第四讲、区间图及其补图

本讲中我们将讨论在一个区间图中寻找最大独立集的问题。我们还将研究区间图的补图与可无环传递定向图的关系。最后我们将介绍弦图的概念。

1．介绍

之前各讲中我们讨论了区间图，并知道一些典型的难题在区间图上可以高效地解决。有一些问题，诸如图的染色、最大团问题、哈氏回路问题以及判断两个图是否同构的问题都是 NP 难题。然而在区间图上，我们能出色地将这些问题在多项式（而且经常是线性）时间内解决。这一讲中将讨论的最大独立集问题就是其中之一。我们将使用贪心算法求出一个图的最大独立集，前提是该图具有完美消除序列并且这个序列已知。有关该问题的详细内容参见 Lorna Stewart 的主页 http://web.cs.ualberta.ca/stewart/GRAPH/index.html。

我们将了解的另一类图是区间图的补图。我们将学习一种对这些图的边的自然确定法，并发现区间图的补图实际上是相似图。

最后，我们将介绍弦图并证明具有完美消除序列的图都是弦图。

2．定义

一个图 G 的独立集是它的一个边集为空的诱导子图。一个具有 K 各顶点的独立集称为 K 独立集。一个极大独立集是一个独立集，但加入任何其他节点都将破坏独立集的性质。一个最大独立集是 G 中存在的顶点数最多的独立集，记为 $\alpha(G)$。

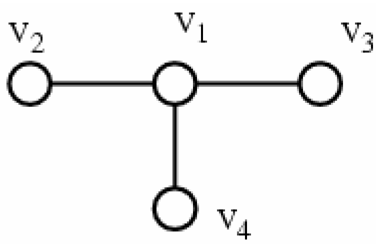
3．寻找独立集的一个可行算法

以下算法用贪心法寻找图 G 的一个独立集。它不一定是极大（或最大）的。算法的输入是图 G 以及一个顶点序列{V1..Vn}

初始时记所有顶点未访问（untouched）。

```
for i = 1, ..., n{
    if v_i is "untouched"{
        add v_i to the independent set
        mark all of Succ(v_i) as "touched"
    }
}
```

假设贪心算法的输入是一个完美消除序列，它能保证得到一个最大独立集吗？考虑图 1 所示的图 G。



显然这个图具有完美消除序列{V1,V2,V3,V4}。然而当贪心算法作用与该图时，它将找到独立集{V1}，这显然不是最大独立集。然而如果将完美消除序列的逆序作为输入，却可以得到最大独立集。

定理 1：如果{V1..Vn}是一个完美消除序列，那么以上贪心算法对与顶点序列{Vn..V1}可以得到最大独立集。

证明：很容易得知完美消除序列的逆序具有如下性质：对于每个 i $\in$ {1..n}，{Vi} $\cup$ Succ（Vi）是一个团。对与某个未方位的点 Vi，它与它的后继中至多有一个在独立集中。如果这些点都不在独立集中，显然加入点 Vi 后仍是一个独立集，而且必原来更大；如果这些点中有某个 Vj 在独立集中，用 Vi 代替 Vj，显然得到的仍是一个独立集，而且与原来一样大。综上所述，对任意一个不包含 Vi 的独立集，总存在一个包含 Vi 的独立集，且不比原来小，这对最大独立集同样成立，即 Vi 的贪心选择是正确的。定理 1 得证。█

另外，我们给出一个利用拟阵进行的证明作为参考：

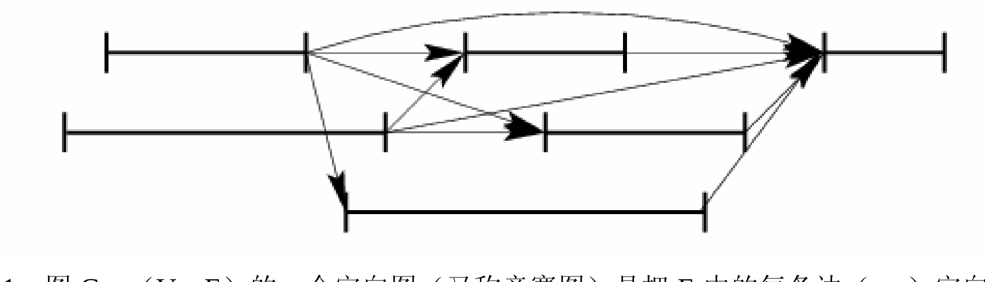
证明：建立拟阵 M＝（S，I），S 为图 G 的顶点集，按照完美消除序列逆序编号；I 为 G 的独立集集合。显然 I 具有遗传性质。又设 I 中的两个元素 A，B，|A|>|B|，B 中的每个顶点最多有一个后继属于 A，否则由于 B 的后继集是一个团得出矛盾。因为|A|>|B|，A 中必有至少一个元素 V 不是 B 中任何元素的后继，即将 V 加入 B 中，B 仍是独立集。因此 I 满足交换性质。综上所述，M 是一个拟阵。令每个 S 中的元素的权为 1，则最大独立集问题转化为求拟阵的最大权独立子集问题。根据拟阵理论，贪心算法成立。定理 1 得证。█

通过运用以上一类算法，很多 NP 难题在区间图上能够用线性或多项式时间解决，这些问题包括图的染色、最大团问题、最大独立集问题、哈氏回路问题以及判断两个图是否同构。然而另一些问题仍然是 NP 难题，例如货郎问题：给定一些城市即之间的距离，要求找出一条访问每个城市的最短路径。如果将城市看作顶点，距离作为边权，货郎问题就是在图中寻找包含所有顶点的最短路。由于可以在任意两个城市间行走，该图是一个完全图 Kn。显然 Kn（不包括边权）是一个区间图。

4．区间图的补图

许多情况下，一个图与它的补图属于同一类图。那么区间图也是这样么？

构造一个区间图，完美在相交的区间之间连边。因此在它的补图中，每个顶点仍然代表一个区间，但两个顶点之间有边，当且仅当对应的区间不相交（见图 2）。另外，边由左到右进行定向。给定一个区间图 G＝（V，E），它的补图 $\overline{G}$ ＝（V，DE），其中（u,v）$\in$ DE，u,v $\in$ V 是一条 u 到 v 的有向边，区间 Iu 在 Iv 的左边。



定义 1：图 G＝（V，E）的一个定向图（又称竞赛图）是把 E 中的每条边（u,v）定向后得到的有向图。G 的一个无环定向图是它的一个不含有向环的定向图。一个定向方法如果

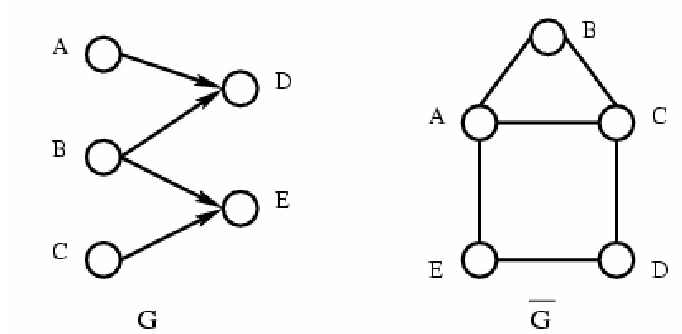
满足对所有 u,v,w∈V，且 u 到 v 有边，v 到 w 有边，则 u 到 w 有边，则称为具有传递性的定向。一个边定向无环且具有传递性的定向图称为无环传递定向图。

定义 2：具有传递定向图无环传递定向图的无向图称为相似图。补图是相似图的图称为伴相似图。

显然一个区间图的补图 $\overline{G}$ 是边无环可传递的。因此区间图的补图（不带方向）是可无环传递定向的，或者说区间图（不带方向）是伴可无环传递定向的。但区间图不一定是可无环传递定向的（包含两条边的链就是一个反例），所以区间图的补图不一定是区间图。

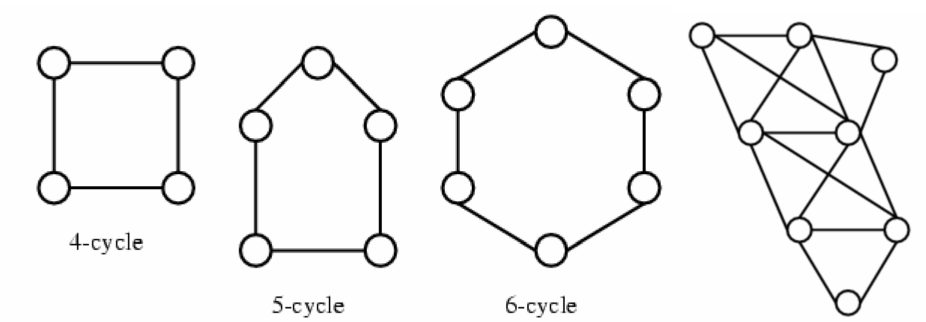
反之，所有伴相似图都是区间图吗？图 3 表示了一个相似图 G，它的补图是伴相似图，但却不是区间图（因为它包含四阶简单圈 C4）。

另外，二分图都是可无环传递定向的，只要另所有的边由 X 集指向 Y 集即可。



5．弦图

定义 3：如果一个图的任何诱导子图都不是 K 阶环（K>=4）（见图 4），那么该图称为弦图（见图 5）。



与区间图类似，我们感兴趣的是弦图具有哪些性质，它属于或包括哪些类图。

定理 2：如果一个图 G 具有完美消除序列，则 G 是弦图。

证明：假设 G 不是弦图，令 C 是一个 K 阶环（K>=4）,C 中不相邻的顶点见没有边。又令 V 是该环内最后一个在完美消除序列中出现的顶点。则 V 至少有两个相邻的顶点（即环中的相邻点），这两个顶点必定构成一个团（它们都是 V 的前驱），即它们之间有边，这与 C 的性质矛盾（见图 6）。定理 2 得证。█