

# 信息学中守恒法的应用

两个质量相等的小球，速度分别为  $5\text{m/s}$ ,  $4\text{m/s}$ ，他们相向运动，碰撞之后速度分别变成多少？

动能动量守恒

$10\text{g C}$  和  $10\text{g O}_2$  在密闭容器中反应一个小时。最后的总质量是多少？

质量守恒

变化中的不变量

# 数列操作问题 (1)

问题描述:

有一个数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 。每次可以从中任意选 3 个相邻的数  $a_{i-1}, a_i, a_{i+1}$ ，进行如下操作

$$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1}+a_i, -a_i, a_i+a_{i+1})$$

1    4    9    2    7    6



4+9    -9    9+2

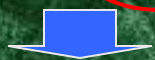
1    13    -9    11    7    6



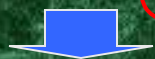
## 数列操作问题 (2)

问题：给定初始和目标序列，请判断能不能通过以上定义的操作，从初始变到目标状态。

1 6 9 4 2 0



1 6 13 -4 6 0



1 6 13 2 -6 6



7 -6 19 2 -6 6

Input.txt

1 6 9 4 2 0

7 -6 19 2 -6 6

Output.txt

YES

# 数列操作问题 (3)

$$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1} + a_i, -a_i, a_i + a_{i+1})$$

5    9    2    14    -9    11

$S_1=5$   
 $S_2=14$   
 $S_3=16$



$S_1=14$   
 $S_2=5$   
 $S_3=16$

## 数列操作问题 (4)

$$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1}+a_i, -a_i, a_i+a_{i+1})$$

$$\begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} x+y & -y & y+z \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{l} S_1 = x \\ S_2 = x+y \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{S_1 \text{ 和 } S_2 \text{ 交换}} & \left. \begin{array}{l} S_1 = x+y \\ S_2 = x \end{array} \right\} \\ S_3 = x+y+z & & S_3 = x+y+z \end{array}$$



# 数列操作问题 (5)

1 6 9 4 2 0

$$S_1=1$$

$$S_2=7$$

$$S_3=16$$

$$S_4=20$$

$$S_5=22$$

$$S_6=22$$

{1,7,16,20,22,22}

7 -6 19 2 -6 6

$$S_1=7$$

$$S_2=1$$

$$S_3=20$$

$$S_4=22$$

$$S_5=16$$

$$S_6=22$$

{1,7,16,20,22,22}

相等

## 数列操作问题 (6)

$$(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1}+a_i, -a_i, a_i+a_{i+1})$$

$$\begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} x+y & -y & y+z \end{matrix}$$

$$S_1 = x$$

$$S_2 = x+y$$

$$S_3 = x+y+z$$

对  $(a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$  的操作  
， 相当于交换  $S_{i-1}, S_i$

$$S_1 = x+y$$

$$S_2 = x$$

$$S_3 = x+y+z$$

# 数列操作问题 (7)

对  $(a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$  的操作，相当于交换  $S_{i-1}, S_i$

- $S_n$  不可能被交换，所以初始和目标序列的  $S_n$  应该相等
- 集合  $\{S_1, S_2, \dots, S_{n-1}\}$  始终不变
- 经过若干操作后，序列  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$  发生顺序的改变
- 反之，如果两个  $\{S_i\}$  和  $\{S'_i\} (1 \leq i \leq n-1)$  完全相等，只是顺序不同。他们必然可以通过一系列操作互相转化 (前提是  $S_n$  要相等)



# 数列操作问题 (8)

- 输入数列  $\{A_i\}$ ,  $\{B_i\}$
- 求出  $\{SA_i\}$   $\{SB_i\}$
- 把  $SA_n$  和  $SB_n$  比较; 再把  $\{SA_i\}$   $\{SB_i\}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) 分别排序, 然后直接比较。
- 如果都相等输出 “YES”, 否则 “NO”
- 时间复杂度  $O(n \log n)$  (排序复杂度)

数列变换的过程中, 数字杂乱无章, 没什么规律。

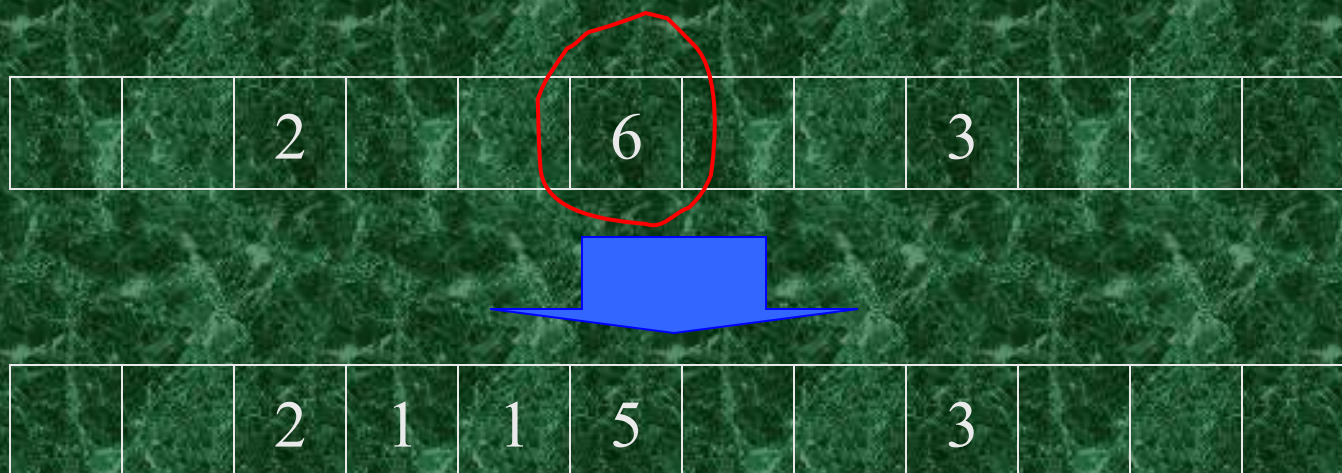
但是他们的和是有规律的。

抓住变化中的不变量, 一切都变得很轻松。

# 棋子移动 (1)

问题描述:

- 有一列无限长的格子里面。某些格子里面放了棋子
- 如果某个格子里面有棋子，可以拿走这一颗，并且在这个格子的左边两个格子里面各放一颗。





# 棋子移动 (2)

问题描述:

- 如果连续两个格子里面都有棋子，可以分别在两个格子里面各拿走一颗，并且在它们右边的格子里面放一颗。





# 棋子移动 (3)

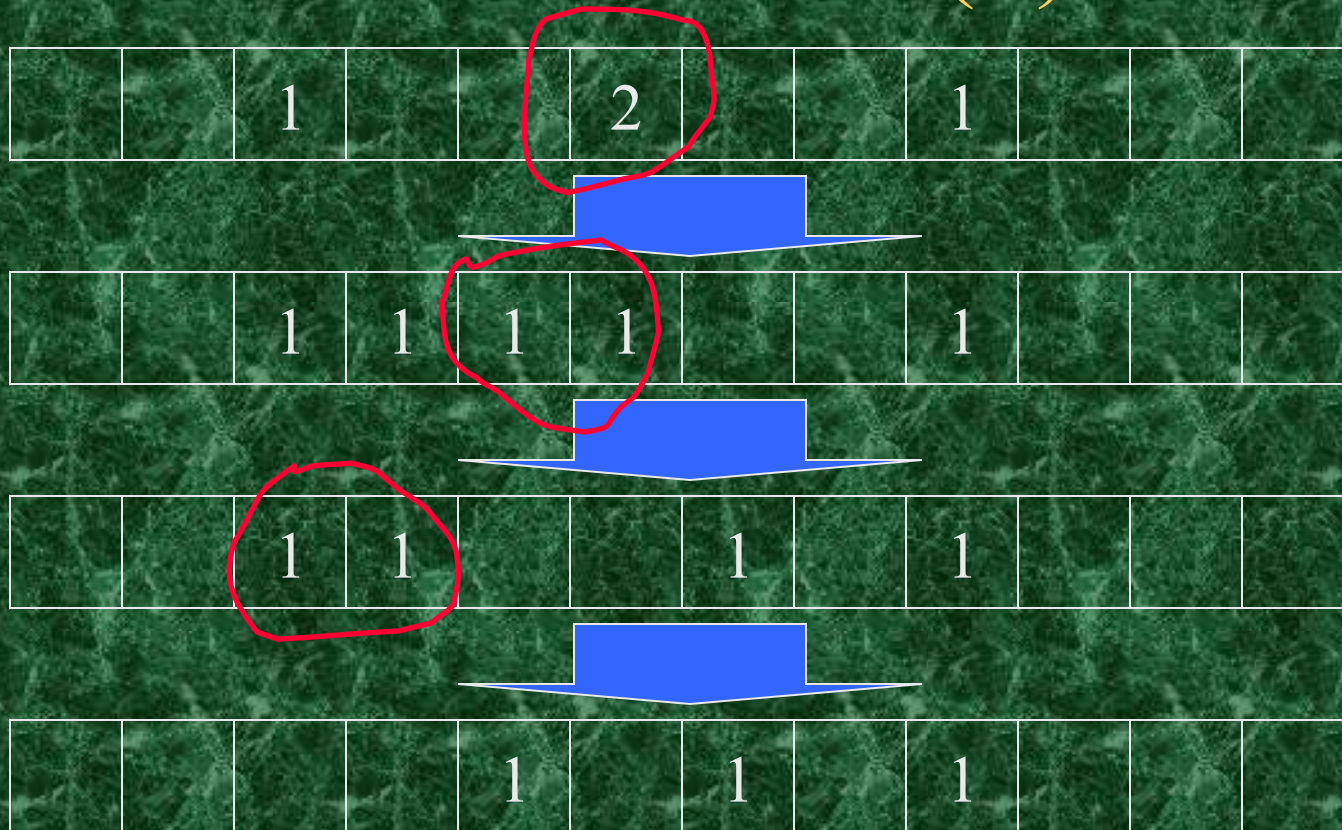
问题:

给定初始状态, 要求用以上操作, 使得:

- 每个格子里面至多只有 1 个棋子 (或者没有)。
- 没有相邻的两个格子都有棋子。

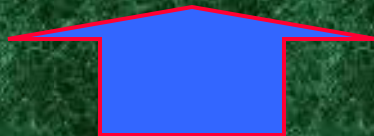
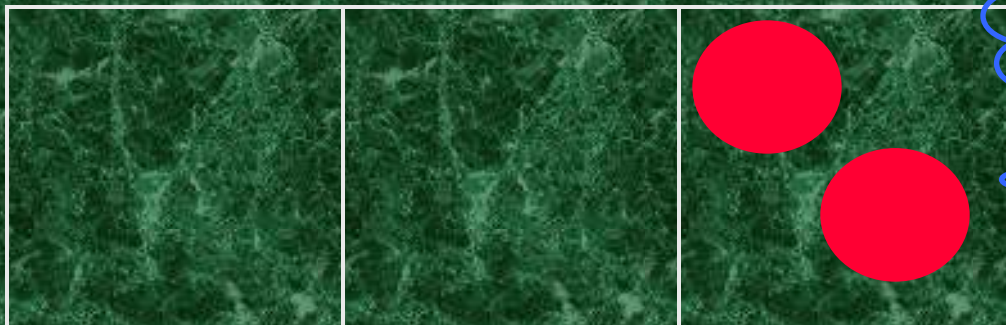
**简单的说: 就是无法继续操作!**

# 棋子移动 (4)

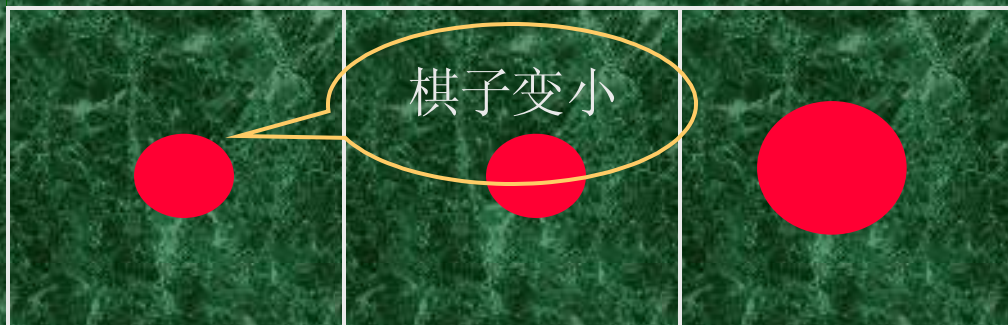


# 棋子移动 (5)

橡皮泥!



$W_i$  第  $i$  个格子中橡皮泥的大小



棋子变小

$$W_i = W_{i-1} + W_{i-2}$$



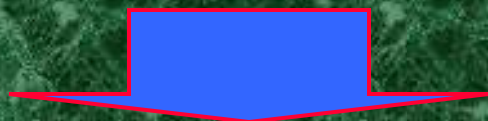
# 棋子移动 (6)

Fibonacci 数列

$$W_i = W_{i-1} + W_{i-2}$$



$$2*1 + 8*2 + 34*1 = 52$$

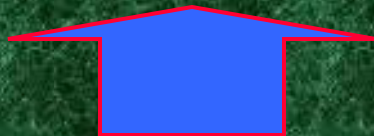
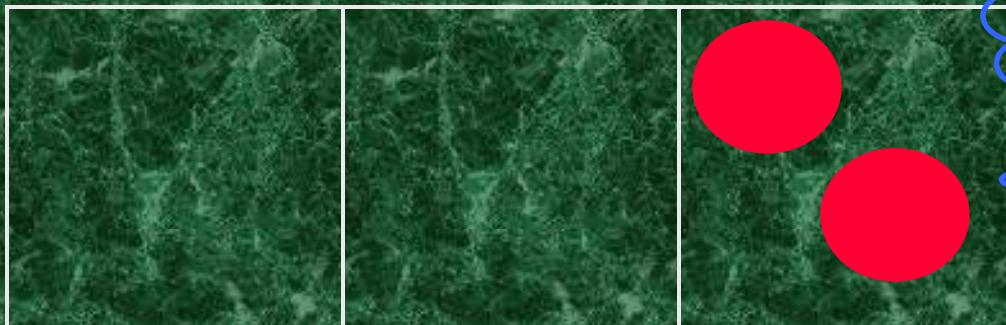


相等

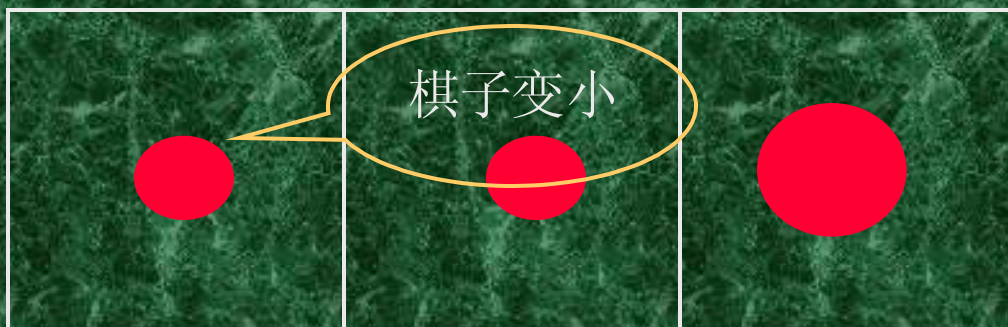
$$5*1 + 13*2 + 34*1 = 52$$

# 棋子移动 (7)

橡皮泥!



操作的过程中  
橡皮泥的总量是保持  
**不变**的。

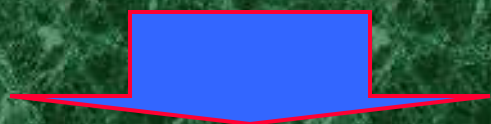


# 棋子移动 (8)

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

		1			2			1		
--	--	---	--	--	---	--	--	---	--	--

$$2*1+8*2+34*1=52$$



1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89

				1		1		1		
--	--	--	--	---	--	---	--	---	--	--

$$52-34=18$$

$$18-13=5$$

$$5-5=0$$



# 棋子移动 (9)

- 棋子移动的过程纷繁复杂，也没什么规律可寻。
- 我们通过发现“橡皮泥质量守恒”，把复杂的移动规则，变成了简单的数字加减。
- “橡皮泥质量”就是变化中的**不变量**

还有一些细节：

高精度，解的存在性的证明，解的唯一性的证明。

格子有无穷多个，到底从什么地方开始标“质量”？

这些大家可以自己研究。这里只想揭示最本质的东西：守恒。

# 总结

- 问题往往纷繁复杂，直接分析困难重重
- 变化中往往存在一些不变量
- 不变量或者明显，或者隐藏在幕后
- 牢牢抓住不变量守恒，就能透过迷雾看到本质！



# 总结

给我一双慧眼吧！

信息学中最重要的一双慧眼，就是：

“守恒”！