称球问题

长沙雅礼中学 何林

关键字

判定树 三分 均匀

摘要

本文对一类天平称球问题提出了完整、严谨的解法，在此基础上总结了研究过程中的一些心得和方法。

引言

先看一个简单的问题：

问题 1 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量比其他的要重一些。给你一架天平，问至少要称多少次，才能找出那个次品。

也许你心中暗想："太简单了！"可是你证明过它的可行性和最优性，你仔细分析过它的原理和研究方法吗吗？让我们再来看几个复杂一点的题目：

问题 2 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量与其他的球不同，**不知道轻重**。同样给你一架天平，问至少要称多少次，才能找出那个次品？

问题 3 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量与其他的球不同，不知道轻重。同样给你一架天平，问至少要称多少次，才能找出那个次品、**并且知道次品到底是轻还是重**？

问题 4 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量与其他的球不同，不知道轻重。同样给你一架天平和**一个标准球**，问至少要称多少次，才能找出那个次品，并且知道次品是轻还是重？

面对这一系列的拓展，你还能游刃有余吗？

简单问题的分析

先来考虑最简单的问题 1。为了方便叙述，把 n 个球按 1,2,…,n 顺次编号。

若 n=3，把一号球放在天平左边、二号球放在天平右边。如果天平：

1、左偏，一号重，是次品。

2、右偏，二号重，是次品。

3、保持平衡，那么一、二都是正常的球，因此就只有可能三号球是次品了。

因此 n=3，至多一次就能称出哪个是次品。记作 f(3)=1。

下面考虑 n=9。把所有的球分成三组：A{1,2,3},B{4,5,6},C{7,8,9}。A 组的球放在左边、B 组放在右边。如果天平：

1、左偏，则次品在 A 组里面。

2、右偏，则次品在 B 组里面。

3、保持平衡，次品在 C 组里面。

无论在哪个组里面，我们已经把次品的范围从“9”缩小到了“3”，也就是减少到原来的 1/3。之前我们已经研究过，3 个球 1 次就能称出来，故而 f(9)=2。

不难推广到一般的情况：

定理 1.1 $f(3^n)=n$。

证明：n=1,2 时，已证。设 n=k 成立，则 $f(3^k)=k$；下面考虑 n=k+1 的情况。

将 3^{k+1} 个球分成三堆 A{1,2,…,3^k}, B{3^k+1,3^k+2,…,3^k*2}, C{3^k*2+1,3^k*2+2,…,3^{k+1}}，把 A 放在天平左边、B 放在右边，天平：

1、左偏，次品在 A

2、右偏，次品在 B

3、平衡，次品在 C

无论哪种结果，我们都把次品的范围缩小到了 3^k 个球里面。而 $f(3^k)=k$，故而 $f(3^{k+1})=k+1$。

综上，定理 1.1 成立。

稍经分析不难得到：

定理 1.2 $f(n)=\lceil \log_3 n \rceil$

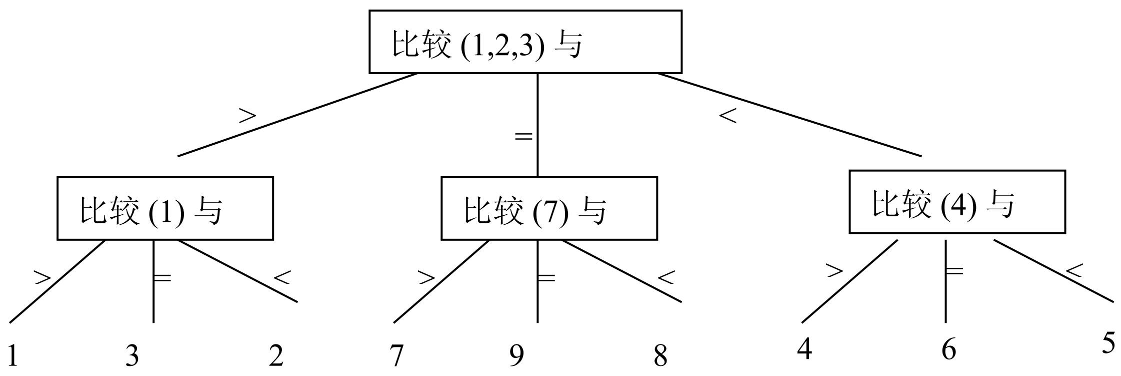
这个的证明和定理 1.1 完全类似，此不赘述。

我们必须注意到：$\lceil \log_3 n \rceil$这样一个结果是可行的，因为我们能够构造出这样一个方案。问题是它是否最优？

我们采取的方案是每次将球尽量均匀的三分，这样做的根据就是天平只有三种结果：左偏、右偏、平衡。于是就能保证无论次品在哪一份都能将结果的范围缩小到原来的 1/3。从感性上认识，$\lceil \log_3 n \rceil$应该就是最优解了。

为了更加严格的证明$\lceil \log_3 n \rceil$的最优性，我们引进判定树的概念。

下图就是 n=9 时的一种判定树：



此题的判定树是这样一棵树：

1、叶子节点代表一种可能的结果。

2、非叶子节点代表一次称量。

3、非叶子节点至多有三个儿子，分别代表天平的左偏、右偏、平衡三种情况。

任意一种称量方案都能唯一的表示成一棵判定树；反过来一棵判定树也唯一的对应一种称量方案。

同时也容易看出判定树的深度就是至少称量的次数。这就是我们之所以引进它的原因。

做出判断之前，谁也无法预知哪个球是次品，每个都有可能是我们的目标；因此一个有意义的判定树应该具有至少 n 个叶子节点。

n 个叶子节点的树的深度 $h \geq \lceil \log_3 n \rceil$，故而可以证明，$f(n)=\lceil \log_3 n \rceil$是最优的。

至此完整的解决了问题 1。

我们的结论是：有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量比其他的要重一些。给一架天平，至少称$\lceil \log_3 n \rceil$次，就能找出那个次品。

具体的方案是将球每次都尽量均匀的三分。（详见上文）

让我们总结一下。

“三分”是整个算法的核心。我们选择三分，而不是二分或者四分是有原因的，它的本质是由判定树的特殊结构——三叉树——所决定的。

同时还必须注意一点，我们在三分的时候有两个字很讲究：“均匀”。实际上 $h \geq \lceil \log_3 n \rceil$中的“=”当且仅当球被均匀的分配时才能达到。

这里说的“均匀”是指“在最坏情况下获得最好的效果”。因为一棵树的深度是由它根节点儿子中深度最大的儿子决定的，为了使得整个树深度最小，我们就要务必使得深度最大的儿子深度最小，这就是“均匀”分配的理论根据。

或许你觉得这些总结是显然的、只是多余的废话。然而面对这样一个简单的问题，你当然能够游刃有余，也不需要提炼出什么经验、方法；可是当问题被复杂化、隐蔽化，你还能如此得心应手吗？

称球问题的拓展

1、问题的提出与初步分析

问题 4 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量与其他的球不同，**不知道轻重**。同样给你一架天平和**一个标准球**，问至少要称多少次，才能找出那个次品，并且知道次品是轻还是重？

我们很自然的有一种仿照问题 1 的解法来解决此问题的冲动。

考虑最简单的 3 个球的情况。

1 号球放左边、2 号球放右边，如果天平平衡，毫无疑问，3 号球就是次品；但问题是如果天平发生了偏移，到底哪个才是次品呢？1 号还是 2 号？

问题 4 较之问题 1 最大的困难就在于不知道次品的轻重，因此一次称量之后根本无法马上将次品缩小到理想的范围。

思路就此打住。如果对问题 1 只是浅尝辄止、不深入的分析，也很难做出一个正确的推广。

我们转换思路，从判定树的角度看这个问题。

问题 1 中每个球都有可能是次品，所以有 n 个叶子节点；而我们必须注意到此题中不仅每个球都有可能是次品，而且次品还有两种情况：轻或者重！所以本题实际上有 2n 种不同的可能结果，而不是 n 种。

比如 n=3，有可能是如下 6 种结果：

1、1 号是次品，且比标准求重。记作 1H（H 是 heavy 的缩写）

2、2H

3、3H

4、1 号是次品，且比标准球轻。记作 1L（L 是 light 的缩写）

5、2L

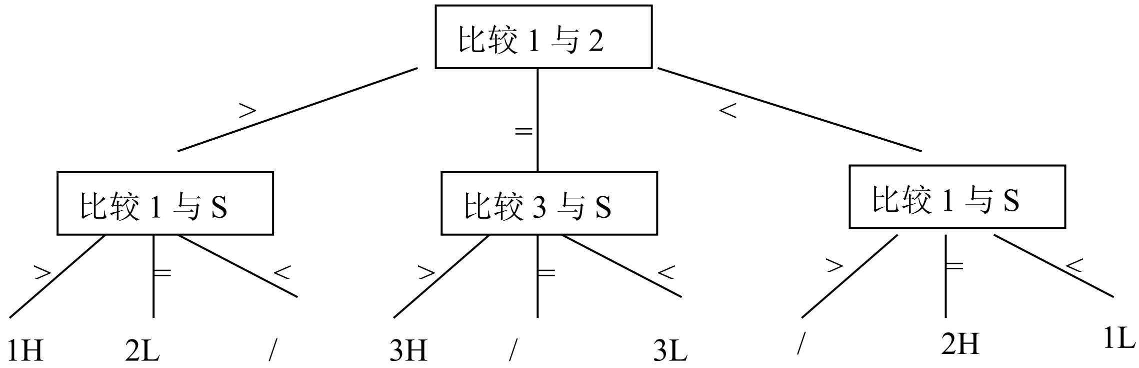
6、3L

拥有 6 个叶子的判定树的深度 $h \ge \lceil \log_3 6 \rceil = 2$，所以 3 个球至少要称 2 次才能找到次品并知道轻重，而不是我们想象的 1 次。

所以此问题的判定树至少要有 2n 个叶子节点，它的深度 $h \ge \lceil \log_3 2n \rceil$。

n=3 的时候，判定树如下：（S 是 standard 的缩写，表示给定的标准球；nL

表示第 n 个球轻；nH 表示第 n 个球重）



我们很自然的联想：是不是$\lceil \log_3 2n \rceil$就是此问题的解？$\lceil \log_3 2n \rceil$的最优性是毋庸置疑的，可是可行性呢？我们是不是总能构造出这样的一个判定树呢？

我们下面就试着构造。在此之前必须明确两个原则：

1、 **一次称量中，天平两边的球数必须相等**。这是显然的，否则比较结果无任何意义，我们之前的操作也不自觉的遵守了这个原则。

2、 **称量的过程中，必须时刻保持分球的均匀性**。这有这样才能保证 $h \ge \lceil \log_3 2n \rceil$中的 “=”达得到。

2、最优界的构造

首先将上节的内容归纳一下：

猜想 I 给定一个标准球，一架天平，n 个球，其中一个是次品。每个球既有可能轻、也有可能重。只需要$\lceil \log_3 2n \rceil$次就能称出次品，并且知道它是轻还是重。

证明猜想 I 即可。

仿照问题一的研究手段，我们试着用归纳法证明。先考虑 n mod 3 = 0 的最简单情况。

设 n=3k，此时有 6k 种可能的结果。从“均匀”的角度出发，分成三组：

A{1,2,…,k}, B{k+1,k+2,…,2k},C{2k+1,2k+2,…,3k}。A 放在天平左边、B 放在天边右边，观察天平：

1、 保持平衡。则次品必然在 C 中，问题可以归纳到 n=k 时的猜想 I。此时

有(2k+1)H, (2k+2)H, …, (3k)H, (2k+1)L, (2k+2)L, …, (3k)L 这 2k 种情况。

2、 左偏。次品在 A 或者 B 中，可能是 1H, 2H, …, kH, (k+1)L, (k+2)L, …, (2k)L 这 2k 种情况。这时每个球都有可能是次品，但是 A 中的只有可能比标准球重，B 中的只有可能比标准球轻——条件较猜想 I 发生了本质的变化！故而此时的问题不能再归纳到猜想 I。

3、 右偏。次品在 A 或者 B 中，可能是 1L, 2L, …, kL, (k+1)H, (k+2)H, …, (2k)H 这 2k 种情况。类似于 2，问题的条件也发生了变化，无法归纳到猜想 I。

上述三种情况，无论哪种都将问题的可能解从 6k 种缩小到 2k 种，完全满足“均匀”的原则。

但第二、三种情况中，称量后的问题结构发生了本质的变化。为了顺利解决猜想 I，我们不得不提出另外一个猜想：

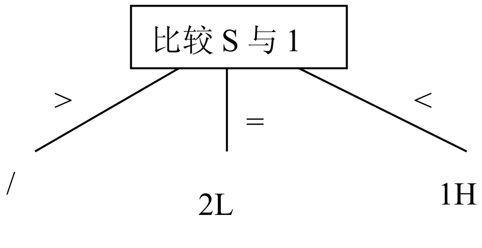
猜想 II 给定一个标准球，一架天平，n 个球，其中一个是次品。设 n=a+b，只有可能是 1H, 2H, 3H, …, aH, (a+1)L, (a+2)L, …, (a+b)L 这 n 种结果，那么只要 $\lceil \log_3 n \rceil$ 次就能称出次品，并且知道次品的轻重。

下面考虑用归纳法证明这两个猜想的正确性。（根据判定树，猜想的最优性是显然的，我们只考虑证可行性）

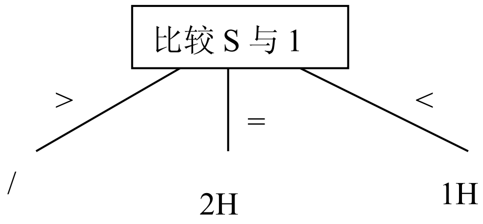
为了方便叙述，规定<A,B>表示将集合 A 中的球放在天平左边，集合 B 中的球放在天平右边的称量结果。<A,B>=Left、Right 或者 Middle，分别表示左偏、右偏和平衡。

先证猜想 II。

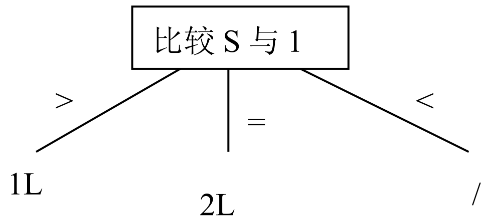
证明：n=2 时，n=a+b。如果 a=b=1，根据题设只有可能是 1H, 2L。判定树如下：



如果 a=2, b=0，判定树如下：



若 a=0, b=2，判定树如下



无论 a,b 如何取值，均只需要 1 次称量即可。而$\lceil \log_3 n \rceil$=1，因此 n=2 时猜想 II 成立。

假设 n<k（k≥3）时猜想 II 成立，下证 n=k 时也成立。

k=a+b，按照 a, b 除以 3 的余数来讨论。

情况一：a=3p, b=3q

将前 a 个球均分成三堆：A, B, C，使得|A|=|B|=|C|=p。（这里前 a 个球地位完全相等，因此只要知道每一堆的球数即可，至于具体每堆球的编号则不是我们所关心的）

后 b 个球也均分成三堆：A’, B’, C’，使得|A’|=|B’|=|C’|=q。

根据题设次品如果在 A, B, C 中只有可能是重球；次品如果在 A’, B’, C’中只有可能是轻球。

因此我们称<A+A’, B+B’>，若：

1、<A+A’, B+B’>=Middle。次品在 C 或者 C’中，问题归结到 n=p+q 时的猜想 II，还要称$\lceil \log_3 p+q \rceil$次。所以原问题总共称$\lceil \log_3 p+q \rceil$+1=$\lceil \log_3 n \rceil$次即可。

2、<A+A’, B+B’>=Left。由于 A’中的球只有可能是轻球、B 中的只有可能是重球，所以次品必不在这两者中。可以把范围缩小到 A 和 B’中，问题又归结到 n=p+q 时的猜想 II，还要称$\lceil \log_3 p+q \rceil$次。因此总共称$\lceil \log_3 p+q \rceil$+1=$\lceil \log_3 n \rceil$次即可。

3、<A+A’, B+B’>=Right。类似于 2，可以把次品的范围缩小到 A’和 B 中，总共称$\lceil \log_3 p+q \rceil$+1=$\lceil \log_3 n \rceil$次即可。

综上，情况一猜想 II 成立。

情况二：a=3p+1, b=3q+2。

将前 a 个球分成三堆 A, B, C，使得 |A|=p, |B|=p, |C|=p+1。

后 b 个球也分成三堆 A’, B’, C’，使得|A’|=q+1, |B’|=q+1, |C’|=q。

称<A+A’, B+B’>，根据天平偏移的情况做出适当的判断即可。此不赘述。

我们之所以把 A+A’, B+B’, C+C’分别作为一组，就是因为：

1.天平左偏，次品只有可能在 A, B’中，有 p+q+1 种可能的结果。

2.天平右偏，次品只有可能在 A’, B 中，有 p+q+1 种可能的结果。

3.天平平衡，次品只有可能在 C, C’中，有 p+q+1 种可能的结果。

也就是说无论天平怎么偏，我们总可以把原来的 6(p+q)+3 种可能的结果，缩小到 p+q+1 种，是准确意义上的均匀，保证了在最坏的情况下也能得到最好的结果。

总之无论你怎么分，只要保证了“均匀”，就是一种可行的方案。所谓的均匀就是“最坏的情况下的结果达到最优”。

另外还有四种情况：a=3p, b=3q+1；a=3p, b=3q-1；a=3p+1, b=3q+1；

a=3p+2, b=3q+2。都可以按照以上的方法类似证明，结构完全相同，关键是抓着“均匀”的原则不放。下表是这几种情况的具体划分方法：

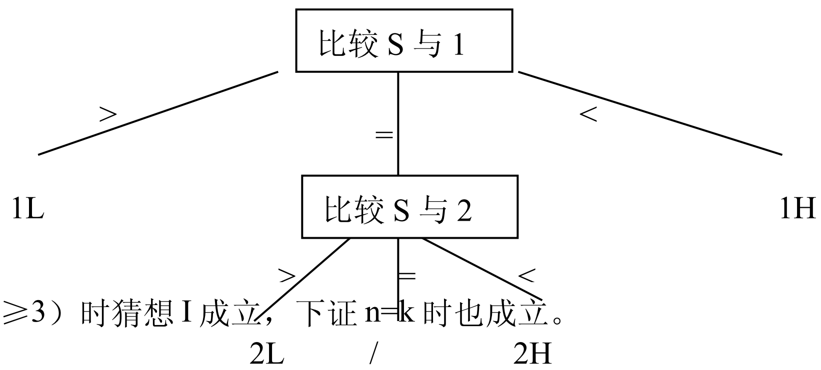
	a 的划分，三个数依次代表|A|, |B|,|C|	b 的划分，三个数依次代表|A’|, |B’|,|C’|
a=3p, b=3q+1	p，p，p	q，q，q+1
a=3p, b=3q-1	p，p，p	q，q，q-1
a=3p+1, b=3q+1	p，p+1，p	q+1，q，q
a=3p+1, b=3q+2	p，p，p+1	q+1，q+1，q

需要特别说明的是，这里的均分的是“可能的结果”，而不是单纯的均分球。

综上，对于任意的自然数 n(n⩾3)，猜想 II 成立！

下面证猜想 I。

证明：n=2 时判定树如下，2 次即出解。$\lceil \log_3 2n \rceil$=2，因此 n=2 时成立。



假设 n<k（k⩾3）时猜想 I 成立，下证 n=k 时也成立。

情况一：k mod 3 = 0。可以设 k=3p。

将球分成三堆：A, B, C，使得|A|=|B|=|C|=p。称<A, B>。若：

I. <A, B>=Left。此时的结果有可能是 AH（表示 A 中的球只有可能比标准球重）或者 BL（表示 B 中的球只有可能比标准球轻，下同），问题归结到 n=2p 时的猜想 II，还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。总共要称$\lceil \log_3 2p \rceil$+1=$\lceil \log_3 6p \rceil$=$\lceil \log_3 2k \rceil$次。

II. <A,B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p 时的猜想 I，根据归纳假设还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。所以总共称$\lceil \log_3 2p \rceil$+1=$\lceil \log_3 6p \rceil$=$\lceil \log_3 2k \rceil$次即可。

III. <A, B>=Right。此时的结果有可能是 AL 或者 BH。问题也归结到 n=2p 时

的猜想II，还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。所以总共要称$\lceil \log_3 2p \rceil+1=\lceil \log_3 6p \rceil=\lceil \log_3 2k \rceil$次。

综上 k mod 3 = 0 时猜想 I 成立。

情况二：k mod 3 = 1。可以设 k=3p+1。

先看一种错误的想法。

分成三堆 A, B, C，使|A|=p, |B|=p, |C|=p+1，这样看起来是“均匀”的。接着称<A, B>：

1、<A,B>=Middle。次品在 C 中，可能是 CH 或者 CL 这 2p+2 种结果。

2、<A,B>=Left。可能是 AH 或者 BH 这 2p 种结果。

3、<A,B>=Right。可能是 AL 或者 BH 这 2p 种结果。

不难发现原问题的 6p+2 种结果被分摊成了 2p+2, 2p, 2p。这是均匀的吗？显然不是！

比如 p=1，n=4，共有 8 种可能的结果，根据猜想只需要 2 次即可得出解答。可是如果把球划成 1,1,2 三堆，2 个球需要 2 次才能称出，整个问题就至少需要称 3 次！

我们往往容易被表面的假象所迷惑，把 3p+1 个球分成 p、p、(p+1)这三堆看似是均匀的，然而我们必须时时谨记：均分的是可能的结果，而不是球！

既然有 6p+2 种结果，我们就应该把可能性按照 2p+1, 2p+1, 2p 的方式均分。

可以如此划分：A{**S**,1,2,…,p}, B{p+1,p+2,…,2p,2p+1}, C{2p+2, 2p+3, …, 3p+1}。即|A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p。特别注意的是在 A 中加入了一个标准球。

然后称<A, B>，若：

1、<A,B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p 的猜想 I，根据归纳假设，还要称$\lceil \log_3 2p \rceil$次。既总共称$\lceil \log_3 2p \rceil+1 = \lceil \log_3 6p \rceil=\lceil \log_3 6p+2 \rceil=\lceil \log_3 2k \rceil$次。

2、<A,B>=Left。有可能是 1H, 2H, …, pH, (p+1)L, (p+1)L, …, (2p+1)L 这 2p+1 种可能（由于 S 是标准球，所以不在我们的筛选范围之内。因此参加称量的虽然有 2p+2 个球，但是实际有可能是次品的却只有 2p+1 个。这也是此方案和之前错误想法的根本区别），根据归纳假设还要称$\lceil \log_3 2p+1 \rceil$次。总共称$\lceil \log_3 2p+1 \rceil$+1=$\lceil \log_3 6p+3 \rceil$=$\lceil \log_3 6p+2 \rceil$=$\lceil \log_3 2n \rceil$次即可。

3、<A,B>=Right。类似于 2，不赘述。

综上，k mod 3 = 1，猜想 I 成立。

情况三：k mod 3 = 2。可以设 k=3p+2。

分成三堆 A, B, C，使得|A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p。将 6p+4 种可能的结果分摊为 2p+2,2p+2,2p，是均匀的。

然后称<A, B>，和情况一、二完全类似，此不赘述。

综上，对于任意的自然数 n，猜想 I 成立！

于是问题 4 解决了，我们的结论是：

给定一架天平，一个标准球。称出 n 个球中的次品并且知道轻重，需要且仅需要$\lceil \log_3 2n \rceil$次。

3、小结

在已经研究过问题 1 的基础上，我们很自然的把解决问题 1 的一系列方法和主观经验搬到此题来；这对启迪思路起了很重要的作用。

然而由于问题的相异性，表面的规律和经验却在进一步的应用中失败了。我们以“判定树”为桥，深入的研究了问题 1 中间方案的本质规律，得到了两条重要原则：

1、均匀三分。

2、均分的是可能的结果，而不是球。

正是这两条原则引导我们正确的构造出完整的称量方案，得以正确的解决问题。

称球问题的其他变化形式，也完全遵循上述两个原则。所谓万变不离其宗，只要我们牢牢抓住上述两条原则，以判定树为研究的桥梁，无论问题形式怎么变，都能手到擒来。

称球问题的一些其他变化形式

称球问题有如下几个可变要素：

1、有无标准球

2、要不要求次品的轻重

3、知不知道次品的轻重

因此针对称球问题可以很轻松的变化出多种类型的题目。

问题 3 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量与其他的球不同，不知道轻重。给你一架天平，问至少要称多少次，才能找出那个次品、**并且知道次品到底是轻还是重**？

问题 3 和 问题 4 相比，唯一的不同就是没有标准球。我们按照 n mod 3 的余数分类讨论。

情况一：n mod 3 = 0。

设 n = 3k，分成规模相等的三堆 A, B, C，使得|A|=|B|=|C|=k。称<A, B>：

1. <A, B>=Middle。次品在 C 中，注意到 A, B 中的球都是标准球，所以问题转化为 n=k 时的问题 4，因此总共称$\lceil \log_3 2k \rceil + 1 = \lceil \log_3 2n \rceil$次即可。

2. <A, B>=Left。次品在 A 或 B 中，只有可能是 AH 或者 BL，问题被转化到上节的猜想 II，所以总共只要称$\lceil \log_3 2k \rceil + 1 = \lceil \log_3 2n \rceil$次即可。

3. <A, B>=Right。类似于 2，不赘述。

综上，n mod 3 = 0，称$\lceil \log_3 2n \rceil$次即可。

情况二：n=3k+2。

和问题 4 完全相同，不赘述。

情况三：n=3k+1。

这是最棘手的情形。此时有 6k+2 种可能的结果，必须均分成 2k+1, 2k+1, 2k。在问题 4 中，我们借助了标准球才实现均分的，可此处并无标准球，因此无法均分。

我们只能舍而求次，把球分成规模为 k, k, k+1 的三份，即|A|=k, |B|=k, |C| =k+1。称<A, B>，则：

1、<A, B> = Middle。次品在 C 中，这时 A, B 中的球为标准球，问题归结到问题 4，总共称$\lceil \log_3 2k+2 \rceil +1 = \lceil \log_3 2n+4 \rceil$次即可。

2、<A, B> = Left。可能是 AH 或者 BL，问题归结到猜想 II，所以总共称$\lceil \log_3 2k \rceil +1 = \lceil \log_3 2n \rceil$次即可。

3、<A, B> = Right。类似于 2，也是称$\lceil \log_3 2n \rceil$次。

综上，n mod 3= 1 时，需要称$\lceil \log_3 2n+4 \rceil$次。

将三种情况综合，统一成一个式子就是：$\lceil \log_3 2n+2 \rceil$。

因此对于问题 3，我们的结论是：

给定一架天平，有 n 个球，其中一个是次品。称$\lceil \log_3 2n+2 \rceil$次就可以找到次品，并且知道次品的轻重。

我们发现 n 个球只有 2n 种可能的结果，因此从理论上说，判定树的最优下界是$\lceil \log_3 2n \rceil$。此处的结论为什么要$\lceil \log_3 2n+2 \rceil$次呢？原因就在于缺少一个标准球，使得 n mod 3 = 1 时，第一次我们无论如何也不可能实现完美意义上的均分，只能采取了一种次优的方案，因此最优界也是不可能达到的。

有一个很流行的智力游戏，是 n=12 时的问题 3，要求用 3 次称出来。通过上

面的有关结论可知，称 3 次能称出来的最大的球数就是 12。换句话说，13 个球的时候，虽然只有 26 种可能的结果，$26<27=3^3$， 但是由于第一次我们不能实现完美的均分，所以无论如何也必须 4 次才能称出次品并知道轻重，而不是理论上的最优解：3 次。

以上的问题都要求次品的轻重，可有时候我们关心的是哪个球是次品。至于具体是轻还是重，倒是无关紧要的。

因此我们提出一个新问题：

问题 5 有 n（n≥3）个球，其中一个是次品，次品的重量与其他的球不同，**不知道轻重**。给你一架天平、**一个标准球**，问至少要称多少次，才能找出那个次品？

这个问题又复杂一点。

首先是下界不好估计。客观上说每个球都有可能是次品，且能轻能重，似乎有 2n 种不同的结果；可是我们关心的是哪个是次品，具体的轻重无关紧要，因此 n 个不同的结果足矣。

到底算 n 个还是 2n 个呢？之前的研究方法行不通了，要另辟蹊径。

设 f(n)表示 n 个球时的最少称量次数。

先假设有无穷多个标准球，第一次取 a 个球在天平左边，b 个球在天平右边（a≤b）。由于天平两边的球数必须相等，所以在左边还补进 b-a 个标准球。

如果天平：

1、 左偏。有可能是左边 a 个球中有重球、或者右边 b 个球里有轻球，根据上节猜想 II，还要称$\lceil \log_3 a+b \rceil$次，因此总共称$\lceil \log_3 a+b \rceil$+1 次。

2、 右偏。类似 1，也是称$\lceil \log_3 a+b \rceil$+1 次。

3、 平衡。次品必然在剩下的 n-a-b 个球中，要称 f(n-a-b)次。

综上，此时称量次数是：max{$\lceil \log_3 a+b \rceil$, f(n-a-b)}+1 次。

注意到最后的称量次数只和 a+b 有关，因此可以对 a, b 适量调整，使得|a-b|

≤1，于是补充的标准球顶多 1 个，完全满足题目要求。

设 a+b=p，则：

$f(n) = \min\{\max\{\lceil \log_3 p \rceil, f(n-p)\}+1\}$ （1≤p≤n）

$f(0)=0, f(1)=0, f(2)=1$

这就是此问题的一个递推式，若对时间复杂度要求不高，如此既可求解。但是当 n 较大时，时空效率都是不能令人满意的，因此我们求出部分 f(n)的值：

N	f(n)
1	0
2	1
3—5	2
6—14	3
15—41	4
42—122	5

很容易发现：$f(n)=\lceil \log_3(2n-1) \rceil$。

考虑从递推式入手来证明这个猜想。同样采用归纳法。

n=1,2 时候容易验证猜想成立。

设 n<k 时猜想成立，下证 n=k 也成立。

先证最优性。

$f(n) = \min\{\max\{\lceil \log_٣ p \rceil, f(n-p)\}+1\}$ （1≤p≤n）

假设存在这样的 p 使得 $f(n) < \lceil \log_3(2n-1) \rceil$，那么：

$\lceil \log_3 p \rceil + 1 = \lceil \log_٣ ٣p \rceil < \lceil \log_3(2n-1) \rceil$

$f(n-p)+1=\lceil \log_٣ ٢(n-p)-١ \rceil+1=\lceil \log_٣(٦n-٦p-٣) \rceil<\lceil \log_3(2n-1) \rceil$

也就是：

$3p < 2n-1$ (1)

$6n-6p-3 < 2n-1$ (2)

(1)*2 + (2)得到：

$6n-3 < 6n-3$

矛盾。 因此对于 f(n)必然有 $f(n) \geq \lceil \log_3(2n-1) \rceil$。

再证可行性。

根据 k mod 3 的余数分类。

情况一：k mod 3 = 0。设 k = 3p。

分成三堆 A, B, C，使得|A|=|B|=|C|=p，称<A, B>：

1. <A, B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p 时的问题 5，还要称 $\lceil \log_3(2p-1) \rceil$ 次。所以总共称 $\lceil \log_3(2p-1) \rceil+1=\lceil \log_3(6p-3) \rceil=\lceil \log_3(2k-3) \rceil$ 次。

2. <A, B>=Left。可能是 AH 或者 BL，问题归结到 n=2p 时的猜想 II，还要称 $\lceil \log_3 2p \rceil$ 次。所以总共要称 $\lceil \log_3 2p \rceil+1=\lceil \log_{٣} ٢k \rceil$ 次。

3. <A, B>=Left。类似 2，总共称 $\lceil \log_3 2k \rceil$ 次。

综上，k=3p 要称 $\lceil \log_{٣} ٢k \rceil=\lceil \log_3 2k-1 \rceil$ 次。

情况二：k mod 3 = 1。设 k=3p+1。

分成三堆 A{**S**, 1, 2, …, p}, B{p+1,p+3,…,2p+1}, C{2p+2,2p+4,…,3p+1}，此时 |A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p。特别注意在 A 中加入了一个标准球。称<A, B>：

1. <A, B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p 时的问题 5，还要称 $\lceil \log_3(2p-1) \rceil$ 次。所以总共称 $\lceil \log_3(2p-1) \rceil+1=\lceil \log_3(6p-3) \rceil=\lceil \log_3(2k-3) \rceil$ 次。

2. <A, B>=Left。可能是 AH 或者 BL，问题归结到 n=2p+1 时的猜想 II（因为标准球不要考虑，所以是 2p+1 而不是 2p+2），还要称 $\lceil \log_3 2p+1 \rceil$ 次。所以总共要称 $\lceil \log_3 2p+1 \rceil+1=\lceil \log_3 2k+1 \rceil$ 次。

3. <A, B>=Left。类似 2，总共称 $\lceil \log_3 2k+1 \rceil$ 次。

综上，k=3p+1 要称 $\lceil \log_3 2k+1 \rceil=\lceil \log_{٣} ٢k-١ \rceil$ 次。

情况三：k mod 3 = 2。设 k=3p+2。

分成三堆 A{**S**, 1, 2, …, p}, B{p+1,p+3,…,2p+1}, C{2p+2,2p+4,…,3p+2}，此时 |A|=p+1, |B|=p+1, |C|=p+1。特别注意在 A 中加入了一个标准球。称<A, B>：

1. <A, B>=Middle。次品在 C 中，问题归结到 n=p+1 时的问题 5，根据归纳假设还要称$\lceil \log_3[2(p+1)-1] \rceil$次。所以总共称$\lceil \log_3(2p+1) \rceil$+1=$\lceil \log_3(6p+3) \rceil$=$\lceil \log_3(2k-1) \rceil$次。

2. <A, B>=Left。可能是 AH 或者 BL，问题归结到 n=2p+1 时的猜想 II（因为标准球不要考虑，所以是 2p+1 而不是 2p+2），还要称$\lceil \log_3 2p+1 \rceil$次。所以总共要称$\lceil \log_3 2p+1 \rceil$+1=$\lceil \log_3 2k-1 \rceil$次。

3. <A, B>=Left。类似 2，总共称$\lceil \log_3 2k-1 \rceil$次。

综上，k=3p+2 要称$\lceil \log_3 2k-1 \rceil$次。

综合三种情况，f(n) ≤$\lceil \log_3 2k-1 \rceil$。

最优性和可行性均证，故而 f(n)= $\lceil \log_3 2k-1 \rceil$。

我们的结论是：

给定一架天平和一个标准球，从 n 个球中找出不知道轻重的次品至少要称$\lceil \log_3 2n-1 \rceil$次。

我们还可以把问题 5 中的标准球去掉（也就是变成本文一开始提出的问题 2），有兴趣的读者可以自己推导一下看看。

研究方法总结

本文的有关结论如下：（n≥3）

结论 1 给定一架天平，有 n 个球，其中一个是次品，次品的重量比其他的要重一些。称$\lceil \log_3 n \rceil$次就能找出那个次品。

结论 2 给定一架天平，一个标准球，有 n 个球，其中一个是次品，轻重不详。称$\lceil \log_3 2n \rceil$次就可以找到次品，并且知道轻重。

结论 3 给定一架天平，有 n 个球，其中一个是次品，轻重不详。称 $\lceil \log_3 2n+2 \rceil$ 次就可以找到次品，并且知道次品的轻重。

结论 4 给定一架天平和一个标准球，有 n 个球，其中一个是次品，轻重不详，称 $\lceil \log_3 2n-1 \rceil$ 次就可以找出次品。

当然，还可以变化出一些其他的形式，但是万变不离其宗，只要牢牢抓住以一个原则：“均匀”，任何此类问题都能迎刃而解。

本文全面而严格的提出了“天平称物”这一类问题的统一解法；在给出解法和有关结论的同时，特别重视对思路的产生过程作重点地阐述。

在研究此类问题的过程中我们得到了不少有益的经验：

1、从简单入手。这是本文的构篇基础。从简单的问题 1 步步深入，一直到较复杂的问题 5；从有标准球开始研究，进而推广到无标准球的情况；从要求次品的轻重情况，到只要求次品……这些无不包含着“从简单入手”这一重要研究手段。

2、总结经验，合理外推。通过将研究问题 1 而获得的部分经验进行合理的推广，我们在解决其后的难题时都能够很快的产生初步思路、迅速踏上正轨。

3、求同存异。世界上没有两片相同的叶子。哪怕是一个条件发生了细微的改动，题目的结构也许就发生了本质的变化。因此在推广的同时必须谨慎的考虑问题的相异性，做出积极的调整。

4、大胆猜想，严格证明。思路不甚明朗的时候，猜想就是一个很好的突破口。本文最重要的几个结论以及最后的问题 5，都是通过猜想取得进一步进展的。

附 录

1、本文作者针对问题 3，编写了一个简单的模拟程序。Game.pas

2、判定树还可以用来证明：任何一个借助“比较”进行排序的算法，在最坏情况下所需要的比较次数至少为 $\lceil \log_2 n! \rceil$；根据斯特林公式，有 $\lceil \log_2 n! \rceil$=O(nlogn)。因此 O(nlogn)是借助比较法排序的理论时间复杂度下界（快速排序、堆排序均是这个数量级的）。本文借助了这一思想，用来证明某些天平称物问题的最优性。具体的判定树内容可以在参考书籍

的 P292 找到。

参 考 书 籍

数据结构（第二版），清华大学出版社，严蔚敏 吴伟民 编著