第五讲、完美消除序列

本讲的主题有关弦图和完美消除序列。我们已知具有完美消除序列的图都是弦图，本讲中将了解到所有弦图都具有完美消除序列。

为了证明这一点，我们引入了单纯顶点的概念，并证明弦图都含有单纯顶点。证明过程中，完美还将得知弦图的子图也是弦图。

我们讲给出两个在线性时间内求出完美消除序列的算法，并给出了一个算法运行全过程的的例子。

作为一个推论，独立集、染色、团等问题在弦图上都能用线性时间解决。

1．介绍

我们已经知道弦图的定义，弦图同时又有很多名字：严格巡回图、单调传递图、三角图、完美消除图等。其中有些不难理解☺。

我们已学习了区间图，不久将知道区间图都是弦图。

2．弦图与完美消除序列

我们的目标是证明图 G 是弦图，当且仅当 G 具有完美消除序列。这个命题的必要性已经证明，现在我们来证明充分性。

首先引入单纯点的概念：如果与顶点 V 相邻的所有顶点构成一个团，则 V 称为单纯点。

定理 1：任何弦图 G 具有至少一个单纯点。如果 G 不是完全图，那么它至少具有两个不相邻的单纯点。

证明：完全图的情况是平凡的（每个顶点都是单纯点），我们只考虑 G 不是完全图的情况。

我们对 G 的顶点数 N 使用归纳法：

1：奠基 N＝1 时。平凡解，显然成立。

2：归纳假设：对所有 N<=K（K>=1），G 有两个不相邻的单纯点。

3：归纳证明：令 N＝K＋1，

由于 G 不是完全图，可以找到边（a，b）$\notin$ E。

记 G[V－S]为 G 的顶点子集 V－S 诱导的子图。S 为 V－{a,b}中的最小的子集，满足 a 与 b 在 G[V－S]两个的不同的连通分支 A 和 B 中，S 可以是空集。

S 的这种取法一定存在，因为我们可以令 S 为所有与 a，b 相邻的顶点集合（G－S 中 a，b 是孤立点）。

我们的目标是在 A 和 B 中分别找到一个单纯点。我们只考虑在 A 中找到一个单纯点，B 中的方法是同样的。

令 GA＋S 是顶点集 A $\cup$ S 诱导的子图。

情况 1：G_{A+S}是完全图。那么a是G_{A+S}中的一个单纯点，也是G中的单纯点（由于a $\in$ A ，a的相邻点都在G_{A+S}中）。

情况 2：GA＋S 不是完全图。由于 B $\notin$ GA＋S，则 | GA＋S | < |G| 根据归纳假设，GA＋S 中有两个不相邻的单纯点 x，y，（x，y）$\notin$ E。

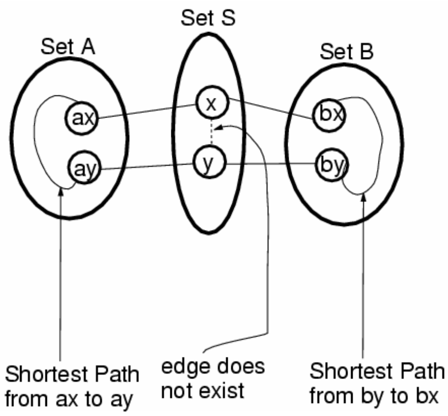
情况 2A：x，y 中有一个属于 A，不妨设为 x。与情况 1 类似，x 也是 G 中的单纯点。

情况 2B：x 和 y 都属于 S。我们将证明这种情况不存在。用反证法。

引理 1：x 与 y 在 A、B 中都有相邻的顶点。

证明：不失一般性，假设 x 在 A 中没有相邻顶点。那么我们可以将 x 从 S 中删去，得到一个更小的 S’，S’同样将 A，B 分离，这与 S 的最小性矛盾。引理 1 得证。

于是，令 x 的两个相邻点 ax$\in$A，bx$\in$B，y 的两个相邻点 ay$\in$A，by$\in$B。由于 A 是一个连通分支，存在从 x 到 y 的一条路径，且该路径除 x，y 外的所有顶点都在 A 中。同理存在一条除端点都在 B 中的路径连接 x，y（见图 1）。



设使用 A 中顶点从 x 到 y 的最短路径是 $(x,\ a_x,\ a_1,\ \ldots,\ a_k,\ a_y,\ y)$，

使用 B 中顶点从 x 到 y 的最短路径是 $(y,\ b_y,\ b_1,\ \ldots,\ b_m,\ b_x,\ x)$，则

$(x,\ a_x,\ a_1,\ \ldots,\ a_k,\ a_y,\ y,\ b_y,\ b_1,\ \ldots,\ b_m,\ b_x,\ x)$ 是一个环，显然它的长度不小于 4。当 ax＝ay 且 bx＝by 时它的长度是 4。

由于在弦图中，所有长度不小于 4 的环上都有弦（连接不相邻顶点的边），我们必须在以上环中找到一条弦。显然 A 到 B 中没有弦（A，B 是不同的连通分支）。A 到 A$\cup${x，y}中或 B 到 B$\cup${x，y}中也没有弦，因为我们选取的最短路。而（x，y）$\notin$G，也不可能是弦。因此这个环上没有弦，这与 G 是弦图矛盾。因此情况 2B 不存在。

综上所述，A 中存在一个单纯点。同理 B 中也存在一个单纯点。显然这两个点不相邻。定理 1 得证。█

以上证明使用了一个事实：A$\cup$S 是一个弦图。下面进行证明：

定理 0：弦图的任何诱导子图都是弦图。

证明：假设图 G 是一个弦图，H 是 G 的任意一个诱导子图。那么有 V（H）$\subseteq$V（G），E（H）$\subseteq$E（G）。显然 H 中没有新的环出现。因为 G 中所有大于 3 阶的环都有弦，这对 H 中的环显然也成立。定理 0 得证。█

推论 2：每个弦图都有我们消除序列。

证明：对顶点数 N 归纳。

1：N＝1，显然成立。

2：N＝K－1，K>=2 成立时，令 N＝K 取 G 中的一个单纯点 Vk，G[V－Vk]也是弦图，

有归纳假设，令它具有一个我们消除序列{V1..Vt}，t=K－1。由于 Vk 是单纯点，易得序列{V1..Vt,Vk}是 G 的一个完美消除序列。推论 2 得证。█

推论 2 的证明暗示了一种迭代地寻找完美消除序列的方法。

这种方法最先由 Fulkerson 和 Gross 在 1965 年提出。他们提出运行这个算法时将出现两种情况：

- 算法运行至没有顶点剩余。那么找到了一个完美消除序列，且 G 是弦图。
- 在某个时刻，找不到单纯点。那么 G 不是一个弦图。

推论 3：独立集问题、染色问题、团问题在弦图上都可以在线性时间内解决。

证明：首先寻找一个完美消除序列。下一节中我们将得知这可在线性时间内解决。然后使用以前各讲的算法很容易解决上述的问题。推论 3 得证。█

3．算法

本节中我们将了解在 O（n+m）时间内寻找完美消除序列的具体算法。

3．1．最大势算法（MCS）

以下算法是 Tarjan 在 1976 年提出的。算法中顶点从 1 到 N 编号。通过选择一个未选择但与最多的已选择顶点相邻的顶点。

for i = 1, . . . , n
　　Let v_i be the vertex such that $v_i \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ and
　　　　v_i has the most neighbours in $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$

可以得知得出的序列{V1..Vn}是完美消除序列。证明从略。

3．2．字典序广度优先搜索（Lexicographical BFS）

以下算法由 Lueker、Rose、Tarjan 在 1976 年提出。算法将顶点标号，然后选择字典序“最大”的标号顶点。标号仅在选择过程中使用。标号 La 大于 Lb，当且仅当字典中 La 在 Lb 后出现。

For all vertices v, let $L(v) = \emptyset$ (label)
for i = n, . . . , 1
　　Let v_i be the vertex such that $v_i \notin \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$ and
　　　　v_i has the lexicographically largest label $L(v_i)$
　　For all neighbours v of v_i, set $L(v) = L(v) \circ i$

算法的正确性将在下一讲中证明。

4．算法过程实例

本节中我们将给出以上两种算法运行的完整实例。图中灰色顶点表示已选择的顶点，黑色顶点表示目前选择的顶点。(译者注：这里只给出图例描述，具体图例请看 E 文版。)

4．1．最大势算法（MCS）

第 K 次迭代后，顶点 V1..Vk 的值将被标出。

顶点边的数字表示：顶点（该顶点的相邻点中已选择的顶点数）。

每次迭代是我们只对尚未选择的顶点感兴趣，因此我们将不更新已选择顶点的相邻点中已选择的顶点数。

3．2．字典序广度优先搜索（**Lexicographical BFS**）

第 K 次操作时$\{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-i+1}\}$的值被标出。

顶点边的数字表示：顶点（该顶点的标号）。

我们不更新已选择顶点的标号。

注意到两种算法得出的完美消除序列是相同的，但不一定始终是这样。
另外，可以发现存在 MCS 与 BFS 都得不到的完美消除序列。这将作为本讲的作业☺。