

猜想及其应用

内容简介

- 前言

- 类比猜想

与熟悉的问题类比

巨人与鬼 $\alpha\beta$ 青蛙的烦恼

与特殊的问题类比

圆圈点（略）

- 归纳猜想

青蛙过河（略）

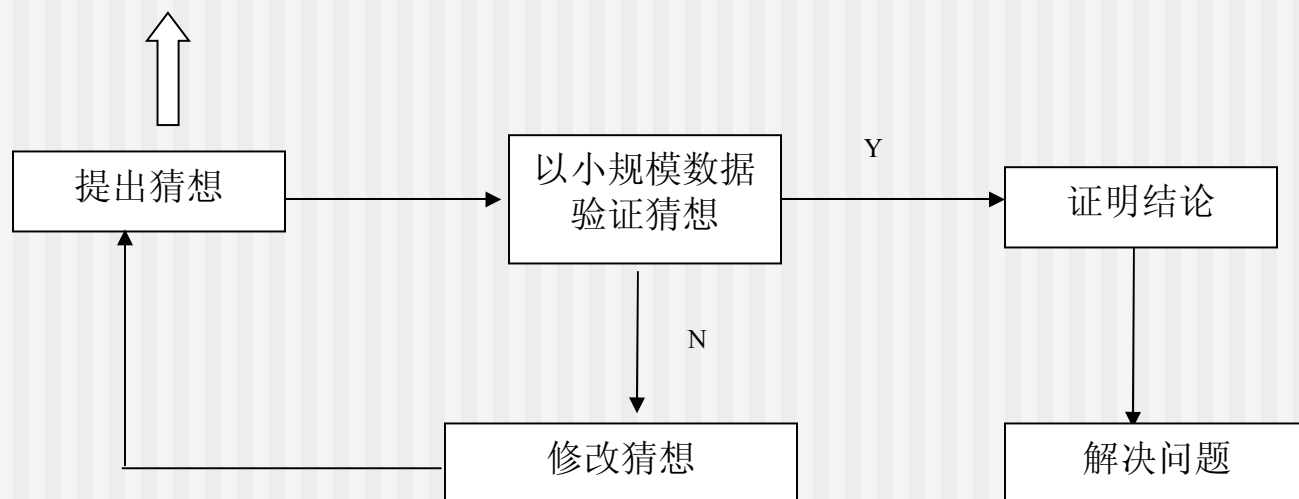
排列问题

- 结语

前言

猜想是一种**主观不充分似真**推理。它建立在观察、分析、联想、归纳的基础上

类比猜想、归纳猜想



由此可见，猜想是在深入分析问题的基础上，不懈探索、反复修正的过程。决不可能一蹴而就。提出猜想是整个过程的核心和重点。

类比猜想

事物 **A**

性质 **a**

性质 **b**

性质 **c**

性质 **d**

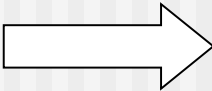
事物 **B**

性质 **a'**

性质 **b'**

性质 **c'**

性质 **d'**



类比、猜想

引例：巨人与鬼（1）

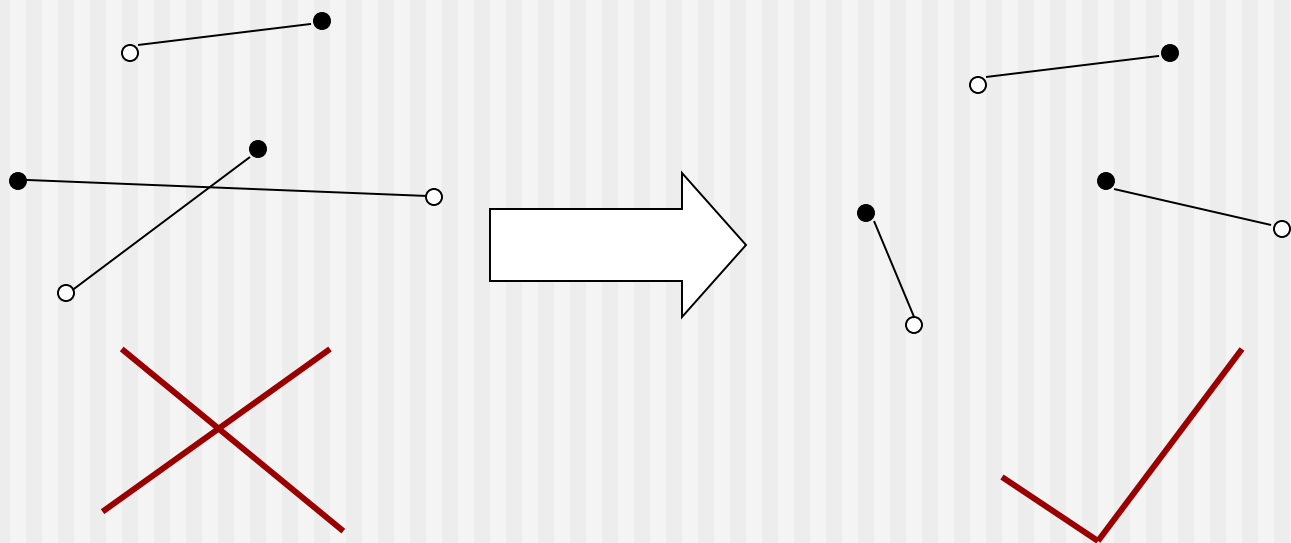
问题描述

平面上有 n 个巨人和 n 个鬼（ $1 \leq n \leq 50$ ）。每个巨人都
有新式激光武器，可以对鬼进行直线攻击。然而这种武器有一
种很大的弱点：两个不同武器发出的激光不能交叉，否则就有
爆炸的危险。

已知任意三个个体（包括巨人和鬼）都不在一条直线上，每个
巨人负责攻击一个鬼。当然激光不能交叉。

现在的问题是：请你求出任意一种攻击的方案。（即确定哪个
巨人攻击哪个鬼）

引例：巨人与鬼（2）



试题中是实际上是要确定巨人与鬼之间的一一对应关系——
这使我们很自然的联想到了**匹配**。

引例：巨人与鬼（3）

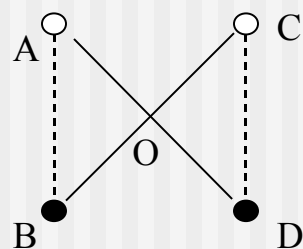
构图：

将巨人、鬼都抽象成为顶点。巨人组成的点集记为 X ，鬼组成的点集记为 Y 。在所有的 $x \in X$ 、 $y \in Y$ 之间连一条边。

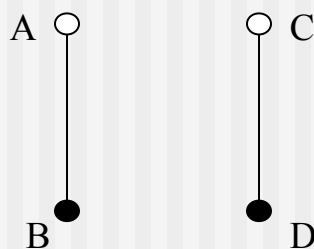
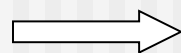
任务：

- 1、找到一个完备匹配。
- 2、匹配边不相交。

假设有相交边：



方案 1



方案 2

$$OA + OB > AB, \quad OC + OD > CD$$

$$AD + CB > AB + CD$$

方案 1 的“匹配边长度总和”
 $>$
 方案 2 的“匹配边长度总和”

引例：巨人与鬼（4）

方案 2 与方案 1，“匹配边的长度总和”减小了。故而：

每一个“包含相交边的完备匹配”都能够转换为“匹配边长度总和”更小

的一个完备匹配——换句话说，“匹配边长度总和”最小的完备匹配一定不包

含相交边！

而我们要求的，正是一个不包含相交边的完备匹配！

建立二分图最佳匹配模型：每条边的权值设为它两端顶点的欧几里德距离。用匈牙利算法求最佳匹配模型。

问题解决了。

引例小结

本题二分图中的顶点具有特殊性：每个顶点都对应于平面上的一点。因此，顶点与顶点之间不仅有逻辑关系，还有**几何直观**关系。正是由于充分利用了“几何直观”这一隐蔽关系才使得算法模型豁然开朗。

例 1：青蛙的烦恼 (1)

问题描述

池塘里有 n 片荷叶（ $1 \leq n \leq 1000$ ），它们正好形成一个凸多边形。我们按照顺时针方向将这 n 片荷叶顺次编号为 $1, 2, \dots, n$ 。

有一只小青蛙站在一号荷叶上，它想跳过每片荷叶一次且仅一次（它可以从所站的荷叶跳到另外任意一片荷叶上）。同时，它又希望跳过的总距离最短。

请你编程，帮助小青蛙设计一条路线

构图：

首先将每片荷叶抽象成一个顶点，在任意两个顶点 x, y 之间连一条边，边的权值设为顶点 x 与 y 的欧几里德距离。

模型：

以 1 为起点的最短 Hamilton 链。

例 1：青蛙的烦恼 (2)

经过观察分析，发现构造的图：

- 是一个完全图。
- 边的权值等于它两端顶点的欧几里德距离。
- 图中的每个顶点对应于平面上的一点。

这些性质和【引例】是多么相似啊！（这是表面上的类似）

由于图中的每个顶点对应于平面上的一点，所以顶点之间不仅存在着由“边”连接的逻辑关系，还存在着特殊的“几何直观”关系。利用好这个隐含的条件是解题的关键——这正与【引例】的[基本特性](#)不谋而合！（这是本质上的类似）

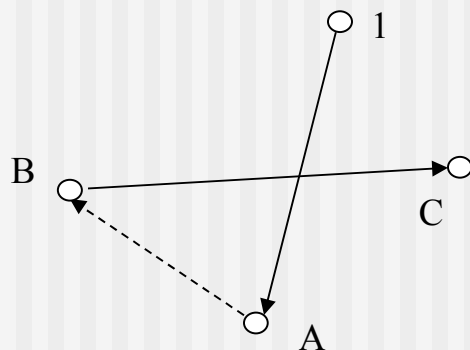
解决【引例】时利用这个特性可以将“匹配边总长度”不断的缩短；而本题所求的问题也是一个最短路问题。

例 1：青蛙的烦恼 (3)

根据两题诸多相似之处，我们猜测：

猜想 B 最短 **Hamilton** 链中不存在相交的边。

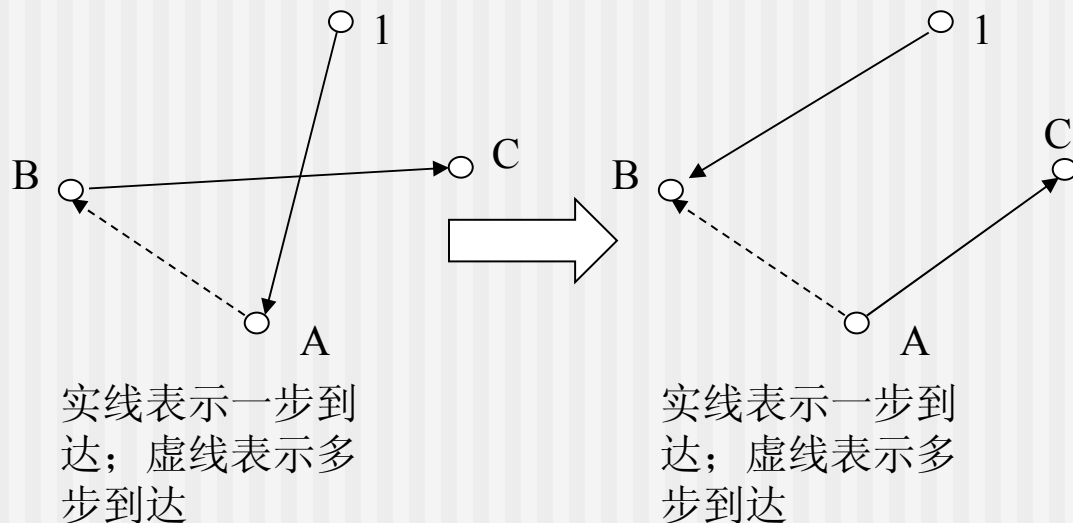
证明 设从 1 出发，首先到达顶点 A ($2 < A < n$)。由于所有点在一个凸包上、 $2 < A < n$ ，所以除 1、 i 以外的顶点必然被分作两个部分，分别位于线段 $\langle 1, A \rangle$ 的两侧。不失一般性，设从 i 出发经过若干步到左侧的顶点 B ，再到右侧的顶点 C ，如下图所示：



实线表示一步到达
；虚线表示多步到
达

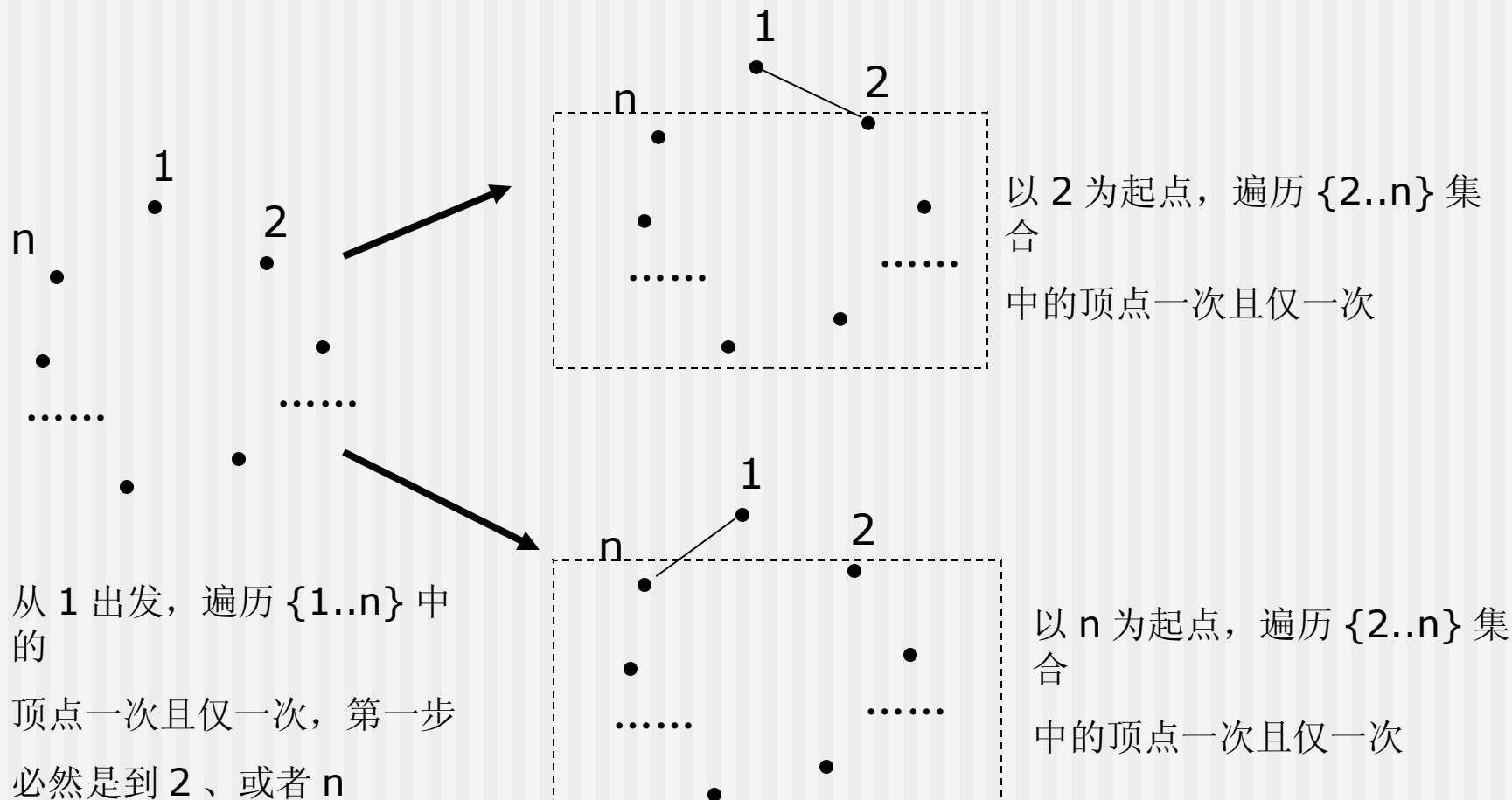
例 1：青蛙的烦恼 (4)

我们可以做这样的变换：



变换后的链的长度，显然比变换前的要短。所以变换前的方案必然不是最优解。因此最优 Hamilton 链肯定不存在相交边。

例 1：青蛙的烦恼 (5)



例 1：青蛙的烦恼 (6)

设 $f[s, L, 0]$ 表示从 s 出发，遍历 $\{s..s+L-1\}$ 中的顶点一次且仅一次的最短距离； $f[s, L, 1]$ 表示从 $s+L-1$ 出发，遍历 $\{s..s+L-1\}$ 中的顶点一次且仅一次的最短距离。则：

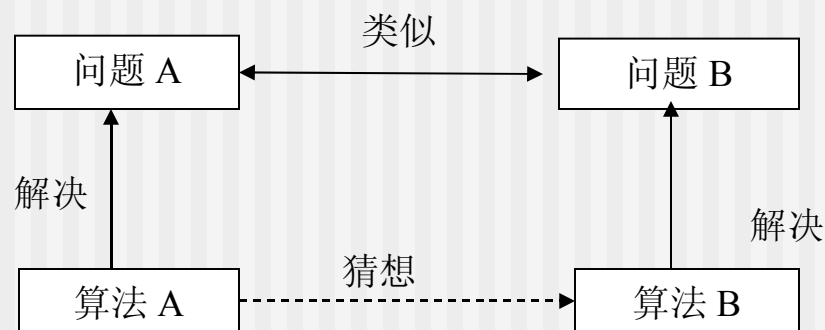
$$f[s, L, 0] = \min\{\text{dis}(s, s+1) + f(s+1, L-1, 0), \\ \text{dis}(s, s+L-1) + f(s+1, L-1, 1)\}$$

$$f[s, L, 1] = \min\{\text{dis}(s+L-1, s+L-2) + f(s, L-1, 1) \\ \text{dis}(s+L-1, s) + f(s, L-1, 0)\}$$

$$f[s, 1, 0] = 0, f[s, 1, 1] = 0$$

求： $f[1, n, 0]$

“与熟悉的问题类比”小结



深入、透彻的分析模型

。

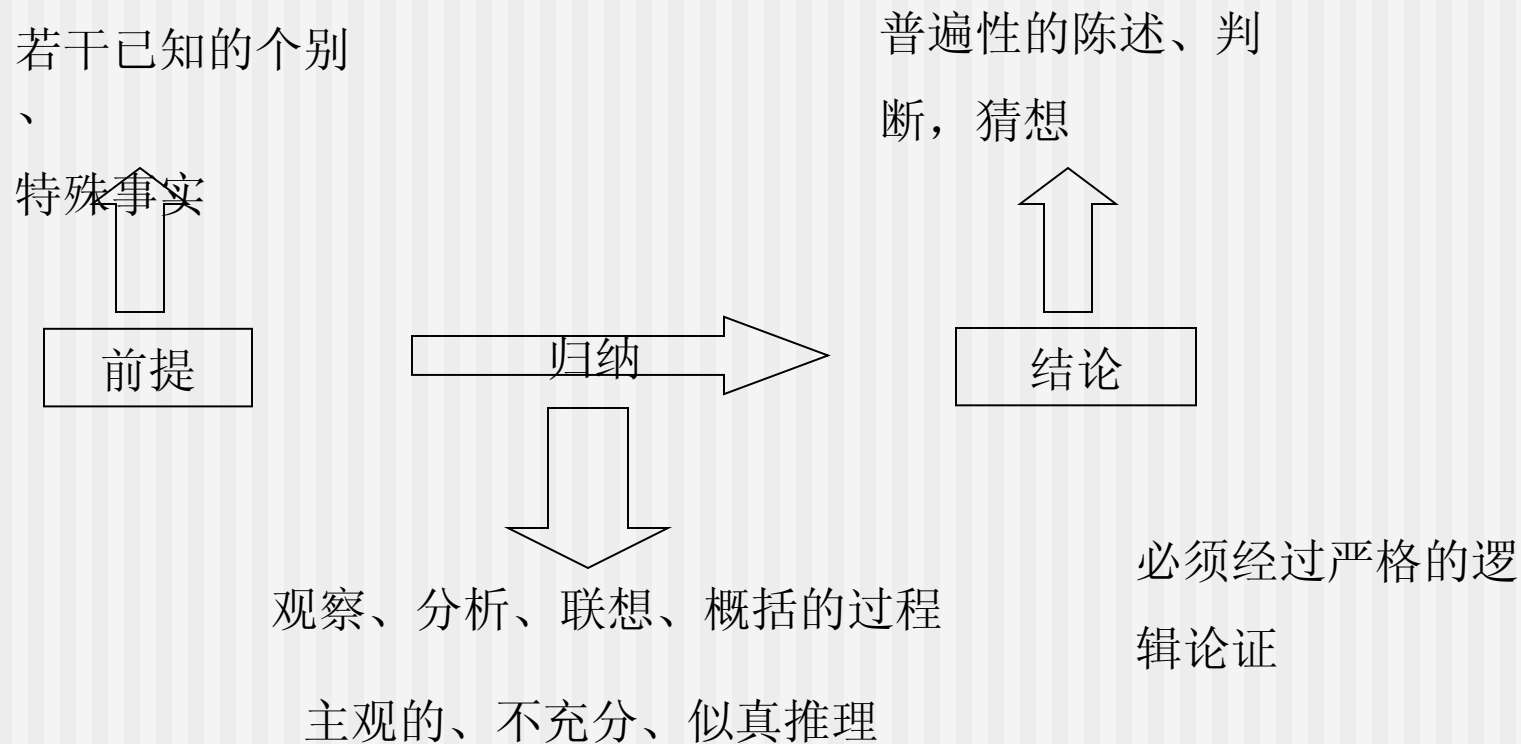
观察、联想。

与熟悉的问题进行类比的基本步骤是：

- 分析：分析问题的特征抽象出模型。
- 联想：与熟悉的，拥有类似特征、模型的问题类比。
- 比较：确定类比对象后将两者比较，分析异同。
- 猜想：根据已知问题猜想新问题的解决方法。

归纳猜想（1）

归纳，是指通过对特例的分析来引出普遍结论的一种推理形式



归纳猜想（2）

归纳猜想的一般步骤：

- 列举。将一些特殊的、简单的、小规模的数据列举出来。（这一步可以用手推，或者编写简单的搜索小程序）
- 观察。观察列举数据的规律。
- 猜想。根据部分数据猜想一般结论。
- 证明。证明猜想的正确性。（一般采用数学归纳法）

例 4：排列问题（1）

问题描述

在整数 $1, 2, \dots, N$ 的排列中，有些排列满足下面一个性质 **A**：该排列中除了最后一个整数以外的每一个整数后面都跟有（不必直接紧跟）一个同它相差为 1 的整数。例如： $N = 4$ ，排列 **1432** 是具有性质 **A** 的，而 **2431** 则不满足。

设有一个 N 个数的排列，已知其中 P ($P \leq N$) 个位置上的数，求共有多少个这样的排列——在 P 个位置上具有已知的数，且具有上述性质 **A**。例如： $N = 4$ ，且已知第 1 位、第 2 位分别是 1 和 4 ，则 **1432**，**1423** 就是这样的两个排列。

例 4：排列问题（2）

当 $n = 5$ 时，有 16 组满足要求的序列（搜索出的解）：

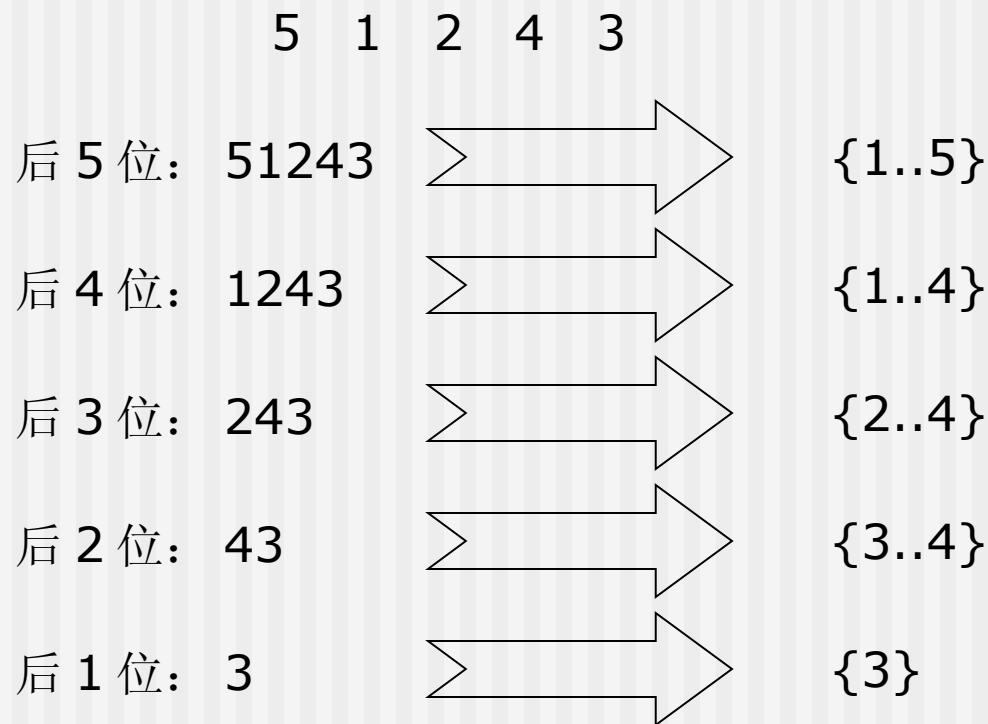
1 2 3 4 5	1 2 3 5 4
1 2 5 3 4	1 2 5 4 3
1 5 2 3 4	1 5 2 4 3
1 5 4 2 3	1 5 4 3 2
5 1 2 3 4	5 1 2 4 3
5 1 4 2 3	5 1 4 3 2
5 4 1 2 3	5 4 1 3 2
5 4 3 1 2	5 4 3 2 1

观察发现：

任何一个排列的后 k 位（ $1 \leq k \leq n$ ）是若干连续整数组成的集合

例 4：排列问题（3）

任何一个排列的后 k 位（ $1 \leq k \leq n$ ）是若干连续整数组成的集合



例 4：排列问题（4）

猜想 1 任何一个排列的后 k 位（ $1 \leq k \leq n$ ）是若干连续整数组成的

证明 约定序列的第 i 位用 $v[i]$ 表示。设序列后 x 位（ $x \geq 1$ ）是若干连续整数，这

些整数构成集合 $\{s..t\}$ 。那么倒数第 $x+1$ 位上的数 $v[n-x+1]$ 必然等于 $p-1$ 或者 $p+1$

（ $p \in \{s..t\}$ ）。显然 $v[n-x+1] \cup \{s..t\} = \{s-1..t\}$ 或者 $\{s..t+1\}$ ，还是若干连

续 **猜想 2** 如果一个排列的后 k 位（ $1 \leq k \leq n$ ）是若干连续整数组成的集合，则这个排列符合题目要求。

证明 约定该序列的第 i 位用 $v[i]$ 表示。设 $\{v[n], v[n-1], \dots, v[n-k+1]\} = \{s..t\}$ 。因为 $\{v[n-1], \dots, v[n-k+1]\}$ 也是若干连续整数的集合，所以 $v[n] = s$ 或 t 。

如果 $v[n] = s$ ，那么必有： $s+1 \in \{v[n-1], \dots, v[n-k+1]\}$

如果 $v[n] = t$ ，那么必有： $t-1 \in \{v[n-1], \dots, v[n-k+1]\}$

即这是一个满足要求的序列。

例 4：排列问题（5）

因此问题转化为：求后 k 位（ $1 \leq k \leq n$ ）是若干连续整数组成的集合的排列总数（由 $1, 2, \dots, N$ 组成）。

设 $g[s, r]$ 表示满足下面条件的序列 C 的总数：

C 由集合 $[s..s+r-1]$ 中的数组成，且后 k 位（ $1 \leq k \leq r$ ）是若干连续整数组成的集合。

如果原问题中倒数第 i 个位置上的数已经确定为 x （ $1 \leq i \leq r$ ），
那么 C 的倒数第 i 个位置上的数也要是 x 。

例 4：排列问题（6）

$g[s+1, r-1]$

如果倒数第 r 位确定为 s

$g[s, r-1]$

如果倒数第 r 位确定为 $s+r-1$

$g[s, r] =$

$g[s, r-1] + g[s+1, r-1]$ 如果倒数第 r 位不确定

0

其他情况

$g[s, 1] = 1$

求： $g[1, n]$

例 4 小结

题目给定的条件比较复杂，很不便于转化利用，极容易诱使选手走上“搜索”的“不归路”。

本题解决的关键在于通过对特例的观察，归纳出两个大胆的猜想，将**复杂、不利于利用的条件**，变换到一个我们熟悉的形式，
为动态规划模型的建立打开了通道。

结语

其实我们解题时都在不知不觉的猜想——猜想问题的性质；猜想模型的形式；猜想算法的内容……猜想是从已知向未知探索的重要途径。

猜想 \neq 偶然 + 运气。

猜想是建立在观察、分析、联想、归纳基础上的一种主观不充分似真推理。

它是观察能力、概括能力、联想能力、创新能力的综合体现。猜想的水平，

根据得到猜想的方式思维品质的高低分为：类比猜想和归纳猜想

但无论那种方法都离不开**观察、分析和实践**。可以说：

- 观察是猜想的血液——贯穿于整个猜想过程之中；
- 分析是猜想的灵魂——提出猜想的前提和基础；
- 实践是猜想的骨架——支撑猜想的基石，脱离了实际，猜想毫无意义。