冗繁削尽留清瘦
——浅谈信息的充分利用

长沙市雅礼中学　张一飞

【摘要】

在算法设计中，人们往往不自觉地进行了大量多余的运算这些累赘将大大降低算法的效率。作者认为，充分利用已知信息，是解决这一问题的一个有效方法。

所谓充分利用信息，就是在算法设计中，把已知信息尽可能充分地利用起来，以避免冗余运算，降低算法的时空复杂度，从而提高算法的效率。本文对充分利用信息，在优化回溯法、动态规划和数值计算中的应用作了初步的探讨。

【关键字】

信息，算法优化

“冗繁削尽留清瘦”[1]虽然讲的是画竹，却包含着深刻的哲理。算法设计同画竹一样，也需要削尽冗繁。但在解题实践中，人们往往不自觉地做了一些多余的运算，而忽视了对已知信息的充分利用。

所谓充分利用信息，就是在算法设计中，把已知信息尽可能**充分**地利用起来，以避免冗余运算，降低算法的时空复杂度，从而提高算法的效率。限于篇幅，本文仅对这种方法提高回溯法、动态规划和数值计算的效率进行探讨。

1、提高回溯法的效率

我们知道，回溯法实质上是从树根出发，遍历一棵解答树的过程。如果解答树中存在一些性质相同的子树，那么，只要我们知道了其中一棵子树的性质，就可以根据这个信息，导出其它子树的性质。这就是自顶向下记忆化搜索[2]的基本思想。

记忆化搜索避免了一些多余的运算，因而比非记忆化搜索效率要高。但在有些记忆化搜索中，对信息的利用仍不够充分，还有进一步优化的余地。

下面，我们看一个例子：

【序关系计数问题】

用关系’<’和’=’将 3 个数 A、B 和 C 依次排列有 13 种不同的关系：

A<B<C, A<B=C, A<C<B, A=B<C, A=B=C, A=C<B,
B<A<C, B<A=C, B<C<A, B=C<A,
C<A<B, C<A=B, C<B<A。

编程求出 N 个数依序排列时有多少种关系。

<1>. 枚举出所有的序关系表达式

我们可以采用回溯法枚举出所有的序关系表达式。N 个数的序关系表达式，是通过 N 个大写字母和连接各字母的 N-1 个关系符号构成。依次枚举每个位置上的大写字母和关系符号，直到确定一个序关系表达式为止。

由于类似于‘A=B’和‘B=A’的序关系表达式是等价的，为此，规定等号前面的大写字母在 ASCII 表中的序号，必须比等号后面的字母序号小。基于这个思想，我们很容易写出解这道题目的回溯算法。

算法 1-1，计算 N 个数的序关系数。

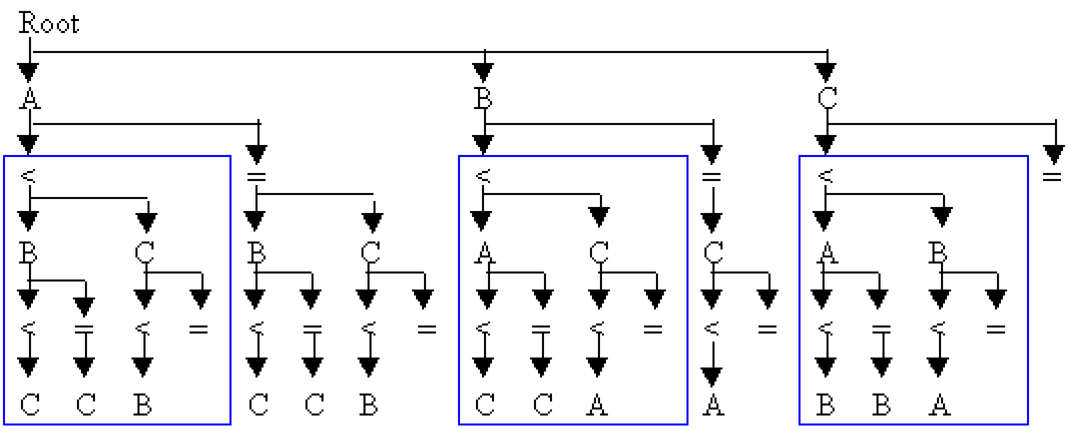
```
procedure Count(Step,First,Can);
{Step 表示当前确定第 Step 个大写字母；
 First 表示当前大写字母可能取到的最小值；
 Can 是一个集合，集合中的元素是还可以使用的大写字母}
  begin
    if Step=N then begin{确定最后一个字母}
      for i:=First to N do if i in Can then Inc(Total); {Total 为统计的结果}
      Exit
    end;
    for i:=First to N do{枚举当前的大写字母}
      if i in Can then begin{i 可以使用}
        Count(Step+1,i+1,Can-[i]);{添等于号}
         Count(Step+1,1,Can-[i]){添小于号}
      end
  end;
```

调用 Count(1,1,[1..N])后，Total 的值就是结果。该算法的时间复杂度是 O(N!)

<2>. 粗略利用信息，优化算法 1-1

算法 1-1 中存在大量冗余运算。如图 1，三个方框内子树的形态完全一样。一旦我们知道了其中某一个方框内所产生的序关系数，就可以利用这个信息，直接得到另两个方框内将要产生的序关系数。

图 1 N=3 时的解答树



显然，在枚举的过程中，若已经确定了前 k 个数，并且下一个关系符号是小于号，这时所能产生的序关系数就是剩下的 N-k 个数所能产生的序关系数。

设 i 个数共有 F[i]种不同的序关系，那么，由上面的讨论可知，在算法 1-1 中，调用一次 Count(Step+1,1,Can-[i])之后，Total 的增量应该是 F[N-Step]。这个

值可以在第一次调用 Count(Step+1,1,Can-[i])时求出。而一旦知道了 F[N-Step]的值，就可以用 Total:=Total+F[N-Step] 代替调用 Count(Step+1,1,Can-[i])。这样，我们可以得到改进后的算法 1-2。

算法 1-2，计算 N 个数的序关系数。

```
procedure Count(Step,First,Can);
{Step,First,Can 的含义同算法 1-1}
  begin
    if Step=N then begin {确定最后一个字母}
      for i:=First to N do if i in Can then Inc(Total); {Total 为统计的结果}
      Exit
    end;
    for i:=First to N do {枚举当前的大写字母}
      if i in Can then begin {i 可以使用}
        Count(Step+1,i+1,Can-[i]); {添等于号}
          if F[N-Step]=-1 then begin {第一次调用}
            F[N-Step]:=Total;
            Count(Step+1,1,Can-[i]); {添小于号}
            F[N-Step]:=Total-F[N-Step] {F[N-Step]=Total 的增量}
          end else Total:=Total+F[N-Step] {F[N-Step]已经求出}
      end
  end;
```

开始，将 F[0],F[1],…,F[N-1]初始化为-1

调用 Count(1,1,[1..N])之后，Total 的值就是结果

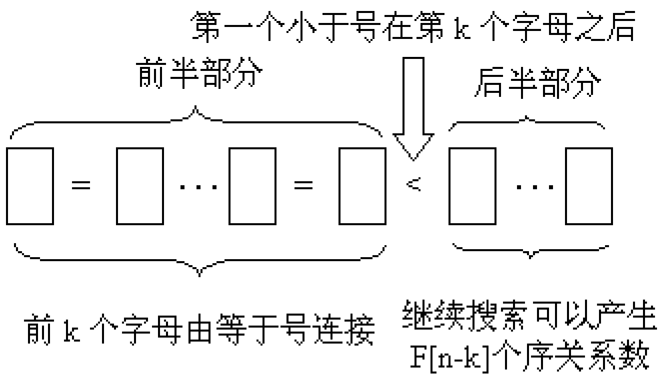
算法 1-2 与算法 1-1 的差别仅限于程序中的粗体部分。

算法 1-2 就是利用了 F[0],F[1],…,F[N-1]的值，使得在确定添小于号以后，能够避免多余的搜索，尽快地求出所需要的方案数。该算法实质上就是自顶向下记忆化方式的搜索，它的时间复杂度为 $O(2^N)$[3]。同算法 1-1 相比，效率虽然有所提高，但仍不够理想。

<3>. 充分利用信息，进一步优化算法 1-2

在搜索的过程中，如果确定在第 k 个大写字母之后添加第一个小于号，则可得到下面两条信息：

图 2 充分利用信息，进一步优化算法 1-2



第一条信息：前 k 个大写字母都是用等号连接的。

第二条信息：在此基础上继续搜索，将产生 F[N-k]个序关系表达式。

如图 2 所示，序关系表达式中第一个小于号将整个表达式分成了两个部分。由乘法原理易知，图 2 所示的序关系表达式的总数，就是图中前半部分所能产生的序关系数，乘以后半部分所能产生的序关系数。算法 1-2 实质上利用了第二条信息，直接得到图中后半部分将产生 F[n-k]个序关系数，并通过搜索得到前半部分将产生的序关系数。但如果我们利用第一条信息，就可以推知图中前半部分将产生的序关系数，就是 N 个物体中取 k 个的组合数，即 C_n^k 。这样，我们可以得到 F[n] 的递推关系式：

$$\text{公式1：} F[n]=\sum_{k=1}^{n} C_n^k F[n-k]\text{，其中} F[0]=1$$

采用公式 1 计算 F[n]的算法记为算法 1-3[4]，它的时间复杂度是 O(N^2)。

〈4〉. 小结

下面是三个算法的性能分析表[5]：

分析项目		算法 1-1	算法 1-2	算法 1-3
理论分析	时间复杂度	O(N!)	O(2^N)	O(N^2)
	空间复杂度	O(1)	O(N)	O(N)
实际运行情况	N=7	1s	<0.05s	<0.05s
	N=8	10s	<0.05s	<0.05s
	N=15	>10s	0.5s	<0.05s
	N=17	>10s	2s	<0.05s

在优化算法 1-1 的过程中，我们通过利用 F[0],F[1]…,F[N-1]的信息，得到算法 1-2，时间复杂度也从 O(N!)降到 O(2^N)。在算法 1-2 中，进一步消除冗余运算，就得到了 O(N^2)的算法 1-3。

算法 1-3 计算 F[n]，体现了动态规划的思想。也就是说，我们通过充分利用信息，提高回溯法的效率，实质上是将搜索转化成了动态规划。

2、提高动态规划的效率

从上一节中可以看到，动态规划之所以高效，就在于它比较充分的利用了已知信息。但是，在有些动态规划中，仍存在冗余运算。这一节我们将进一步探讨如何充分利用信息，提高动态规划的效率。

下面我们看一个例子：

【理想收入问题】

理想收入是指在股票交易中，以 1 元为本金可能获得的最高收入，并且在理想收入中允许有非整数股票买卖。

已知股票在第 i 天每股价格是 V[i]元，1≤i≤M，求 M 天后的理想收入。

〈1〉. 一种动态规划的解法

解这道题目，很容易想到用动态规划。设 F[i]表示在第 i 天收盘时能达到的最高收入，则有 F[i]的递推关系式：

$$\text{公式2：} F[i]=\max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]*V[i]\}\text{，其中} F[0]=1\text{，}V[0]=1$$

公式 2 的含义是：在第 i 天收盘时能达到的最高的收入，是将第 j 天收盘后

的收入，全部用于买入第 k 天的股票，再在第 i 天将所持的股票全部卖出所得的收入。采用公式 2，可以得到算法 2-1，其时间复杂度是 O(M^3)，空间复杂度是 O(M)。

算法 2-1

```
F[0]:=1;V[0]:=1;F[1..M]:=0;
for i:=1 to M do
  for j:=0 to i-1 do
    for k:=j to i-1 do
      F[i]:=Max{F[i],F[j]/V[k]*V[i]}
```

〈2〉. 改变状态表示的含义，优化算法 2-1

改变动态规划中状态表示的含义，是优化动态规划的常用方法。例如此题，我们可以采用两种不同的状态表示方法优化算法 2-1。

方法 1：设 P[i]表示前 i 天能获得的最多股票数，可列出如下状态转移方程：

公式3：$P[i]=\max_{(0\le j<i)}\{P[i-1],P[j]*V[j]/V[i]\}$

这是因为前 i 天所能获得的最多股票数，或者是前 i-1 天获得的最多股票数，或者是在第 j 天将前 j 天所能获得的最多的股票全部卖出，再买入第 i 天的股票。显然，前 i-1 天能获得的最多股票数乘以第 i 天的股价，就是第 i 天能达到的最大收入。

方法 2：设 Q[i]表示前 i 天能达到的最大收入，可列出如下状态转移方程：

公式4：$Q[i]=\max_{(0\le j<i)}\{Q[i-1],Q[j]/V[j]*V[i]\}$

就是说前 i 天所能达到的最大收入，或者是前 i-1 天所能达到的的最大收入，或者是在第 j 天买入股票，再在第 i 天卖出，所能获得的最大收入。

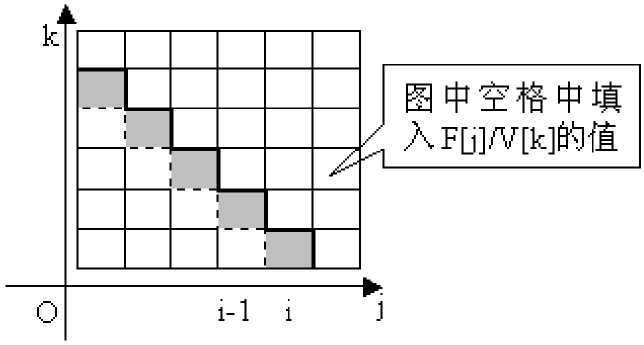
上述两种方法的时间复杂度都是 O(M^2)。这表明，改变状态表示的含义，在一定程度上提高了算法的效率。但对于这道题目，仅仅改变状态表示的含义，很难进一步优化算法。

〈3〉. 粗略利用信息，优化算法 2-1

算法 2-1 粗体部分的功能是确定 F[i]所能达到的最大值。由于 V[i]不变，因此 F[i]达到最大值，当且仅当 F[j]/V[k]达到最大值，其中 $0\le j\le k<i$。

算法 2-1 中，采用了二重循环来确定 F[j]/V[k]的最大值。但在确定 F[i-1]所能达到最大值的时候，我们实际上已经求出当 $0\le j\le k<i-1$ 时，F[j]/V[k]所能达到的最大值。如果能充分利用这一信息，就可以更快地确定 F[i] 所能达到的最大值。如图 3 所示，要确定粗线下部的最大值，只需比较虚线下部的最大值和灰色部分的最大值即可。

图 3 初步利用信息，优化算法 2-1



为了表示出图 3 的思想，

设$MaxFV[i]=\max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]\}$，则

$$
\begin{aligned}
MaxFV[i] &= \max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]\} \\
&= \max\{\max_{(0\le j\le k<i-1)}\{F[j]/V[k]\}, \max_{(0\le j\le k,k=i-1)}\{F[j]/V[k]\}\} \\
&= \max\{MaxFV[i-1], \max_{(0\le j\le i-1)}\{F[j]/V[i-1]\}\} \\
&= \max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\}
\end{aligned}
$$

由公式2，
$$
\begin{aligned}
F[i] &= \max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]*V[i]\} \\
&= \max_{(0\le j\le k<i)}\{F[j]/V[k]\}*V[i] \\
&= MaxFV[i]*V[i]
\end{aligned}
$$

这样，我们得到如下递推关系式：

公式5：

$$F[i]=MaxFV[i]*V[i]$$

$$MaxFV[i]=\max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\}$$

从公式 5 中可以看出，在确定 MaxFV[i]时，较充分的利用了确定 MaxFV[i-1]时产生的结果。采用公式 5 可得算法 2-2，它的时间复杂度为 O(M^2)，空间复杂度是 O(M)。

算法 2-2
F[0]:=1;MaxFV[0]:=0;V[0]:=1;
for i:=1 to M do begin
    MaxFV[i]:=MaxFV[i-1];
    for j:=0 to i-1 do
        MaxFV[i]:=Max{MaxFV[i],F[j]/V[i-1]}
    *F[i]:=MaxFV[i]*V[i]*
end;

将公式 5 化简，有

$$
\begin{aligned}
MaxFV[i] &= \max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\} \\
&= \max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1], MaxFV[j]*V[j]/V[i-1]\}
\end{aligned}
$$

在这个公式中，MaxFV[i]可以看作是前 i-1 天所能获得的最多股票数。这种状态表示方法和公式 3 中 P[i]的含义本质上是相同的。这样，我们通过对已知信息的利用，达到了改变动态规划中状态表示含义的效果。

<4>. 充分利用信息，进一步优化算法 2-2

在算法 2-2 中，进一步利用信息，很容易得到时间复杂度为 O(M)的算法。

算法 2-2 的粗体部分的功能是确定 MaxFV[i]所能达到的最大值。由于 V[i-1]

不变，因此 F[j]/V[i-1]达到最大值，当且仅当 F[j]达到最大值，其中 0≤j<i。

算法 2-2 中内层循环实质上是在确定 MaxFV[i]时，找到 F[0],F[1],…F[i-1]中的最大值。而在确定 MaxFV[i-1]时，我们已经找到了 F[0],F[1],…,F[i-2]中的最大值。如果把这个信息利用起来，就可以更快的确定 F[0],F[1],…F[i-1]中的最大值。

设 $MaxF[i]=\max_{(0\le j<i)}\{F[j]\}$，则

$$
\begin{aligned}
MaxF[i] &= \max_{(0\le j<i)}\{F[j]\}\\
&= \max\{\max_{(0\le j<i-1)}\{F[j]\}, F[i-1]\}\\
&= \max\{MaxF[i-1], F[i-1]\}\\
MaxFV[i] &= \max_{(0\le j<i)}\{MaxFV[i-1], F[j]/V[i-1]\}\\
&= \max\{MaxFV[i-1], MaxF[i]/V[i-1]\}
\end{aligned}
$$

这样，我们得到如下递推关系式：

公式6：

$$
\begin{aligned}
&F[i]=MaxFV[i]*V[i]\\
&MaxFV[i]=\max\{MaxFV[i-1], MaxF[i]/V[i-1]\}\\
&MaxF[i]=\max\{MaxF[i-1], F[i-1]\}
\end{aligned}
$$

从公式 6 中可以看出，在确定 MaxF[i]时，充分利用了确定 MaxF[i-1]时所产生的信息。采用公式 6 可得算法 2-3，它的时间复杂度是 O(M)。从公式 6 中的三个递推关系式可以看出，当前状态都只与前一个状态有关，因此，空间复杂度可以进一步降到 O(1)[6]。

算法 2-3

```
F:=1;MaxF:=0;MaxFV:=0;V[0]:=1;
for i:=1 to M do begin
  if F>MaxF then MaxF:=F;
  if MaxF/V[i-1]>MaxFV then MaxFV:=MaxF/V[i-1];
  F:=MaxFV*V[i]
end;
```

公式 6 中 MaxF[i]可以看作是前 i-1 天能达到的最大收入[7]。虽然这种状态表示方法和公式 4 中 Q[i]是类似的，但算法的时间复杂度却从 $O(M^2)$降到了 O(M)，空间复杂度也从 O(M)降到了 O(1)。这样，我们通过充分利用已知信息，达到了改变状态表示难以达到的优化效果。

＜5＞. 小结

下面是三个算法的性能分析表：

分析项目		算法 2-1	算法 2-2	算法 2-3
理论分析	时间复杂度	$O(M^3)$	$O(M^2)$	O(M)
	空间复杂度	O(M)	O(M)	O(1)
实际运行情况	M=200 的随机数据	4s	0.05s	<0.05s
	M=1000 的随机数据	>60s	1s	<0.05s
	M=2000 的随机数据	>60s	5s	<0.05s

在这道题中，我们通过避免冗余运算，将时间复杂度由 $O(M^3)$先降到 $O(M^2)$，再进一步降到 O(M)。空间复杂度也从 O(M)降到了 O(1)。

由此可见，充分利用信息，提高动态规划的效率，是非常有效的。此外，充分利用信息并不一定要以牺牲空间为代价，同样可以优化算法的空间复杂度。

3、提高数值计算的效率

从前面的分析中，我们深深地体会到了动态规划的核心思想——充分利用已知信息。但这个思想并不仅限于动态规划。下面我们将看到，充分利用已知信息，对提高数值计算的效率，也十分有效。

我们看一道数值计算题：

【高精度计算问题】(湖南 1998 省赛试题)

输入 n,m,k，计算 $S_m(n)$ 的后 k 位数。其中 $S_m(n)=1^m+2^m+\ldots+n^m$，$1\le k\le 99$，$1\le n,m\le 9999$。

<1>. 分析

由于 k 可以达到 99，因此必须采用高精度计算。本题只要求出 $S_m(n)$的后 k 位数，所以，每次计算只取结果的后 k 位数即可。显然，计算 $S_m(n)$将耗费大量的时间用于乘幂运算。下面，我们分析乘幂运算的算法。

<2>. 朴素的乘幂算法

根据乘幂的定义，我们将 i 自乘 m 次即可。

算法 3-1，计算 i^m

```
Func Power(i,m);
  begin
    SetValue(x,1); {x 是高精度数}
    for k:=1 to m do
      x:=Mul(x,i); {Mul 是高精度乘法，返回x*y 的值}
    Power:=x
  end;
```

采用算法 3-1 计算 i^m，需要进行 M 次高精度乘法。

<3>. 粗略利用信息，优化算法 3-1

算法 3-1 对信息的利用很不充分。例如，要计算 i^5，现在已经求出了 i^3 的值，算法 3-1 会利用 i^3 和 i 的值，求出 i^4，进而求出 i^5。而实际上，在计算 i^3 之前，我们已经求出了 i^2 的值，将 i^3 乘上 i^2，就可以求出 i^5。

我们用数组 p[k]保存已经计算出的 i^k 的结果，在计算过程中，尽可能的使用已经计算过的信息。例如，我们可以这样计算 i^{15}：

```
p[1]=i
p[2]=p[1]*p[1]
p[3]=p[2]*p[1]
p[6]=p[3]*p[3]
p[7]=p[6]*p[1]
p[14]=p[7]*p[7]
p[15]=p[14]*p[1]
```

这样，我们只用了 6 次高精度乘法，就求出了 i^{15}。

从上面的例子可以看出，将一个已知结果平方，就可以只用一次乘法，求出一个比较大的指数幂，根据这个思想就可得到算法 3-2：

$$i^m=\begin{cases}(i^{\frac{m}{2}})^2 & \text{m为偶数}\\ i(i^{\frac{m-1}{2}})^2 & \text{m为奇数}\end{cases}$$

算法 3-2，计算 i^m

```
Func Power(i,m);
  begin
    if m=1 then Power:=i
          else begin
            Temp:=Power(i,m div 2);
            Temp:=Mul(Temp,Temp);
            if Odd(m) then Power:=Mul(Temp,i)
                      else Power:=Temp
          end
  end;
```

算法 3-2 计算 i^m 需要 $O(\log_2 m)$次高精度乘法。这样，我们通过对信息的粗略利用[8]，将时间复杂度从 O(m)降到了 $O(\log_2 m)$。

算法 3-2 实质上就是二分法。采用二分法求乘幂，之所以比累乘的方法高效，就在于它更加充分的利用了已知信息。

<4>. 充分利用信息，进一步优化算法 3-2

注意到在计算 i^m 时，我们已经知道了 $1^m,2^m,\ldots,(i-1)^m$ 的值，而这些值在算法 3-2 计算 i^m 时没有起任何作用。如果能够建立 i^m 与 $1^m,2^m,\ldots,(i-1)^m$ 的关系，就可更快计算 i^m。

例如，求 120^m。这时，我们已经计算了 5^m 和 24^m 的值。显然，5^m 和 24^m 相乘，就可以得到 120^m。

当 i 是合数时，设 i=pq，其中 1<p,q<i。显然，$i^m=(pq)^m=p^mq^m$。由于 p,q<i，因此在计算 i^m 时，p^m 和 q^m 都是可以直接利用的信息。这样，对于合数 i，我们只需要一次高精度乘法，就可以求出 i^m。

采用这种方法得到算法记为算法 3-3。设 1..n 中，有 x 个合数，则算法 3-3 只做了$(n-x)\log_2 m+x$ 次高精度乘法。自然数中素数的分布十分稀疏，实践证明，当 n=m=9999,k=99 时，算法 3-3 的效率是算法 3-2 的 5 倍。

<5>. 小结

下面是三个算法的性能分析表：

分析项目		算法 3-1	算法 3-2	算法 3-3
理论分析	时间复杂度	O(nm)	$O(n\log_2 m)$	$O(n\log_2 m)$
	空间复杂度	O(k)	O(k)	O(nk)
实际运行情况	N=M=100,K=99	0.1	<0.05	<0.05
	N=100,M=9999,K=99	20s	0.5s	0.1s
	N=M=1000,K=99	15s	3s	1s
	N=M=9999,K=99	>60s	55s	10s

在这个例子中，我们首先通过对信息的粗略利用，优化朴素的乘幂算法 3-1，得到采用二分法的算法 3-2。进一步分析发现，二分法在计算 i^m 时，没有利用已经求出的 $1^m,2^m,\ldots,(i-1)^m$ 等信息，充分利用这些信息，得到了更快的算法

3-3。由于算法 3-3 需要保存一些已经求过的值[9]，所以，该算法实质上是以空间为代价换取了时间。

4、结束语

在搜索中加入记忆化信息提高回溯法的效率，改变动态规划中状态表示的含义提高动态规划的效率，采用二分法提高数值计算的效率，都不同程度的体现了对已知信息的充分利用。但仅使用这些常用技巧优化算法，仍可能存在多余的运算。如果能够更加充分的利用已知信息，就可以收到更好的效果。

在算法中削去冗繁，关键在于找到可利用的已知信息，一旦把它们**充分**利用起来，就可以大大提高算法效率。

【参考文献】

1. 《信息学奥林匹克》. 1999(3)
2. 吴文虎，王健德 .《实用算法与程序设计》. 电子工业出版社 . 1998.01
3. 刘福生，王建德 .《青少年国际信息学（计算机）奥林匹克竞赛指导——人工智能搜索与程序设计》. 电子工业出版社 . 1993.04
4. 《郑板桥集》

【附录】

[1]. 摘自《郑板桥集》第 206 页，全诗如下：

题画竹

四十年来画竹枝
日间挥写夜间思
冗繁削尽留清瘦
画到生时是熟时

[2]. 见参考文献[2]。

[3]. 在后面的分析中可以看到，调用粗体部分程序段的总次数是

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}C_i^j=\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}$$

故算法的时间复杂度为 $O(2^{n+1})=O(2^n)$。

[4]. 也可以直接采用数学方法推导公式 1。但我认为，这比本文中使用的方法更难掌握。在参考文献[1]中，给出了一个形式上更简单的计算公式，但这个公式的设计也颇有难度。参考文献[1]中给出的公式是：

$$F(m,t)=[F(m-1,t-1)+F(m-1,t)]\times t$$

边界条件：$F(1,1)=1, F(1,t)=0(t>0)$

n个数的序关系数是：$\sum_{i=1}^{n}F(n,i)$

[5]. 本文中所有程序的运行环境均为 Pentium 100MHz，BP7.0 编译。

[6]. 如果我们边读数据边规划，就只要保存 V[i-1]和 V[i]，而没有必要定义长度为 M 的数组 V。这样，算法的空间复杂度降到了 O(1)。

[7]. 公式 6 可进一步化简：

$$\begin{aligned}
MaxF[i]&=\max\{MaxF[i-1],F[i-1]\}\\
&=\max\{MaxF[i-1],MaxFV[i-1]*V[i-1]\}\\
MaxF[i]/V[i-1]&=\max\{MaxF[i-1],MaxFV[i-1]*V[i-1]\}/V[i-1]\\
&=\max\{MaxF[i-1]/V[i-1],MaxFV[i-1]*V[i-1]/V[i-1]\}\\
&=\max\{MaxF[i-1]/V[i-1],MaxFV[i-1]\}\\
&\geq MaxFV[i-1]\\
MaxFV[i]&=\max\{MaxFV[i-1],MaxF[i]/V[i-1]\}\\
&=MaxF[i]/V[i-1]\\
MaxF[i]&=\max\{MaxF[i-1],MaxFV[i-1]*V[i-1]\}\\
&=\max\{MaxF[i-1],MaxF[i-1]/V[i-2]*V[i-1]\}
\end{aligned}$$

这样可以得到如下递推关系式：

$$MaxF[i]=\max\{MaxF[i-1],MaxF[i-1]/V[i-2]*V[i-1]\}$$

在源程序 Pro_2.pas 中，给出了这个公式的算法 2-4。算法 2-4 的时空复杂度

同算法 2-3，只是形式上更加简单。

[8]. 值得说明的是，采用二分法求乘幂，并不是最充分利用已知信息的方法。例如，采用二分法计算 i^{15} 需要 6 次乘法，而实际上，我们只需 5 次乘法即可。

```
p[1]=i;
p[2]=p[1]*p[1]
p[3]=p[2]*p[1]
p[6]=p[3]*p[3]
p[9]=p[6]*p[3]
p[15]=p[9]*p[6]
```

要得到求乘幂的最优方案，需要耗费大量的时间 (见参考文献[3])。由于二分法的计算次数，与最优的次数非常接近，因此，本文选择了二分法。

[9]. 我们只需保存已算出的 $1^m,2^m,\ldots 4999^m$ 的值即可。当然，还可以进一步优化空间复杂度，详见程序 Pro_3.pas。