数据结构的联合

长沙市雅礼中学 黄刚

问题 1 顽皮的猴子

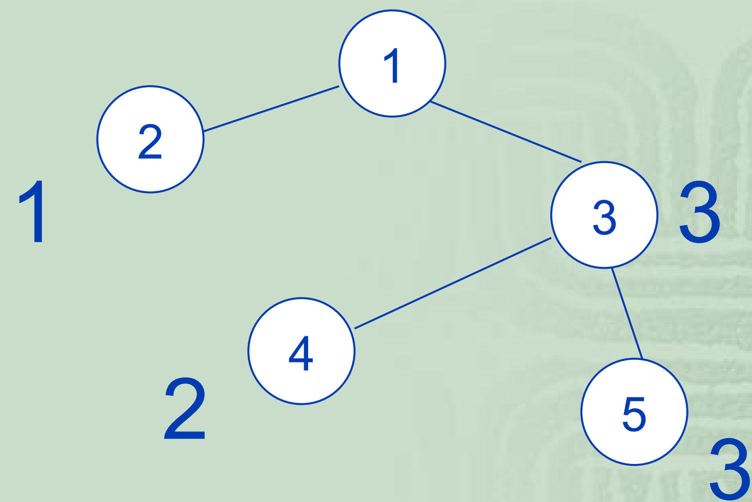
问题描述：

有 N （ 1<=N<=30000 ）只顽皮的猴子挂在树上。每只猴子都有两只手，编号为 1 的猴子的尾巴挂在树枝上，其他的猴子的尾巴都被别的猴子的某只手抓着。每一时刻，都有且只有一只猴子的某只手松开，从而可能会有一些猴子掉落至地面。输入一开始猴子们的情况和每一时刻松开手的情况，输出每只猴子落地的时间。

问题 1 顽皮的猴子

分析：

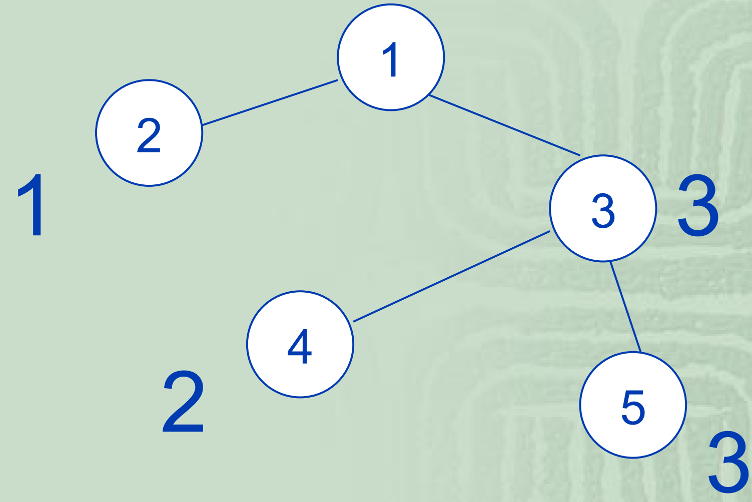
我们把猴子抽象成点，猴子的手抽象成边，题目就转化成一个连通图不断去边，求每个点离开编号为 1 的点所在的连通分量的时间。



问题 1 顽皮的猴子

分析：

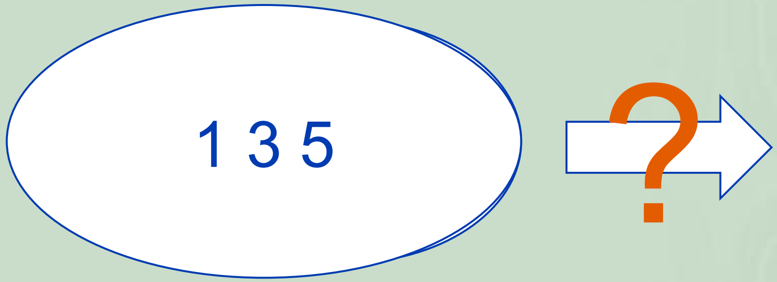
把删边的顺序倒过来，问题转化为从一个无边的图不断添边，求每个点进入编号为 1 的点所在的连通分量的时间。我们自然的想到用并查集维护。



问题 1 顽皮的猴子

一个问题：

上面的算法中，当并查集中某个集合加入编号为 1 的点所在的集合时，需要把这个集合中的所有元素的时间记录一下。但是并查集并不支持“枚举集合元素”的功能，怎么办？

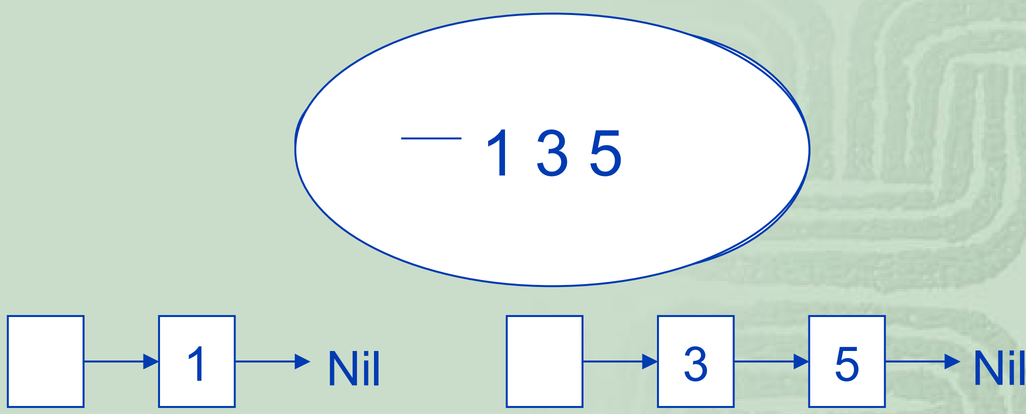


Time[3]:=2
Time[5]:=2

问题 1 顽皮的猴子

一个问题：

给每个并查集分配一个链表，记录这个集合中所有的元素。这样，能够方便的枚举集合中的元素。而在并查集合并的时候，链表也能够很快的合并。问题解决。



数据结构的并联

问题 1 中，在并查集不支持枚举元素操作的时候，引入一个新的数据结构链表来辅助，是数据结构的一种联合方式：并联，这种联合成功的解决了问题。

定义：

我们将用多个数据结构共同对同一数据集合统计的方法叫做**数据结构的并联**。

数据结构的并联

为了方便起见，先把一个数据结构支持的操作分为两类：

- 询问操作：顾名思义，就是获取该数据结构记录的某些信息的操作，而并没有改动数据结构里的元素及其相互关系。
- 维护操作：跟询问操作相反，改动数据结构中元素或元素的相互关系的操作，称为维护操作。

数据结构的并联

- 并联的优点：

  并联而成的新数据结构，支持组成它的数据结构的所有操作。

- 并联的缺点：

  维护操作的时间复杂度存在瓶颈，是所有组成它的数据结构的维护操作复杂度的和。

问题 2 DynamicRankings

问题描述：

给定一个长度为 N （ 1<=N<=50000 ）的正整数序列 A （ 1<=A[i]<=MaxLongint ）， 模拟以下操作：

1 、改值操作 C(i,j) ：将 A[i] 的值改为 j

2 、询问操作 Q(i,j,k) ：程序输出 A[i],A[i+1],…,A[j] 这 j-i+1 个数中第 k 大的数。

问题 2 DynamicRankings

例如：

N=6

A=[3,1,6,5,2,4]

C(5,4)	[3,1,6,5,4,4]	
Q(2,5,3)	[3,1,6,5,4,4]	输出： 4
C(6,2)	[3,1,6,5,4,2]	
Q(3,6,1)	[3,1,6,5,4,2]	输出： 6

问题 2 DynamicRankings

分析：

- 单纯的算法必定会超时，我们需要设计一个对整数序列进行统计的高效数据结构，并且支持改值和查找指定区间中第 k 大的数。

- 问题过于复杂，先考虑简单一点的情况。

问题 2 DynamicRankings

简化情况 1：

每次询问 Q(i,j)，要求程序输出 A[i],A[i]+1, …,A[j] 这 j-i+1 个数中最大的数。

解决方式：

只需用一颗**线段树**维护 A 序列，改值，询问操作都是 O(LogN) 的时间复杂度，完全满足题意。

问题 2 DynamicRankings

简化情况 2：

每次询问 Q(k)，要求程序输出 A[1],A[2], …,A[N] 这 N 个数中，第 k 大的数。

解决方式：

用一颗**平衡二叉树**维护 A 序列即可，同样的，改值，询问操作也只需要 O(LogN) 的时间。

问题 2 DynamicRankings

问题的嵌套：

- 现在，两个很简单的问题“嵌套”在了一起，成了一个棘手的问题，使得原先的方法都失效了。

- 既然问题能够“嵌套”，那我们原先解决问题的数据结构是不是也能够“嵌套”呢？

问题 2 DynamicRankings

数据结构的嵌套：

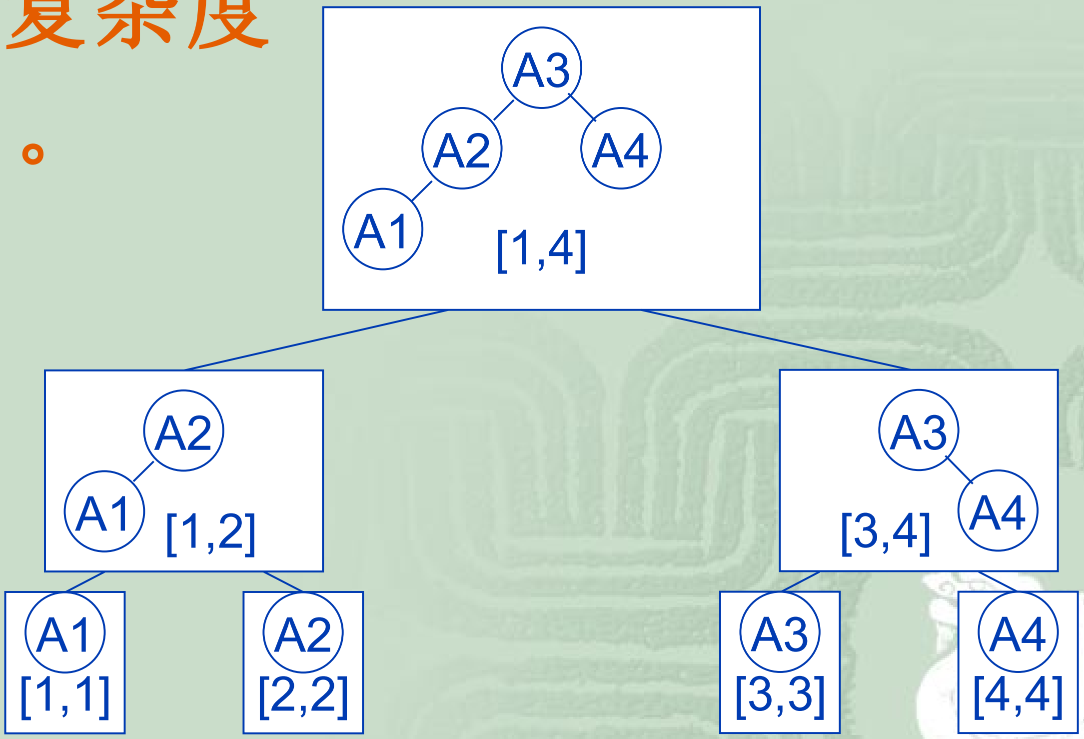
考虑一颗这样的线段树：它维护整个 A 序列，而它的每个节点 V，设表示的区间为 [i,j]，拥有一颗平衡二叉树，维护 A[i],A[i+1],…,A[j]。

为下文方便起见，暂时称之为“**嵌套树**”。

问题 2 DynamicRankings

N=4 的一颗嵌套树：

容易证明**空间复杂度是 O(NLogN)。**



问题 2 DynamicRankings

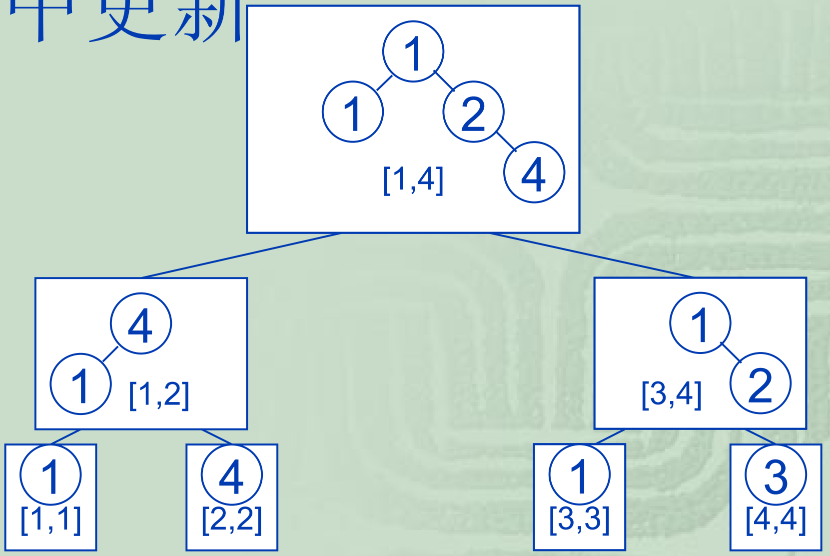
改值操作 C(i,j)：

在线段树中将包含 A[i] 的节点找出来，再在相应的平衡树中更新

例如 N=4，

A=[1,4,2,3]

改值 C(3,1)



时间复杂度 $O(Log^2N)$。

问题 2 DynamicRankings

询问操作 Q(i,j,k)：

- 如果按照线段树求区间最大值的方法：将 [i,j] 分解为若干个**嵌套树**中的区间并，分别求出每个子区间中第 k 大的数，再合并，这样是**行不通**的！

- 我们无法根据几个区间的第 k 大的数求出这些区间并的第 k 大的数。

问题 2 DynamicRankings

另辟蹊径：

将问题逆转过来，设询问 Q’(i,j,w) ，表示求正整数 w 在 A[i],A[i+1],…,A[j] 中排第几，应该怎么做？

将 [i,j] 区间在**嵌套树**中分解为若干子区间的并，分别求出每个区间中，有多少个比 w 大的数，最后把结果合并，就能够求出 w 在 A[i],A[i+1],…,A[j] 的排位。

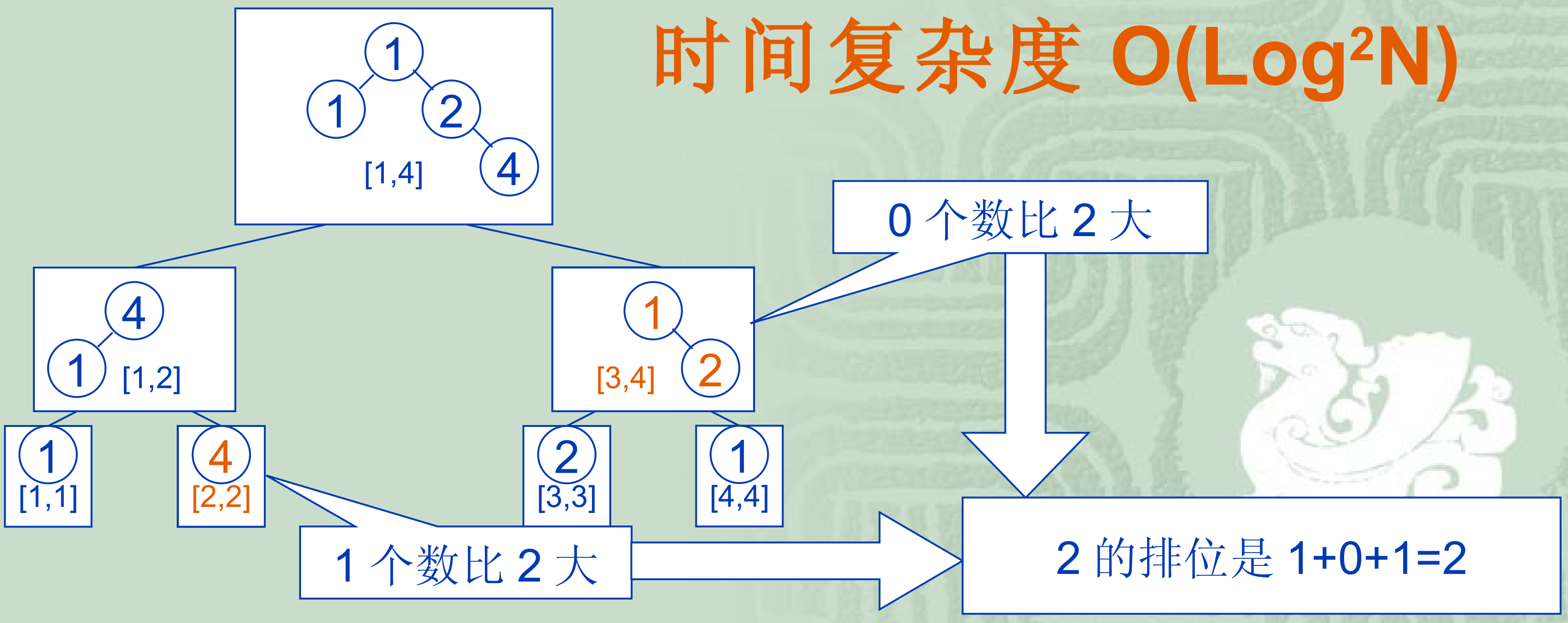
问题 2 DynamicRankings

另辟蹊径：

例如， N=4 ， A=[1,4,2,1]， 询问 Q’(2,4,2)，

即求 2 在 A[2],A[3],A[4] 中的排位。

时间复杂度 O(Log²N)



问题 2 DynamicRankings

另辟蹊径：

- w 越大，它的排位肯定越靠前。
- 我们不妨二分枚举 w，使得 w 在 A[i],A[i+1],…,A[j] 中排位为 k，再求出 A[i],A[i+1],…,A[j] 中不大于 w 的最大的数，设为 T(i,j,w)。则 Q(i,j,k) 的答案就是 T(i,j,w)。

问题 2 DynamicRankings

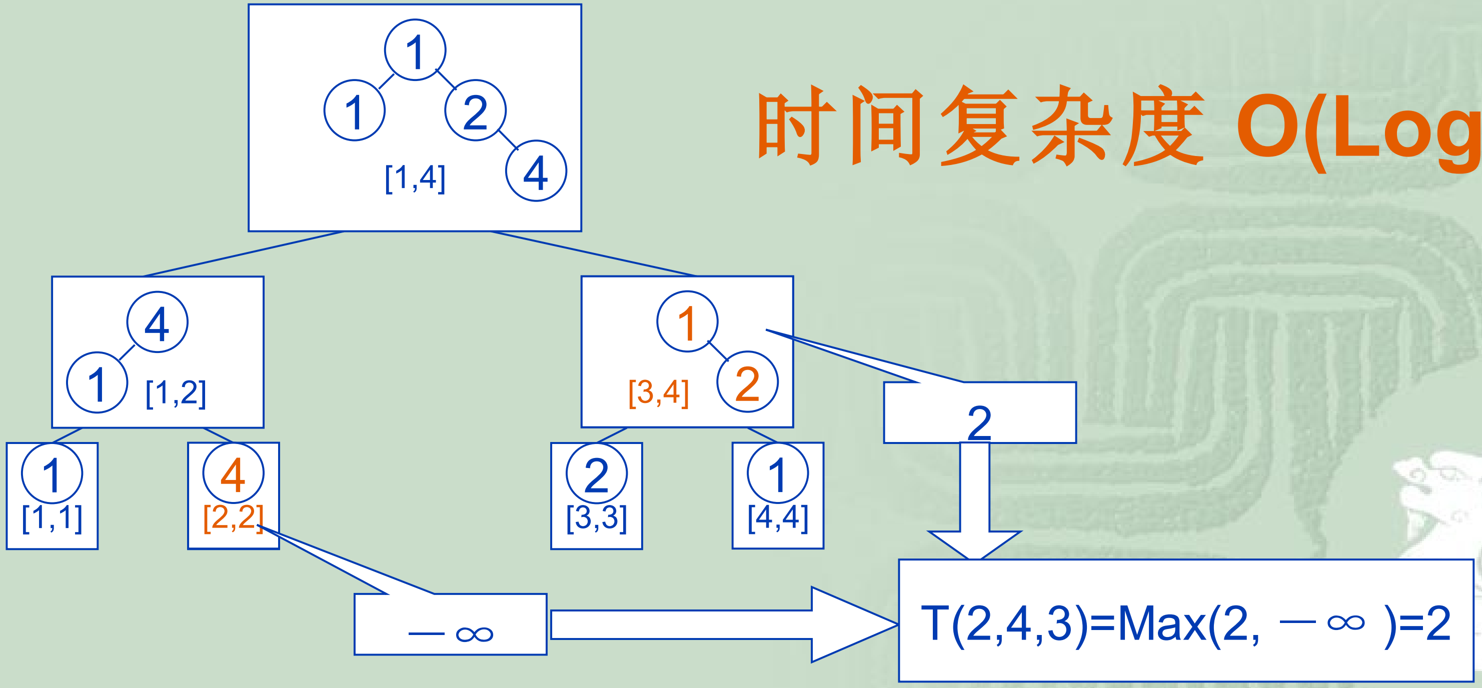
T(i,j,w) 的求法：

- 此时，我们可以用线段树求区间最大值的类似方法求出 T(i,j,w) 。
- 将 [i,j] 区间在**嵌套树**中分解为若干子区间的并。对每个子区间，找出不大于 w 的最大的数，若找不到，记答案为－∞。所有的子区间的答案中的最大值，就是 T(i,j,w) 。

问题 2 DynamicRankings

T(i,j,w) 的求法：

例如， N=4 ， A=[1,4,2,1]，求 T(2,4,3)



时间复杂度 $O(Log^2N)$

问题 2 DynamicRankings

回顾一下整个算法：

- 使用**嵌套树**作为数据结构，空间复杂度是 O(NLogN) 。
- 改值操作的时间复杂度 $O(Log^2N)$ 。
- 询问操作 Q(i,j,k)，先二分枚举求出 w，再求出 T(i,j,w)，时间复杂度是 $O(LogMaxLongint*Log^2N)$

整个问题的复杂度是 $O(MLogMaxLongintLog^2N)$ 。

数据结构的嵌套

总结：

- 上例中成功的运用了数据结构的嵌套解决了问题。

- 数据结构的嵌套，无疑是一种本质的变化，形成新的更强力的数据结构，但也有明显的缺点：空间复杂度大幅增高。
- 能不能真正发挥出数据结构嵌套的威力，无疑还是要靠我们的运用方式了。

总结

- 数据结构＋数据结构＝数据结构。
- 数据结构的联合，肯定不止上面提到的两种方式。
- 敏捷的思维，灵活的运用，才能将数据结构的联合应用于信息学竞赛当中。

谢谢大家！