1}	……	B_{2^n-k+1}	逐渐强 →

设 A_j 是编号最小的负于对手的选手，即 A_1 、 A_2 、…… A_{j-1} 都取胜， A_j 、 A_{j+1} 、…… A_k 都负于对手。可以推出结论：

$A_1>A_2>\cdots\cdots>A_{j-1}>B_{2^n-j+2}> B_{2^n-j+3}>\cdots\cdots>B_{2^n-1}> B_{2^n}>\cdots\cdots>B_1$

$B_1>B_2>\cdots\cdots>B_{2^n-j+1}>A_j>A_{j+1}>\cdots\cdots>A_k$

例四：赛程安排问题（7）

把这 2^n 名选手分为两组：

强组： $A_1>A_2>\cdots\cdots>A_{j-1}$， $B_1>B_2>\cdots\cdots>B_{2^n-j+1}$ 共 2^n 名。

弱组： $A_j>A_{j+1}>\cdots\cdots>A_k$， $B_{2^n-j+2}>B_{2^n-j+3}>\cdots\cdots>B_{2^n-1}>B_{2^n}>\cdots\cdots>B_1$， 共 2^n 名。

容易看出，强组中的任一人均比弱组中的任一人强。

由归纳假设，两组均只需 n 天（并列进行）就可以确定组内的强弱，又由于强组全体排在弱组前，故整体名次也确定。加上初始时用的一天时间，总共 n+1 天，这 2^{n+1} 名选手名次确定，结论对于 n+1 时也成立。

加强后的结论成立，故之前的结论也成立。回到原来的问题，就很容易解决了。由上述结论推出， $A_1>A_2>A_3>\cdots\cdots>A_{2^n}$， $B_1>B_2>B_3>\cdots\cdots>B_{2^n}$，只需 n+1 天就可以合并这两个组。总共需要的天数为 $n*(n+1)/2+(n+1)=(n+1)*(n+2)/2$，即 n+1 时也可以完成赛程安排。

例四：小结

上面的两个赛程安排问题都是运用归纳构造的典型。前者很容易就能实现从m-1到m的过渡，但后者则需要加强命题，并两次使用归纳构造。

加强命题是数学中一种常用的方法，在加强结论的同时，归纳假设的条件也增强了，为解题铺平了道路。

构造中综合运用数学的各种方法

Back