

一类称球问题的 解法

问题的提出

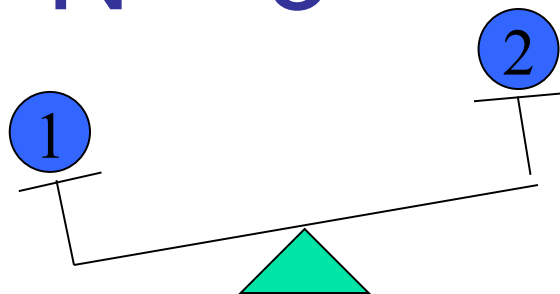
- 给定 N 个球
- 有个比标准球重的次品混入其中
- 你有一架天平，用最少的次数找出这个次品。

$N = 3$

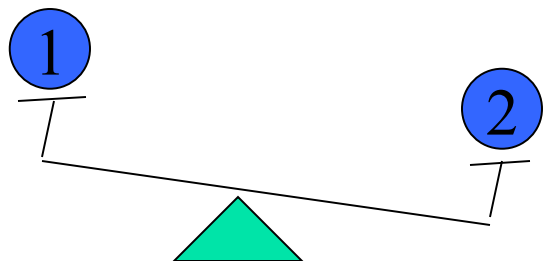
①

②

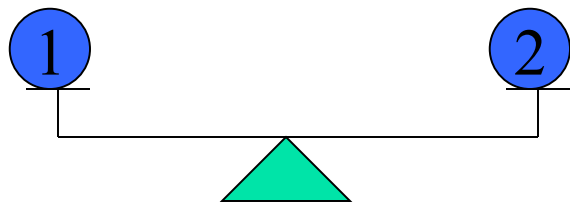
③



① 是次品



② 是次品



③ 是次品

$N=3$ 时称 1 次就可以找出次品

$N = 9$

1

2

4

5

7

8

3

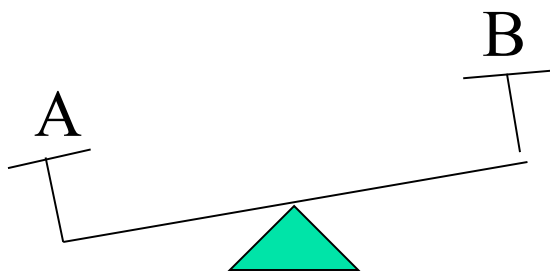
A

6

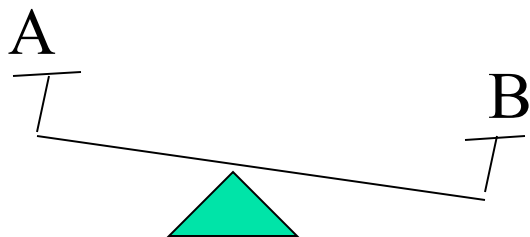
B

9

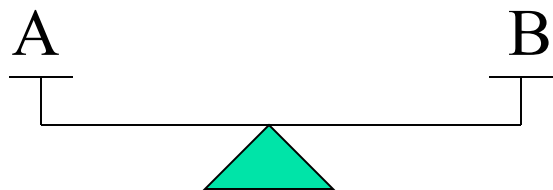
C



次品在 A 中



次品在 B 中



次品在 C 中

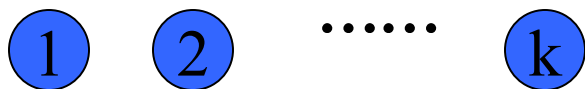
- 通过一次称量，可以把次品可能存在的范围从 9 个，缩小到 3 个

- $N = 3$ 的时候一次就能称出次品

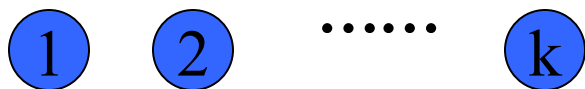
$N = 9$ 时称 2 次

更一般的情况

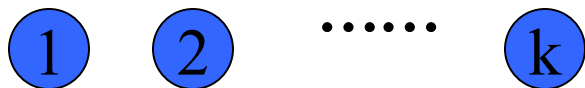
$$N = 3k$$



A

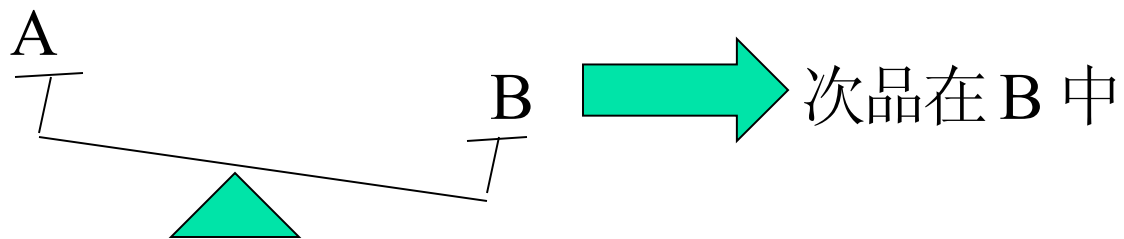
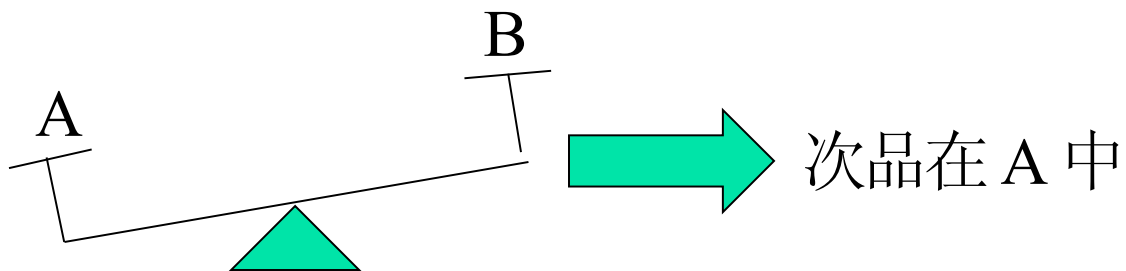


B

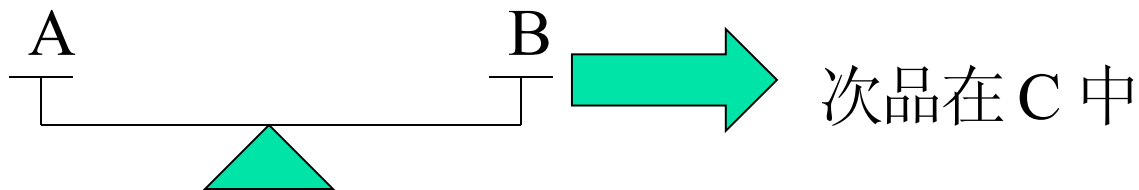


C

更一般的情况



范围缩小
到原来的
 $\frac{1}{3}$



更一般的情况

- $n = 3k+1$, $n = 3k+2$ 和 $n=3k$ 类似, 也是均分成三堆
- 每次称量把范围大致缩小到原来的 $1/3$
- 因此: 从 n 个球中找次品至多要称 $\lceil \log_3 n \rceil$ 次。 ($\lceil \cdot \rceil$ 统一表示取上整)

判定树

$[\log_3 n]$ 无疑是可行解。

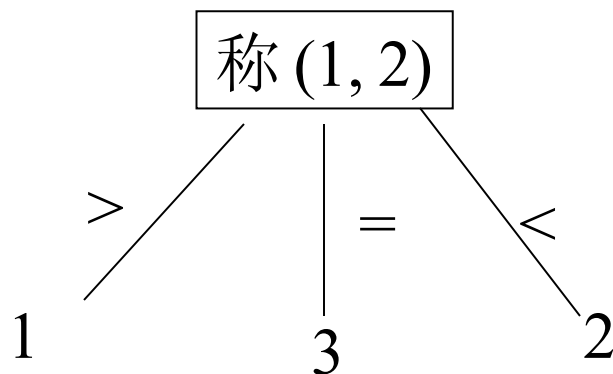
最优性



为什么三分？

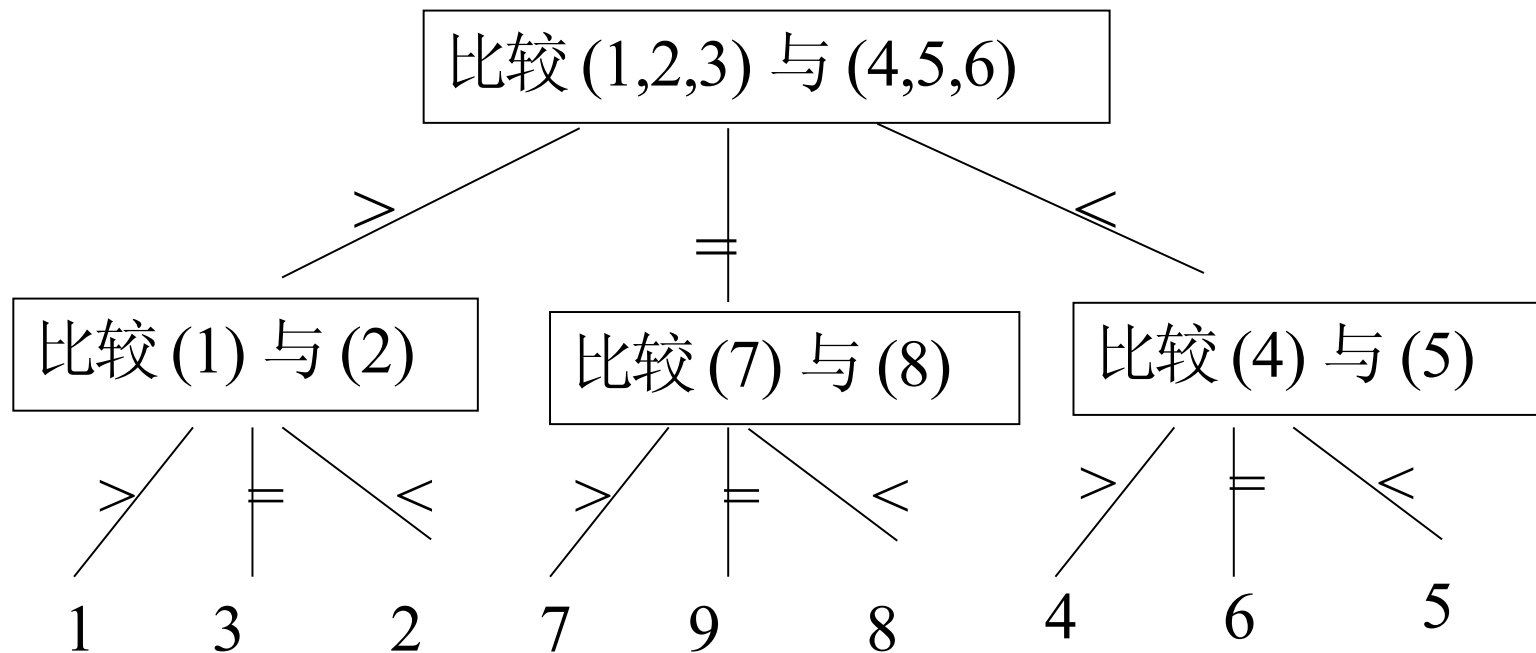
因为天平只有三种可能：
左偏、右偏、平衡

判定树



- 叶子代表结果
- 非叶子代表一次称量
- 每个非叶子节点都有三个孩子，表示天平左偏、右偏、平衡

判定树



✳判定树的深度就是称量次数

✳一个有意义的判定树至少 n 个叶子节点

判定树

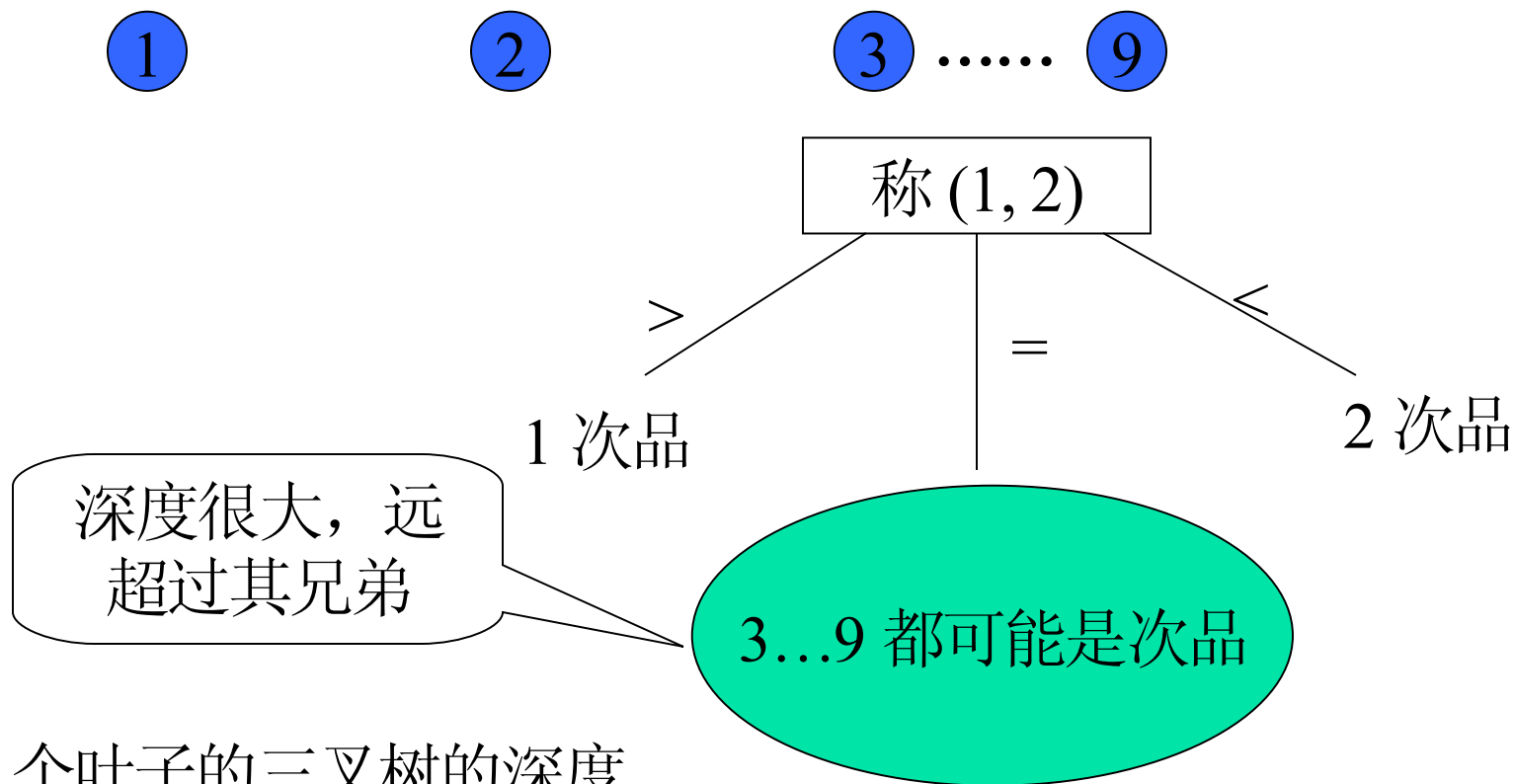
- N 个叶子的三叉树的深度 $h \geq \lceil \log_3 n \rceil$

$\lceil \log_3 n \rceil$ 是最优解

小结

- 引进了有力工具：判定树。将主观的直觉严谨化。
- 三分法是解决这类问题的根本着眼点。
- 三分时必须充分的均匀

分配的均匀性

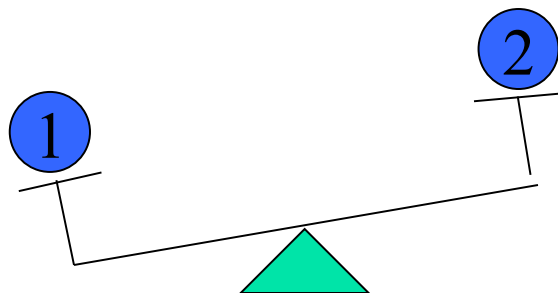


✳N 个叶子的三叉树的深度
 $h \geq \lceil \log_3 n \rceil$

问题 2 的提出

- N 个球，混入了一个轻重不详的次品
- 手中有一架天平和一个标准球
- 用最少的次数称出次品并求出次品的轻重

问题 2 的基本分析



可得如下信息：

次品若在①中，则它偏重。

次品若在②中，则它偏轻。

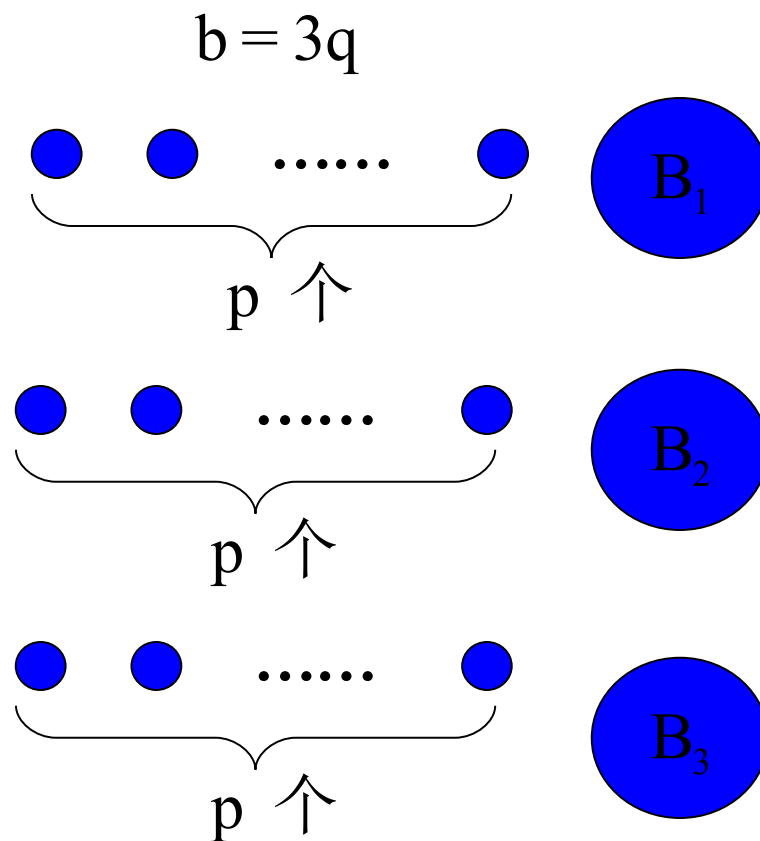
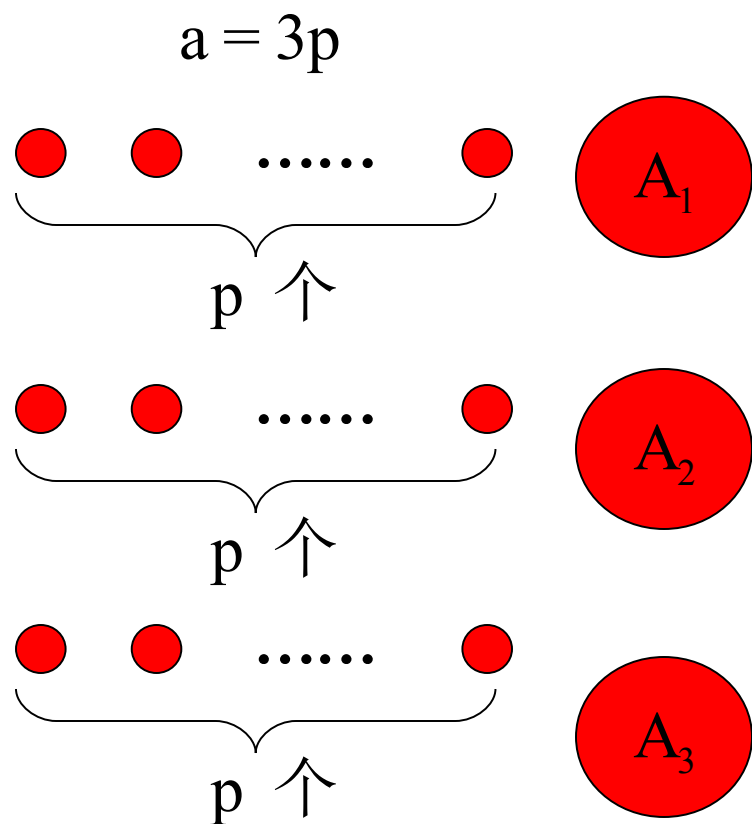
引理的提出

- 已知两堆球，第一堆有 a 个、第二堆有 b 个。
- 若次品在第一堆，必是重球
- 若次品在第二堆，必是轻球
- 只要称 $\lceil \log_3(a+b) \rceil$ 次就能找到次品

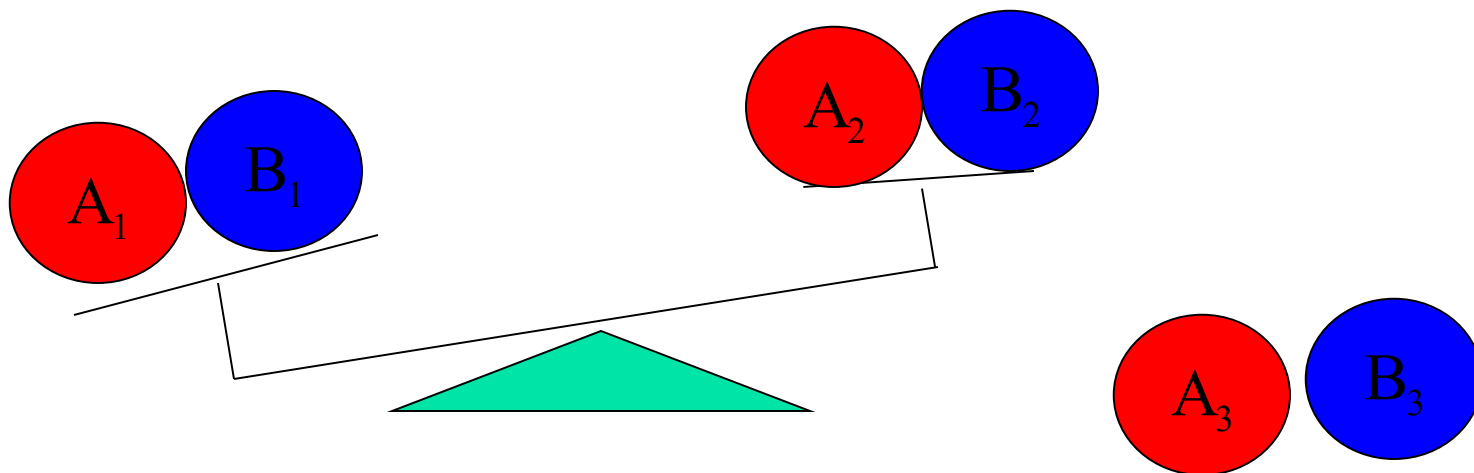
分析

- 总共 $a+b$ 个球
- 每个球都有可能是次品
- 判定树至少 $a+b$ 个叶子
- 树的深度 $h \geq \lceil \log_3(a+b) \rceil$

引理的分析



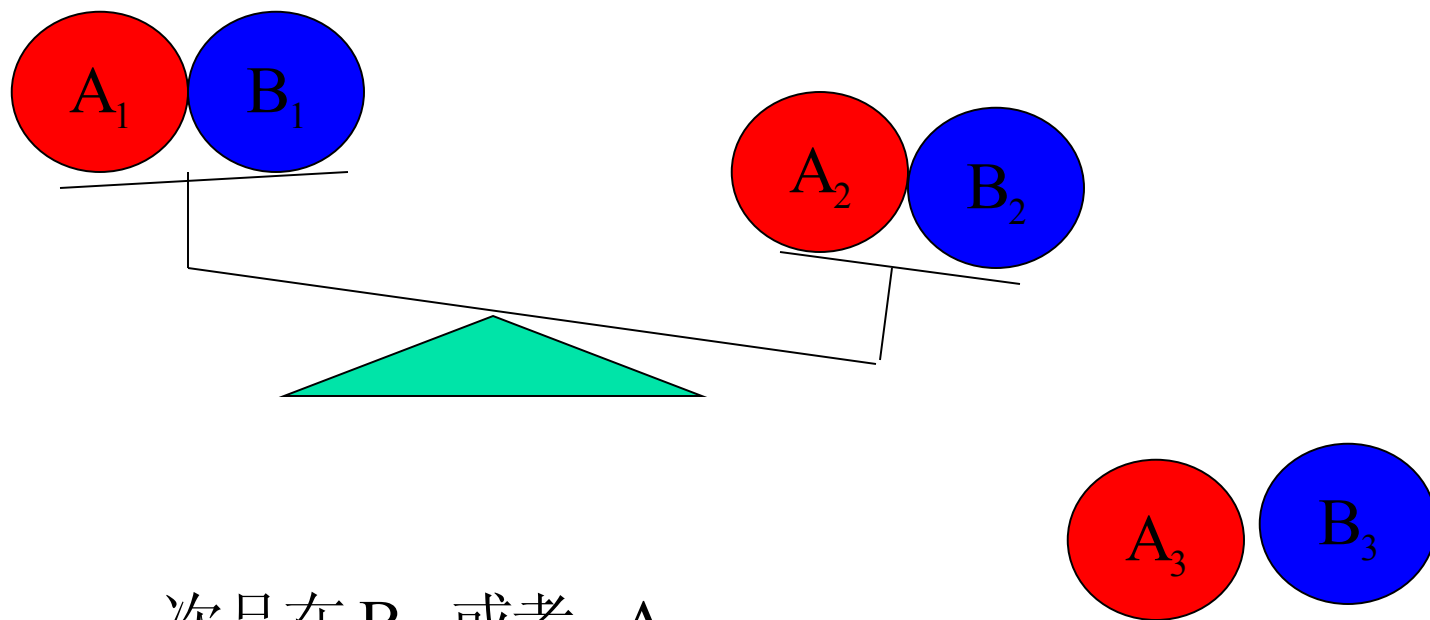
引理的分析



次品在 A_1 或者 B_2

范围被缩小到 $p+q$ 个球里面

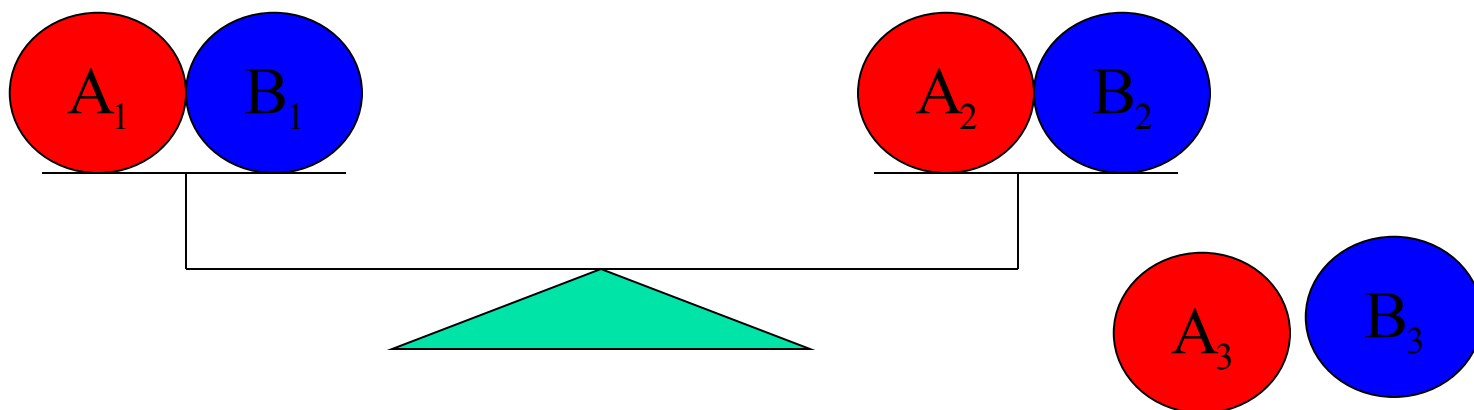
引理的分析



次品在 B_1 或者 A_2

范围被缩小到 $p+q$ 个球里面

引理的分析



次品在 A_3 或者 B_3

范围被缩小到 $p+q$ 个球里面

子问题的分析

- 总共 $a+b=3(p+q)$ 个球
- 无论天平怎么偏，都可以把范围缩小到 $p+q$ 个球中，即原来的 $1/3$
- 根据 $a, b \bmod 3$ 的余数分类，上面讨论的是 $a \bmod 3 = b \bmod 3 = 0$ 的情况。其他情况可类似进行。关键要“均”分。

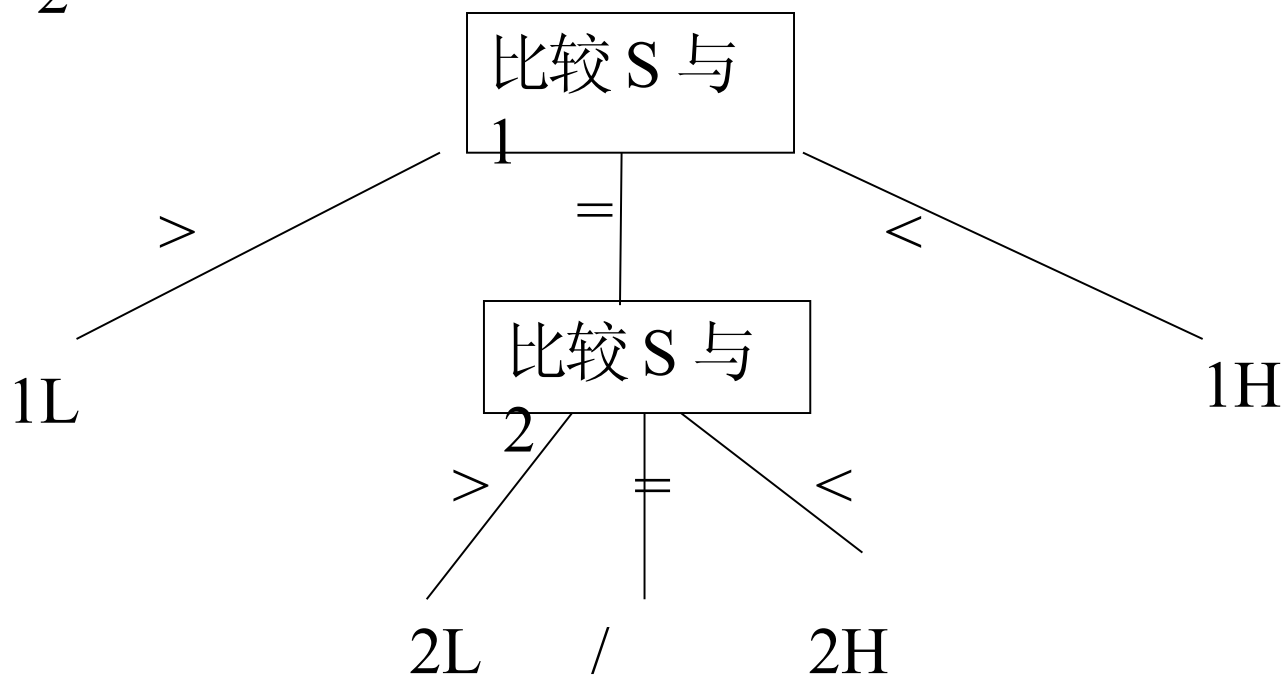
引理中问题称 $\lceil \log_3(a+b) \rceil$ 次即可。

问题 2 的分析

- n 个球，每个球都有可能是轻球或者重球，有 $2n$ 种不同的可能结果
- 判定树至少要 $2n$ 个叶子节点
- 判定树的深度 $h \geq \lceil \log_3(2n) \rceil$

问题 2 的分析

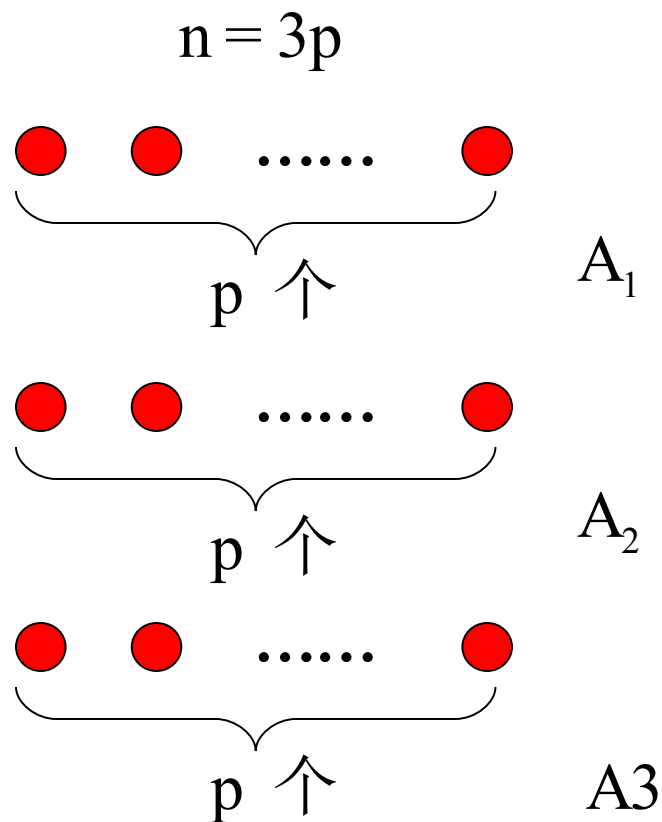
$N=2$



接着对 n 归纳

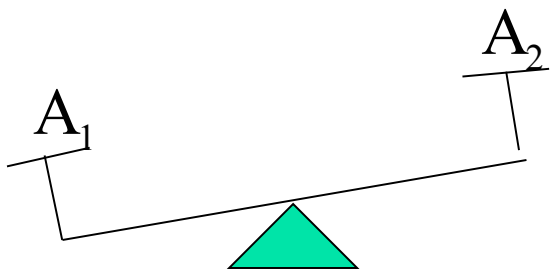
问题 2 的分析

假设小于 n 的
球都能在
 $\lceil \log_3(2n) \rceil$ 次内
称出次品



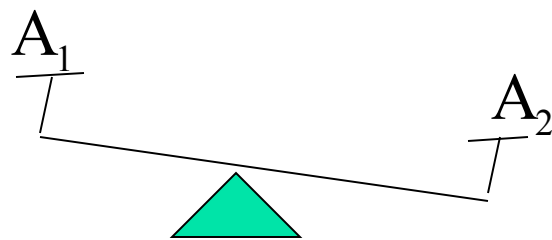
问题 2 的分析

天平不平衡，次品必在 A_1 或者 A_2 中



A_1 中的球只可能重

A_2 中的球只可能轻。

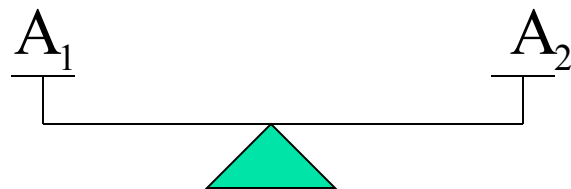


A_2 中的球只可能重

A_1 中的球只可能轻。

归结到引理，只要称 $\lceil \log_3(p+p) \rceil$ 次

问题 2 的分析



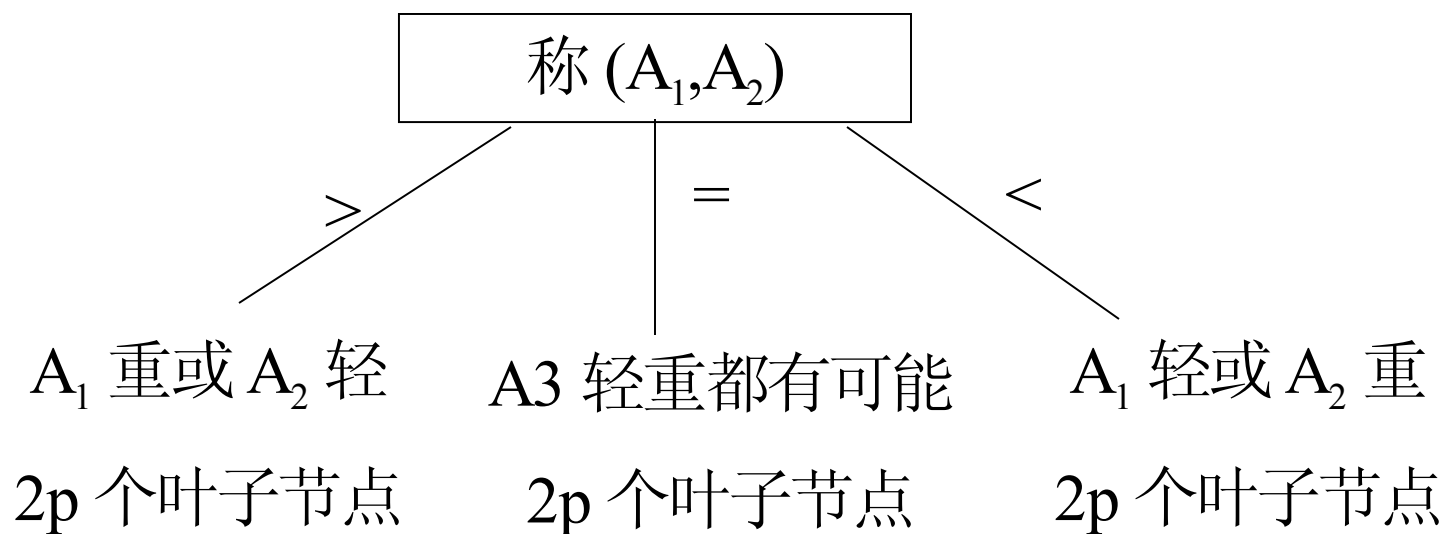
次品在 A_3 中，根据归纳假设，还要称 $\lceil \log_3(2p) \rceil$ 次

- 无论天平怎么偏，称完一次后都还要称 $\lceil \log_3(2p) \rceil$ 次
- 共称 $\lceil \log_3(2p) \rceil + 1 = \lceil \log_3(6p) \rceil = \lceil \log_3(2n) \rceil$ 次

问题 2 的分析

$$|A_1|=|A_2|=|A_3|=p$$

总共有 $6p$ 个叶子节点



问题 2 的分析

■ $n=3k+2$ 分法

$$|A_1|=k+1 \quad |A_2|=k+1 \quad |A_3|=k$$

$6k+4$ 个叶子节点分摊到每个孩子是：

$$2k+2 \quad 2k+2 \quad 2k$$

是均匀的

问题 2 的分析

■ $N = 3k + 1$

分法一： k , k , $k+1$

分摊的叶子节点： $2k$, $2k$, $2k+2$

分法二： $k+$ 标准球, $k+1$, k

分摊的叶子节点： $2k+1$, $2k+1$, $2k$

问题 2 的小结

- $\lceil \log_3(2n) \rceil$ 即是问题 2 的解。最优性和可行性均已证明
- 判定树是一种估界和证明最优性的有力工具。
- 通过对判定树的研究，衍生了一条重要的原则：均匀。均分的对象不是球，而是叶子节点（即不同的结果）。

其他形式

- 只要求次品，不求轻重。结论是 $\lceil \log_3(2n-1) \rceil$
- 问题 2 去掉标准球。第一次称的时候就不能保证一定均匀。结论是 $\lceil \log_3(2n+2) \rceil$

万变不离其宗，解决此问题的精髓在四个字：均匀三分

总结

- 1、从简单入手
- 2、求同存异
- 3、严谨细心