转化目标在解题中的应用

湖南省长沙市长郡中学 栗师

概述

- 在解题时，总是觉得

限制太多 范围太窄 关系错综复杂	→	减少限制 放宽范围 简化关系

- 目标太远 → **转化目标**
- 解题遇到困难 → 困难需要解决！

解决某些题目，在算法设计中需要转化目标

题目——超级马 (1)

在一个无限的棋盘上有一个超级马，它占据一个正方形单位格，可以完成各种移动动作。每一种移动动作由两个整数来描述——第一个数说明动作左右移动多少格(正数向右，负数向左)，第二个数说明动作上下移动多少格(正数向上，负数向下)。已知一个超级马能够完成的动作，要判断它是否能够到达棋盘上的所有位置。

题目——超级马 (2)

SUP.IN

2 超级马个数 k(1<=*k*<=100)

5 动作数 n(1<=*n*<=100)

2 4
2 2
-3 -3 每一个动作 (x_i,y_i)， $(-100<=x_i,y_i<=100)$
4 3
1 3
5
1 -3
2 1
4 1
4 -2
2 -2

SUP.OUT

TAK

NIE

TAK 表示超级马能够到达所有的位置

NIE 表示超级马不能够到达所有的位置

确定算法 (1)

广搜？ **Time Limit Exceeded!**

动态规划？**在某种意义上等价于广搜**

否定了上面的算法后，似乎只有一条出路了：

数学方法

确定算法 (2)

每一个动作（x_i， y_i) 用一个平面向量 P_i 表示， $P_i=(x_i,y_i)$

要判断的就是对于任意的 x,y， 是否都存在着一个非负整数序列 c， 使得下面的等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P_i = (x, y)$$

确定了数学模型： **解方程**

确定算法 (3)

- 只要求当 $(x,y)=(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$ 的情况
- 由于对称性，只需要求 $(x,y)=(0,1)$ 的情况
- 所以最终目标：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P_i = (0,1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{方程①}$$

放大目标——

方程只有一个
但是，未知数很多

如……个
数应该比较多，有可
能有无限个。

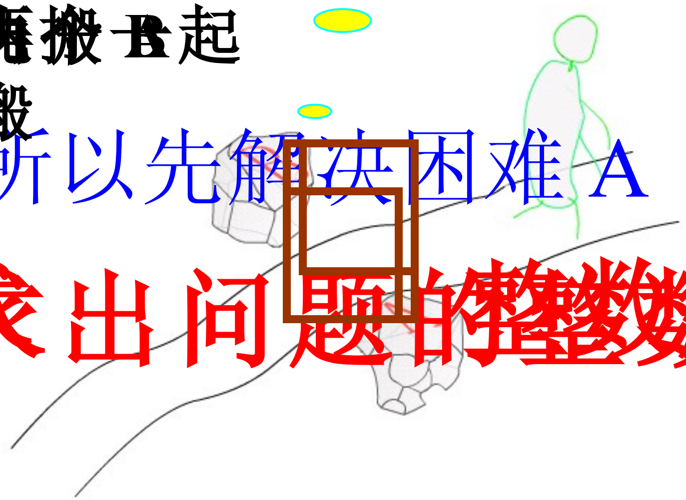
太重了

尝试着构造解。

构造出现了两个困难：

A 、方程右边 y 值要等于

B 、方程左边系数要非负。



搬

所以先解决困难 A

先求出问题的整数解

解！

放大目标——求整数解 (2)

- 目标仍然很复杂
- 再退一步
- 先考虑 $n=2$ 的情况
- 假设 $x_1,y_1,x_2,y_2\neq 0$
- 那么，两个向量能够到达纵坐标的哪些地方？

放大目标——求整数解 (3)

- $c_1x_1+c_2x_2=0$
- $c_1=\mathrm{Lcm}(x_1,x_2)/x_1$;
- $c_2=-\mathrm{Lcm}(x_1,x_2)/x_2$
- $W=c_1P_1+c_2P_2$ 可以由 P_1、P_2 完成。
- 任意整数 k, kW 都可以由 P_1, P_2 来完成。

$P_1=(x_1,y_1)$

$P_2=(x_2,y_2)$

$c_1P_1+c_2P_2$

放大目标——求整数解 (4)

- 定义 $S_{i,j}$： $y \in S_{i,j}$ 当且仅当存在整数 k_1,k_2 满足 $k_1P_i+k_2P_j=(0,y)$

$n=5$

$P_1=(2,4)$

$P_2=(2,2)$

$P_3=(-3,-3)$

$P_4=(4,3)$

$P_5=(1,3)$

[illegible]

$S_{i,j}$ j / i	2	3	4	5
1	$k\in Z\}$	$k\in Z\}$		
2				
3				
4				

放大目标——求整数解 (5)

- 定义 S：

  a、如果存在 i,j 使得 $y \in S_{i,j}$，那么 $y \in S$;

  b、如果 $y_1 \in S, y_2 \in S$， $y=k_1y_1+k_2y_2$， $(k_1 \in Z,k_2 \in Z)$, 那么 $y \in S$。

  c、其余的数都不属于 S。

S 是用所有的 $S_{i,j}$ 通过加减运算得出的闭形式

由模的知识不难得出， S 集合也是形如 $\{ky| k \in Z\}$ 的形式。

放大目标——求整数解 (6)

- S 中最小的正数 (上面的 y) 就是所有 $S_{i,j}$ 中的最小正数的最大公约数！
- 如果 1 属于集合 S，那么，方程①就有整数解了！
- 找到方程①有整数解的充分条件了！
- 上面的构造只是一个充分条件 。

  问题： 它是不是必要的？

  可以证明是必要的。

放大目标——求整数解 (7)

- **结论①：**
  - 方程①一定可以拆成若干个多项式之和。其中任意一个多项式最多包含两项，并且多项式的向量和的 x 为 0 。

$$3(2,4)-13(2,2)+9(-3,-3)+11(4,3)+3(1,3)=(0,1)$$

$$\boxed{[3(2,4)-3(2,2)]}+\boxed{[-10(2,2)+5(4,3)]}+\boxed{[9(-3,-3)+27(1,3)]}+\boxed{[6(4,3)-24(1,3)]}=(0,1)$$

$$\boxed{(0,6)}+\boxed{(0,-5)}+\boxed{(0,54)}+\boxed{(0,-54)}=(0,1)$$

放大目标——求整数解 (8)

- 用归纳法证明结论①：
  - n<=2 时显然成立；
  - 若 n<=k-1 时成立；当 n=k 时，如果找到这样的 u,v，满足：

$$\begin{cases} u_i x_i + v_i x_1 = 0 \\ \sum_{i=2}^{k} v_i = c_1 \end{cases}$$

  - 选出 k-1 个和为 0 的多项式 $u_i x_i + v_i x_1$，去掉 x_1，就剩下 k-1 个 x 了。
  - **可以假设所有的 x 的最大公约数是 1，否则，只要约掉公约数就可以了。**

放大目标——求整数解 (9)

设 g_i=Lcm(x_i,x_1)/x_1(i>1)

设 g=gcd(g_2,g_3……g_k)

所有 x_i 的最大公约数是1

g 与 x_1 互质

存在整数序列 $d_2,d_3……d_k$，使得 $\sum_{i=2}^{k} d_i g_i = c_1$

$v_i=d_ig_i$，

$u_i=-v_ix_1/x_i=-d_ig_ix_1/x_i$ $=-d_i$Lcm(x_1,x_i)/x_i

$u_ix_i+v_ix_1=0$

$\sum_{i=2}^{k} v_i = c_1$

$g_i|x_i$

$g|g_i$

$g|\sum_{i=2}^{k} c_ix_i$

$g|(c_1x_1)$

$g|c_1$

$\sum_{i=1}^{k} c_ix_i = 0$

求出了满足条件的 u,v，因此就可以从方程①的左边拿掉 $k-1$ 个向量：$v_ix_1+u_ix_i$，（其中，$1<i<=k$），又因为所有的 v_i 的和等于 c_1，所以，向量 P_1 的系数为 0 了，因此，就把 k 个向量变成了 $k-1$ 个，证明了结论①。

放大目标——求整数解 (10)

- 证明了结论①后，有下面结论：
- **结论②：方程①有整数解的充要条件是，(0,1) 能够由若干 Y 方向向量 W 通过加减运算得到，其中向量 W 由最多两个初始向量 P_i,P_j 通过加减运算得来。**
- 现在，很好的求出了方程①有整数解的充要条件！

求非负整数解 (1)

接下来就可以来探究方程的非负整数解。

后面的结论和证明都满足**3 个大前提**：

1、方程①有整数解。

2、把方程①的右边改成（1, 0）有整数解。

3、存在 i，使得 $x_i>0$；存在 i，使得 $x_i<0$；存在 i 使得 $y_i>0$；存在 i，使得 $y_i<0$；（因为如果不满足，就可以输出‘NIE’；这只是为以后的证明作前提，对算法没有影响）

求非负整数解 (2)

- 定义 $T_{i,j}$: $y \in T_{i,j}$ 当且仅当存在非负整数 k_1,k_2 满足 $k_1P_i+k_2P_j=(0,y))$

如果 [illegible] 为空集

$n=5$

$P_1=(2,4)$

$P_2=(2,2)$

$P_3=(-3,-3)$

$P_4=(4,3)$

$P_5=(1,3)$

$T_{i,j}$ (i \ j)	2	3	4	5
1				
2				
3				
4				

求非负整数解 (3)

- 用同样的方式定义 T：

  a、如果存在 i,j 使得 $y \in T_{i,j}$，那么 $y \in T$;

  b、如果 $y_1 \in T, y_2 \in T$， $y=k_1y_1+k_2y_2$，($k_1 \in N$， $k_2 \in N$), 那么 $y \in T$。

  c、其余的数都不属于 T。

- **T 是 $T_{i,j}$ 通过加法运算得出的闭形式。**
- **定义 T 有什么意义呢？**

求非负整数解 (4)

- 因为需要证明下面的结论：
- **结论③：如果 T 中至少有一个正数，有一个负数，那么方程①一定有非负整数解。**
- 证明的方法就是，构造一个非负整数解。

求非负整数解 (5)

- 构造方法：

  n=5， P_1=(2,4)， P_2=(2,2)， P_3=(-3,-3)， P_4=(4,3)， P_5=(1,3)

  步骤 1：因为 x 有正也有负，所以可以为每一个向量 P_i 选择相当大的正系数 d_i，使得和向量的 x 为 0 。

  $$W=\mathbf{200}P_1+\mathbf{300}P_2+\mathbf{700}P_3+\mathbf{200}P_4+\mathbf{300}P_5=(0,\mathbf{800})$$

  步骤 2：因为 T 集合中有正数也有负数，所以可以在 T 集合中取出一个比较接近于 **-800** 的数，把对应的向量加到 W 中 ,W 的模就接近于 0 了。这里取

  $\mathbf{1068}P_3+\mathbf{801}P_4=(0,-\mathbf{801})$，$W=200P_1+300P_2+\mathbf{1768}P_3+\mathbf{1001}P_4+\mathbf{300}P_5=(0,\mathbf{-1})$

  步骤 3：用构造出的整数解 $\mathbf{-4}P_1+\mathbf{4}P_2\mathbf{-1}P_4+\mathbf{4}P_5=(0,1)$，把它乘以2再加到 W 中。

  步骤①选的系数 d 都非常大，步骤②加的系数也是正数，步骤③加的数的绝对值相对于步骤①非常小，所以保证最后的系数仍然非负。

  $$W=\mathbf{192}P_1+\mathbf{308}P_2+\mathbf{1768}P_3+\mathbf{999}P_4+\mathbf{308}P_5=(0,\mathbf{1})$$

求非负整数解 (6)

- 接下来看下面的结论：
- **结论④：如果方程①有非负整数解，那么它一定存在 P_i,P_j,k_1,k_2(>=0) 使得 $k_1P_i+k_2P_j$ 是 Y 方向正半轴上的向量。**
- 证明比较简单，只需要用几个不等式，证明如果没有这样的 P_i， P_j， k_1， k_2，就不可能到达 Y 轴正半轴。具体过程请参见我的论文。

求非负整数解 (7)

- 同时考虑两个位置：(0, 1)，(0, -1)。
- 如果 *T* 中有一个正数，也有一个负数，那么超级马能够到达这两个位置。（**结论③**）
- 如果要能够到达 (0,1)， *T* 中就必须有一个正数；要能够到达 (0,-1)，就必须有一个负数。（**结论④**）
- 在满足前面 3 个大前提下，超级马能够到达 Y 坐标轴上的所有位置的充要条件就是：*T* 中至少有一个正数，至少有一个负数。(③+④)

算法

- **得到了问题的算法：**

步骤 1：

positive←false; *negative*←false;

For (P_i 是竖直向量) Do Begin

If y_i>0 Then *positive*←true Else *negative*←true;

End For;

For (P_i 不是竖直向量) Do Begin

For (P_j 不是竖直向量且 x_i 与 x_j 符号不相同) Do Begin

$W=P_i*|x_j|+P_j*|x_i|$

If W 是 Y 方向正向量 Then *positive*←true;

If W 是 Y 方向负向量 Then *negative*←true

End For

End For

If Not *positive* Or Not *negative* Then 输出(‘NIE’);halt; End If;

步骤 2：

g←0;

For (P_i 是竖直向量) Do g ← gcd(g,$|y_i|$);

For (P_i 不是竖直向量) Do Begin

For (P_j 不是竖直向量) Do Begin

t ← gcd($|x_i|$,$|x_j|$);

len ← $|P_i*x_j/t-P_j*x_i/t|$;

g ←gcd(g,len);

End For;

End For;

If $g\neq1$ Then Begin 输出(‘NIE’);Halt;End If;

步骤 3：

交换每一个向量的 x 值与 y 值，重复作步骤 1，步骤 2；

输出(‘TAK’)

算法的时间复杂度是 O(n^2)。

总结 (1)

- 题目首先是要求方程的非负整数解，而方程求整数解比求非负整数解要简单。所以首先把目标放大成了求解整数解。求完整数解后，就站在了一个新的高度上，由整数解得出非负整数解变得简单。
- 在求解整数解和非负整数解的过程中，也不是直接得出一个有解的充分必要条件，而是首先构造出一个充分条件，再证明它的必要性。

总结 (2)

- 解此题的关键：**转化目标**

这体现了解题的一个过程：

由易入难

由简单到复杂；

由浅入深 ；

由特殊到一般。

谢谢