信息学竞赛中的思维方法

广东省韶关一中　陈彧

【关键字】信息学 思维方法

【摘要】本文将借鉴一些数学思维理论，探讨思维方法在信息学竞赛中的地位和作用，并介绍信息学竞赛中的几种思维方法，包括：试验猜想及归纳、模型化、分类及分治、类比。其中将引用大量的例题进行思维过程的分析，大部分的例题是1999年NOI、IOI试题，具有广泛的代表性。最后总结本文讨论的目的及启迪。

【引论】

“奥林匹克是思维的体操”。同其它学科竞赛一样，信息学竞赛是在丰富的知识、一定的实践能力的基础上，思维与思维的竞赛。优秀的选手往往具有快速、敏捷的思维。因此，在我们不断探讨方法、总结经验的同时，有必要尝试探索系统的思维方法，以达到启迪思路的目的。注意思维方法并不是解题方法，我们重在对思考问题的过程的讨论，而不是对解决问题的算法的总结。

在对思维方法的具体讨论之前，让我们来看看数学家G·波利亚在1944年提出的“怎样解题表”：

> ……
>
> 你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？
>
> 你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用的上的定理？
>
> 看看未知数！试想出一个具有相同未知数的或相似未知数的熟悉的问题。
>
> 这里由一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。
>
> 你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？
>
> <u>你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？</u>
>
> 回到定义去。
>
> 如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。<u>你</u>

能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？……

如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

……

尽管这张表是为解决数学问题而设计的，但是它给我们的启迪是多么深刻！信息学与数学的联系是何等的紧密，而数学思维又是一门成熟的理论，它给我们的探讨带来宝贵的启示。

【正文】

思维方法是多种多样、因人而异的。本文将选取其中最具代表性的几种。首先，我们试按传统的“纵向”、“横向”标准，将本文要讨论的信息学竞赛思维的几种一般方法划分为：

纵向：试验猜想及归纳、模型化（化归）。

横向：分类及分治、类比。

其中模型化及类比是这里重点介绍的思维方法，当然此外我们也会多少涉及一些其它的思维方法，如递归、筛选、最优策略、逆向思维等等也都是我们常见、熟悉的，但因篇幅所限而略去。

试验、猜想及归纳

我们每个人的知识构成不同，解决问题的经验不同，思维的品质不同，甚至性格各异，面对陌生的问题时，产生的直觉、“灵感”就五花八门、各种各样。在分析问题时，我们会往往不止一次地做猜测：“会不会是这样”、“这不就是某某问题吗”。这些就是在个人知识、经验、智力的作用下的一种**猜想**思维。有时，当问题过于复杂，“老鼠拉龟”——无从下手，无法联系自己的知识时，我们往往希望“尽己所能，先解决规模更小的问题，找找问题是否存在规律吧”。这种“缩小规模”、“找规律”的想法就是**试验**思维。试验和猜想经常是结合在一起的。不要认为这些思维是“不正规”、不是“名门正道”的，相反，它体现的是人的思维的火花的跳跃的美。归纳的过程是对试验猜想的总结或证明。归纳通常是严格的。不过，竞赛是紧张、紧迫的，在竞赛中的严格的归纳是不简单的、少见的。

来看一个猜想的例子，IOI’99 第一题《小花店》（详见[例题 7]），经验丰富的选手也许未到题目看完就猜测解题的方法是动态规划，这个猜想的形成诱导他快速地完成题目分析，从而最终确定算法。这个猜想来源于扎实的基本功、广泛的实践和丰富的经验：选手对动态规划的实践较多，思考时可以自然的与做过的例题类比而做出猜想。所以猜想决不是“瞎猜”。

另一种猜想来源于试验。这里有一个最“经典”的例子：

[例题 1] $m,n \in N, 1<=m,n<=k<=10^9$, 且 $(n^2-mn-m^2)^2=1$，输入 k，求 m,n 使 m^2+n^2 最大。(NOI’95)

从数据的规模可“猜想”本题一定蕴含着更为简单的数学关系，但是题目的数学关系不明显，数学分析的难度太大。而用简单的两重循环枚举可以很方便的算出小数据的情况。

K	1	2	3,4	5,6,7	8,9,10,11,12	13…
M	1	2	3	5	8	13…
N	1	1	2	3	5	8…

通过这些试验，我们猜想符合条件的 m,n 成 Fibonacci 数列。实际上：

$$
\begin{aligned}
n^2-mn-m^2 &= -(m^2+mn-n^2) \\
&= -[(m+n)^2-mn-2n^2] \\
&= -[(m+n)^2- n(m+n) -n^2]
\end{aligned}
$$

更多的猜想来自**类比**。总之，猜想是一种合情的推理，它有利于对思路的正确诱导。

□ **模型化**

——“你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？”

客观世界是纷繁复杂的，当我们面对一个新问题时，通常的想法是通过分析，不断的转化和转换，得到本质相同且熟悉的或抽象的、一般的一个问题。这就是化归思想。把初始的问题或对象称为**原型**，把化归后的相对定型的模拟化或理想化的对象或问题称为**模型**。模型和原型必须是本质相同，是等价的。模型化的方向主要有图论模型、数学模型和规划（动态规划）模型。

图论模型化是我们最常使用的思想。图论中有许多成熟的算法。把陌生的问题转化为抽象的图论问题，也是许多选手爱干的事情。原因是，通过图论化，本来复杂、凌乱的数据关系简洁、明了了，问题求解的思路也清晰了。

[例题 2]《最优连通子集》

在坐标平面内的整点集中，称距离为 1 的两点相邻。若 S 是一个整点集，R、T 是 S 中的点，若在 S 中存在互不相同的点序列 $R-Q_1-Q_2-\dots-Q_k-T$，其中任意相邻两项的点相邻，则称 $Q_1-Q_2-\dots-Q_k$ 为整点集 S 中连接 R 与 T 的一条道路。又若对于 S 中任何两点都有且只有一条连接的道路，则称 S 为单整点集。现给定 S 并给 S 中所有点赋一个权，求单整点集 B，B 是 S 的子集且 B 的权和最大。(NOI’99)

这道题的题目本身便复杂得不得了，似乎在刻意构造一堆复杂关系。因此我们就有对它进行“简化”的自然愿望。我们很容易就可以想到图。但是“图”并没有题中“单整点集”的特殊性质——“对于任意两个点有且仅有一条

道路”。注意到这个性质恰好等价于“图中没有圈”，而树就是没有圈的图。当建立“树”模型的思想确立后，问题就被简化了。随之而来的是树的遍历、树的计数等一系列与树有关的算法。于是整道题的思路迅速清晰了许多。一种思路是：“最优连通子集”一定是以原“单整点集”某个点为根的一棵深度搜索树上的一棵子树。因此对原“单整点集”进行一次遍历同时计算每棵子树的最大权和即可。

[例题 3]《猫捉老鼠》

如右图是一个笼子，*是障碍，其中猫的初始位置已知，鼠的运动轨迹已知。鼠每秒走一步，猫每秒走 S 步，问猫能否捉住鼠？(GDOI’97)

c***m

猫要捉住鼠，必须在鼠之前到达鼠的运动轨迹上的某个位置。由此必须算出猫到达鼠的轨迹上所有位置的最短时间。我们也许会联想起最短路径的“标号法”（又是一种猜想）。这是从问题的“未知”方面的考虑。再从“已知”的方面考虑，猫在笼中行走，步长已知，则当它的位置确定时下一步能到的位置也确定。这样，把格子看作顶点，一步能到达的格子间有边连接，得到一张图。易知这样的图和原问题是等价的。至此模型化完成，解题思路轮廓已成。

在这个思维过程中不仅体现了模型化，而且带有猜想和双向思维的味道。

再举一个复杂一些的例子。

[例题 4]《补丁 vs 错误》

一个软件存在 n 个错误(1<=n<=20)，需要若干补丁，但是每个补丁只在软件包含一些错误而不包含另一些错误时才可使用，且每个补丁只修复其中一部分错误，同时又可导致另一些错误。每个补丁的运行时间不同，现在希望修复软件所有错误且耗时最少。(IOI’99 中国队选拔赛)

因为涉及耗时“最少”的问题，我们自然想起最短路径。为了达到这个目的，我们尝试对问题模型化。n 个错误的状态（存在或没有）的组合可以简洁地用二进制数表示，所有可能状态组成了图的顶点。顶点之间的有向边表示可以使用某个补丁而达到另一种状态。边权就是补丁的运行时间。于是问题抽象成求源点（2^n-1）到终点（0）的一条最短路径。这个模型和原型完全等价，而又体现了原型的“本质”所在，是“完美”的。

通常，有关离散量，数据之间的关系错综复杂的问题，可以考虑图论模型化。如果图论化成功，就容易得知算法的大概复杂度，是多项式级、指数级、还是阶乘级。

建立图论模型必须注意：模型和原型的**本质**越接近越好。这是因为，如果模型比原型（的本质，下略）更特殊，就有可能丧失解或得不到解；如果模型比原型更一般，则可能得到的算法的复杂度过高，容易超时，也得不到解。请看下面的例子：

[例题 5]《隐藏的字码》

给定一个字码词典 words.inp 和一个文本 text.inp。文本中将包含若干字码。每个字码的字母按顺序但不一定是连续地出现在文本里。现在要在文本中辨认出这些字码。不同的辨认方式将得到不同的字码，要求文本中包含字码的子序列（覆盖序列）无交叉、重叠，且所有字码的总长最大。如有 4 个字码为 RuN, RaBbit, HoBbit, StoP，文本为 StXRuYNvRuHoaBbvizXztNwRRuuNNP，则划线部分为 3 个覆盖序列，包含了 3 个字码 RuN、RaBbit、RuN，总长为 12。(IOI'99)

该题要求一组包含字码量最多的覆盖序列。通过分析我们知道，“右侧最小”覆盖序列（就是说它的任何前缀都不是覆盖序列）在文本中都是可确定的。于是我们考虑把每个“右侧最小”覆盖序列作为顶点，顶点间的边表示两个序列没有互相交叠。每个序列包含的字码长度对应顶点的值。问题转化为求图中的最长链。

显然，如此图论化是不行的：我们都知道最长路径没有好算法。为什么图论化后问题的复杂度会升得如此之高呢？这是因为，原型中，覆盖序列是有顺序的，是呈“线性”排列的。而图是“立体”的，图的顶点间没有什么“先后顺序”。把“线性”的转化为“立体”的，模型与原型非但不等价，反而更一般化了，必定会使问题的复杂度升高一个档次。

不过，并非所有的模型化都是严格等价的，模型仅是原型的一个类比，我们通常都不能脱离原型来设计具体的算法。比如[例题 2]中，“单整点集”实际上比树还要特殊：它是根至多有 4 个子节点，其余节点最多有 3 个子节点的树，且节点间还有更复杂的关系。我们撇开了这些限制，得到的树的模型当然与原型不严格等价，它比原型更一般。但是这个模型和原型是如此的相似，它们的“本质”是一致的。但是如果把“单整点集”理解成图，模型就太过一般化以至失去了它的作用。又如[例题 3]，并不是任意一张图都可以转化为“笼子”的结构，也就是说“笼子”和图不是严格等价的，但这也不妨碍对问题的求解。

在数学模型中，使用得最多的是各种组合数学模型。组合数学的难度是非常大的，建立组合数学模型要有很好的数学功底，最能体现思维的严密性。同时还涉及分类、分治、递归等思维。

各种各样的计数问题都可考虑建立组合数学模型，最常用的组合数学模型是*递归关系*。直接利用递归关系计数是可行的，但先对递归关系进行求解再计数可大大降低复杂度。

[例题 1]就是以组合数学中的 Fibonacci 数列做模型。最“经典”的组合数学模型莫过于 Catalan 数了。Catalan 数的一个原型是这样的：

[例题 6] 有 n 个数的连乘积 $k_1k_2k_3\ldots k_n$，插入足够的括号，使每一个子乘积恰好是两个因子的乘积。例如，乘积 $k_1k_2k_3k_4$ 能用括号括成 $((k_1k_2)(k_3k_4))$ 或

$(((k_1k_2)k_3)k_4)$或$((k_1(k_2k_3))k_4)$或$(k_1((k_2k_3)k_4))$或$(k_1(k_2(k_3k_4)))$，注意我们不允许改变k_i的次序。求用括号括 n 个数乘积$k_1k_2k_3\ldots k_n$的方式数a_n。

建立递归关系，通常要设法把原问题分割成若干规模更小（分治）、性质相同（递归）的子问题。易知，$a_2=1$，$a_3=2$ （$((k_1k_2)k_3)$及$(k_1(k_2k_3))$），令$a_0=0,a_1=1$，考虑 n 个数乘积的最后乘积（最外层括号），此最后乘积涉及两个子问题（分治）的乘积：$((k_1k_2\ldots k_i)(k_{i+1}k_{i+2}\ldots k_n))$，分别用括号括这两个子问题的方式数为$a_i$及$a_{n-i}$（递归），故解决两个子问题共$a_ia_{n-i}$种方式，其中 i 能从 1 开始一直到 n-1。对于所有的 i 相加，我们得到递归关系(n>=2)：$a_n=a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\ldots+a_ia_{n-i}+\ldots+a_{n-1}a_1$ …………（*）

这就是Catalan 数的递归关系了。求解这个递推关系我们可得Catalan 数的解：

$$a_n=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

有许多计数问题都可以归结为 Catalan 数的递归关系（*）式。也即是说，Catalan 数存在丰富的原型。例如：

[*凸多边形问题*]将一个凸 n 边形用 n-3 条互不相交的对角线分割成 n-2 个三角形，求分法总数。

[*数的计数问题*]有 n 个节点的二权树共有多少。

采用分治、递归等方法，容易得到这两例的递归关系同样是（*）式。

组合问题千变万化，求解的方法各种各样，模型化只是其中一种方向，有时仅仅是求解过程中的一步，但通过这些例子可见它的作用之大。

规划（数学规划）模型是数学模型的一类。因其常见，故独立列出。

我们熟悉的规划模型主要包括整数规划及动态规划模型。整数规划是所有变量均取整数的规划问题，这类问题的算法通常是阶乘级的。动态规划的决策、状态变量也是取整数的，但它的算法复杂度却是多项式级的。

带约束的多变量的求解问题，特别是约束条件中有满足某个函数的最大（小）值，可考虑建立规划模型。建立规划模型时，动态规划是首选，如果选整数规划，则要注意算法的优化。

[例题 7]《小花店》

现有 F 束花要从左至右插在 V 个花瓶里(1<=F<=V<=100)。花与瓶分别用 1~F 与 1~V 的整数标识。花要按花的标识数从小到大排列。不同的花插在不同的瓶子里产生不同的美学价值(-50 到 50 之间)。求最大美学价值及其一种摆放方式。(IOI'99)

这实际上就是对一系列整数变量的求解，目标函数是“最大值”型的。所以可以建立规划模型：

$$\begin{cases} x_i \in N \\ x_i < x_{i+1}, (1 <= i < F) \\ \max f = \sum A_{ix_i} \end{cases}$$

这是整数规划，如果分阶段决定 x_i，模型就向动态规划转化了。

[例题 8]《棋盘分割》

从一个矩形棋盘（一刀）割下一块矩形棋盘并使剩下部分也是矩形，将剩下部分继续如此分割，割了（n-1）次后，得到 n 块矩形棋盘。棋盘每个格子有一个分值，现要把棋盘按上述规则割成 n 块矩形棋盘，使各矩形棋盘的均方差最小。(NOI’99)

许多选手都选择了动态规划或搜索算法。为什么呢？这是因为，虽然题目仅要求一个最优值，但应该想到，均方差是由切的方法来决定，也就是 n-1 个变量，代表每一“刀”的位置。所以题目隐含着对这 n-1 个变量的求解。故比起其它模型来，问题更类似于规划模型。问题求解的核心，就是这隐含的 n-1 个变量的取值。一般来说，搜索总能容易想得到，当然也要注意优化，而若能加入阶段的概念，把这 n-1 个变量的求解人为地划分为 n-1 个阶段，则自然会向建立动态规划模型靠拢。

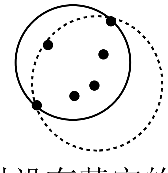
分类及分治

分类与分治来源于我们解决问题总是希望“大事化小，小事化了”的愿望。

分类，就是按逻辑来划分问题的各部分。程序的模块化就是分类思想的产物之一，测试数据的设计也体现了分类的思想。分类的思维过程要保持全面、严密。对问题进行转换和转化时，要保证考虑到了问题的方方面面，不重复，不遗漏。不仅组合问题，其它任何问题也要注意。

[例题 9]平面上有 n 个点(n>1)，现要求一个面积最小的圆，它能覆盖所有这些点。

一种思路是这样的：因为三点确定一个圆，覆盖所有点的圆面积变小时一定有“收缩”到使某些点恰落在圆上的趋势（可类比凸包）。所以为确定这个圆，只需枚举 3 个点即可，复杂度 $O(n^3)$。



这个思路是有缺陷的：“收缩”趋势的确是存在的，当最终落在圆上的点不少于 3 个时，当然可以枚举；问题是，有没有可能最终只有 2 个或仅 1 个点落在圆上呢？若仅有 1 个点，则显然圆还可以再“收缩”。若仅有 2 个点，则“收缩”促使圆心落在这两点连线的中点，即这两点连线就是圆的直径，此时没有其它的点在圆上是可能的，如果用 3 点来确定这个圆反而变大了（右图）！

分治在上文中曾多次提到过。分治是特殊的分类，通常与递归联系在一起。它的特点是划分后的子问题又是规模更小的原问题，这使得它的思路非常的清晰、简洁。可以说，分治思想被很好的溶入在上文的各种思想中，如组合数学、动态规划、搜索等。

□ **类比**

——你是否见过相同的问题而形式稍有不同？你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用的上的定理？

……试想出一个具有相同未知数的或相似未知数的熟悉的问题。

这里由一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。……你能不能利用它？

……一个类比的问题？

单看中这么多的文字都涉及类比，就可知道类比的重要。如果说前面的介绍都带有解题方法的分析的话，那么类比就是纯粹的思维方法了。事实上，一开始本文引用，就是一种跨学科的类比，而前文也多次出现“类比”一词。

[例题 2]中，为什么会想到树呢？因为把题中“单整点集”中两个点有且只有一条道路的性质类比树的性质：“树的任意两个顶点间有且只有一条道路”。

[例题 3]、[例题 4]中，由于问题涉及“最短”，故类比最短路径，寻找相似，不断的把问题向目标转化，最终完成模型化。同样的问题也出现在 IOI’99《交通信号灯》，也是求“最短”，所以也类比最短路径，寻找差距，再尝试消除差距，向目标转化，结果发现同样满足“无后效性”。

类比可以是本质的类比，也可以是形的类比，总之只要能启发思路就行了。[例题 5]与 IOI’98 的《天外来客》有几分相似，于是想到借鉴此题的部分思想，如储存、“一次性”地读入数据、动态规划思想等。虽然不一定都有用，但启发是不小的。

[例题 6]可说是典型例题了。凡是做组合数学时想想此题，递推关系是如何建立的，如何求解的，也许可找到不少可借鉴之处。

[例题 8]的形式是常见的，如“求一个整数矩阵的子矩阵，使子矩阵元素的和最大”。从这也可启发把问题分割成子问题的分治思想。

当然由于类比是一种不严格的思维，失败的类比也是难免的，比如[例题 5]与熟悉的图论模型的类比，就是不成功的。这再次证明类比仅仅是启发思路而已。

要注意的是，类比必须“有物可比”。也就是说，先要重视知识、实践的积累。越丰富的知识、越广泛的实践就会带来越多可供类比的对象，思路就越开阔，启发就越大。

总而言之，类比就是一种相似，由于“相似”的含义非常广泛，所以类比方法的表现形式也就丰富多样。类比也是一种寻求解题思路，猜测问题答案或结论的发现方法。尽管类比的结果不一定正确，但它是发散思维，是创造性思维的基础，有着非常重要的作用。

当我们面对问题时，通常总是通过观察弄清问题，抓住题目的特征进行广泛的联想、检索和回忆，即凭借已有的知识和经验，做出直觉性的理解和判断，选择总体思路或入手的方向。能否找到合适的策略与观察问题的角度及联想范围的广窄深浅有关。当思维受阻时，就应调整思维方向，变换角度再进行分析思考，直到产生新的思路。在这个过程中，各种思维方法不是孤立地，而是辩证地运用。

最后，本文对思维方法的讨论的目的，一是启迪读者的思路；二是说明平时的知识及实践积累工作才是发展个人思维的最好途径。

【附录】

[1]这张表包括“弄清问题”、“拟定计划”、“实现计划”和“回顾”四个部分。这里仅仅节选了“拟定计划”一节中的部分内容。

[2]更多的例子请参见《信息学奥林匹克》1999 第 3 期 26 页刊登的福建省试题《幂函数递归系数问题》。

[3]实际上这里还需解决储存量的问题(2^{20}=1,048,576)，关系到计算机储存的技巧，但这不在本文的讨论范围之内，故略去。

[4]递归关系的求解属于组合数学，不在本文讨论的范围内，故略去。在此仅讨论递归关系的确立。Catalan 数的求解在各种组合数学书籍里都有，请另行参阅。

[5]《数学思维论》，P141。

[6]《数学思维论》，P242。

【参考书目】

1. 《数学思维论》,任樟辉 著，广西教育出版社，1996 版。

2. 《信息学奥林匹克》杂志

3. 《组合数学及其在计算机科学中的应用》，庄心谷 著，西安电子科技大学出版社，1989 版