第一讲、概论

本讲对这门课程的主要议题进行了大致的介绍。

1．概念

这门课程涉及了一些特殊的图以及这些图上某些已经得到改进及仍未解决的问题。

为了解我们所说的内容，我们必须回顾一些特殊图中的概念、算法、复杂度分析及 NP—HARD 问题。在这门课中对些将不作深入，我们假设读者以对这些有所了解。

2．一些图的分类

下面我们将给出这门课程中将涉及的一些图的形式。在以后的各讲中将进行深入的分析。

- *区间图（Interval graphs）*：如果一个图能用一些区间的 intersection graph 表示，那么这个图称为区间图。更准确地说，给定一系列区间，将其中每个区间看作一个顶点，两个顶点间有边，当且仅当这两个点所代表的区间相交。一个图是区间图，当且仅当它能通过以上方法构造出来。（见图 1）

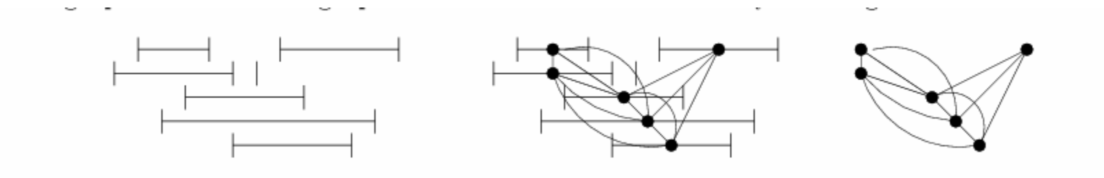

图 1：一些区间及它们所构成的区间图

我们同时学习各种相关的图，例如弦图和完美图。这部分的主要参考是[Gol80]。

- *树（Trees）*：一个图是一颗树，当且仅当它是连通的，并且没有环。我们将同样学习有关的图，例如 partial k-trees. 这部分的主要参考是[Bod93]。
- *平面图（Planar graphs）*：一个图如果能画在二维平面上，且各边没有交点，则该图称为平面图。注意每个树都是平面图，但反之却不一定。我们将同样学习有关的图，例如 outer-planar graphs 和 series-parallel graphs（混联图）。这部分的主要参考是[NC88]。

本课程中除特别说明，一般所指的图都是简单的、连通的，且至少有两个顶点（或是图有意义的最少顶点）。显然这不会影响大多数算法的适用性。

同时，一般给出的图都是无向图，虽然有时我们为了设计算法人为地加上方向。

3．一些问题

下面是我们将学习的一些问题，以及它们在一些特殊图上的复杂度。

- *最大独立集（Maximum Independent Set）*：这是著名的 NP 难题。但在区间图中，最大独立集问题能够在 O（N＋M）时间内解决，同时在树上可以在线性时间内解决，但对于平面图这仍是 NP 难题。
- *最大割(Maximum Cut)*：图 G＝（V，E）上的一个割将该图的顶点分成两个子集：V＝A＋B。更准确地说，给定一种顶点划分，一个割是哪些一个端点在 A 中，另一个在 B 中的边组成的集合。最大割问题是寻找一种顶点划分方式，使得对应割集中的边数最多。同样也有最小割问题。最小割问题用最大流的方法可以在多项式时间内解决，但最大割问题是 NP 难题。但在平面图上最大割问题是多项式级的；在树上，最大割问题是平凡

的（因为树是二分图，因此最大割集就是边集）；区间图上最大割问题是 open{开放的}。

4．典型问题

综上所述可以得知，这门课程的主要问题是：

给定一个问题 P 和一类图 C，在 C 上解决 P 的复杂度是多少？

我们将逐个学习各种特定的图，对于某个特定的图，提出一下两个问题：

- 有什么图论问题在 C 上会变得简单些（复杂度低些）？
- 有什么图论问题在 C 上仍是 NP 难题？

这些有衍生出一些问题：

- 在多少时间复杂度内可以判断一个图是否属于 C 这类图？
- 一个图属于图 C 的充要条件是什么？这将赋予 C 新的性质。
- 如果图 G 不属于 C，它到 C 的“接近程度”是多少？

这种想法的目的是将 G 转化位属于 C 的另一个图 G’，在 G’上解决问题 P，并试图有 G’的解获得 G 的解（或近似解）。

“接近程度”有各种定义，可以是删除或加上一些顶点或边，收缩或展开边，用顶点代替交点等等。

不幸的是这些问题大多数是 NP 难题……☹