第三讲、基于区间图的一些算法

本讲中我们将了解有关计算区间图的染色数与最大团的算法。为此我们将介绍完美消除序的概念。我们将看到这两个 NP 难题在区间图上能用线性的时间解决。

1. 介绍

图的染色问题是图论中的经典问题，在诸如拟定计划等发面有一系列应用[Wer85]。尤其是平面图的染色问题，即地图染色问题，已被深入地研究过。其中最著名的成果包括 Appel 和 Haken 证明的四色定理等[AH76]。

同样地，最大团问题也在诸多领域有着应用，例如 operation research、种系分析、图案识别等[Oga86]。

本讲中我们将在区间图上有效地解决这两个问题，同时介绍图的一个性质，使得该算法达到最优。在以后各讲中我们讲深入研究这类图，并发现它属于弦图的范畴。

让我们从回顾区间图的定义开始本讲的内容：

定义 1：给定一些区间，满足每个顶点代表一个区间 Iv,顶点间有边，当且仅当两个区间相交的图称为区间图。

2. 图的染色

这一节我们将学习区间图的顶点染色问题，即一种给区间图顶点染色的方案，使得每条边的两个端点颜色不同。我们暂不考虑边染色问题。

定义 2：一个图 G 的染色数 X（G）使将 G 进行染色所需要的最少的颜色数。

定义 3：我们把“能否将一个图用 K 种颜色染色”称为 K 染色问题。

2 染色问题等价与判断一个图是否是二分图。由于满足性问题中 2－SAT 问题是多项式级的，而 3－SAT 问题是 NP 难题，能够证明对任意图的 2 染色问题是线性的而 K 染色问题（K>=3）是 NP 难题。我们将简单地阐述 3 染色问题的复杂度。

定理 1：3 染色问题是 NP 难题。

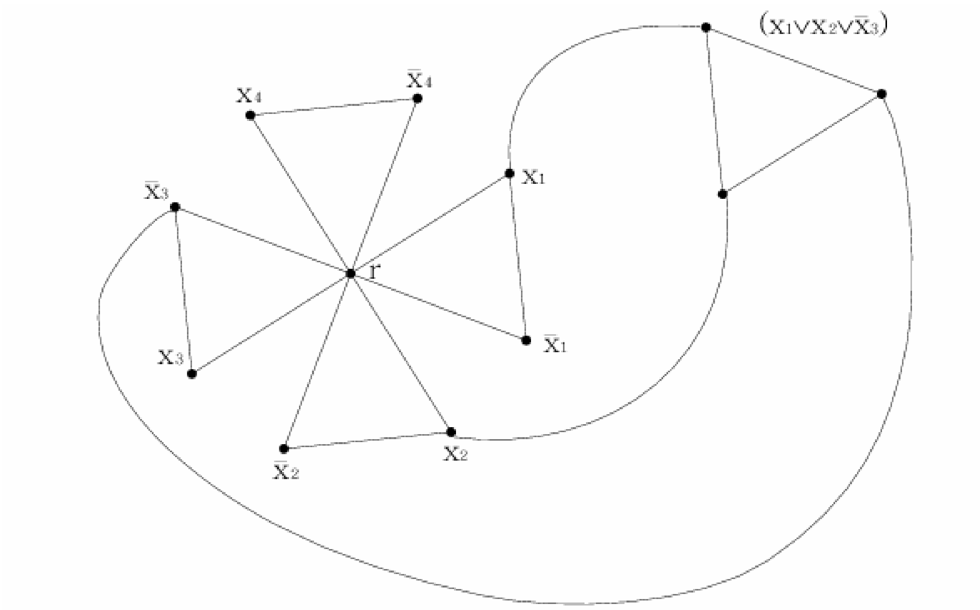
（注意：本课程中遇到的多数问题是 NP 难题，我们只证明问题的 NP 性。）

证明：

定义 4：NAE－3－SAT 问题：给定一个命题集合 U 和一个由 U 及非 U 的若干三元子集组成的集合 C，是否存在一个 U 中变量的取值方法使 C 中的每个子集至少包含一个 TRUE 值与一个 FALSE 值？这已被证明是 NP 难题[GJ79,p.259]

我们如图 1 构造一个图：

- 对 U 中的每个变量建立两个顶点 u 和 u’（称为内点）以及连接 u、u’与一个共同的中心点 r 的三条边。
- 对每个 c $\in$ C，定义一个两两相联的三角形代表，三个点分别与对应的三个内点相联。
- 我们用 R，T，F 这三种颜色染色，其中 R 是 r 的颜色。
- 对于每个变量，u 与 u’中的一个必须染 T（TRUE），另一个染 F。



接下来要说明的是 NAE－3－SAT 问题是该图 G 的 3 染色问题的特例。

必要性：如果一个图能够 3 染色，则内点必为 T 或 F 色，代表这个命题的真假，对于余下的每个三角形，它们所连接的三个内点不可能是同色的（否则这三个点只可能染两种颜色，必定不是可行的反色方法），即满足 NAE－3－SAT 问题的要求。

我们已经证明如果我们能解决 3 染色问题，那么我们也能解决 NAE－3－SAT 问题。因为 NAE－3－SAT 已被证明是 NP 难题，因此 3 染色问题也是 NP 难题。定理 1 得证。
■

3．图染色的一个贪心算法

虽然求图的染色数是 NP 难题，我们能用贪心算法进行一种可行染色（颜色数可能大于 X（G））。

```
INPUT: Graph G, vertex ordering v_1,...,v_n
   for i = 1...n {
      let j be the smallest color not used in Pred(v_i).
      color v_i with color j.
   }
```

这个算法能找到 G 的一种可行染色方法，并且使用至多 max{Vi 的入度| 1<=1<=|V|}+1 种颜色（当然这个结果很不理想☹）。注意顶点的顺序直接影响着颜色数的多少。

注：以上算法表明平面图可以用六色染色。（见 2003 集训队论文，刘才良）

4．染色算法最佳的条件

现在我们将研究在什么情况下，贪心算法能够得到最优解。

定理 2：对于区间图，使用自然编号法（见第二讲）编号，则以上贪心算法可以得到最优解。

证明：我们已知贪心算法得到的颜色数最多是 max{Vi 的入度| 1<=1<=|V|}+1。记 I*为这

个最大值达到时的顶点编号，我们知道区间图中一个顶点及它的所有前驱构成以一个团，因此 Pred（Vi*）$\cup$ V i*是一个大小为（V i*的入度＋1）的团。为给这个团染色需要（V i*的入度＋1）种颜色。由此可见贪心算法找到的颜色数达到了下界，即最优。定理 2 得证。█

这个证明了为了得到最优解我们所要做的只是寻找一个特殊的顶点编号序列。我们给这个性质一个名称：

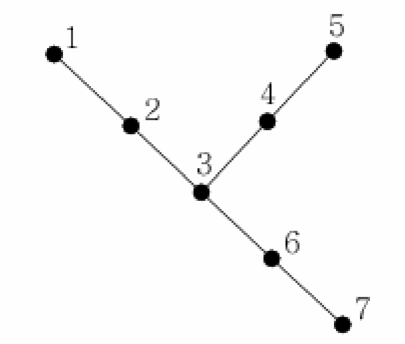
定义 5：一个顶点序列{V1..Vn}如果对任意 i 满足 Pred（Vi）是一个团，那么这种序列称为完美消除序列。

很容易知道：

定理 3：如果一个图 G 具有完美消除序列，就可以在线性时间内求出 X（G）。

注：1：即使我们知道一个图有完美消除序列，我们不得不找到这个序列。之后我们将得知这在线性时间内可以解决。具体细节参见第五讲的内容或[Gol80]。

2：一个具有完美消除序列的图不一定是区间图，图 2 就是一个例子。



5．最大团问题

我们将讨论的下一个问题是：最大团问题的复杂度是多少？

回忆一下最大团的有关定义：

定义 6：一个图的最大团数 W（G）是 G 构成团的最大的顶点子集的元素个数。

定理 4：计算 W（G）是 NP 难题。

完整的证明可参考[GJ79,p.53-56]。我们只给出以下两步证明的大致框架：

1．证明最大团问题与顶点覆盖问题等价：如果 I 是 G 的一个顶点覆盖，那么 G－I 是 $\bar{G}$ 中的一个团。

2．证明 3－SAT 问题是顶点覆盖问题的特解问题。█

现在我们说明图 G 是区间图时，能够在线性时间内算出 W（G）。

在定理 2 的证明中我们看到Pred（Vi*）$\cup$ V i*是一个大小为|Pred（V $_{i*}$）|+1 的团,因此W（G）>=|Pred（V $_{i*}$）|+1。我们又知道对于任意图G，X（G）>=W（G），因为染色一个大小为K的团至少需要K中颜色。定理 2 的证明表明X（G）＝|Pred（V $_{i*}$）|+1,所以 X（G）>=W（G）>=|Pred（V $_{i*}$）|+1＝X（G），这表明：

定理 5：对于具有完美消除序列的图 G，X（G）＝W（G）。

于是在第三节中的贪心算法中找到的团中的一个就是最大团，因此找最大团在 O（m+n）时间内能够解决。

我们同时得到：

推论 1：对于区间图的任何诱导子图 G，X（G）＝W（G）。

证明：区间图的任何诱导子图都是区间图，由定理 5 即证。■