离散数学

数理逻辑部分

Zhou Yuan

Outline

- 命题逻辑
  - 非形式命题演算 (Informal statement calculus)
  - 形式命题演算 (Formal statement calculus)
- 谓词逻辑 (一阶逻辑)
  - 非形式谓词演算 (Informal predicate calculus)
  - 形式谓词演算 (Formal predicate calculus)

Ch1. 非形式命題演算

- 1.1 命题和连接词
  - Example 1.1
    - If Socrates is a man then Socrates is mortal
    - Socrates is a man
    - ∴Socrates is mortal
    - $A \rightarrow B$, A, $\therefore B$

Ch1. 非形式命題演算

- 1.2 真值函数和真值表
  - NOT: ~p (Negation)
  - AND: p∧q (Conjunction)
  - OR: p∨q (Disjunction)
  - Imply: p→q (Conditional)
  - If and only if: p<->q (Biconditional)
  - Definition 1.2: 命题形式
    - ((p∧q)→r)
    - (p→(~((p→q)∨r)))

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ch1. 非形式命題演算

- Definition 1.5
  - 重言式 (tautology): 恒真的命題形式
  - 矛盾式 (contradition): 恒假的命題形式

- Example 1.6
  - $(p \vee (\sim p))$ 是重言式
  - $(p \wedge (\sim p))$ 是矛盾式

Ch1. 非形式命题演算

- Definition 1.7
  - 若 $(A \rightarrow B)$ 是重言式，则称 A ***逻辑蕴涵*** B (logically imply)
  - 若 $(A \leftrightarrow B)$ 是重言式，则称 A ***逻辑等价***于 B (logically equivalent)
- Example 1.8
  - $(p \wedge q)$ 逻辑蕴涵 p
  - $(\sim(p \wedge q))$ 逻辑等价于 $((\sim p) \vee (\sim q))$
- Proposition 1.9
  - 若 A 和 $(A \rightarrow B)$ 都是重言式，则 B 也是重言式

Ch1. 非形式命题演算

– Proposition 1.17 (De Morgan's Law)
- $((\sim A_1)\vee(\sim A_2)\vee\ldots\vee(\sim A_n))$ 逻辑等价于 $(\sim(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n))$
- $((\sim A_1)\wedge(\sim A_2)\wedge\ldots\wedge(\sim A_n))$ 逻辑等价于 $(\sim(A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_n))$
- 严格证明略

Ch1. 非形式命题演算

- 1.4 范式 (SGU 182:Open the Brackets)
  - Proposition 1.20(disjunctive normal form)
    - 任何一个命题形式 A 都可以等价为如下形式的析取范式：(Q_{ij} 如同 p 或 ~p 的形式)

$$(\vee_{i=1}^{m}(\wedge_{j=1}^{n} Q_{ij}))$$

    - 证明：选取 A 的真值表中使 A 为真的的那些真值赋值，如 (p→q)∧(q→p) 中的 p=T,q=T 和 p=F,q=F，然后写为：

$$((p\wedge q)\vee((\sim p)\wedge(\sim q)))$$

Ch1. 非形式命题演算

- Proposition 1.21(conjunctive normal form)
  - 任何一个命题形式 A 都可以等价为如下形式的合取范式：(Q_{ij} 如同 p 或 ~p 的形式)

$$(\wedge_{i=1}^{m}(\vee_{j=1}^{n}Q_{ij}))$$

  - 证明：设 ~A 的析取范式为 B，如 $((p\wedge q)\vee(p\wedge(\sim q)))$, 则 A 逻辑等价于 ~B，如 $\sim((p\wedge q)\vee(p\wedge(\sim q)))$，逻辑等价于 $(((\sim p)\vee(\sim q))\wedge((\sim p)\vee q))$ 为 A 的合取范式。

    (注意多次使用 De Morgan’s Law)

Ch1. 非形式命题演算

- 1.5 连接词的完备集 (Adequate set)
  - Definition 1.23
    - 若任何真值函数都可以表示为仅含一个集合中的连接词的命题形式，则称为连接词的完备集
  - Proposition 1.24: $\{\sim, \rightarrow\}$ 是连接词的完备集
    - 证明：$\{\sim, \wedge, \vee\}$ 是完备集
    - $(A \wedge B)$ 逻辑等价于 $(\sim(A \rightarrow (\sim B)))$
    - $(A \vee B)$ 逻辑等价于 $((\sim A) \rightarrow B)$
    - 因而任何仅包含 $\{\sim, \wedge, \vee\}$ 的命题形式都可以表示为仅含 $\{\sim, \rightarrow\}$ 的命题形式

Ch2. 形式命题演算

- 问题起源：当命题形式的连接词过多时，我们的直觉并不一定很准确，希望建立一个简单的系统来对应直觉。这也符合我们计算机的思维。
- **“如果A不正确蕴涵A正确那么A一定正确”**这句话对吗？
- **“如果当对任意的B均有A蕴涵B成立时，A一定成立，那么A一定成立”**很容易理解吗？

Ch2. 形式命题演算

- 2.1 形式系统 L (Definition 2.1)
  - 定义命题逻辑的形式推演系统 L 包含如下内容：
  - 1. 字母表： ~, →, (,), p_1, p_2, p_3, …
  - 2. 合式公式： 由连接词 ~, → 构成的***有限长***公式
  - 公理模式
    - (L1) (A→(B→A))
    - (L2) ((A→(B→C))→((A→B)→(A→C))
    - (L3) (((~A)→(~B))→(B→A))
  - 推演规则 (MP)：从 (A→B) 和 A 可以得到一个直接的结论 B

Ch2. 形式命题演算

- Definition 2.2（证明的定义）
- L 中的一个***证明***是一个***有限***合式公式的序列：$A_1, A_2, \ldots, A_n$，对任何 $1 \le i \le n$, A_i 要么是一个公理，要么有证明序列中靠前的两个合适公式 A_j 和 A_k 由 MP 推演而来 $(j, k<i)$。
- 称之为 L 中 A_n 的一个证明，称 A_n 为 L 的一个定理，记为 $\vdash A_n$

- Remark 2.3：可见 A_j 和 A_k 一定为如同 B 和 $(B \rightarrow A)$ 的形式

Ch2. 形式命题演算

- Definition 2.5 (从公式集 Γ 出发的推演)
- 类似于 Definition 2.2，只不过证明序列中的公式还可以是 Γ 的一员。
- Example 2.6 $\{ A, (B\to(A\to C)) \} \vdash (B\to C)$
  - (1) A assumption
  - (2) $(B\to(A\to C))$ assumption
  - $(A\to(B\to A))$ (L1)
  - $(B\to A)$ (1),(3) MP
  - $((B\to(A\to C))\to((B\to A)\to(B\to C)))$ (L2)
  - $((B\to A)\to(B\to C))$ (2),(5) MP
  - $(B\to C)$ (4),(6) MP

Ch2. 形式命题演算

- Example 2.7： $\vdash (A \to A)$
- (1)$(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A))$ (L2)
- (2)$(A\to((A\to A)\to A))$ (L1)
- (3)$((A\to(A\to A))\to(A\to A))$ (1),(2)MP
- (4)$(A\to(A\to A))$ (L1)
- (5)$(A\to A)$ (3),(4)MP

- 思考：上述过程的证明可不可以转化为 $A \vdash A$ 呢？这样就容易多了。

Ch2. 形式命题演算

- Proposition 2.8 (演绎定理 , The Deduction Theorem)
- 设 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 则 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$
- [证明] 施归纳法于 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 的证明长度 n
- **归纳奠基：(n = 1)**
  - B 是公理，则如下可证明 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$
  - (1) B (公理)
  - (2) $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$ (L1)
  - (3) $(A \rightarrow B)$ (1),(2) MP
  - B 是 Γ 的一员，类似于上面的证明
  - B 就是 A，那么由 Example 2.7 有 $\vdash (A \rightarrow A)$

Ch2. 形式命题演算

- 归纳阶段：设 n>1, 定理对一切长度小于 n 的证明序列成立，现证明对长度为 n 的证明亦正确：
  - 如归纳奠基，亦有 B 为公理，Γ 的一员，和 B 为 A 三种情况
  - 情况 4: B 由前方两个公式 MP 得来，这两个公式一定形如 C 和 (C→B)，由归纳假设：Γ├(A→C) 且 Γ├(A→(C→B))，如下证明 Γ├(A→B)
  - (1)…(q)　(A→C)
  - (q+1)…(k)　(A→(C→B))
  - (k+1)　(A→(C→B))→((A→C)→(A→B))　(L2)
  - (k+2)　(A→C)→(A→B)　(k),(k+1)MP
  - (k+3)　(A→B)　(q),(k+2)MP

Ch2. 形式命题演算

- Remark：演绎定理的逆定理是平凡的：

- 若有 $\Gamma \vdash A \to B$ 则一定有 $\Gamma \cup \{A\} \vdash A \to B$
- 同时显然有 $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$
- 使用一次 MP 就可以得到 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$

Ch2. 形式命题演算

- Corollary 2.10 $\{(A\to B), (B\to C)\} \vdash (A\to C)$
  - (HS, Hypothetical Syllogism, 假言三段论)
  - (1) $(A\to B)$ assumption
  - (2) $(B\to C)$ assumption
  - (3) A assumption
  - (4) B (1),(3)MP
  - (5) C (2),(4)MP

  - 这就证明了 $\{(A\to B), (B\to C), A\} \vdash C$ 由演绎定理不难得 $\{(A\to B), (B\to C)\} \vdash (A\to C)$

Ch2. 形式命題演算

- Proposition 2.11 $\vdash (\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$
  - (1) $(\sim A \rightarrow A)$ assumption
  - (2) $(\sim A \rightarrow (\sim\sim(\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A))$ (L1)
  - (3) $(\sim\sim(\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A) \rightarrow (A \rightarrow \sim(\sim A \rightarrow A))$ (L3)
  - (4) $(\sim A \rightarrow (A \rightarrow \sim(\sim A \rightarrow A)))$ (2),(3)HS
  - (5) $(\sim A \rightarrow (A \rightarrow \sim(\sim A \rightarrow A))) \rightarrow$ $((\sim A \rightarrow A) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim(\sim A \rightarrow A)))$ (L2)
  - (6) $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim(\sim A \rightarrow A))$ (4),(5)MP
  - (7) $(\sim A \rightarrow \sim(\sim A \rightarrow A))$ (1),(6)MP
  - (8) $(\sim A \rightarrow \sim(\sim A \rightarrow A)) \rightarrow ((\sim A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (L3)
  - (9) $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$ (7),(8)MP
  - (10) A (1),(9)MP

Ch2. 形式命题演算

- 这就证明了 $(\sim A \rightarrow A) \vdash A$ ，由演绎定理：
- $\vdash ((\sim A \rightarrow A) \rightarrow A)$

- 几个 Exercises 见后页

- Remark：可见在命题逻辑的公理系统内推演并不是一件容易的事情，是否可以证明这个系统的一些性质，如
  - 系统的定理一定是直觉上正确的 （可靠性定理）
  - 直觉上正确的公式一定可以在系统内证明 （完备性定理）

Ch2. 形式命題演算

- Ex.1 $\vdash (\sim\sim A \rightarrow A)$

Ch2. 形式命题演算

- Ex.2 $\vdash (A \rightarrow \sim\sim A)$

Ch2. 形式命题演算

- Ex.3 $\vdash (A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$

Ch2. 形式命題演算

- Ex.4 $\{B, \sim C\} \vdash \sim(B \rightarrow C)$

Ch2. 形式命題演算

- Ex.5 $\vdash \sim B \rightarrow (B \rightarrow C)$

Ch2. 形式命題演算

- Ex.6 $\{A \rightarrow B, \sim A \rightarrow B\} \vdash B$

Ch2. 形式命题演算

- 2.2 完备性定理 (The Adequacy Theorem for L)
  - Proposition 2.14 可靠性定理 (The Soundness Theorem):L 的定理都是重言式
  - 证明思路:
    - L 的三条公理可靠
    - 推演规则 (三段论) 可靠
    - 由归纳法可知， L 的所有定理可靠

Ch2. 形式命题演算

- Proposition(Extra): 弱完备性定理，即若 A 是重言式，则 A 是 L 的定理（可以在系统内证明）。

- Remark: 联想我们靠真值表来确定 A 是否为重言式，如果可以将真值表的思想对应为系统内的一个证明序列，问题就迎刃而解了。

Ch2. 形式命题演算

- Definition 2.12 真值赋值
- 真值赋值为一个函数 v:{p_1,p_2,p_3,…}→{T, F}
- 任何一个真值赋值 v 可以将定义域扩张至整个合式公式集合，只要按照如下规则：
  - v(~A)=T ***iff.*** v(A)=F
  - V(A→B)=T ***iff.*** v(A)=F 或 v(B)=T
- 方便起见，扩张后的真值赋值 v 通常仍记为 v

Ch2. 形式命题演算

- Lemma: 设 Σ 是命题变元或其否定形式的集合，对于任何一个真值赋值 v，令其对应的 Σ 为：
  - 若 $v(p_i) = T$ 则令 $p_i \in \Sigma$，否则 $\sim p_i \in \Sigma$
- $v(A)=T$ 则 $\Sigma \vdash A$, $v(A)=F$ 则 $\Sigma \vdash (\sim A)$

- 证明： 施归纳法于 A 的结构
  - **归纳奠基**： 若 A 为命题变元 p_i, 则显然正确
  - **归纳证明**： 根据 A 的构成方法分两种情况：
    - A 为 $(\sim B)$
    - A 为 $(B \rightarrow C)$

Ch2. 形式命题演算

- 若 A 为 (B→C),
  - 若 v(A)=F, 则 v(B)=T,v(C)=F, 由归纳假设 Σ ├ B 和 Σ ├ (~C)

    由 Ex.4 有 {B, ~C} ├~(B→C)=~A

    即 Σ ├ ~A
  - 若 v(A)=T, 则 v(B)=F 或 v(C)=T, 即 Σ ├ (~B) 或 Σ ├ C

    显然有 ├ C→(B→C) 及 ├ ~B→(B→C) (Ex.5)

    因而一定有 Σ ├ (B→C) 即 Σ ├ A

Ch2. 形式命题演算

- 有了这样一个引理，则可以较容易的证明弱完备性定理：由于 A 是重言式，那么对任意真值赋值 A 都为真，再由演绎定理不难得到下述事实（假设 A 中仅出现 p_1 和 p_2）
  - $\vdash p_1 \to (p_2 \to A)$ $\vdash \sim p_1 \to (p_2 \to A)$
  - $\vdash p_1 \to (\sim p_2 \to A)$ $\vdash \sim p_1 \to (\sim p_2 \to A)$
  - 由 Ex.6 的结论：$\{\sim A \to B, A \to B\} \vdash B$ 知
  - $\vdash p_2 \to A$ $\vdash \sim p_2 \to A$
  - 再合并一次就得到 $\vdash A$
- 由这个思路很容易得到定理的严格证明

Ch2. 形式命题演算

- Remark：可以看出，弱完备性定理的证明是构造性的，因此我们可以通过编写一个程序完成系统内的证明，希望同学们在上机时实践一下。

- Remark：事实上我们还有另外一种更强大的证明这一命题的方法，且这种方法对于一阶谓词逻辑中的完备性定理的证明有很大的帮助。

Ch2. 形式命题演算

- 强完备性定理的证明
  - Definition 2.15 形式系统 L 的一个扩充 (extension)L* 是指在 L 中修改或添加公理，而 L 的定理仍然是 L* 的定理
  - Remark: 显然 L 是 L 的扩充

Ch2. 形式命题演算

– Definition 2.16 L 的一个扩充 L* 是协调的 (consistent) 若不存在公式 A 使得 A 和 (~A) 都是 L* 的定理

– Proposition 2.17 L 是协调的
– 反设 L 不协调 , 即存在 A 和 (~A) 都是 L 的定理 , 则由可靠性定理知 A 和 (~A) 都是重言式 ，这显然是不可能的 , 因而 L 协调

Ch2. 形式命题演算

- Proposition 2.18 L* 是协调的当且仅当存在一个公式 A 不是 L* 的定理

- 若 L* 协调 , 则任意 A 和 (~A) 总有一个不是 L* 的定理
- 若 L* 不协调 , 则存在 ~A 和 A 同时是 L* 的定理 , 由 Ex.5: $\vdash$~A→(A→B) 对任意 B 成立，因而对任意 B 使用两次 MP 可知 B 是 L* 的定理，即不存在 A 不是 L* 的定理

Ch2. 形式命题演算

- Proposition 2.19 设 L* 是 L 的一个协调扩充，若 A 不是 L* 的定理，则将 (~A) 作为新公理扩充入 L* 得到 L** 仍然是协调的
- 反设 L** 不协调，即任何公式都是 L** 的定理，如 A
- 这等价于从 {~A} 出发在 L* 中可以推演出 A
- 由演绎定理，(~A→A) 是 L* 的定理
- 而由 Proposition2.11: ├(~A→A)→A
- 由一次 MP 得 A 是 L* 的定理，矛盾
- 因此 L** 协调

Ch2. 形式命题演算

- Definition 2.20
- 设 L* 是 L 的一个扩充，若对任意 A 和 (~A), 至少有一个是 L* 的定理，则称 L* 是极大的 (complete)
- Remark: 显然 L 不是极大的

Ch2. 形式命题演算

- Proposition 2.21 (Lindenbaum 定理)
- 若 L* 是 L 的一个协调扩充，则一定存在 L* 的一个极大协调的扩充
  - 首先合式公式集合是可数集，因此可以将所有合式公式排成一列 $A_0, A_1, A_2, \ldots$
  - 按如下方式得到 L* 的扩充序列 $J_0, J_1, J_2, \ldots$
  - 令 $J_0 = L^*$,
  - 对 $n>0$，若 A_{n-1} 是 J_{n-1} 的定理，则令 $J_n=J_{n-1}$ 否则将 $(\sim A_{n-1})$ 作为一条新公理扩充如 J_{n-1} 得到 J_n

Ch2. 形式命题演算

- 首先 J_0 协调，若 J_{n-1} 协调
  - 若 A_{n-1} 是 J_{n-1} 的定理，那么 $J_n=J_{n-1}$ 亦协调
  - 若 A_{n-1} 不是 J_{n-1} 的定理，由 Proposition 2.19, 将 $(\sim A_{n-1})$ 作为一条新公理扩充入 J_{n-1} 得到 J_n 仍然协调
- 由归纳原理：对有限的 n 都有 J_n 协调
- 令 J 为 L 的一个扩充，其公理集为所有 J_i 集合的并
- 反若 J 不协调，在 J 中可推演出 A 和 $(\sim A)$, 由于证明长度有限，因而使用到的公理有限，存在有限 n 使得 J_n 包含了所有需要的公理，进而 A 和 $(\sim A)$ 都是 J 的定理，这和 J 的协调性矛盾，因此 J 协

Ch2. 形式命题演算

- 下面证明 J 是极大的：
- 设 A 是任意公式，则 A 一定出现在序列 $A_1, A_2, \ldots$ 中
- 设 $A=A_i$
- 则如果 A_i 是 J_i 的定理，则 A_i 一定是 J 的定理
- 若 A_i 不是 J_i 的定理，$(\sim A_i)$ 是 J_{i+1} 的公理，即 $(\sim A_i)$ 是 J 的定理

- 这样我们就找到了要求的极大协调的 J

Ch2. 形式命题演算

- Proposition 2.22(可满足性定理)
- 若 L* 是 L 的协调扩充 , 则存在一真值赋值 v 使得 v 下 L* 的任何定理都是真的
  - 不妨令 J 是 L* 的一个极大协调的扩充
  - 对任何 p_i, 若 p_i 是 J 的定理则令 $v(p_i)=T$, 否则 $(\sim p_i)$ 一定是 J 的定理 , 令 $v(p_i)=F$
  - 不难利用结构归纳法证明对任意公式 A,A 是 J 的定理当且仅当 v(A)=T(*留作练习*)
  - 那么若 A 是 L* 的定理 , 则 A 是 J 的定理 , 则 v(A)=T

Ch2. 形式命题演算

- Proposition 2.23 完备性定理： 若 A 是重言式，则 A 是 L 的定理
- 反设 A 不是 L 的定理，则将 (~A) 作为新的公理加入 L 得到 L*, 由 Proposition 2.19, L* 可满足
- 由 Proposition 2.22, 存在真值赋值 v 使 L* 下任何定理都为真，那么有 v(~A)=T
- 而 A 是重言式，一定有 v(A)=T, 矛盾，所以 A 是 L 的定理

小结 / 参考书目

- 这样我们就建立了一个和直觉完全对应的逻辑系统 L, 这对计算机模拟人的思维非常重要！
- 参考书目 :Logic for Mathematicians

  A.G. Hamilton

  Cambridge University Press

  影印版由清华大学出版社发行
- 对一阶谓词逻辑感兴趣的同学可以继续阅读这本书