

# 极限法——解决几何最优化问题的捷径

长郡中学 金恺

【关键字】最优值 极限 无穷小 微调

## 【概述】

在平面几何问题中我们经常会遇到一些求极值的问题。在这些问题中，自变量和目标函数可能涉及到坐标、斜率、长度、角度、周长、面积等等一些复杂的量，而且往往自变量还有一些复杂的约束条件，因此直接用函数求极值的方法是行不通或极其复杂的。

这些问题中，变量往往有无穷多种取值方案（比如说点的取值范围可能是整个平面或在某条直线上），所以无法枚举每一种取值方案来找最值，这时往往能够通过**极限法**证明：自变量取某些非特殊情况值时目标函数不可能是最优的——因为这时经过**微调**一个**无穷小量**<sup>1</sup>能够使得目标函数的值变得更优，从而剩下有限种特殊的取值情况可能成为最优解，通过枚举所有特殊情况就能找到目标函数的**最优解**了。<sup>2</sup>

在另一些同类问题中，本来就可以通过枚举有限个取值情况求出最优解，但是枚举的量很大，时间复杂度较高，我们也可尝试通过极限法来大大减少需要枚举的情况，从而降低时间复杂度。

以上就是极限法的大致思想，它的作用简而言之就是**化无限为有限，变有限为少量**。

## 正文

极限法的应用实例非常的多，比如经典的最小矩形覆盖<sup>3</sup>问题，就是通过极限法证明了：最小矩形的某条边必须过两个已知点，从而大大减少了需要枚举的矩形数目。

然而极限法用起来的确有较大的困难，有时候证明起来非常困难，可能情况比较复杂，也可能不知道如何调整，需要用到三角函数之类的比较复杂的数学知识，因此真正掌握它需要扎实的数学功底，极强的观察力以及必要的经验是必不可少的。

下面就来用极限法解决一些典型问题，从实例的分析中一步一步深入地认识极限法的用途和用法。

<sup>1</sup> 比如旋转一个无穷小的角度、微移一段无穷小的距离。在本文中，微量这一名词就是指无穷小量：只要改变得足够小（无穷小），就能使点的相对位置、线段的相交情况等不发生改变。

<sup>2</sup> 极限法的本质也就是对目标函数求导，如果导数不为 0 并且自变量不在定义域的边界则不可能为最优值。这正是采用“极限法”来命名的原因。

<sup>3</sup> 平面上有  $n$  个已知点，求一个面积最小的矩形，使得所有已知点都在矩形的内部。

## 例题一、巧克力

**问题描述：**糖果厂有一种凸起的  $N$  ( $4 \leq N \leq 50$ ) 边形巧克力，**Kiddy** 和 **Carlson** 凑钱买了一块，想把它用一刀割成两半。两半的大小必须相等，找出用以分割巧克力的分割线的最短长度。

**数学模型：**已知  $N$  个点  $(X_i, Y_i) 1 \leq i \leq N$  构成一凸包  $P$  {已知量}，求一条划分线  $L$ ，使得分割线两侧的面积相等 {约束条件}，并且使  $L$  的长度 {目标函数} 最小。

**问题分析：**设分割线的两个端点分别为  $A, B$ ， $A, B$  可能在  $P$  的顶点上也有可能只在  $P$  的边上 {不含端点}。我们分开解决这两种情况：

- 1、 $A$  在  $P$  的顶点上（或  $B$  在  $P$  的顶点上，此时交换  $AB$ ）：

显然可以枚举  $P$  中的一个顶点作为  $A$ ，由分割线两侧面积相等这一约束条件直接确定  $B$  的位置，如图 1。

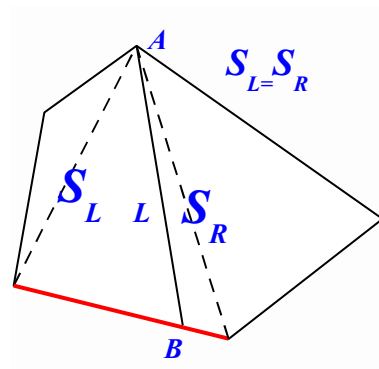


图 1

- 2、 $A, B$  都在  $P$  的边上：枚举  $A, B$  所在的两条边，设这两条边相交于  $C$ ，如图 2：

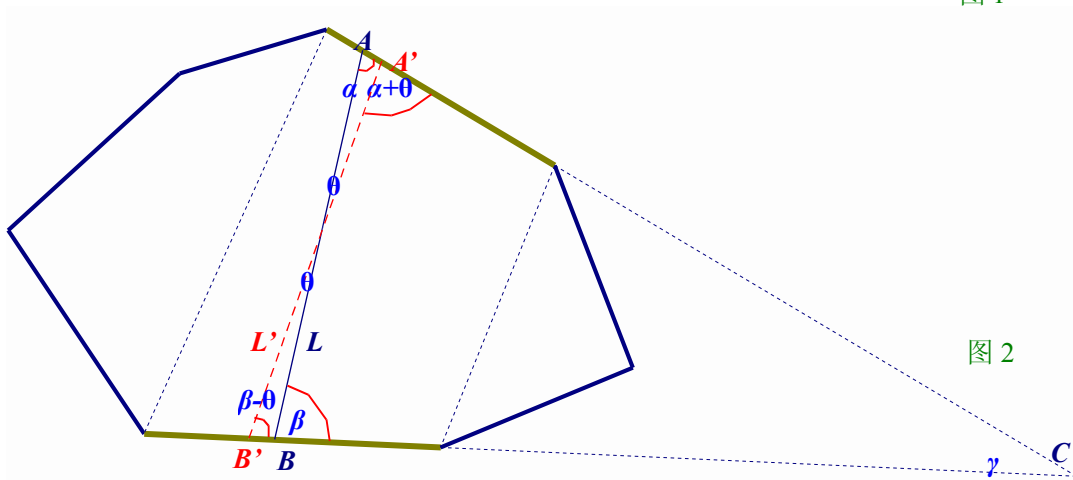


图 2

设  $\angle C = \gamma$ ， $\angle CAB = \alpha$ ， $\angle CBA = \beta$ 。当  $\alpha \neq \beta$  时，可以证明：把分割线  $L$  稍微旋转一个无穷小量  $\theta$  到  $L'$  并保持  $L'$  两端的面积相等，能够使  $L'$  的长度小于  $L$ 。证明如下：

不妨设  $\alpha > \beta$ ，旋转后  $L'$  仍与原来的两边相交（因为仅旋转了一个无穷小量），交点为  $A', B'$ ， $\angle CA'B' = \alpha + \theta$ ， $\angle CBA' = \beta - \theta$ 。

在三角形  $ABC$  中，有正弦定理：
$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{L}{\sin \gamma}$$

在三角形  $A'B'C$  中，有正弦定理：  $\frac{A'C}{\sin(\beta-\theta)} = \frac{BC}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{L}{\sin\gamma}$

由于  $L$  和  $L'$  都是分割线，所以  $S_{ABC} = S_{A'B'C}$ ，即

$$\frac{1}{2} AC \sin \gamma = \frac{1}{2} A'C' \sin \gamma$$

$$\square AC \sin \gamma = A'C' \sin \gamma$$

$$\square \frac{L \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{L' \sin(\beta-\theta)}{\sin \gamma}$$

$$\square \frac{L}{L'} = \frac{\sin(\beta-\theta)}{\sin \beta}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} [\cos(\beta+\alpha) - \cos(\beta-\alpha-2\theta)]}{-\frac{1}{2} [\cos(\beta+\alpha) - \cos(\beta-\alpha)]}$$

$$= \frac{\cos(\beta+\alpha) - \cos(\beta-\alpha-2\theta)}{\cos(\beta+\alpha) - \cos(\beta-\alpha)}$$

$$\square \beta > \alpha > 0$$

$$\therefore \beta - \alpha > 0$$

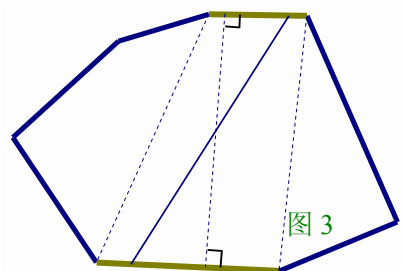
$$\therefore \cos(\beta-\alpha-2\theta) > \cos(\beta-\alpha)$$

$$\therefore \frac{\cos(\beta+\alpha) - \cos(\beta-\alpha-2\theta)}{\cos(\beta+\alpha) - \cos(\beta-\alpha)} > 1$$

所以  $L' > L$ ，即  $L' > L$ 。如果  $A, B$  所在的两边平行（即  $C$  在无穷远处），也有相同的结论（如图 3）。

因此若  $\beta > \alpha$  时， $L$  不可能为最短的分割线。同理，当  $\beta < \alpha$  时， $L$  也不可能是最短的。若  $L$  是不过  $P$  的顶点的最短的分割线，那么  $L$  与  $P$  的两个夹角必然相等。

这就是我们希望得到的，因为枚举  $L$  两个端点所在的边后， $L$  的斜率就确定了，再根据  $L$  的两边面积相等，就可以直接算出  $L$  的位置。得到了这些结论后，已能够设计出  $O(N^2)$  的算法。



**小结：**通过此题，我们已经初次接触到了极限法，并利用它得到了一个极其简单的结论。使得自变量的取值范围从无穷多条直线减少到了有限条，从而通过简单的穷举法解决。

## 例题二、太空站 SPACE (2003 集训讨论试题之 0039)

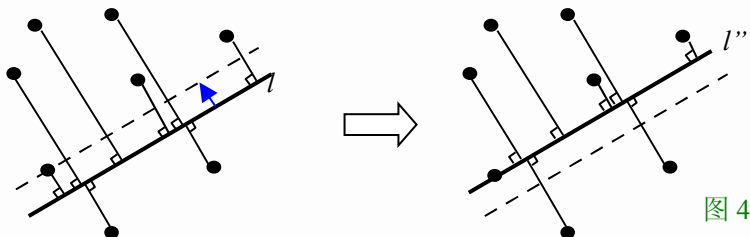
**问题描述：**平面上有  $n(3 \leq n \leq 10000)$  个互不重合的点，要求一条直线，使得所有点到这条直线的距离和最小。

**数学模型：**已知  $n$  点的坐标分别为：  $V_1(x_1, y_1), V_2(x_2, y_2), \dots, V_n(x_n, y_n)$ 。直线  $l(ax+by+c=0 (ab \neq 0))$

的  $f$  值定义为  $f(l) = \sum_{i=1}^n \frac{|ax_i + by_i + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , 求  $\min\{f(l)\}$ 。

**试题分析：**最容易想到的做法是枚举所有的直线，得到最优值。但平面中的直线有无穷多条，怎样的直线才有可能是要找的那一条呢？

(1) 可以规定直线  $l$  经过某一个已知点。因为：若  $l$  不经过任何一个已知点，则  $l$  两侧肯定有一侧的点数不少于另一侧，设多的一侧有  $a$  个点，少的一侧有  $b$  个点，将  $l$  往点多的那侧平移一个微量  $\Delta$  到  $l'$ ，则  $f(l') - f(l) = b\Delta - a\Delta = (b-a)\Delta \leq 0$ ，故  $f(l') \leq f(l)$ 。（如图 4）

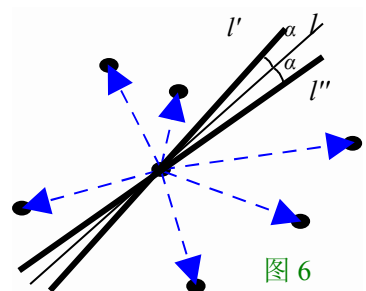
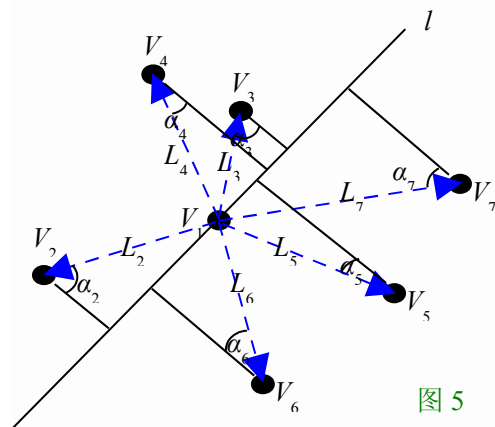


这样不断的往同一个方向平移，直到遇到第一个已知点，移动到  $l''$ 。可知  $f(l'') \leq f(l)$ 。

(2) 可以再规定直线  $l$  经过两个已知点。原因如下：根据(1)，设  $l$  过  $V_1$ ，而不过其它点（如图 5）：记  $L_i$  为  $V_i$  到  $V_1$  的距离， $\alpha_i$  为  $V_i$  到  $V_1$  的连线与  $V_i$  到  $l$  的垂线的夹角。

设直线绕  $V_1$  逆时针旋转一个很小的角度  $\alpha$  ( $\alpha \ll 0^\circ$ ) 到  $l'$ ， $l$  顺时针旋转相同的角度  $\alpha$  到  $l''$ 。（如图 6）只要  $\alpha$  足够小，就能使旋转过程中不碰到其它已知点。

如果  $\alpha_i = 0$ ，那么不论直线旋转到  $l'$  还是  $l''$ ， $V_i$  到直线的距离都严格减小了。（如图 7） $\alpha_i \neq 0$ ，则旋转后的夹角分别变为  $\alpha_i + \alpha$ ， $\alpha_i - \alpha$ 。由于



$$\cos(\alpha_i - \alpha) + \cos(\alpha_i + \alpha) = 2 \cos \alpha_i \cos \alpha < 2 \cos \alpha_i$$

所

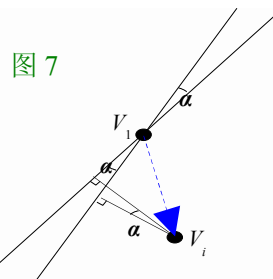
以

$$L_i \cos(\alpha_i - \alpha) + L_i \cos(\alpha_i + \alpha) = L_i \cos \alpha_i \cos \alpha < L_i \cos \alpha_i$$

以得出： $f(l') + f(l'') < \sum f(l)$ ；而由直线  $l$  的最优性可以知道： $f(l) \leq f(l')$ ,  $f(l) \leq f(l'')$ ， $f(l') + f(l'') \geq f(l) + f(l)$ ，矛盾。

因此，可以规定直线  $l$  必过两个已知点。

至此，待枚举的直线就变为了有限条，因此我们可以得到



一个有效的算法了：

$\min \hat{0} \infty$

枚举两个点

①根据两个点确定直线  $h$

②计算直线  $now \leftarrow f(h)$

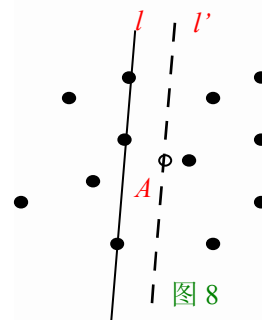
③若  $now < min$  则  $l \leftarrow h, min \leftarrow now$

通过极限法，我们已经将需考虑的直线从无线条转化为了有限的  $n^2$  条，从而能够设计出一个有效算法解决本题。此算法的时间复杂度为  $O(n^3)$ ，需要进一步减少，也就是需要减少枚举无用的直线。

(3)定义  $a(l)$  为直线  $l$  上方（若直线竖直则为右方）的点数； $b(l)$  为直线  $l$  上面的点数； $c(l)$  为直线  $l$  下方（若直线竖直则为左方）的点数。

若  $l$  是最优的，那么必有  $a(l)+b(l)>c(l)$  且  $c(l)+b(l)>a(l)$

证明：若  $a(l)+b(l) \leq c(l)$  且  $c(l)+b(l) \leq a(l)$ ，先把它往点较多（可能相等）的一侧平移一个微量到达  $l'$ （如图 8），显然根据(1)的相同证法有  $f(l') \leq f(l)$ 。由于移动的是一个微量，所以  $l'$  上没有其它已知点，在  $l'$  上任取一点  $A$ ，把  $A$  看成结论(2)中的  $V_1$ ，绕  $A$  微调，用(2)的类似的证明方法有结论： $f(l')$  不可能为最优解，因此： $f(l)$  也不可能为最优解。



满足结论(1)(2)(3)的直线集合设为  $E$ 。可证  $|E|$  为  $n$  级，用旋转方法可以使得从  $E$  中的一条直线找下一条直线花  $O(n)$  的时间复杂度（旋转一周后便能把所有的  $E$  中的直线找到），计算一条直线的  $f$  值也只需  $O(n)$  的时间复杂度，所以总的时间复杂度只需  $O(n^2)$ 。<sup>4</sup>

**小结：**本题的几个证明过程并不复杂，从本质上说，这三个结论的证明方法都是和极限法紧密相关的：

(1)通过**平移一个微量**证明某一类直线不可能为最优解，将  $l$  的取值范围从所有平面中的直线降为过一个已知点的直线；

(2)通过**旋转一个微量**证明剩下的直线中的某一类不可能为最优解，从而使自变量  $l$  的取值范围进一步减少到有限条。

(3)通过先**平移一个微量**再**旋转一个微量**将待考虑的直线条数从  $n^2$  降到了  $n$ 。

从本题可以看到解决平面最优化问题的一般规律：遇到问题后容易产生这样的猜想：即最优解是不是满足某种性质？如果满足，是不是满足更特殊的性质？……这样不断地提出猜想并且尝试证明，使得自变量的取值范围不断缩小，直至不能再小或者达到我们满意的地步，剩下的工作就只需通过枚举和计算解决了。

提出的这些猜想有时是正确的、有的存在反例，有的是显然的、有些证明却很难。

怎么形成猜想呢？最简单有效的方法就是通过一些简单的例子寻找一些规律，要靠认真地观察才能得到直觉和灵感。

怎么证明猜想呢？最容易的方法是拿几个例子进行验证，如果有反例，那么猜想失败，需要部分的修改猜想或者提出全新的猜想。

如果找不到反例呢？这并不代表猜想就是正确的。需要进行严密的分析来完整地证明，而极限法正是一个简单、实用的分析工具。

<sup>4</sup> 详细的证明和算法请参阅我 2003 年的集训作业—0039 解题报告。

前面两道题比较简单，都直接提出了一种正确地猜想，并且证明的方法也很容易，但平时解决问题常常不是那么一帆风顺，此时应该怎么做呢？让我们来完整的考虑一个较为复杂的实际问题。

### 例题三、导弹防御系统（自创试题）

**问题描述：**某国的国界是一个凸多边形，为了防卫，国王打算派工程部队修建 4 座防御塔。战争爆发后敌人可能会偷袭其中的一座防御塔，而一旦遭偷袭、其余 3 座防御塔就会进入临战状态，并且把由它们两两相连构成的三角形区域完全封锁，狡猾的敌人会使封锁的区域面积尽量小，而精明的国王则希望被敌人破坏后启动的这个区域面积尽量大。

#### 数学模型：

$$\text{函数 } f(A, B, C, D) = \min\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ABD}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}\}$$

平面上有一个凸  $n$  边形  $P$ ，请你在  $P$  的内部（可以在边界）选择 4 个点  $ABCD$ ，使得  $f(A, B, C, D)$  最大。

**问题分析：**首先， $f$  函数是求 4 个量中的最小值，这很不好处理，究竟 4 个三角形中哪个最小呢？

考虑平面上任意四点  $A, B, C, D$ ，它们有下列 3 种排列情况：

1、某三个点成一直线，此时  $f(A, B, C, D) = 0$ ；

2、任意三点都不在同一直线上，但是某个点在另三个点围成的三角形内，不妨设  $D$  在三角形  $ABC$  内部，此时  $f(A, B, C, D) = \min\{S_{\triangle ABD}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}, S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}\} =$

$\min\{S_{\triangle ABD}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}\}$ ，由于  $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC}$ ，所以  $f(A, B, C, D) \leq S_{\triangle ABC}/3$ ，又由于  $ABCD$  任意选取，所以不妨选  $D$  为  $\triangle ABC$  的重心，此时  $f(A, B, C, D) = S_{\triangle ABC}/3$ 。

因此某个点在另三个点构成的三角形内这类情况最大的  $f$  值，等于  $P$  中面积最大的三角形  $ABC$  的面积  $1/3$  {①}。

3、 $A, B, C, D$  是某个凸四边形的四个顶点：

不妨设  $f(A, B, C, D) = S_{\triangle BCD}$ ，那么分别过  $D, B$  作  $BC, DC$  的平行线交于  $A'$ ，则  $A'$  一定在  $\triangle ABD$  的内部（或边界）。

证明：如图 9， $S_{\triangle BCA'} = S_{\triangle BCD} \leq S_{\triangle BCA} \square A, B$  在  $A'D$  异侧； $S_{\triangle A'CD} = S_{\triangle BCD} \leq S_{\triangle ACD} \square A, D$  在  $A'B$  异侧，故结论成立

因此  $A'$  也在  $P$  内部，由于平行四边形 4 个端点的  $f$  值 = 这个平行四边形面积的一半，而  $A'BCD$  是平行四边形，因此  $f(A', B, C, D) = S_{ABCD}/2 = S_{\triangle BCD} = f(A, B, C, D)$ ，也就是说在可以把  $ABCD$  调整为  $P$  内某个平行四边形的顶点而不使  $f$  值改变。因此  $f$  值最大的凸四边形的  $f$  值 = 面积最大的平行四边形的面积的一半！

因此四个点构成凸四边形这类情况的最大  $f$  值，等于  $P$  中面积最大的平行四边形面积  $1/2$  {②}。

经过上面的转化，我们把原来的最小值最大问题转化为了某个特定值最大的问题，新的问题明显比原问题更容易考虑。

先来看①的求解，因为看起来它似乎比②简单一些（实际上要简单得多），首先假设  $A, B, C$  已经确定，看看它应满足什么样的条件。

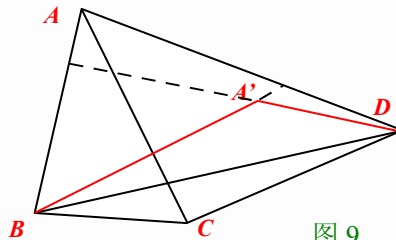


图 9



$A, B, C$  可以都取  $P$  的顶点, 而不会使面积减少。(换言之,  $A, B, C$  都是  $P$  顶点的三角形的面积的最大值 =  $P$  内的三角形面积的最大值) 证明如下:

如图 10, 过  $A$  做  $BC$  的平行线  $l$ , 则在  $l$  上或  $l$  的远离  $BC$  的一侧必然存在  $P$  的一个顶点  $A'$ 。而  $A'$  到  $BC$  的距离  $\geq A$  到  $BC$  的距离, 所以  $S_{\triangle A'BC} \geq S_{\triangle ABC}$ 。故可以将  $A$  移至某个顶点而使得面积变大或不变。

可以用  $O(N^3)$  的算法枚举  $P$  的 3 个顶点  $A, B, C$ , 并求它们构成的三角形的面积的最大值  $S$ ,  $S/3$  就是问题①的解。

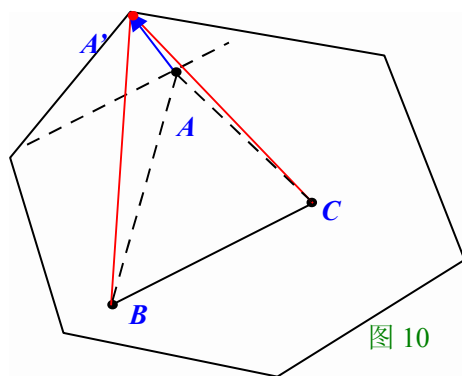


图 10

三角形的情况的确容易, 因为可以让  $A, B, C$  恰好为  $P$  的三个顶点, 那么平行四边形是否可以能用同样的方法呢? 这显然是错误的, 因为有可能  $P$  的任意 4 个顶点都不构成平行四边形, 如果真的  $A, B, C, D$  都是顶点那岂不是无解?<sup>5</sup>。问题②该如何求解呢?

首先还是要考虑缩小  $A, B, C, D$  的取值范围。

一、 $A, B, C, D$  都在  $P$  的边界上 (不一定是顶点! )。

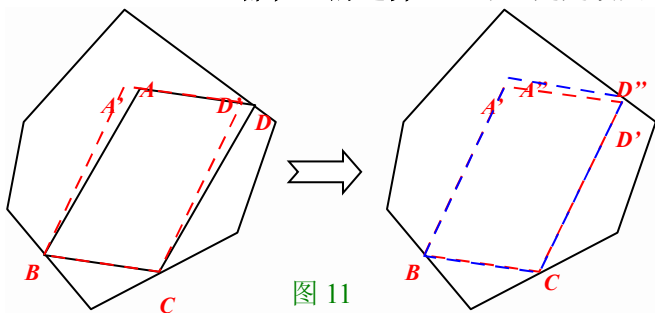


图 11

证明: 若  $A, B, C, D$  中某点不在  $P$  的边界上, 不妨设为  $A$  点。将  $AD$  沿着  $DA$  方向平移一个微量<sup>6</sup>到  $A'D'$  (如图 11 左), 此时  $S_{A'BCD} = S_{ABCD}$ , 并且  $A', D'$  都不在边界上。再把  $A'D'$  边沿着  $BA'$  方向平移一个微量<sup>7</sup>到  $A''D''$  (如图 11 右), 有  $S_{A''BCD} > S_{ABCD}$ , 因此  $A$  不在边界上时,  $ABCD$  不可能是  $P$  内面积最大的平行四边形。所以  $ABCD$  的面积最大时,  $A, B, C, D$  必然都在  $P$  的边界上。

二、 $A, B, C, D$  之一可以取  $P$  的顶点, 而不会使面积减少。(换言之,  $A, B, C, D$  之一是  $P$  的顶点的平行形的面积的最大值 =  $P$  内的平行四边形面积的最大值)

终于到了极限法该隆重登场的时候了! 不过在证明这个命题之前先要介绍几个新的概念:

若直线  $l$  和  $g$  不平行, 点  $E$  不在  $l$  和 (或)  $g$  上, 如果某个点  $B$  处在  $l$  上, 另一个点  $D$  处在  $g$  上, 并且  $BD$  关于点  $E$  中心对称, 那么称线段  $BD$  为  $(l, g, E)$  的平分线。

引理一:  $(l, g, E)$  的平分线是唯一确定的。证明如下:

如图 12, 把  $g$  绕  $E$  旋转 180 度到  $g'$ ,  $g$  和  $g'$  关于  $E$  中心对称, 设  $l$  和  $g'$  相交于  $B$  (由于  $l$  和  $g$  相交、 $g$  和  $g'$  平行, 故  $l$  和  $g'$  相

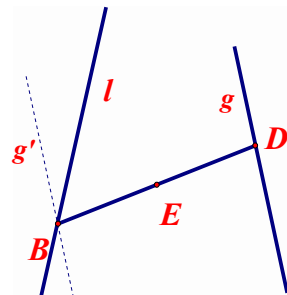


图 12

<sup>5</sup> 如果不转化为平行四边形, 而直接枚举  $P$  的顶点做  $A, B, C, D$  计算  $f(A, B, C, D)$  也不会是最优的。比如下面这个例子:  $N=6, P=\{(-9.60, 0.95)(-7.12, 3.15)(-0.74, 4.72)(7.33, 0.98)(4.26, -2.41)(-6.37, -1.52)\}$ 。最优解是 26.35, 而枚举 4 个顶点算出来的  $f$  的最大值为 19.40。

<sup>6</sup> 小到使  $A'D'$  都在  $P$  内部 (不包括边界)

<sup>7</sup> 小到使  $A''D''$  都在  $P$  内部 (不包括边界)

交), 设  $D$  为  $B$  关于中心  $E$  的对称点。由于  $B$  在  $g'$  上所以  $D$  在  $g$  上, 又因为  $B$  在  $l$  上, 所以  $BD$  是  $(l, g, E)$  的平分线。另一方面, 直线  $l$  与  $g'$  的交点只有一个, 很容易知道不存在其它的  $BD$  是  $(l, g, E)$  的平分线。

**引理二:** 若  $E', E''$  关于  $E$  中心对称且  $EE'$  是微量,  $BD, B'D', B''D''$  分别为  $(l, g, E), (l, g, E'), (l, g, E'')$  的平分线, 则  $B'B''$  关于  $B$  中心对称,  $D'D''$  关于  $D$  中心对称。证明如下:

①  $EE'E''$  平行于  $g$  (如图 13)。则  $B, B', B''$  重合, 所以  $B'B''$  关于  $B$  对称, 同时由中位线知识容易看出:  $DD' = 2EE' = 2EE'' = DD''$ , 而  $DD'D''$  都在  $g$  上, 所以  $D'D''$  关于  $D$  中心对称。

②  $EE'E''$  平行于  $l$ 。同理可证。

③  $EE'E''$  不平行于  $g$  和 (或)  $l$ 。由于  $E'E''$  关于  $E$  中心对称, 所以  $E'E'' = 2EE''$ 。设  $x = H(E'', g)^8, y = (EE'' \text{ 在垂直于 } g \text{ 的方向上的距离})$ :

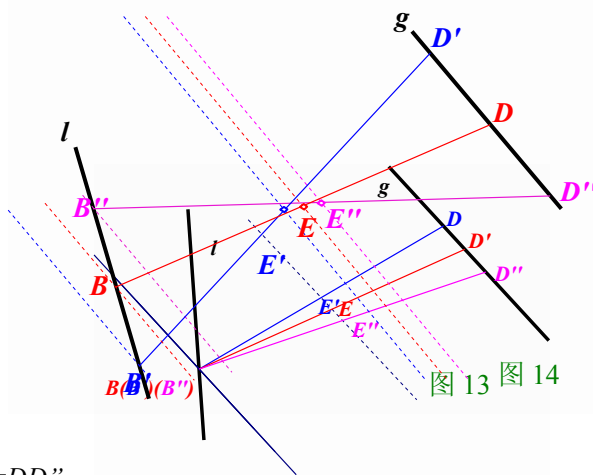
$$H(B'', g) = 2x; H(B, g) = 2(x+y);$$

$$H(B', g) = 2(x+2y),$$

所以  $BB'' = BB'$ 。而  $B, B', B''$  都在同一直线  $l$  上, 故  $B'B''$  关于  $B$  对称。

考虑垂直于  $l$  的方向的距离可证  $DD'' = DD'$ , 所以  $D'D''$  关于  $D$  对称。

总结①②③得引理二得证。



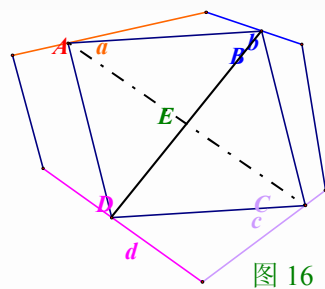
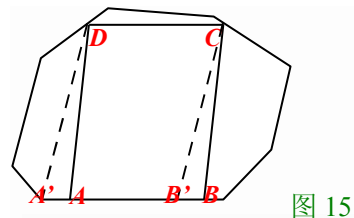
下面分两种情况来证明  $A, B, C, D$  中有个点是  $P$  的顶点不会使最大值发生变化:

<1> 某两个顶点在同一条边上 (不妨设  $A, B$  在同一条边上), 根据图 15 容易看出, 因为存在一个面积不变的平行四边形  $A'B'CD$ , 使得某个点在  $P$  的顶点上。

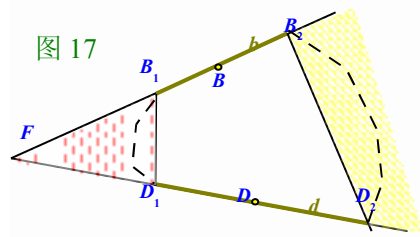
<2> 任意两个顶点都不在同一条边上, 即  $A, B, C, D$  在  $P$  的 4 条不同的边上, 如图 16: 设  $A$  在  $a$  上,  $B$  在  $b$  上,  $C$  在  $c$  上,  $D$  在  $d$  上, 并且都不是边的端点。  $a, b, c, d$  都是  $P$  的边。并且设  $E$  是平行四边形的中心。

<2>-I、  $a \parallel c$  并且  $b \parallel d$ 。

此时  $E$  的位置是确定的。  $S_{ABCD} = 4S_{ABE} = 2AE \cdot H(B, AC)$  保持  $AC$  边不变, 调整  $BD$ : 过  $B$  点做  $AC$  的平行线  $e$ ,  $b$  的某个端点  $V$  一定在  $e$  的远离  $E$  的一侧或在直线  $e$  上, 此时把  $B$  往  $V$  方向移动一个微量到  $B'$ , 同时  $D$  往反方向移动到  $D'$ 。显然有  $H(B', AC) \geq H(B, AC)$ , 所以  $S_{AB'CD'}$  不会比  $S_{ABCD}$  小。不断的往同一个方向微移直到  $B$  或  $D$  到达  $P$  的顶点, 所以结论成立。



<sup>8</sup>  $H(V, l)$  表示点  $V$  到直线  $l$  的距离





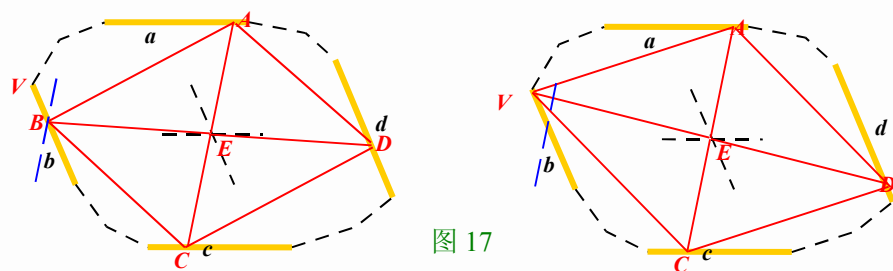


图 17

<2>-II、若  $a \nparallel c$  或者  $b \nparallel d$ , 情况就要复杂多了。不妨设  $b \nparallel d$ , 如图 17 所示: 设  $bd$  的延长线交于  $F$ ,  $b$  的两个端点为  $B_1, B_2$  ( $B_1$  在  $F$  和  $B_2$  之间),  $d$  的两个端点为  $D_1, D_2$  ( $D_1$  在  $F$  和  $D_2$  之间), 定义红色区域为射线  $B_2B_1, D_2D_1$  与线段  $B_1D_1$  围成的三角形区域, 定义黄色区域为射线  $B_1B_2, D_1D_2$  与线段  $B_2D_2$  围成的无限区域。

由于  $A, B, C, D$  都在凸包  $P$  上, 所以  $A$  和  $C$  有且仅有一个点 (不妨设为  $C$ ) 在红色区域中, 另一个 (不妨设为  $A$ ) 在图中黄色区域中。接下来证明: 固定  $A$  点、调整  $BCD$  使平行四边形的面积增大<sup>9</sup>。

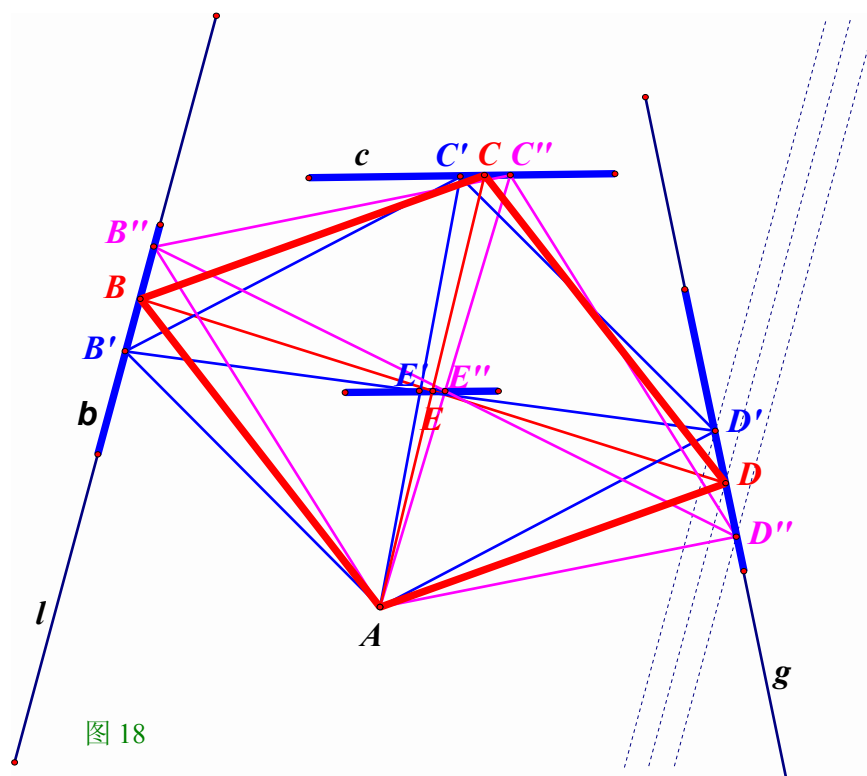


图 18

设  $B$  所在边  $b$  所在直线为  $l$ ,  $D$  所在的边所在的直线为  $g$ 。在线段  $c$  上取两个点  $C', C''$  关于  $C$  对称, 并且  $CC'$  的距离趋近于 0, 设  $E', E''$  分别为  $AC', AC''$  的中点, 设  $B'D'$  和  $B''D''$  分别是  $(l, g, E')$ 、 $(l, g, E'')$  的平分线。

根据对角线互相平分的四边形是平行四边形得:  $AB'C'D'$  和  $AB''C''D''$  都是平行四边形,  $E'$  和  $E''$  分别是它们的中心。只要我们能够证明  $S_{AB'C'D'} + S_{AB''C''D''} > 2S_{ABCD}$ , 那么  $AB'C'D'$  和  $AB''C''D''$  中至少有一个面积比  $S_{ABCD}$  大, 也就证明了结论。

而  $S_{ABCD} = 4S_{ADE}$ ;  $S_{AB'C'D'} = 4S_{AD'E'}$ ;  $S_{AB''C''D''} = 4S_{AD''E''}$ ; 因此可以证明等价的结论:  $S_{AD'E'} + S_{AD''E''} > 2S_{ADE}$ 。

<sup>9</sup> 若固定  $C$  点, 调整  $ABD$  将不能证明后面的结论!

因为  $E'E''$  关于  $E$  中心对称, 由引理二可以知道:  $D'D''$  关于  $D$  中心对称。另外, 由于  $EE'$  平行于  $g$ , 而  $g$  与  $c$  相交, 因此  $EE'$  与  $DD'$  相交, 不妨设它们交于  $X$ , 如图 19:

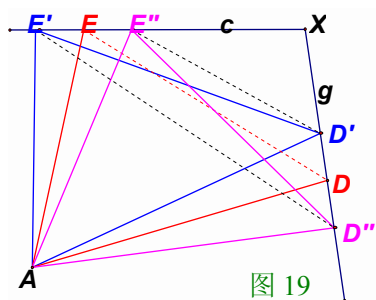


图 19

- 1、图 19 所示的为  $ADX$  为逆时针顺序时的情况;
- 2、当  $ADX$  为顺时针方向时, 同理可证;
- 3、当  $D, X$  重合时亦可证明 (如图 20), 方法略。

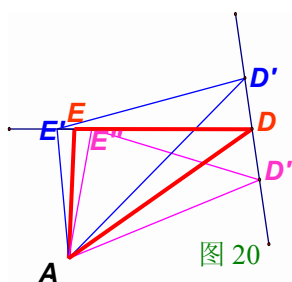


图 20

$$\begin{aligned}
 S_{AD'E'} + S_{AD'E''} &= (S_{AD''XE'} - S_{AD'D''} - S_{D'E'E''} - S_{XE'D'}) + (S_{AD''XE''} - S_{AE'E''} - S_{E''D'D''} - S_{XE''D'}) \\
 &= 2S_{AD''XE'} - 2S_{XE'D'} - S_{AD'D''} - S_{AE'E''} - S_{D'E'E''} - \{S_{E''D'D''}\} \\
 2S_{ADE} &= 2(S_{AD''XE'} - S_{ADD''} - S_{AEE'} - S_{D'E'E''} - S_{EDD'} - S_{XE''D'}) \\
 &= 2S_{AD''XE'} - 2S_{XE'D'} - S_{AD'D''} - S_{AE'E''} - S_{D'E'E''} - \{S_{ED'D''}\}
 \end{aligned}$$

$$S_{AD'E'} + S_{AD'E''} - 2S_{ADE} = S_{ED'D''} - S_{E''D'D''} > 0 \text{ 故 } S_{AD'E'} + S_{AD'E''} > 2S_{ADE}$$

所以有  $S_{AD'E'} > S_{ADE}$  或  $S_{AD'E''} > S_{ADE}$ , 因此有  $S_{AB'C'D'} > S_{ABCD}$  或  $S_{AB''C''D''} > S_{ABCD}$ , 也就是说当  $ABCD$  在  $P$  的边界上但都不是  $P$  的顶点时,  $ABCD$  的面积肯定不是  $P$  中平行四边形的面积的最大值。

综合上述证明得:  $A, B, C, D$  之一可以取  $P$  的顶点, 而不会使面积减少。<sup>10</sup>

**小结:** 结论二比结论一的得到困难了许多, 回顾证明的过程: 首先我们不得不分了许多种情况来一一证明, 好在大多数情况都是较为特殊的, 证明较为容易。情况 <2>-II 是一般的, 也是最难证的:

证明过程中, 先选择固定  $A$  点, 然后在  $C$  的两侧取两个距离无限小的对称点, 最后往两个方向分别调整  $ABCD$  到  $AB'C'D'$  和  $AB''C''D''$ 。引理二告诉我们一个简单的性质:

$B'B''$ 、 $D'D''$  分别关于  $B$  和  $D$  对称, 利用这一简单的性质用就能得到  $S_{AB'C'D'} + S_{AB''C''D''} > 2S_{ABCD}$ 。

<2>-II 的证明是个比较复杂的极限法, 此次调整的量是距离而不是角度, 因为很明显调整距离时各个量的改变都容易得到, 而如果采用角度, 恐怕就会有更为复杂的数学式子了! 这说明了观察能力在极限法中的重要作用。

另外, 证明中和例题 2 一样采用了是 2 次调整做和, 为什么不能直接调整 1 次呢? 有两个主要原因:

- 1、我们并不知道往哪一侧调整后能使目标函数更优 (并不是往任意方向调整都会变优的);
- 2、(2 次调整后的目标函数的和) 与 (原函数的两倍) 的差很容易计算, 把它们拆成一些三角形的和后大部分的项做差后都被抵消了。

如果只调整 1 次, 我们需要计算在什么时候往什么方向调整 (而与调整 2 次相比, 这是一项额外的工作), 而且证明过程也将更为复杂。

<sup>10</sup> 下面简单的说明为什么不能固定  $C$  点调整  $ABD$ , 因为此时  $D'DD''$  的相对位置发生了改变, 如图 21, 此

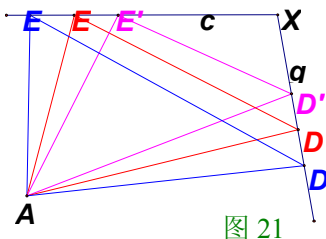


图 21

时  $S_{AE'D'} + S_{AE''D''}$  并不是恒大于  $2S_{AED}$  的。

2次调整做和方法是极限法证明中经常要用到的手段。

总结了这么多，是不是有些太早了？我们仅仅证明了结论二，但是满足结论二的平行四边形仍然有无穷多个！我们并没有完整地解决原问题。不过，你也许马上就会猜想：规定 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 中有两个点是 $P$ 的顶点，是不是也不影响最优值？看起来似乎的确能够利用刚才类似的方法进行证明：首先由结论二可设 $A$ 是 $P$ 的顶点而 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 在 $P$ 的边上，由于固定 $B$ 、 $C$ 或 $D$ 时， $A$ 可能被调整到 $P$ 外，所以我们只能固定 $A$ ，调整 $BCD$ 。但是如果 $A$ 在红色区域中，那么结论二是不成立的。因此有可能 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 中有两个点是 $P$ 的顶点的平行四边形的最大面积 $<P$ 内平行四边形的最大面积<sup>11</sup>，猜想失败……

我们只能用现有的结论二来求最大值。值得庆幸的事，只要利用二次函数的知识就能求出这个最值了！方法如下：

首先，为了使计算简单依次进行如下变换：

- a) 旋转 $P$ 使得 $c$ 平行于坐标轴 $y$ ；
- b) 平移 $P$ 使得 $A$ 的横坐标和 $c$ 的横坐标互为相反数（设 $A$ 的坐标为 $(-k,0)$ ， $c$ 方程为 $x=k$ ）；
- c) 以 $(0,0)$ 为中心缩放 $P$ 使得 $A$ 的坐标为 $(0,-1)$ ；

旋转和平移将不改变最优值，缩放后最大值变为原来的 $\frac{1}{k^2}$ ，因此只要把求出来的最大面积乘以 $k^2$ 就是变换之前的答案，如图22：

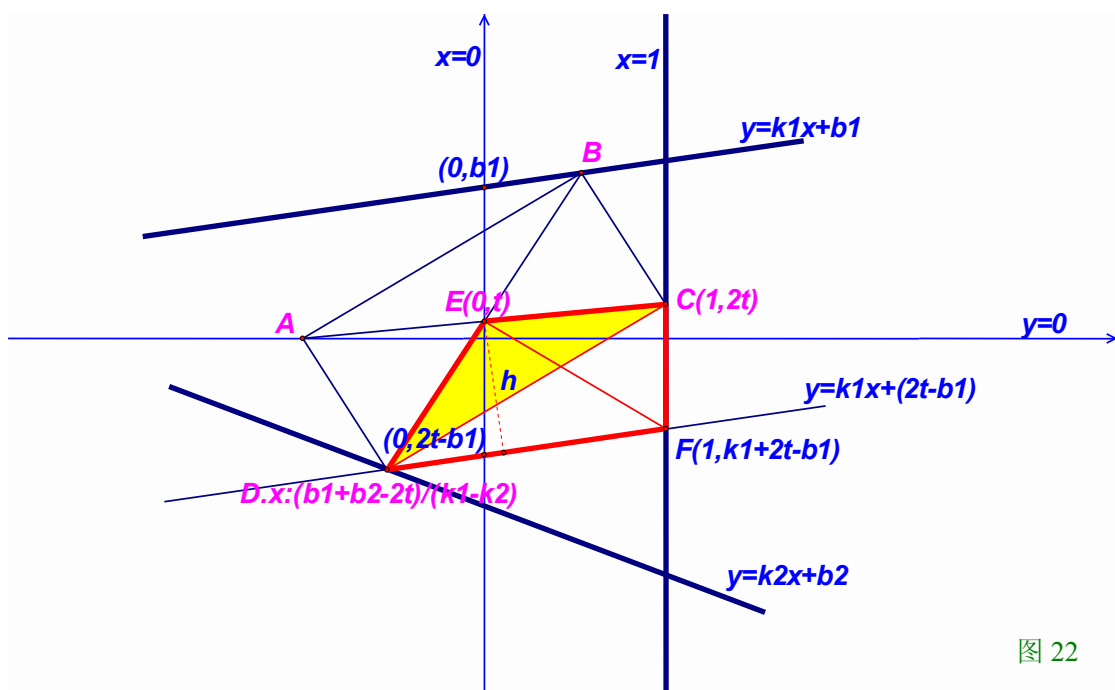


图 22

此时 $E$ 是 $y$ 轴上的一个动点，设 $E$ 的坐标为 $(0,t)$ ，则其它点的坐标如图所示。

所以， $S_{ABCD}=4S_{DEC}=4(S_{CFDE}-S_{CFD})=4(S_{DFE}+S_{CFE}-S_{CFD})$

<sup>11</sup> 实际上，的确存在反例，也就是说此猜想不是无法证明而是错误的。

$$\begin{aligned}
 S_{DFE} &= \frac{1}{2} DF \cdot h = \frac{1}{2} \hat{Q} (1 - D \cdot x) \sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \frac{|k_1 \hat{Q} - t + (2t - b_1)|}{\sqrt{k_1^2 + (-1)^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{b_1 + b_2 - 2t}{k_1 - k_2} \right] (b_1 - t) \\
 &= \frac{(k_1 - k_2 + 2t - b_1 - b_2)(b_1 - t)}{2(k_1 - k_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{CFE} - S_{CFD} &= \frac{1}{2} CF (1 - 0) - \frac{1}{2} CF (1 - D \cdot x) \\
 &= \frac{1}{2} CF \cdot D \cdot x \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 2t - (k_1 + 2t - b_1) \right] \cdot \frac{b_1 + b_2 - 2t}{k_1 - k_2} \\
 &= \frac{(b_1 - k_1)(b_1 + b_2 - 2t)}{2(k_1 - k_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= 2 \frac{(2t + k_1 - k_2 - b_1 - b_2)(b_1 - t) + (b_1 - k_1)(b_1 + b_2 - 2t)}{k_1 - k_2} \\
 &= 2 \frac{-2t^2 + (5b_1 + b_2 - 3k_1 + k_2)t + (2b_1k_1 - b_1k_2 - 2b_1b_2 + k_1b_2 - 2b_1^2)}{k_1 - k_2} \\
 &= 2 \frac{-2t^2 + (k_1 + k_2 + b_1 + b_2)t - (k_2b_1 + k_1b_2)}{k_1 - k_2}
 \end{aligned}$$

恰好是关于  $t$  的一元二次方程！由一元二次函数的基本知识可知：要使  $S_{ABCD}$  最大， $t$  要不取自定义范围中的端点、要不取对称轴  $\frac{k_1 + k_2 + b_1 + b_2}{4}$ 。当  $t$  为自定义范围内的端点时， $BCD$  之一是  $P$  的顶点，这种情况很好处理；当  $t = \frac{k_1 + k_2 + b_1 + b_2}{4}$  时， $C$  点的坐标为

$\left[ 1, \frac{k_1 + k_2 - b_1 - b_2}{2} \right]$ ，恰好为线段  $(cb \text{ 交点} - cd \text{ 交点})$  的中点！所以我们没有必要作麻烦的

旋转、平移和缩放，算出  $cb$ 、 $cd$  的交点坐标后， $C$  点的坐标可以用中点公式容易的计算出来。

至此已经完整的解决了本题。由于本文主要阐述极限法的应用，所以具体的算法就不给出了，读者已能够根据分析过程自行完成。

## 【总结】

通过对前面3个例题的仔细分析，相信大家已经逐渐的了解了极限法的含义和用法，并且领略到了它的威力：简明<sup>12</sup>而又实用。可以说，极限法是解决平面最优化问题的捷径。

极限法在证明中需要有比较扎实的平面几何功底，使用起来有一定的难度。

极限法的精髓要靠自己在分析的过程中去领会，灵活的掌握更需要经验的积累。

<sup>12</sup> 分析完成后算法都很简明。

## 【感谢】

由衷的感谢栗师和何林同学在我研究例题 2 时给予的帮助。

衷心的感谢向期中老师以及计算机兴趣小组的同学们，阅读我的论文并提供各种宝贵的修改意见和建议。

## 【参考文献】无。