偶图的算法及应用

南京师范大学附属中学 孙方成

目录

匹配的概念 (1)

定义1　设图$G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$，而$M$是$E\left(G\right)$的一个子集，如果$M$中的任两条边均不邻接，则称$M$是$G$的一个匹配。$M$中的一条边的两个端点叫做在$M$下是配对的。

若匹配M中的某条边与定点v关联，则称M饱和顶点v，并称v是M饱和的。

匹配的概念 (2)

设 M是图 G的一个匹配，若 G中存在一条基本路径 R，路径的边是由属于M的匹配边和不属于M的非匹配边交替出现组成，则称R为交替路。若R的两个端点都是M的非饱和点，则称这条交替路为可增广路。

设图 $G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$，$V\left(G\right)$被分成两个非空的互补顶点子集$X$和$Y$，若图$G$的一个匹配$M$ $E\left(G\right)$能饱和X中的每个顶点，换言之，X中的全部顶点和Y中的一个子集的顶点之间确定一个一一对应关系，则称M是图G的一个完备匹配。

偶图的定义

定义2　设图$G=(V,E)$，若能把V分成两个集合V_1和V_2，使得E中的每条边的两个端点，一个在V_1中，另一个在V_2中，这样的图称为偶图，也叫二分图，或是二部图。偶图也可表示为$G=(V_1,V_2;E)$。

　　对于顶点集$V \quad V_1$，用$P(V)$表示V_2中所有和V相连的顶点的集合。

定义3　如果偶图G的互补结点子集V_1中的每一结点都与V_2中的所有结点邻接，则称G为完全偶图。

偶图的判定

定理1　当且仅当无向图G的每一个回路的次数均为偶数时，G才是一个偶图。如果无回路，相当于任一回路的次数为0,0视为偶数。

偶图的最大匹配

Edmonds 于 1965 年提出了解决偶图的最大匹配的匈牙利算法
：

(1) 从G中取一个初始匹配M。

(2) 若X中的顶皆为M中边的端点，止，M即为完备匹配；否则，取X中不与M中边关联的顶u，记 $S=\{u\},T=$ 。

(3) 若$P(S)=T$，止，无完备匹配，否则，取 $y \quad P(S)-T$。

(4) 若y是M中边的端点，设$yz \quad M$，令 $S \quad S\cup\{z\},T \quad T\cup\{y\}$，转(3)；否则，取可增广路径$R(u,y)$，令$M \quad M \quad E(R)$，转(2)。

偶图的最小覆盖问题

一般图的最小覆盖问题是一个已被证明的NPC 问题。换一句话说，一般图的最小覆盖问题，是没有有效算法的图论模型。所以，将一个实际问题抽象成最小覆盖问题，是没有任何意义和价值的。

但是，如果问题可以抽象成偶图的最小覆盖问题，结局就不一样了。由于偶图的特殊性，偶图的最小覆盖问题存在多项式算法。

最大匹配与最小覆盖的关系

在证明这个定理的过程中，要用到 **Hall** 婚姻定理：

设 G是一个偶图，顶集划分成 V_1和 V_2， G中存在对于V_1的完备匹配的充要条件是，对于一切$S \quad V_1$，都有$|S| \quad |P(S)|$。

1931 年 König 给出最大匹配与最小覆盖的关系定理如下：

在偶图 G中，若 M^*是最大匹配， K^*是最小覆盖集，则$|M^*|=|K^*|$。

偶图的最佳匹配问题

定义4　$G=(V_1,V_2;E)$ 是加权完全偶图，$V_1=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，$V_2=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，权$w(x_i y_j)$　0。如果有一完备匹配M，对所有完备匹配M，都有$W(M)$　$W(M)$，则称M为偶图G的最佳匹配。

由于引入了权，所以最佳匹配不能直接套用最大匹配算法进行求解。同时，由于对最佳匹配的定义是建立在完全加权偶图的基础上的，对于不完全图，可以通过引入权为 0 （或是其他不影响最终结果的值），使得偶图称为完全偶图，从而使用最佳匹配算法来解决。

KM 算法前的准备

在介绍求最佳匹配的 KM 算法前，首先介绍一些相关的概念：

定义5 映射$l:V(G)\quad R$满足$\forall x\quad V_1$，$\forall y\quad V_2$，成立$l(x)+l(y)\quad w(xy)$，则称$l(v)$是偶图G的可行顶标；令

$$E_l=\{xy\mid xy\quad E(G),l(x)+l(y)=w(xy)\}$$

称以E_l为边集的生成子图为“相等子图”，记做G_l。

可以证明，G_l 的完备匹配即为 G 的最佳匹配。

以此为基础，1955 年 Kuhn ，1957 年 Munkres 给出修改顶标的方法，使新的相等子图的最大匹配逐渐扩大，最后出现相等子图的完备匹配。这就是 KM 算法。

KM 算法

(1)　选定初始可行顶标l，在G_l上选取一个初始匹配M。

(2)　若V_1中的顶皆为M中边的端点，止，M即为最佳匹配；否则，取G_l中不与M中边关联的顶u，记$S=\{u\},T=\quad$。

(3)　若$P(S)\quad T$,转(4)；若$P(S)=T$，取

$$a_l = \min_{x\ \ S,y\ \ T}\left\{l(x)+l(y)-w(xy)\right\}\qquad l\ (v) = \begin{array}{l} l(v)-a_l, v\quad S, \\ l(v)+a_l, v\quad T, \\ l(v),\ \text{其它。} \end{array}$$

$l\quad\ l\ ,G_l\quad\ G_l$。

(4)　选$P(S)-T$中的一点y，若y是M中边的端点，且$yz\quad M$，则$S\quad\ S\cup\{z\},T\quad\ T\cup\{y\}$，转(3)；否则，取$G_l$中$M$可增广路径$R(u,y)$，令$M\quad\ M\quad E(R)$，转(2)。

一个例题

某公司有工作人员 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ，他们去做工作 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ ，每个人都能做其中的几项工作，并且对每一项工作都有一个固定的效率。问能否找到一种合适的工作分配方案，使得总的效率最高。要求一个人只能参与一项工作，同时一项工作也必须由一个人独立完成。不要求所有的人都有工作。

一个实例

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_1	3	5	5	4	1
X_2	2	2	0	2	2
X_3	2	4	4	1	0
X_4	0	1	1	0	0
X_5	1	2	1	3	3

若工人 x 完全不能参与工作 y，则 $w(x,y)=0$

流程 (1)

首先，选取可行顶标 l(v) 如下：

$$l(y) = 0, i = 1,2,3,4,5;$$

$$l(x_1) = \max\{3,5,5,4,1\} = 5,$$

$$l(x_2) = \max\{2,2,0,2,2\} = 2,$$

$$l(x_3) = \max\{2,4,4,1,0\} = 4,$$

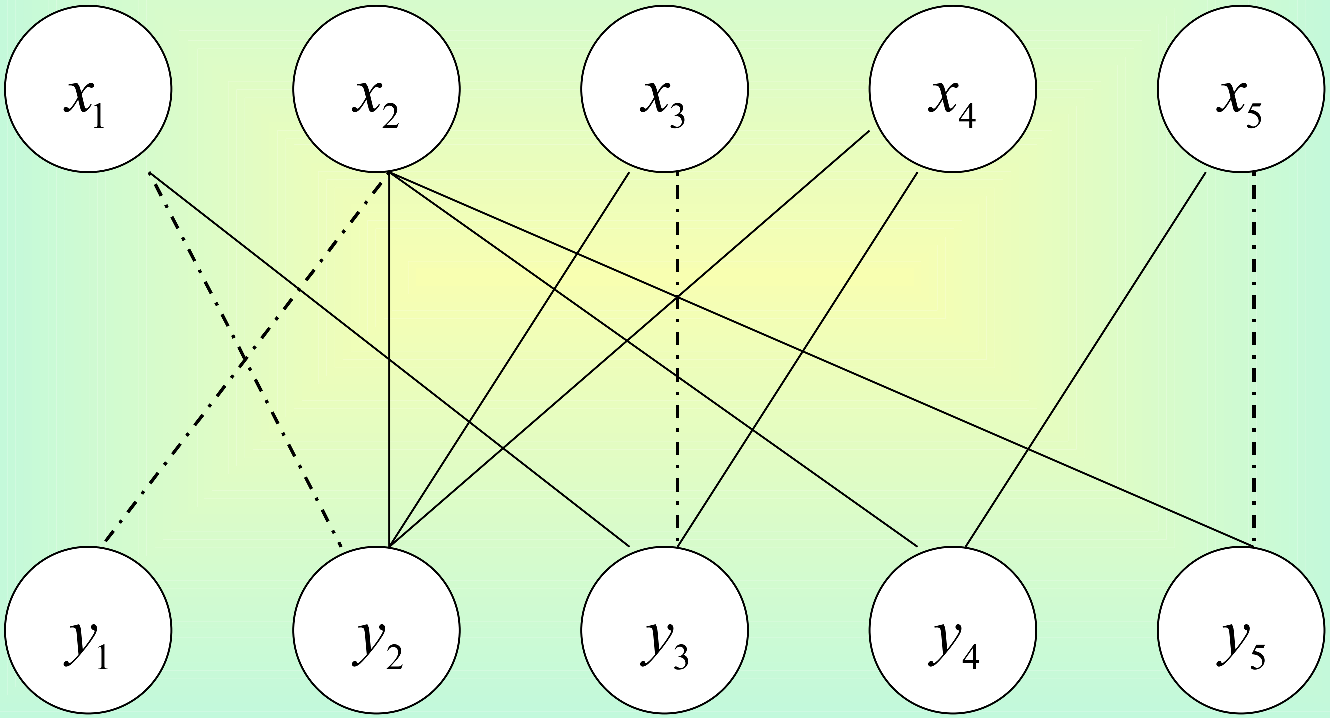
$$l(x_4) = \max\{0,1,1,0,0\} = 1,$$

$$l(x_1) = \max\{1,2,1,3,3\} = 3$$

构造 G_l，并求其最大匹配：（其流程过长，此处略）

流程 (2)

其最终得到的最大匹配如图所示：



图中粗点划线构成最大匹配。

流程 (3)

G_1 中无完备匹配，故修改顶标。

由于$u = x_4, S = \{x_4, x_3, x_1\}, T = \{y_3, y_2\}$，所以

$$a_l = \min_{x \quad S, y \quad T} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} = 1$$

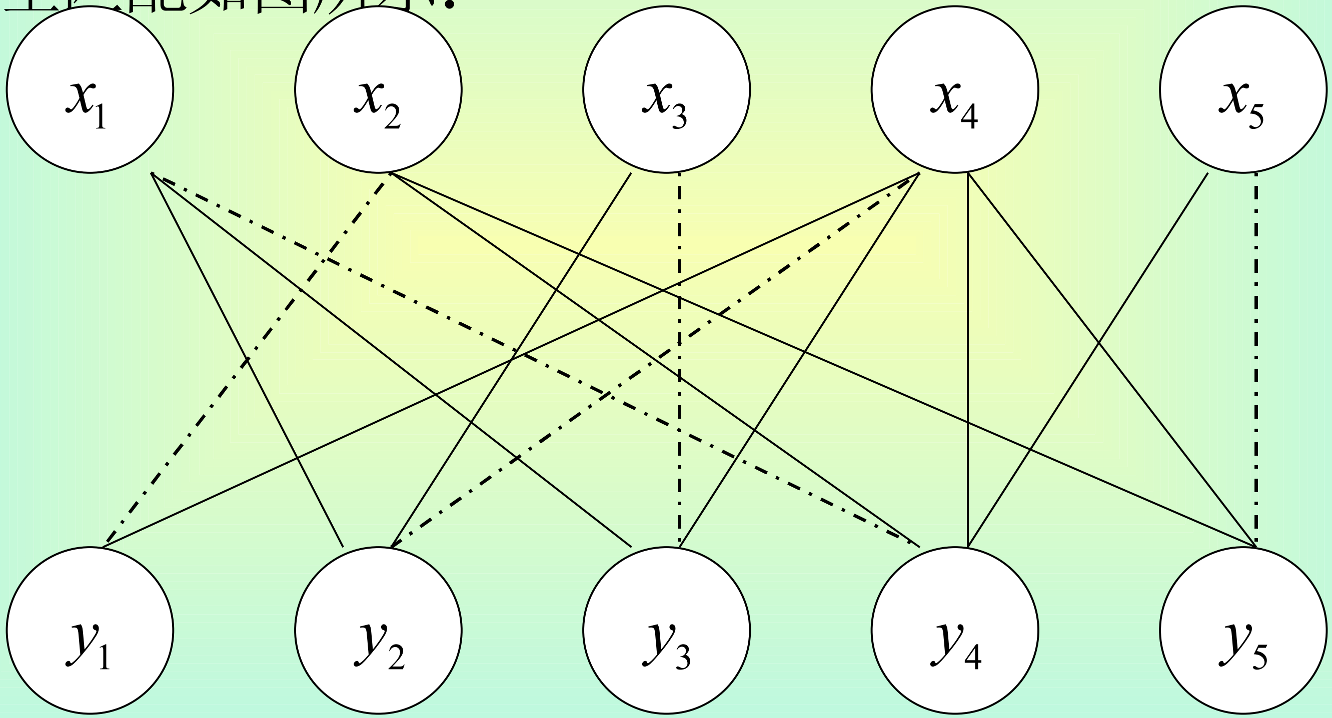
修改后的顶标为：

$$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0, x_5 = 3;$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1, y_4 = 0, y_5 = 0$$

流程 (4)

根据新的顶标构造 G_1 ，并求其上的一个完全匹配如图所示：



图中粗点划线给出了一个最佳匹配，其最大权为 4 ＋ 2 ＋ 4 ＋ 1 ＋ 3 ＝ 14 。题目完成。

小结

偶图是一种特殊的图，所以它不但具备了信息量丰富这个图模型共有的优点，同时它也具备了大量一般图所不具备的内涵和算法优势。

偶图的结点分成两个部分，这就是它和自然界、数学界的对应关系，或者说匹配关系有着深刻的联系。因此，匹配的算法是所有偶图算法的核心。

如果能将实际问题，通过合理的抽象，变成两种事物之间的矛盾，则这种问题就可以抽象成偶图的模型。所以，偶图的模型有着广泛的应用。同时，偶图的算法有着高效实用的特点，所以也使通过偶图模型解决问题成为可能。

综上所述，我认为，偶图是一种高效的，有着广泛使用价值的模型。合理、有效的使用偶图模型，将大大提高编程及解决现实生活中实际问题的能力。

谢谢！