# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

——从《取石子》问题谈起

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

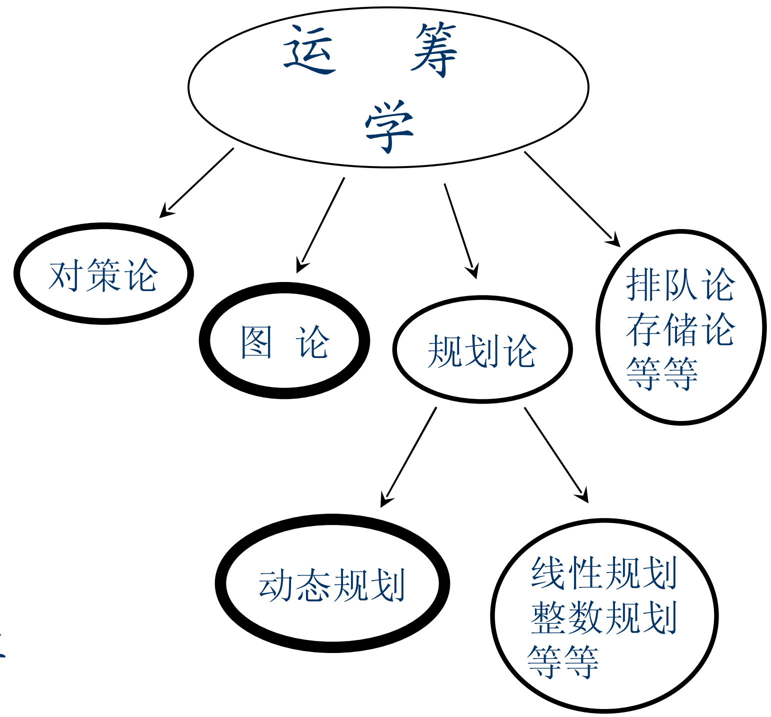
## 内容提要：

运筹学是一门十分年轻的学科，内容包括：规划论、图论、对策论、排队论等。

竞赛中最常出现的对策问题是：有两个局中人，在对方时刻采取最优策略的情况下，己方要么有必胜策略，要么必败。

本文所要探讨的正是此类“对策问题” 。

由于对局的复杂性和取胜的多样性，文章将从一道经典的“对策问题”——《取石子》谈起，着重阐述两种基本思想方法。



# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 问 题 描 述

有N粒石子，甲乙两人轮流从中拿取，一次至少拿一粒，至多拿先前对方一次所取石子数目的两倍。甲先拿，开始甲可以拿任意数目的石子（但不得拿完）。最先没有石子可拿的一方为败方。

请问，甲能否获胜？（1 < N < 100）

## 解 析

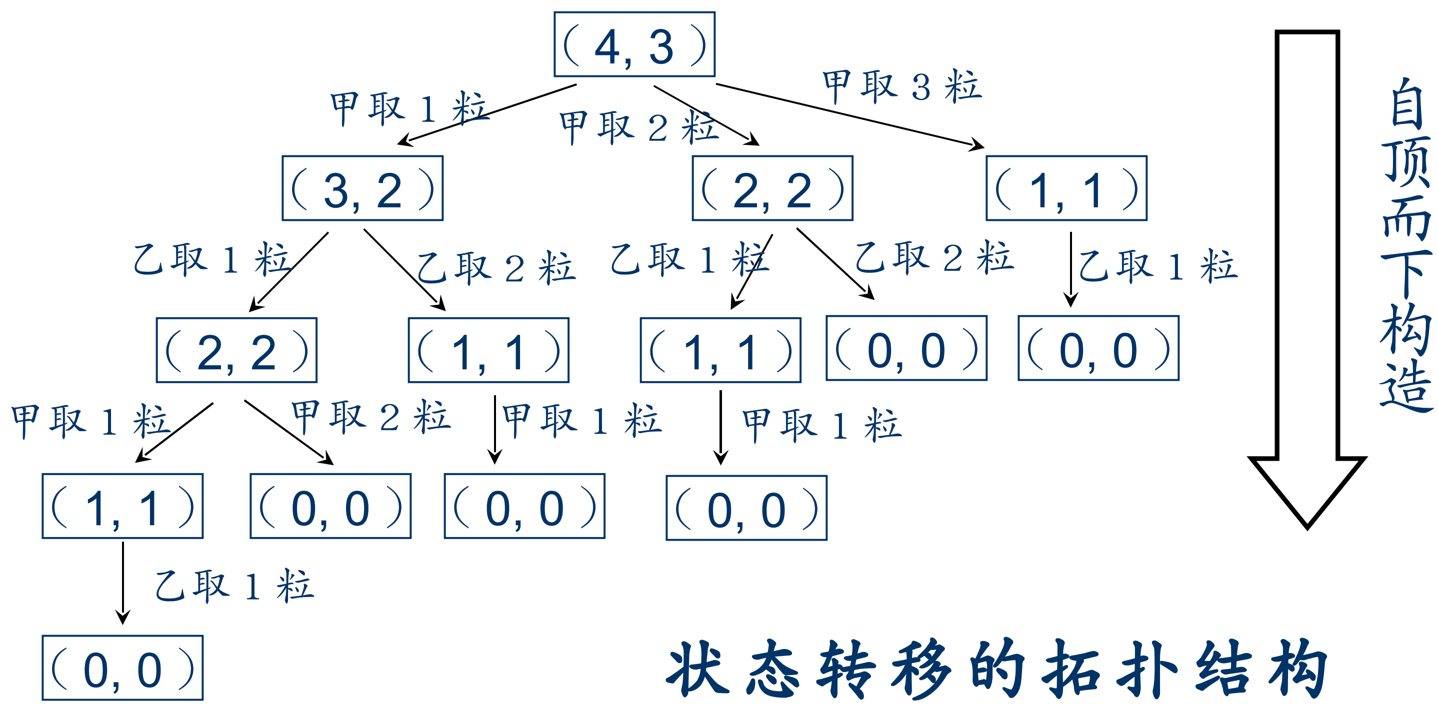
在本题中，影响胜败的有两个关键因素：

- 当前石子总数 N
- 当前一次最多可拿的石子数 K

用这两个因素（N，K）来表示当前局面的“**状态**”。题目要求的是判断状态（N，N-1）是先手必胜还是必败。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

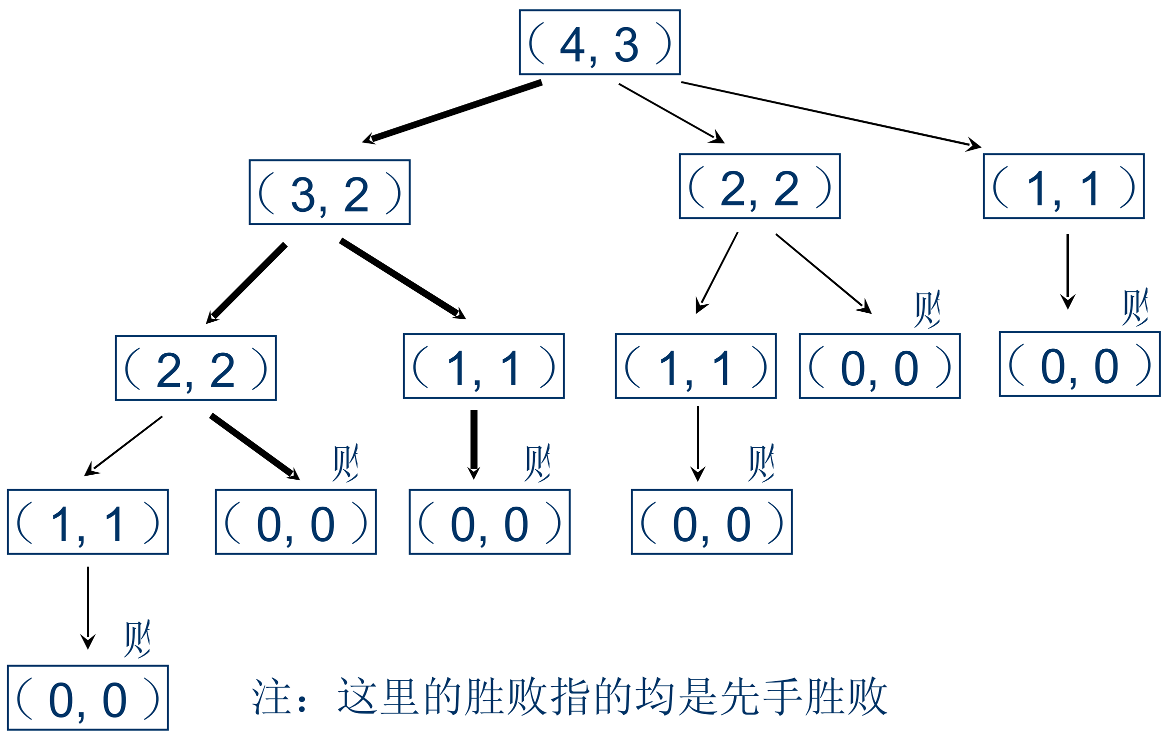
用一个简单例子分析：假设有 N＝4 粒石子，则一开始甲最多能取 3 粒，用（4， 3）来表示初始状态。




**状态转移的拓扑结构**

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

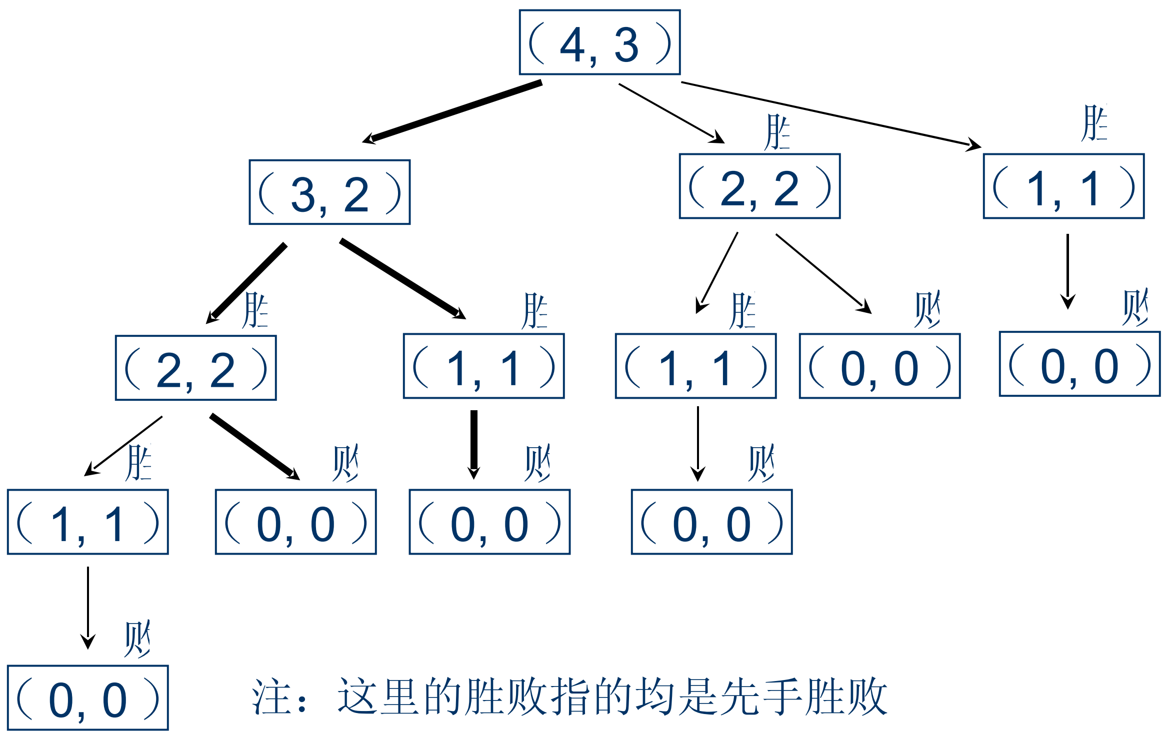
- 如果一个状态没有子状态，是结局，则根据题目条件判定胜负




注：这里的胜败指的均是先手胜败。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

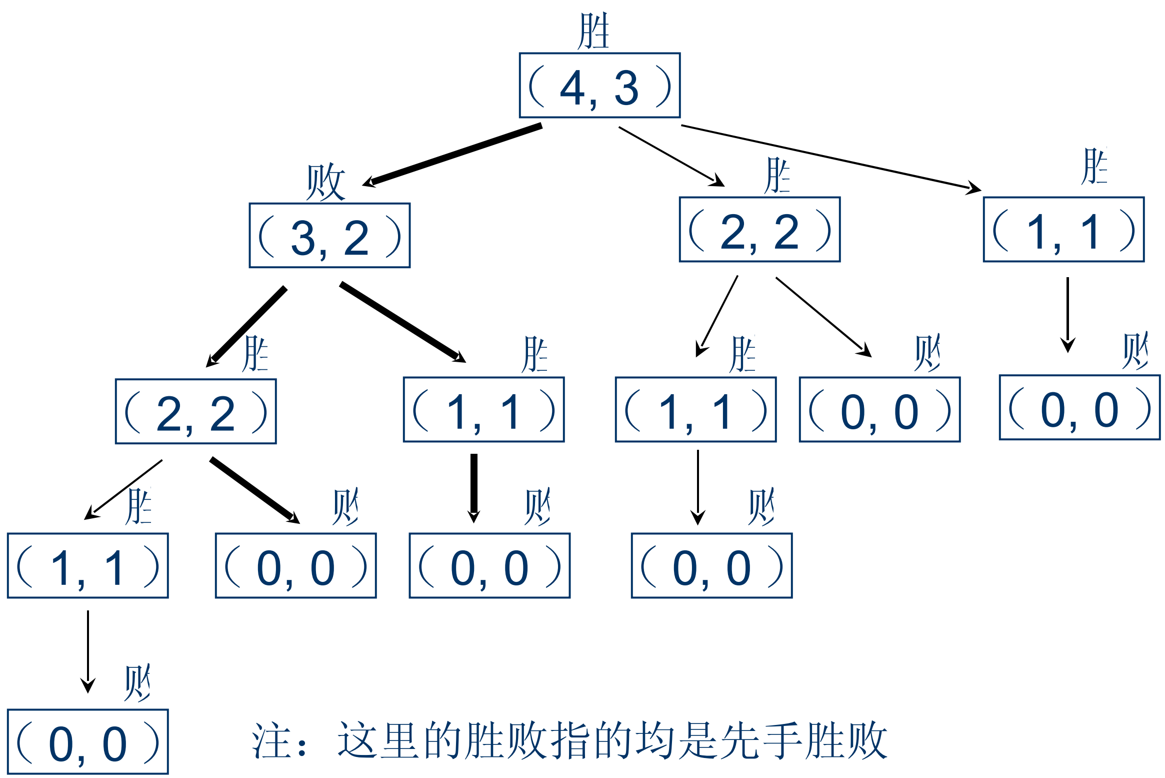
- 如果一个状态至少有一个子状态是先手败，则该状态是先手胜




注：这里的胜败指的均是先手胜败。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

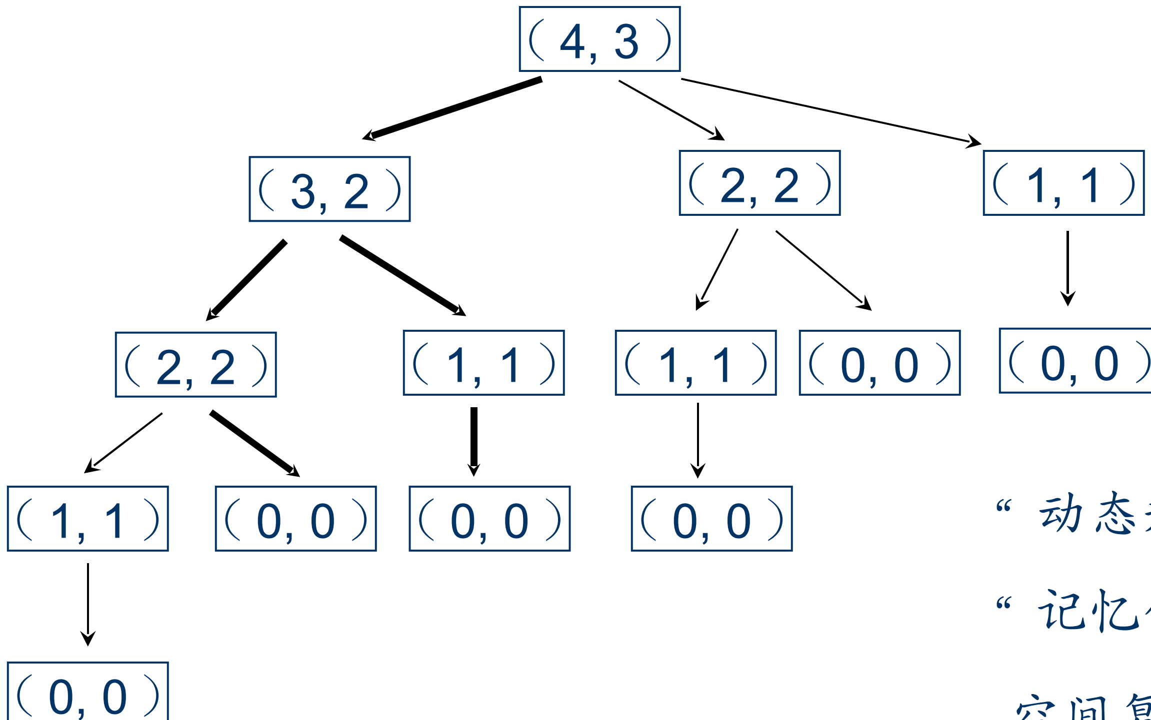
- 如果一个状态的所有子状态都是先手胜，则该状态是先手败




注：这里的胜败指的均是先手胜败

。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路




“ 动态规划” 或

“ 记忆化搜索”

空间复杂度 $O(N^2)$

时间复杂度 $O(N^3)$

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 思路一：一般性方法

- 状态
- 胜负规则
- 扩展规则
- 实现方法

“一般性方法”是从初始状态出发，自顶向下，考察所有状态，

逐步构造出“**状态转移的拓扑结构**”，有通行的胜败规则和实现方

法，因此应用十分广泛。

例如IOI96的取数字，IOI2001《Ioiwari》都可以用“一般性方

法”来解决。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 思路一：一般性方法

- 状态

列举影响结局胜负的所有因素，综合描述成“**状态**”。根据对局时状态之间的变化，**自顶而下**构造出“**状态转移的拓扑结构**”。

- 胜负规则

一个状态的胜负取决于其所有子状态的胜负。

- 如果一个状态没有子状态，是结局，则根据题目条件判定胜负
- 如果一个状态至少有一个子状态是先手败，则该状态是先手胜
- 如果一个状态的所有子状态都是先手胜，则该状态是先手败

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 思路一：一般性方法

- 扩展规则

在某些场合下，还可以记录一个状态先手胜（负）的最大（最小）利益，以数值形式描述，再根据题目中相应的条件，构成新的具有**针对性**的推算规则。例如IOI2001《Score》一题就是用扩展规则解决的。

- 实现方法

  - 预先处理（关键）

  列举状态；构造“状态转移的拓扑结构”；动态规划或记忆化搜索求状态先手胜负。

  - 对局策略

  依据已知的状态胜负，时刻把先手必败的状态留给对方。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 思路一：一般性方法

“一般性方法”也有它的不足：

- 基础

“一般性方法”是以“**状态转移的拓扑结构**”为基础设计的。

- 空间

“一般性方法”要考察**所有**状态的先手胜负。如果状态数目过多，甚至是无穷多，那“一般性方法”就无能为力了

- 时间

“一般性方法”还要通过胜负规则来研究状态之间的关系。如果状态过多，关系复杂，就可能导致算法效率下降。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 思路一：一般性方法

由此可见，“一般性方法”并不能解决所有的“对策问题”。于是，各种各样的针对单独问题的特殊解法应运而生，不妨总的称之为“特殊性方法”。

为了弥补“一般性方法”的缺陷，“特殊性方法”势必是寻找一种“**决策规律**”，能依据当前状态，按照“**决策规律**”直接决定下一步的走法。

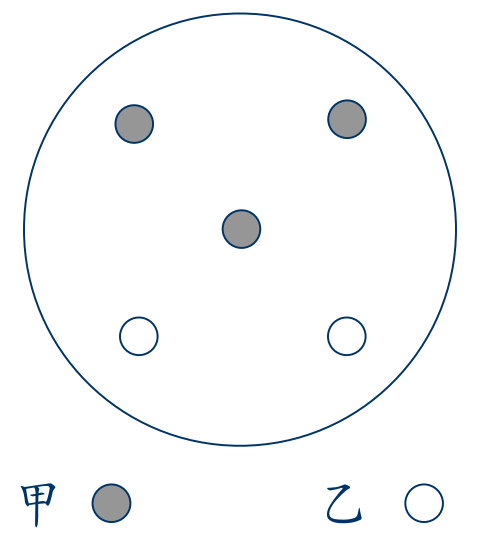
# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 思路二：特殊性方法

先看一个简单的例子：

在一个圆形桌面上，甲、乙轮流放5分硬币，不许重叠，甲先放，首先放不下硬币的一方为负。甲如何取胜呢?

事实上，甲只要先在圆桌中心放下一枚硬币，此后无论乙怎么放，甲总在其关于中心对称处放一枚，最终甲必然获胜。



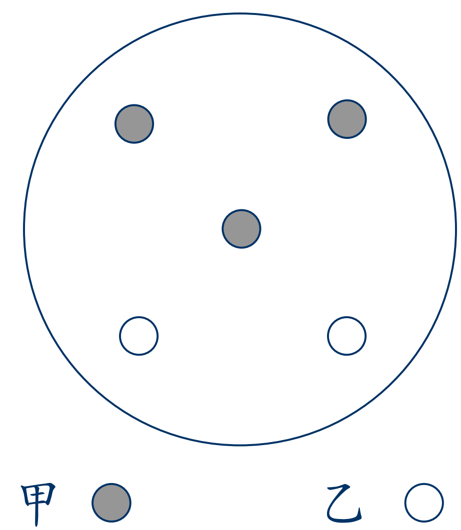
# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 思路二：特殊性方法

先看一个简单的例子：

在一个圆形桌面上，甲、乙轮流放5分硬币，不许重叠，甲先放，首先放不下硬币的一方为负。甲如何取胜呢?

在这个例子中，甲找到了一种必胜的状态。这种状态是具有某种“平衡性”的，称之为“**平衡状态**”。每当乙破坏了“平衡”后，甲立即使其恢复“平衡”，直到结局。



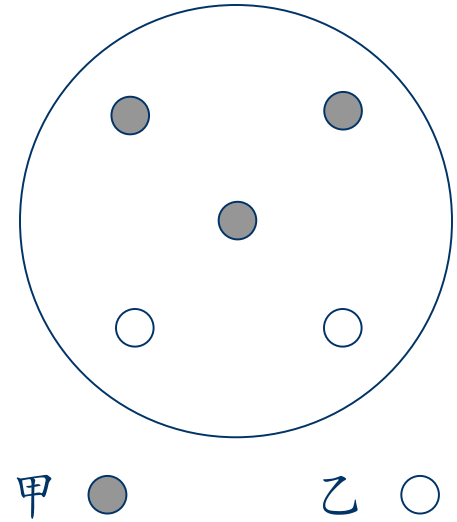
# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 思路二：特殊性方法

先看一个简单的例子：

在一个圆形桌面上，甲、乙轮流放5分硬币，不许重叠，甲先放，首先放不下硬币的一方为负。甲如何取胜呢?

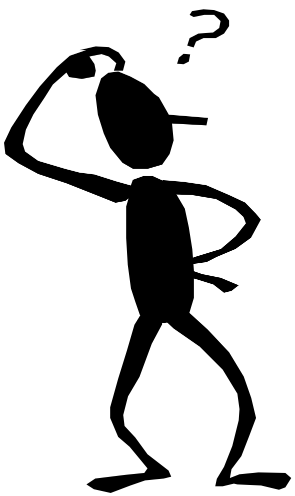
那么怎样寻找“对策问题”中的“**平衡状态**”呢？如何确定“**决策规律**”使我方在平衡被破坏后必然能恢复呢？



# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 思路二：特殊性方法

“一般性方法”是从初始状态开始，**自顶而下**建立“**状态转移的拓扑结构**”。现在，不妨反其道而行之，从结局或小规模残局开始，**自底向上**分析。



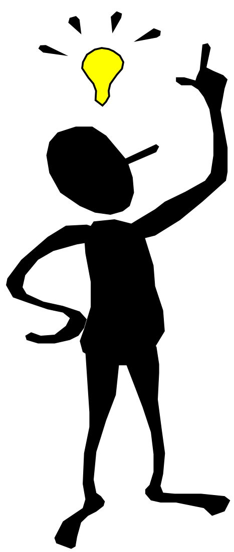
甲必败： 2 3 5 8 ……

甲必胜： 4 6 7 ……

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 思路二：特殊性方法

“一般性方法”是从初始状态开始，**自顶而下**建立“**状态转移的拓扑结构**”。现在，不妨反其道而行之，从结局或小规模残局开始，**自底向上**分析。



甲必败： 2 3 5 8 ……

甲必胜： 4 6 7 ……

**Fibonacci 数列**

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

猜　想：

设 {F} 为 Fibonacci 数列

（ $F_1=2$， $F_2=3$， $F_K=F_{K-1}+F_{K-2}$ ）

初始时有 N 粒石子，若 $N \in \{F\}$ 则先手必败，否则先手必胜。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

思路二：特殊性方法

**性质1：** 若 $K \geq N$，则状态（N,K）先手必胜。

**性质2：** 若状态（N,N-1）先手必败，则状态（N,K）$K < N$ 先手必败。

**性质3：** 若状态（N,K）$K < N$，则最后一次取走的石子数目不超过 $2N/3$。

**性质4：** $4F_{i-1}/3 < F_i$

（$F_1=2$，$F_2=3$，$F_K=F_{K-1}+F_{K-2}$）。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

思路二：特殊性方法

**结论 1**：状态 $(F_i, A)$　$A < F_i$ 先手必败。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

证　明：

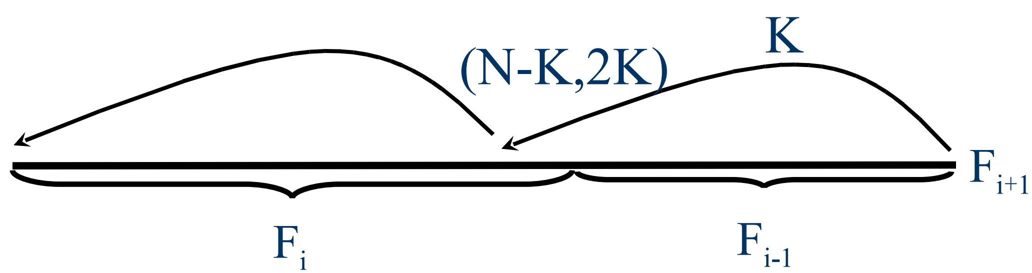
（一） $F_1(=2)$， $F_2(=3)$ 时，显然成立。

（二） 若 $F_1$ 至 $F_i$ 成立，则 $F_{i+1}$ 成立。

设先手取 K 粒石子。

（1） 若 $K \geq F_{i-1}$ 后手得状态 (N-K,2K) **后手获胜，先手败**

$2K \geq 2F_{i-1} \geq F_{i-1}+F_{i-2}= F_i > N-K$ 由性质 1，后手获胜。



# 浅析解“对策问题”的两种思路

思路二：特殊性方法

证　明：

（一）$F_1(=2)$， $F_2(=3)$ 时，显然成立。

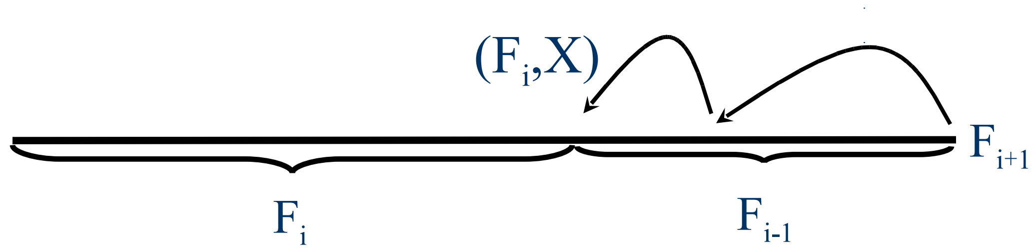
（二）若 $F_1$ 至 $F_i$ 成立，则 $F_{i+1}$ 成立。

设先手取 K 粒石子。

（1）若 $K \ge F_{i-1}$ 后手得状态 (N-K,2K) **后手获胜，先手败**

（2）若 $K < F_{i-1}$

根据假设（$F_{i-1}$,K）$K < F_{i-1}$ 必败，所以后手可以使先手面临 ($F_i$， X) 状态。



# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

证　明：

（一） $F_1(=2)$， $F_2(=3)$ 时，显然成立。

（二）若 $F_1$ 至 $F_i$ 成立，则 $F_{i+1}$ 成立。

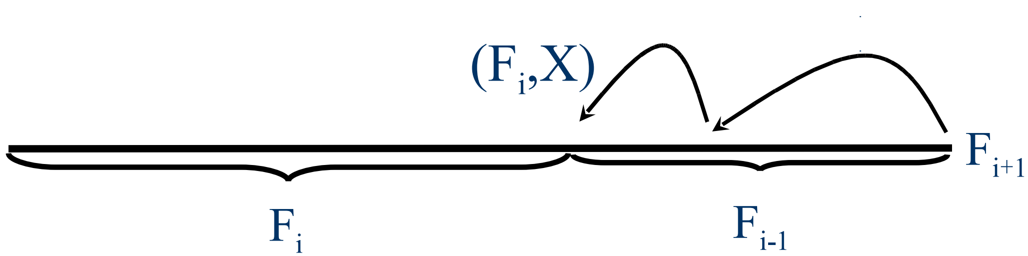
设先手取 K 粒石子。

（1）若 $K \geq F_{i-1}$ 后手得状态 $(N-K,2K)$ 后手获胜，先手败

（2）若 $K < F_{i-1}$ 后手获胜，先手败

由性质 3： $X \leq 2F_{i-1}/3 \times 2 = 4F_{i-1}/3$

由性质 4： $X \leq 4F_{i-1}/3 < F_i$ 因此 $(F_i,X)$ 是必败



# 浅析解“对策问题”的两种思路

思路二：特殊性方法

证 明：

（一） $F_1(=2)$， $F_2(=3)$ 时，显然成立。

（二）若 $F_1$ 至 $F_i$ 成立，则 $F_{i+1}$ 成立。

设先手取 K 粒石子。

（1）若 $K \geq F_{i-1}$ 后手得状态 (N-K,2K) 后手获胜，先手败

（2）若 $K < F_{i-1}$ 后手获胜，先手败

由（1）（2）得 $F_{i+1}$ 时，结论成立。

由（一）（二）得结论 1 成立。

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{F_i}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{F_{i-1}} \; F_{i+1}$

# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 思路二：特殊性方法

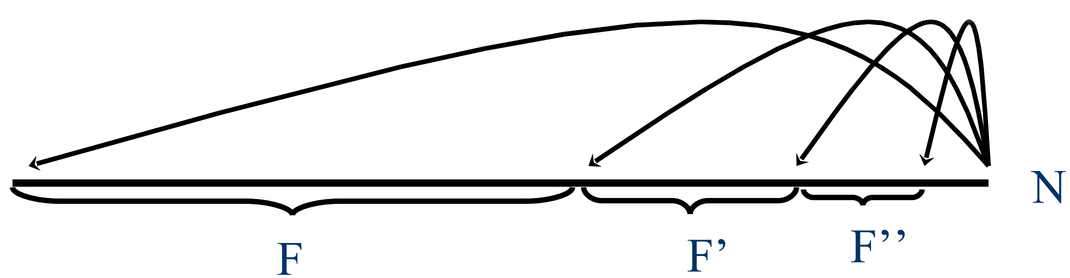
**结论 2：**状态 (N，N-1 ) \ N∈{F} 且 N>2，先手必胜。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

思路二：特殊性方法

**平衡状态：Fibonacci 数**

**决策规律：反复缩小范围，找最大 Fibonacci 数**



# 浅析解“对策问题”的两种思路

思路二：特殊性方法

**平衡状态： Fibonacci 数**

**决策规律： 反复缩小范围，找最大**

Fibonacci 数

特殊性方法

空间复杂度 O(1)

时间复杂度 O(logN)

**大大降低**

一般性方法

空间复杂度 $O(N^2)$

时间复杂度 $O(N^3)$

# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 思路二：特殊性方法

- 状态
- 逆向分析

“特殊性方法”是从结局或残局出发，自底而上分析，无须构造“**状态转移的拓扑结构**”，无须考察所有可能的状态与策略，时间和空间复杂度相对于“一般性方法”都不高。

例如 POI99《多边形》，IOI96 的取数字也可以用“特殊性方法”来解决。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

思路二：特殊性方法

- 状态

　　列举影响结局胜负的所有因素，综合描述成“**状态**”，但并不需要构造出“**状态转移的拓扑结构**”。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 思路二：特殊性方法

- 逆向分析

从简单的结局或残局开始，自底向上分析。

考察特殊情况下（譬如小规模，对称，极大极小等特殊值），先手胜或先手败的一类状态，并尝试从以下几个方面寻找共性：

- 对称性
- 简捷性
- 奇异性

通过分析，将所得性质推广到一般情况，从而找出一类必胜或必败的“**平衡状态**”，同时也得到保持状态“平衡”的“**决策规律**”。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 一般性方法 与 特殊性方法

《取石子》问题的推广：

- 一次可取先前对方所取石子数的3倍
- 一次可取先前对方所取石子数的4倍
- 一次可取先前对方所取石子数的5倍
- …………
- 一次可取先前对方所取石子数的K倍

一般性方法

VS

特殊性方法

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 一般性方法 与 特殊性方法

- 思路方向

  一般性方法：

  自顶而下　　考察所有状态胜负

  特殊性方法：

  自底而上　　研究一类平衡状态

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 一般性方法 与 特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则

一般性方法：

有通行胜负规则

特殊性方法：

无通行胜负规则

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 一般性方法 与 特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则
- 实现方法

一般性方法：

关键是动态规划或记忆化搜索的预处理。

特殊性方法：

着重于事先的思考，再将“决策规律”转化成程序。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 一般性方法 与 特殊性方法

- 思路方向
- 优点缺点
- 胜负规则
- 实现方法

一般性方法：

有通行规则可套用，应用面十分广泛；但是受“拓扑结构”限制，而且需考察所有状态，时空复杂度也有可能很高。

特殊性方法：

不受“拓扑结构”限制，无须考察所有状态，时空复杂度低，编程简单；但是无通行规则，思考难度大。

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

一般性方法 与 特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则
- 实现方法
- 优点缺点
- 核心思想

在“对策问题”中，一个状态要么是先手必胜，要么是先手必败！因此，在对局时，我方要做的就是占据必胜，把必败留给对方。

**这正是解“对策问题”的核心思想！**

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 一般性方法 与 特殊性方法

- 思路方向
- 胜负规则
- 实现方法
- 优点缺点
- 核心思想
- 延伸类比

“一般性方法”**从统一的角度，考察所有状态，来决定对局策略。**

“特殊性方法”**从特殊的角度，考察一类状态，来决定对局策略。**

一般性方法 ⟺ 动态规划

⇕ ⇕

特殊性方法 ⟺ 贪心

# 浅析解 “对策问题” 的两种思路

## 结 语

“对策论”是运筹学的一个重要分支。本文通过《取石子》问题，简单的阐述了解决一类“对策问题”的两种思路，也是我的一点心得，但并不能涵盖万一。

文中介绍的“一般性方法”与“特殊性方法” 既是方法，也是思路，更是一种思想。在解其他类型的题目时，也同样可以应用这两种思考方法。

# 浅析解“对策问题”的两种思路

## 结语

“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。”

我们还需要不断努力，不断实践，不断探索。只有实践多了，方能：

- 充分运用正向与逆向的思维
- 从各个角度观察问题
- 从一般到特殊，从特殊到一般
- 取长补短，采取合理的实现方法

## 结 语

运筹于帷幄之中

决胜于千里之外