

## \*\*第十二讲、相交图

本讲中我们将介绍相交图与它的一些特例，如边图、圆弧图、T-区间图和正交图，以及这些图的基本性质、判定、染色、独立集、与其他类型图的关系等问题，但多数将不给出证明。（除了译者自证的）

### 1. 介绍

我们已经了解了一些相交图，例如区间图、弦图、排列图等。许多现实问题都可以转化为相交图上的问题。由于相交图的范围广泛，它包含一些特例，例如边图、T-区间图、圆弧图、正交图等。

图的判定、独立集、染色、团、与其他类型图的关系等是图论中的一些经典问题，多数情况下这些都是 NP 问题，但对于某些探索的相交图，部分问题可以有效解决。

第 2 解中将给出相交图的定义并进行简要的讨论。之后几节将逐个讨论一些相交图的特例。

### 2. 相交图

定义 1: 一个图是个相交图，如果它的每个顶点  $V$  可以映射到一个集合  $S_v$ ，满足两个顶点间有边，当且仅当它们对应的集合的交集非空。

定理 1: 所有的图都是相交图。

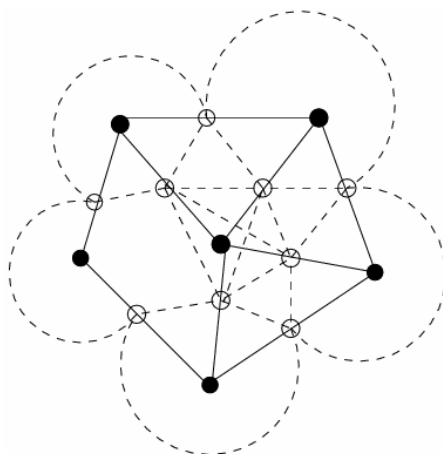
证明: 令  $S_v = \{\text{以 } V \text{ 为一个端点的边集}\}$ 。显然若  $(V, W)$  有边，当且仅当该边是  $V, W$  对应集合交集集中的元素。即证。■

问题 1: 有定理 1 的证明可知一个元素个数为  $|E|$  (边数) 的全集中的若干子集的相交图可以成为这个图  $G = (V, E)$ 。但是更小的全集是否可行呢？全集元素的下界又是什么？这是一个开放的问题。

### 3. 边图

定义 2: 一个图  $G$  的边图  $H$  满足  $V(H) = E(G)$ ， $H$  中两个顶点间有边，当且仅当它们对应的边在  $G$  中有一个公共端点。

图 1 中白点与虚线显示了一个图的边图。



显然一个五阶的无弦环的边图是它本身，即一个洞，所以边图不一定是完美图。

#### 3. 1. 边图的一些结论

假设图  $G$  的边图是  $H$ ，下边是一些经典问题在  $H$  上的一些结论，这里不加证明。

- 判定：边图可以在  $O(n+m)$  时间内判定，具体方法见[Rou73,Leh74]。
- 独立集：边图上的最大独立集问题就是原图  $G$  上的最大匹配问题，由于最大匹配在任意图上都可以有效地解决（一种方法是利用带花树），因此边图的独立集问题也是可解的。
- 团覆盖：这个问题就是原图的顶点覆盖问题，这是一个 NP 问题。但当  $G$  是二分图时这个问题是可解的。
- 染色：这个问题等价与原图的边染色问题，也是 NP 问题。但可以得知图  $G$  的边色数要么等于度最大顶点的度，要么等于这个数加 1，因此搜索时有较强的剪枝。【而且对于二分图，有边色数等于度最大顶点的度】，因此是可解的。
- 团：边图  $H$  中的团对应的原图中的边要么是三角形，要么交于同一点（很容易理解和证明），因此只要测试原图中所有三角形于各个顶点即可。这个问题是可解的。

另外，虽然边图不都是完美图，可以证明二分图对应的边图都是完美图。

定理 2：二分图对应的边图都是完美图。

证明：1、证明二分图对应的边图中没有高于 3 阶的奇阶洞

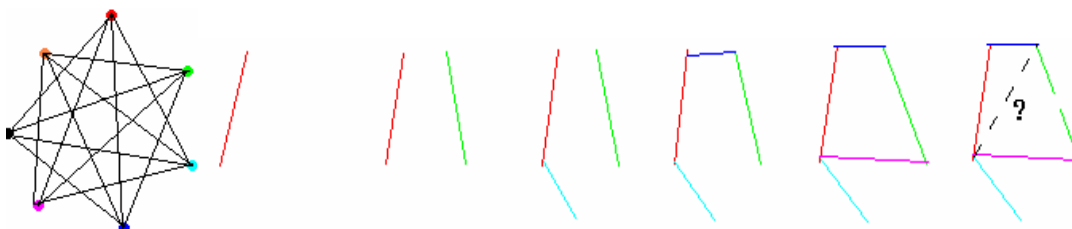
假设边图中存在高于 3 阶的奇阶洞，则易知这些顶点在原图中对应的边构成一个奇阶环，这与二分图中没有奇阶环矛盾。

2、证明二分图对应的边图中没有高于 3 阶的奇阶井

假设边图中存在  $2K+1$  阶井，( $K \geq 2, K \in \mathbb{N}^*$ )。

若  $K=2$ ，则该 5 阶井就是一个 5 阶环，由 1 得矛盾；

若  $K=3$ ，设该 7 阶井的顶点依次为  $1..7$ ，从 1 开始依次构造原图，可以发现前 5 条边加入满足条件的本质不同的方式只有一种，而第 6 条边无法加入，矛盾（如图）。这个性质对任意边图都成立。



若  $K \geq 4$ ，设该 7 阶井的顶点依次为  $1..2K+1$ ，则易知顶点集  $\{1,3,5,7,\dots,2K-1\}$  与  $\{2,4,6,8,\dots,2K\}$  在边图中分别构成两个顶点数不少于 4 的团。由于边图中的团在原图中只有两种情况，这里三角形显然不可能，因此必定是交于同一点的边集。由因为边图中顶点 1、2 见无边，因此这两个团的公共点 A、B 不重合。又边图中顶点  $2K+1$  与顶点 2, 3, 4, 5 都相邻，因此原图中该边只可能连接顶点 A 和 B。于是该边与边 1 相邻，这与边图中这两个顶点见无边矛盾。这个性质对任意边图都成立。

综上所述，二分图的边图中没有高于 3 阶的奇阶井。

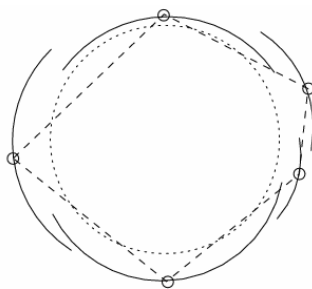
由 1、2，根据强完美图猜想，二分图边图是完美图。证毕。■

## \*\*4. 圆弧图

圆弧图是另一类相交图，可以看作区间图的推广。

定义 3：图  $G$  是圆弧图，当且仅当  $G$  是一个圆周上若干圆弧的相交图。

图 3 是一个圆弧图的例子。可见这个圆弧图是一个 5 阶洞，因此圆弧图不一定是完美图。



#### 4. 1. 圆弧图的结论

- 判定：可以在线形时间  $O(n+m)$  时间内判定，具体见[HBH90,DHH96]。
- 染色：圆弧图的染色与一般图一样是 NP 问题。[GJMP78]
- 团：这是一个可解的问题，见[Gav74]。

### 5. T-区间图。

定义 4：一个图  $G$  是  $T$ -区间图，当且仅当它是元素个数不多于  $T$  的区间的集合构成的相交图。

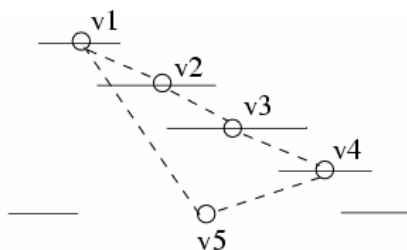


图 4 是一个 2-区间图的例子，这个图是一个 5 阶洞，因此当  $T \geq 2$  时  $T$ -区间图不一定是完美图。

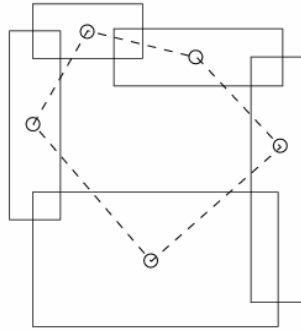
#### 5. 1. T-区间图的结论

- 与其他类型图的关系
  - 一由定义可知 1-区间图就是区间图
  - 一树是 2-区间图
  - 一边图是 2-区间图
  - 一平面图是 3-区间图
  - 一任意图  $G$  都是  $\lceil (\Delta + 1)/2 \rceil$  区间图，其中  $\Delta$  是  $G$  中度最大顶点的度。
- 判定：当  $T \geq 2$  时判定  $T$ -区间图是 NP 问题，但判定 1-区间图是可解的，之前各讲已经讲过了。

### 6. 正交图

定义 5：一个图  $G$  称为  $D$ -正交图，当且仅当  $G$  是  $D$  维空间中若干正交的几何形构成的相交图。

图 5 是一个 2-正交图的例子，这是一个 5 阶洞，因此正交图不一定是完美图。



### 6. 1. 正交图的结论

- 判定：当  $D > 1$  时， $D$ -正交图的判定是 NP 问题。
- 与其区间图的关系：1-正交图是区间图（也就是 1-区间图），但当  $D > 1$  时  $D$ -正交图与  $D$ -区间图没有明确的关系。下面给出  $D=2$  时这两种图的差别：
  - 2-正交图中的每个顶点  $V$  都是分别平行与  $X$  轴与  $Y$  轴的两个向量  $I_v^x$  与  $I_v^y$  的叉积，记为  $V = I_v^x \times I_v^y$ 。但 2-区间图中的每个顶点  $V$  是两个区间  $I_v^1$  与  $I_v^2$  的并集，记为  $V = I_v^1 \cup I_v^2$ 。
  - 2-正交图中的每条边  $(V, W)$  表示顶点  $V, W$  的两个分向量都相交，而 2-区间图中的一条边  $(V, W)$  表示顶点  $V, W$  对应的四个区间中不属于同一顶点的任意一对或多对相交。
- 与其他类型图的关系：任意图  $G$  都可以表示成  $D$ -正交图的形式，其中  $D$  随  $G$  的不同而不同。
- 独立集：正交图上的独立集问题是 NP 问题（1-正交图除外）。