最小生成树问题的拓展

安徽省芜湖市第一中学

汪汀

回顾

- 设 $G=(V, E, \omega)$ 是连通的无向图，图 G 中权值和最小的生成树称为最小生成树。
- Prim 算法　　　　$O(V\log_2 V+E)$
- Kruskal 算法　　$O(E\log_2 V)$

拓展问题

- 本文主要讨论两类拓展问题
- **最小度限制生成树**
- **次小生成树**

例一　通讯线路

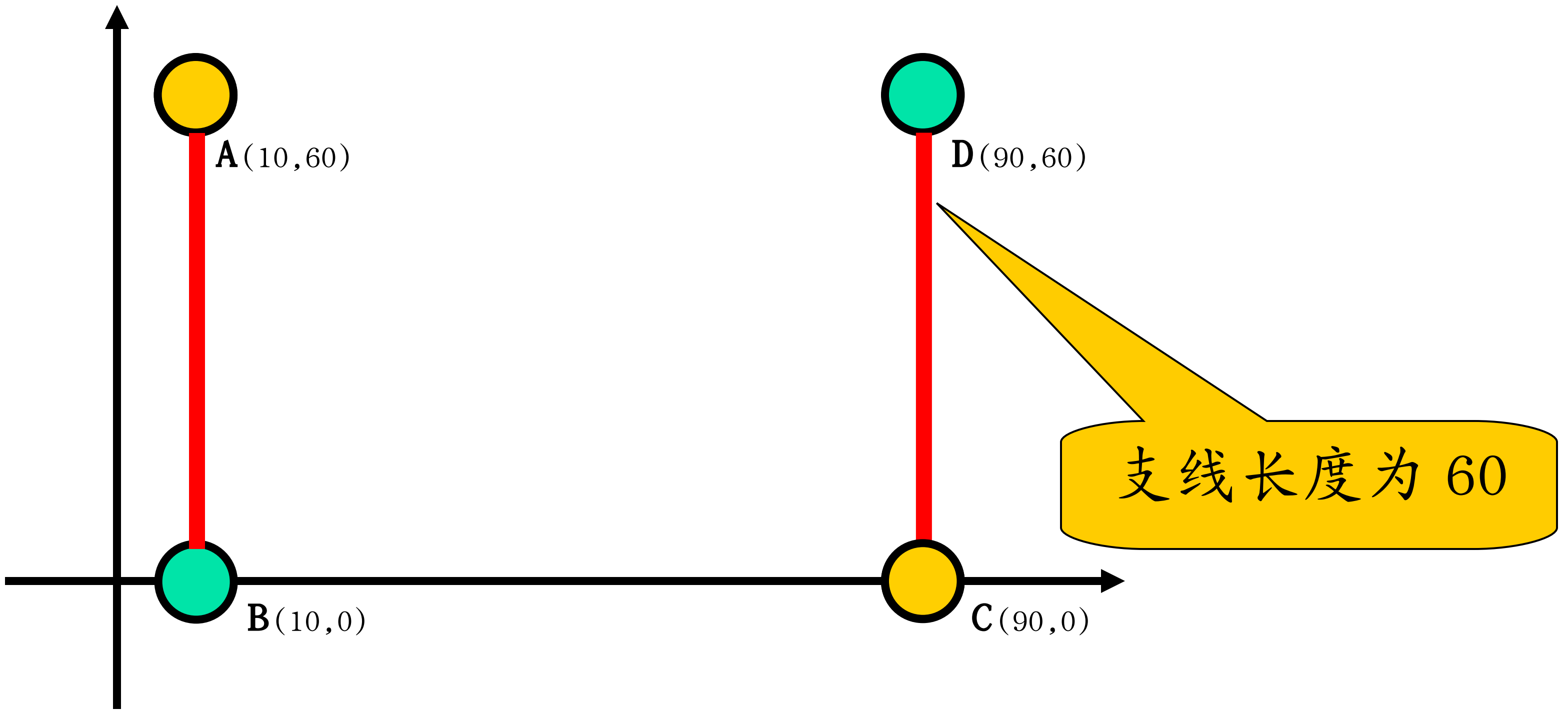
- 某地区共有 n 座村庄，每座村庄的坐标用一对整数（x, y）表示，现在要在村庄之间建立通讯网络。通讯工具有两种，分别是需要铺设的普通线路和卫星设备。卫星设备数量有限，只能给 k 个村庄配备卫星设备。拥有卫星设备的村庄互相间直接通讯；铺设了线路的村庄之间也可以通讯。卫星分配是不受限制的。

例一 通讯线路

- **问怎样合理的分配卫星和铺设线路，使得在保证每两座村庄之间都可以直接或间接地通讯的前提下，铺设线路的总长度最短。**

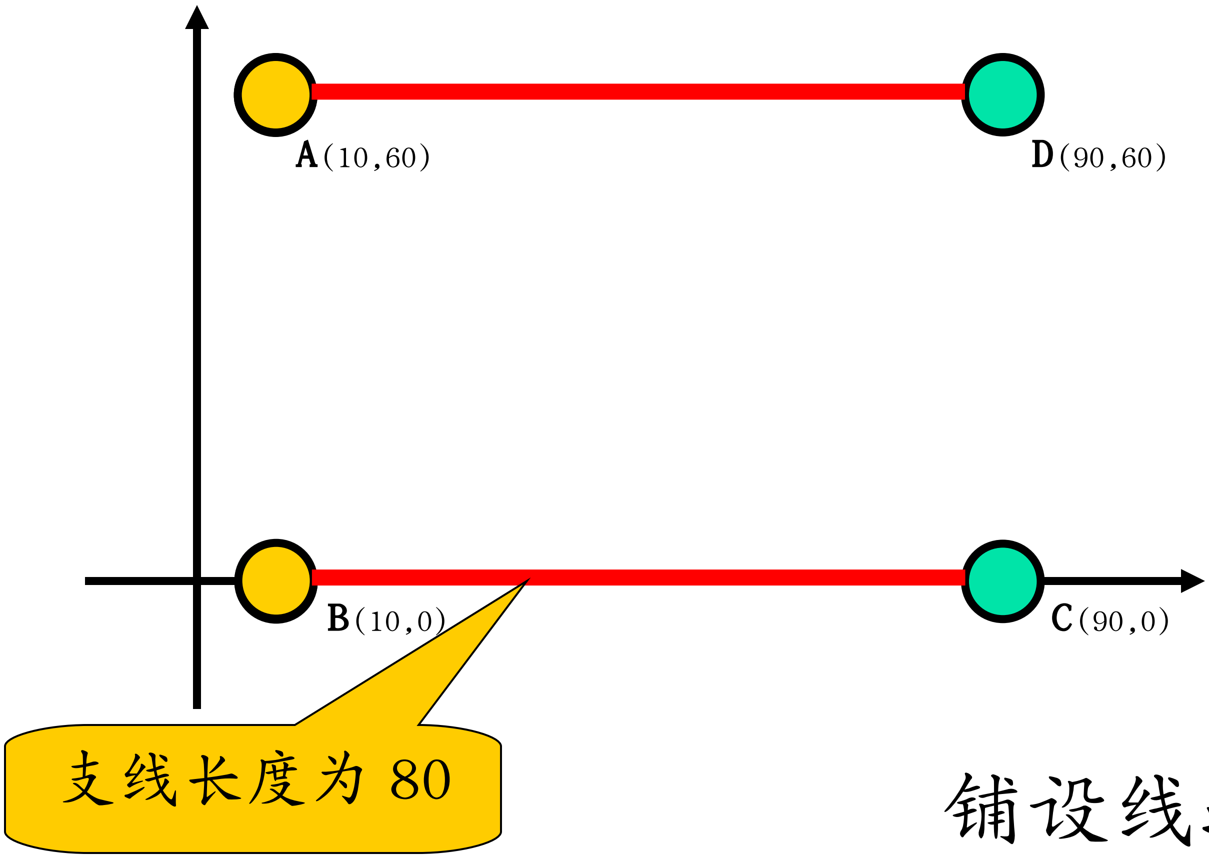
- 范围： $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 5000$

方案一



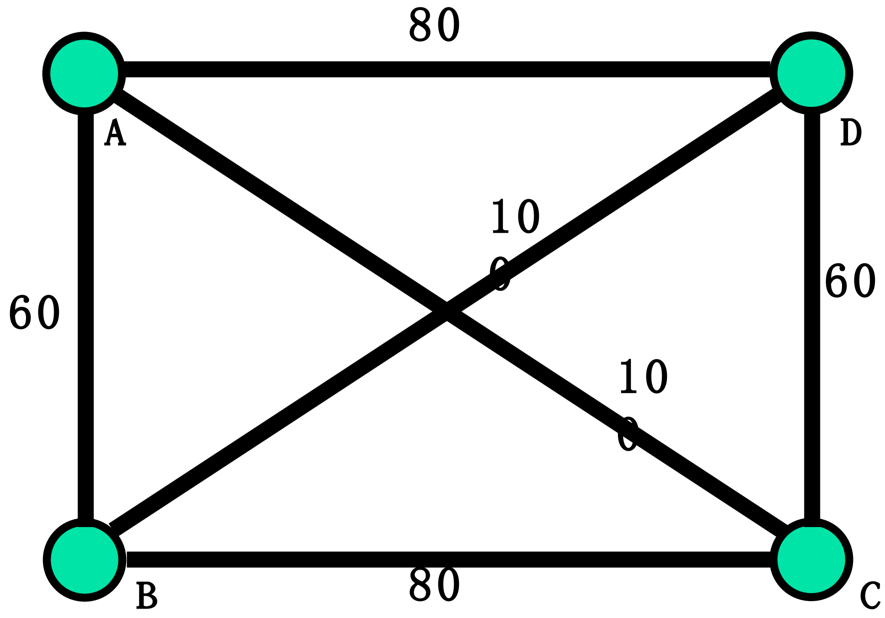
铺设线路总长 120

方案二

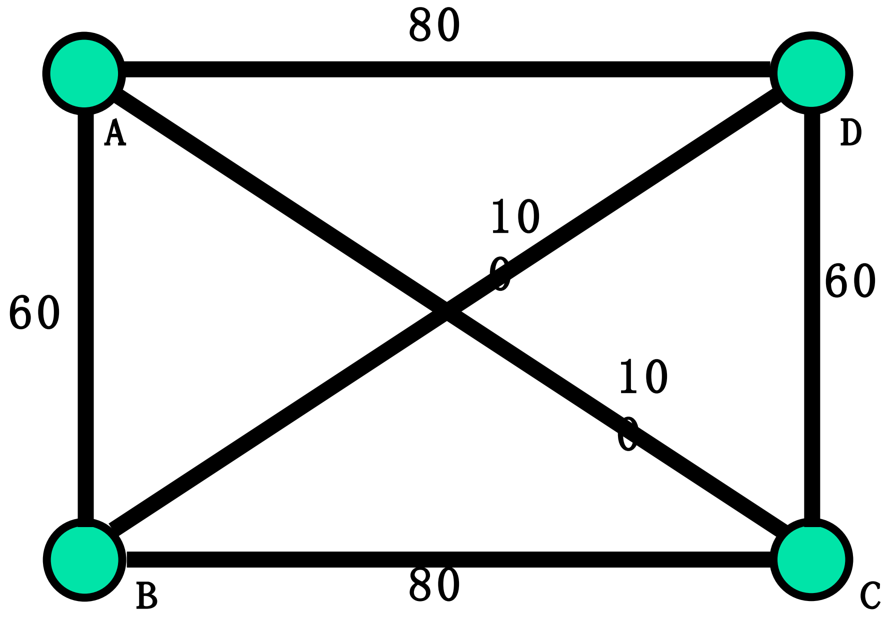


铺设线路总长 160

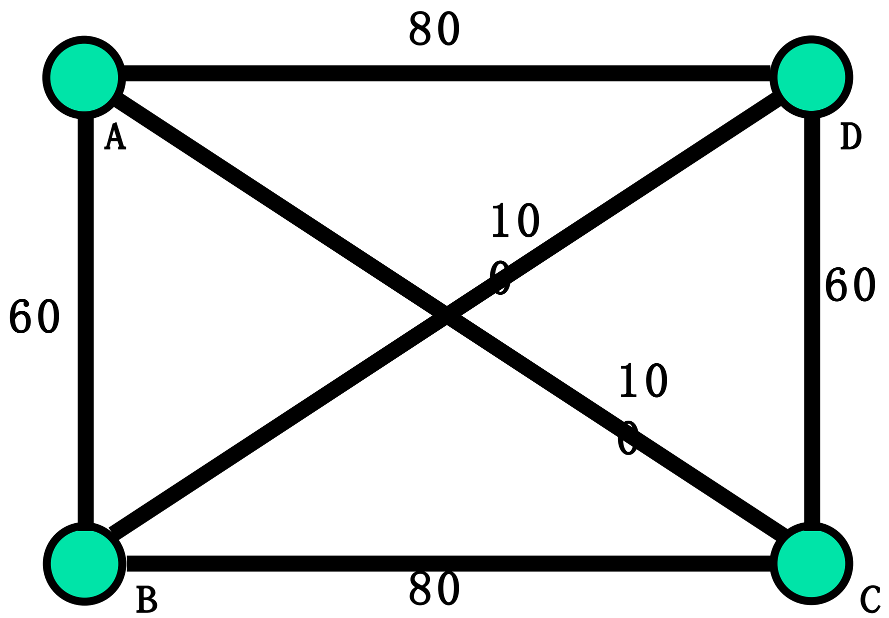
图的模型



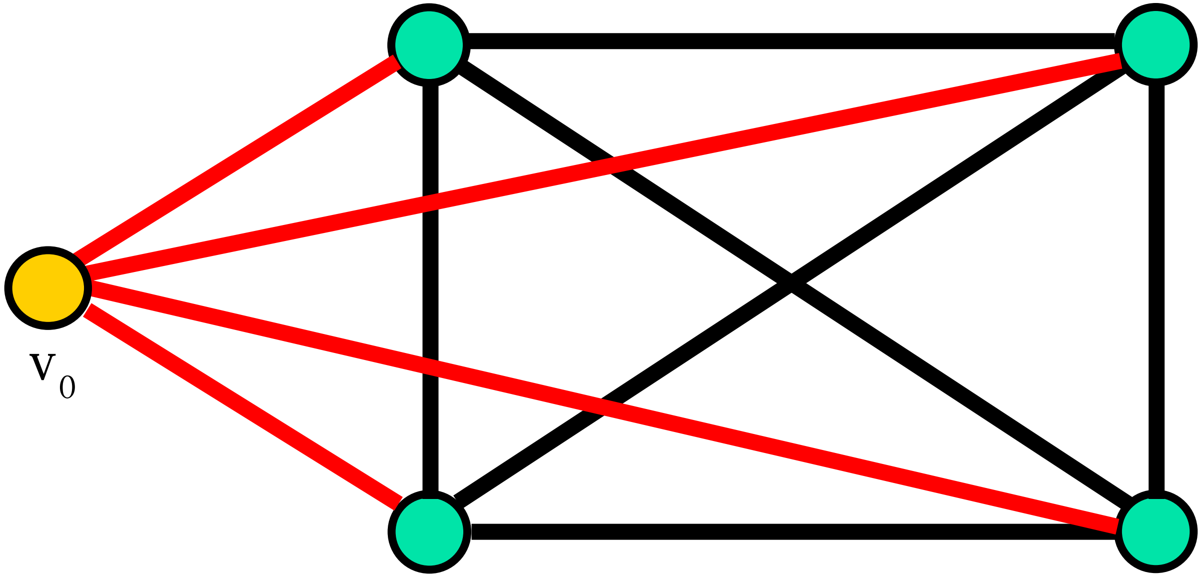
如果没有卫星设备，原题等价于求该图的最小生成树。



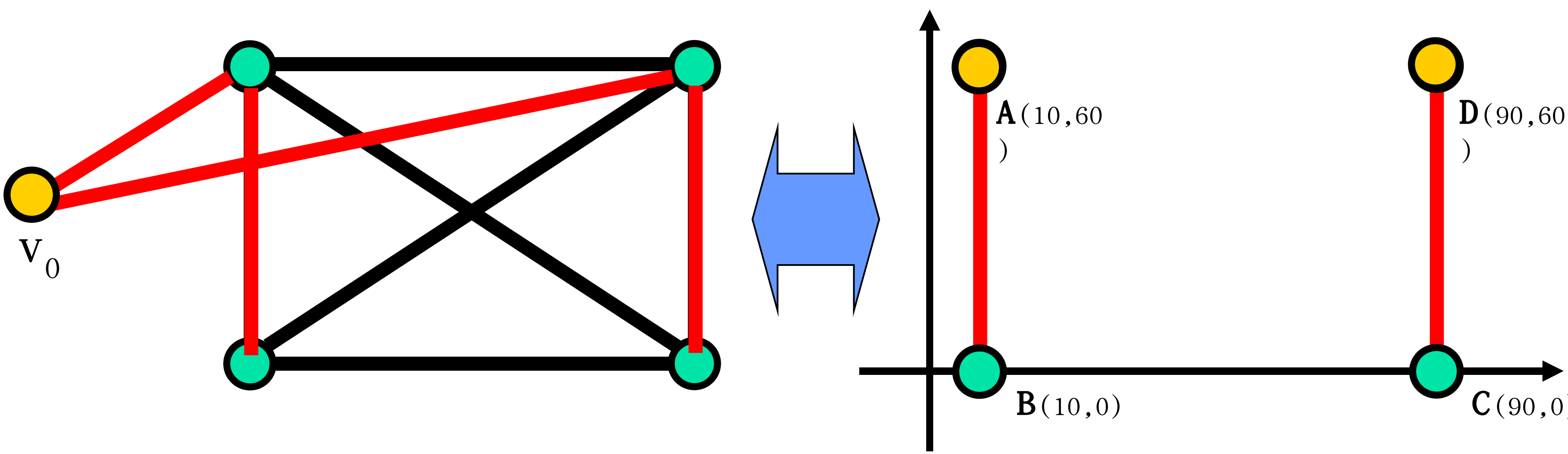
卫星设备



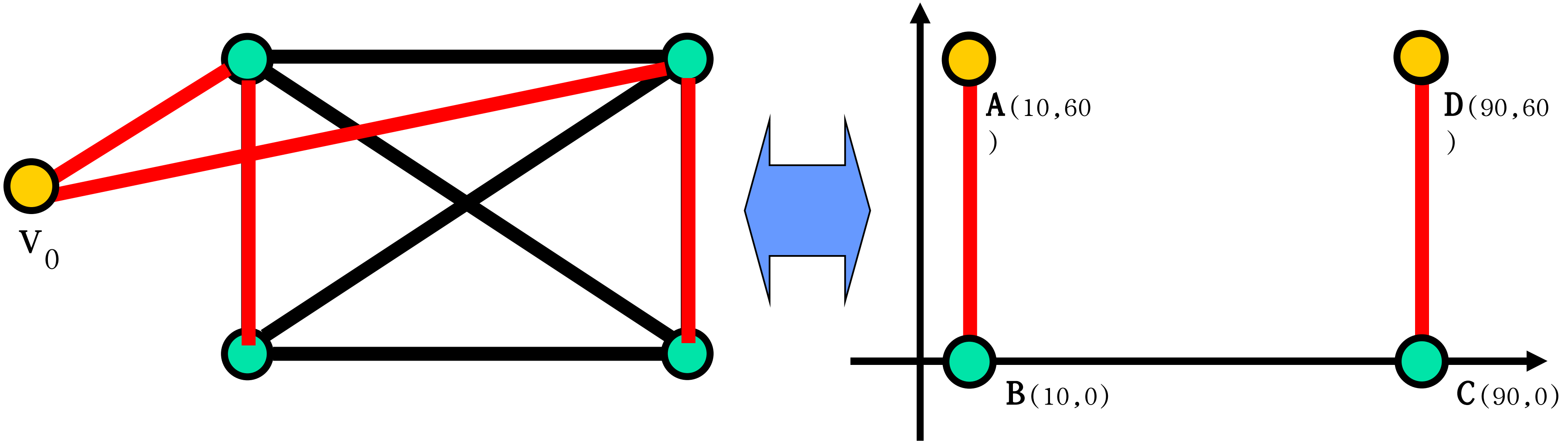
改造图的模型



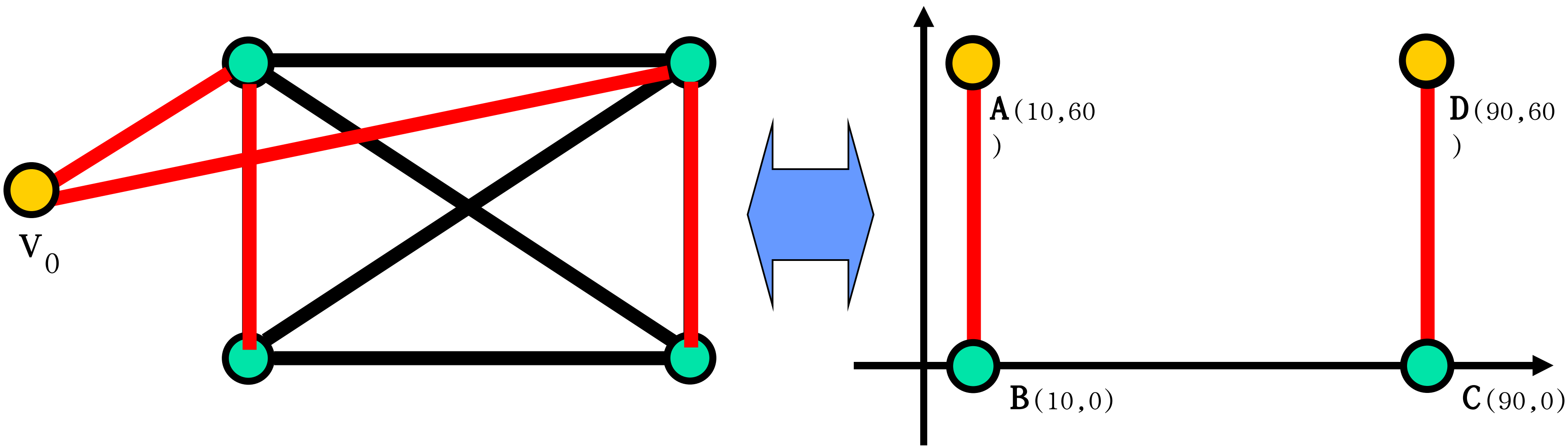
图中的一个生成树唯一对应一种可行方案
一种可行方案唯一对应图中的一个生成树



可行方案与生成树之间是一一对应的



铺设线路的长度就是其对应生成树的权值和，生成树中与 v_0 关联的点为分配有卫星设备的村庄



- 原问题转化为：

  当 $D_T(v_0)=k$ 时的权值和最小的生成树

这就是最小度限制生成树的模型

最小度限制生成树

- 设 $G=(V, E, \omega)$ 是连通的无向图， $v_0 \in V$ 是特别指定的一个顶点，k 为给定的一个正整数。如果 T 是 G 的一个生成树且 $d_T(v_0)=k$ ，则称 T 为 G 的 k 度限制生成树。G 中权值和最小的 k 度限制生成树称为 G 的最小 k 度限制生成树。

明确几个概念

- T 为图 G 的一个生成树， T+a−b 记作 (+a, −b)，如果 T+a−b 仍然是一个生成树，则称 (+a, −b) 是 T 的一个可行交换。
- T 为图 G 的一个生成树，由 T 进行一次可行交换得到的新的生成树所组成的集合，称为 T 的邻集，记为 N(T)。

定理

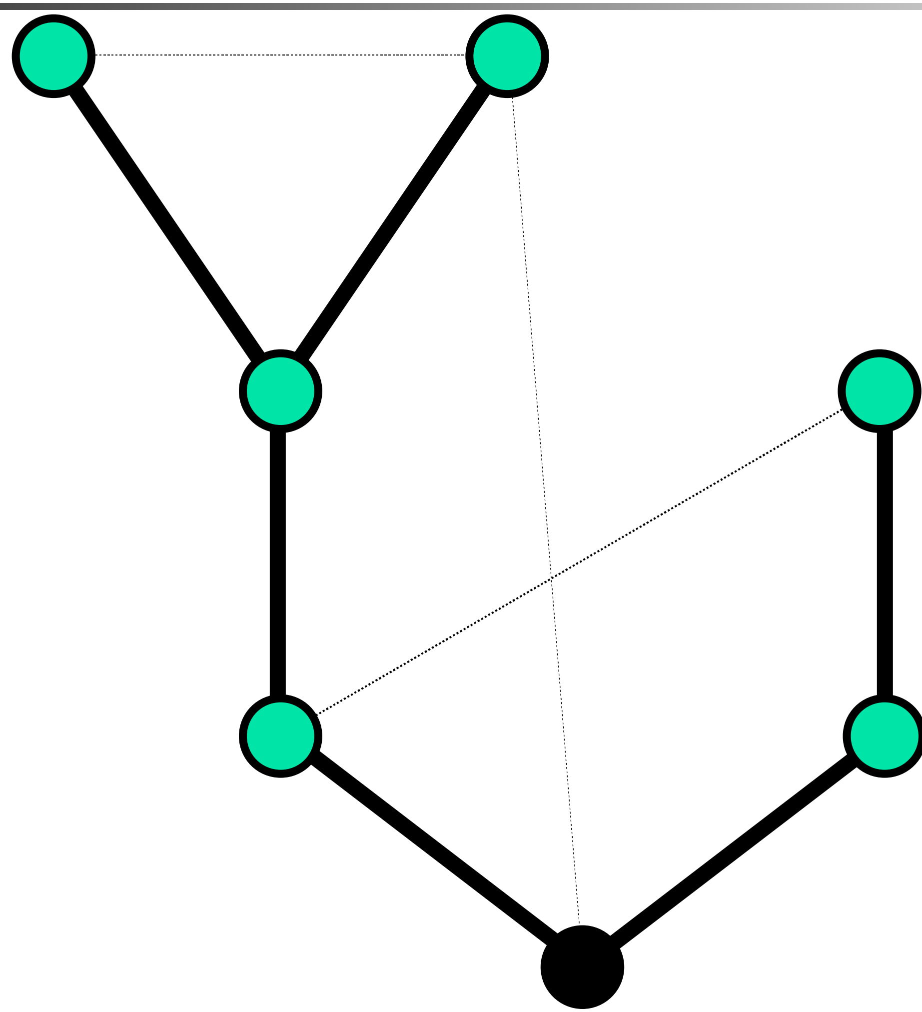
- 定理：设T是图G的最小k度限制树，E_0是G中与v_0有关联的边的集合，$E_1=E_0\backslash E(T)$，$E_2=E(T)\backslash E_0$，$A=\{(+a,-b)\mid a\in E_1, b\in E_2\}$，设$\omega(a')-\omega(b')=\min\{\omega(a)-\omega(b)\mid(+a,-b)\in A\}$，则$T+a'-b'$是G的一个最小k+1度限制生成树。
- 即最小p+1度限制生成树属于最小p度限制生成树的邻集。

- 假设我们已经得到了最小 p 度限制生成树，如何通过它来求最小 p+1 度限制生成树呢?

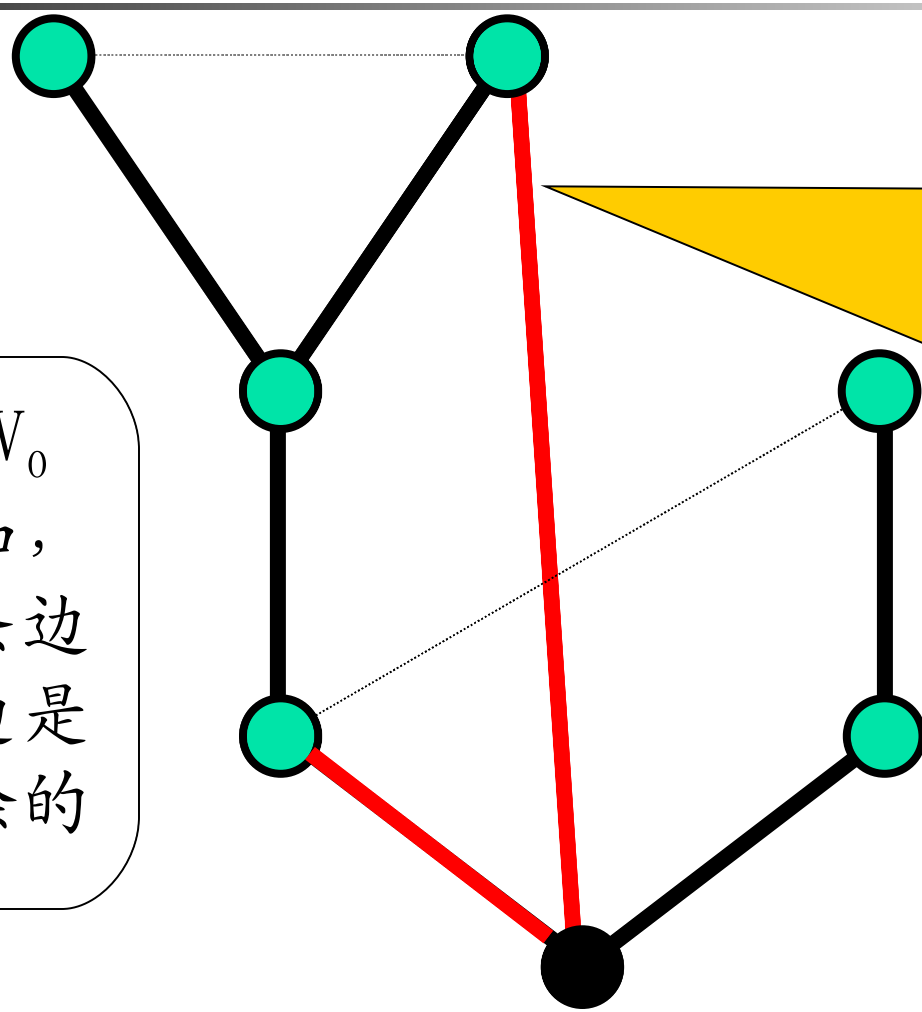
- 由定理可知最小 p+1 度限制生成树属于最小 p 度生成树的邻集，因此它可以通过枚举最小 p 度生成树上的一次可行交换求得。

- 为了使 v_0 的度增加，枚举的可行交换中必须有一条边与 v_0 关联。

如图，假设我们已经得到了 v_0 点度为 2 时的最小生成树，现在要求 v_0 度为 3 时的最小生成树。



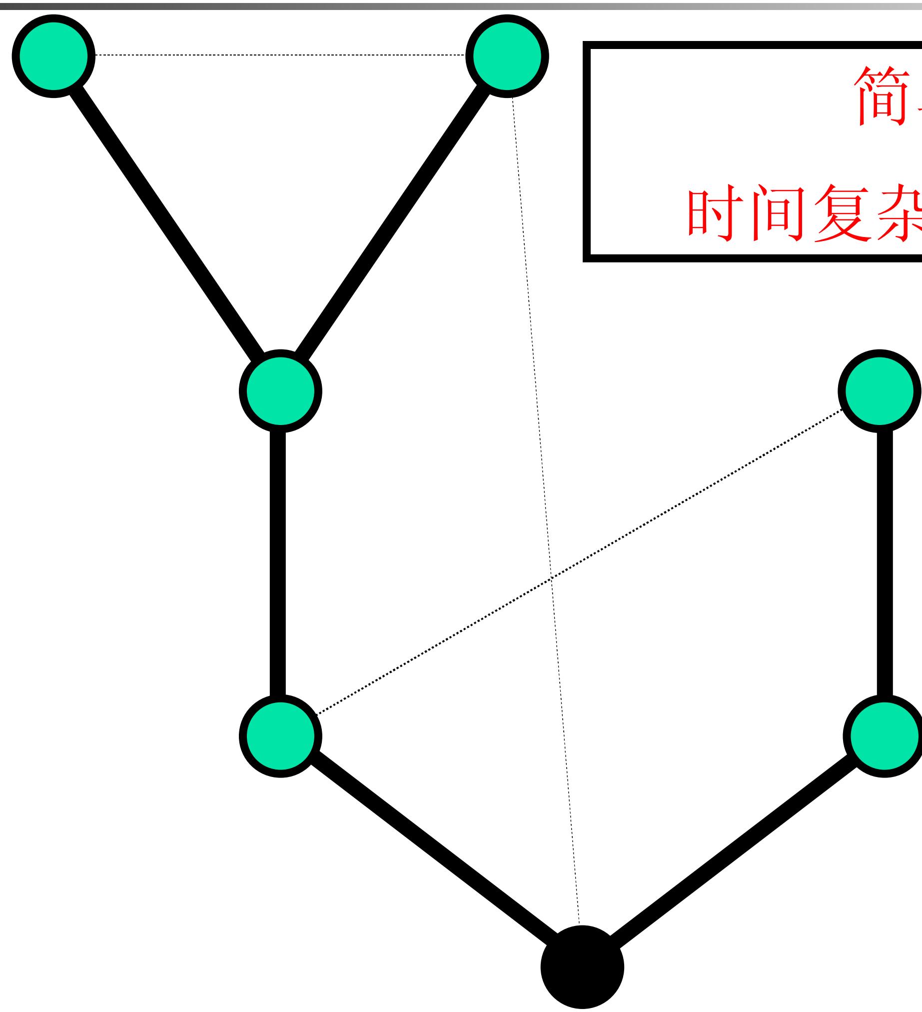
我们枚举于V_0关联且不在树上边，分别添加到树上，例如：



为了使V_0的度增加，图中两条边红色的边是不能删除的

这样就形成了一个环。只有删除环上的边，才能保证得到的仍然是生成树

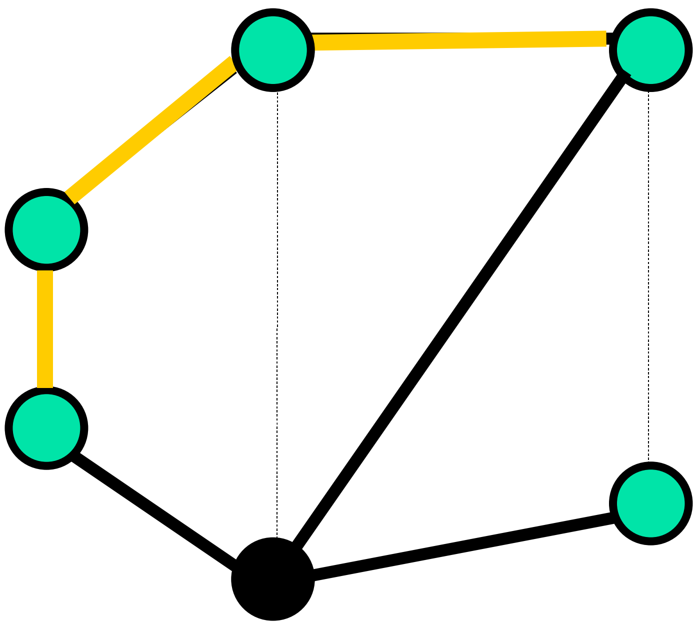
删去边的权值越大，所得到的生成树的权值和就越小，因此，需要找到环上可删除的权值最大的边并将其删除。



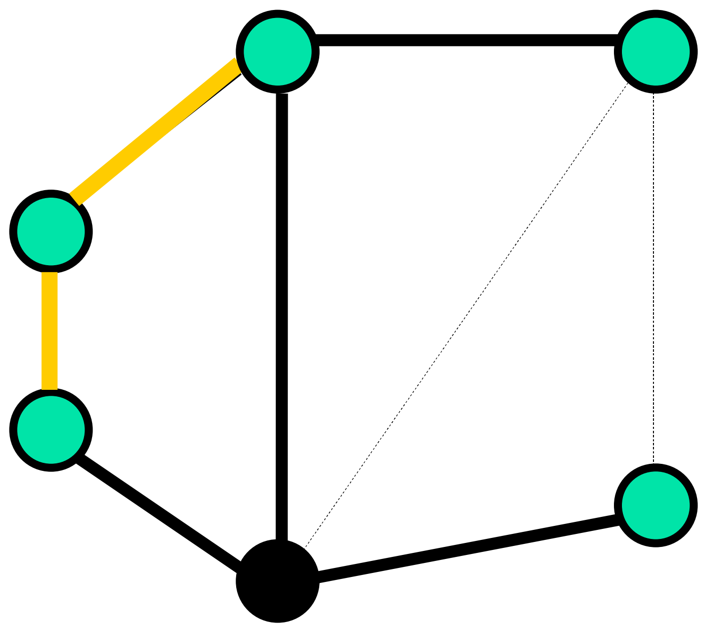
简单的枚举

时间复杂度非常高！！！

造成时间复杂度高的主要原因是有大量的重复计算

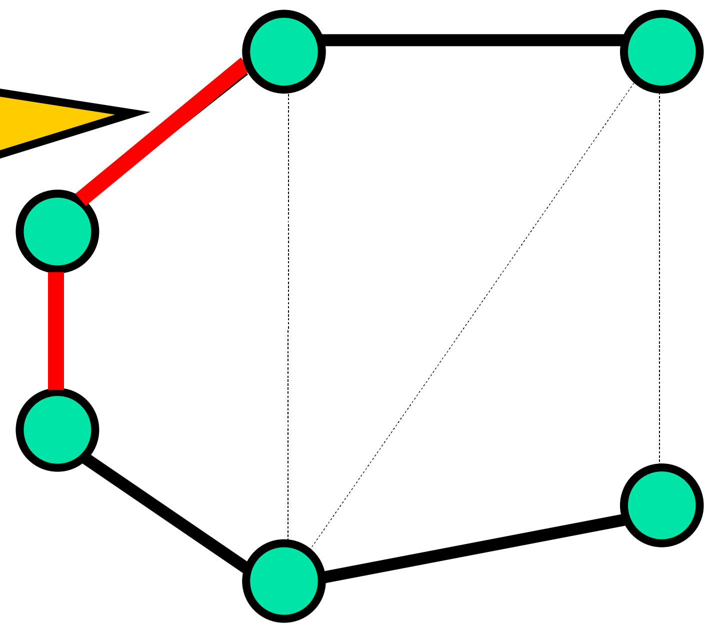


造成时间复杂度高的主要原因是有大量的重复计算



造成时间复杂度高的主要原因是有大量的重复计算

红色的边被处理了两次



如何避免重复计算

动态规划！！！

动态规划

- 设最小 p 度限制生成树为 T，T 是无根树，为了简便，我们把 v_0 作为该树的根。
- 定义 Father(v) 为 T 中 v 的父结点，Father(v_0) 无意义。
- 设 Best(v) 为路径 v_0->v 上与 v_0 无关联且权值最大的边。

动态规划

- Best(v) 的状态转移方程为

  Best(v)=max(Best(Father(v)), ω(Father(v),v))

- 边界条件为

  $Best[v_0]=-\infty$， $Best[v']=-\infty \mid (v_0, v') \in E(T)$ 。

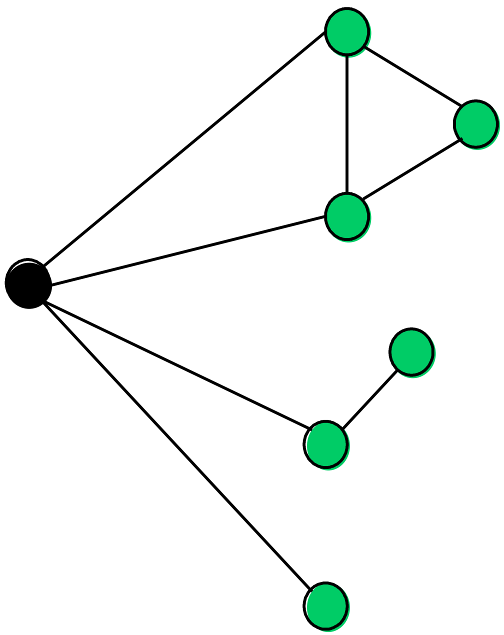
动态规划

- 状态总共 |V| 个，而状态转移的时间复杂度为 O(1)，因而总的时间复杂度是 O(V)，即通过最小 p 度限制生成树求最小 p+1 度限制生成树的时间复杂度是 O(V) 。

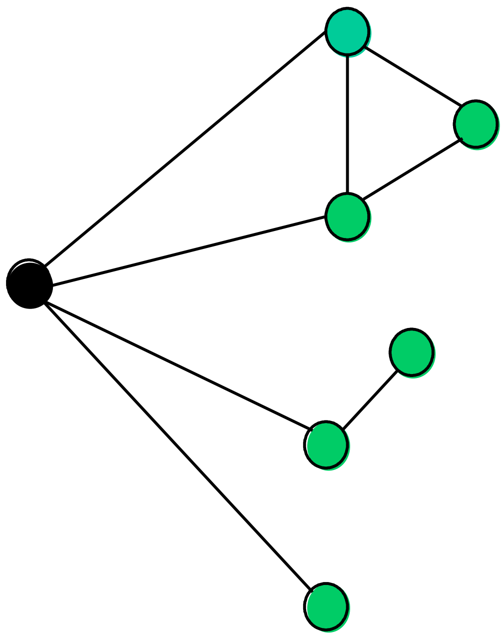
边界情况

- $k>D_G(v_0)$，问题无解
- 总存在k度限制生成树，$k\in[1,D_G(v$

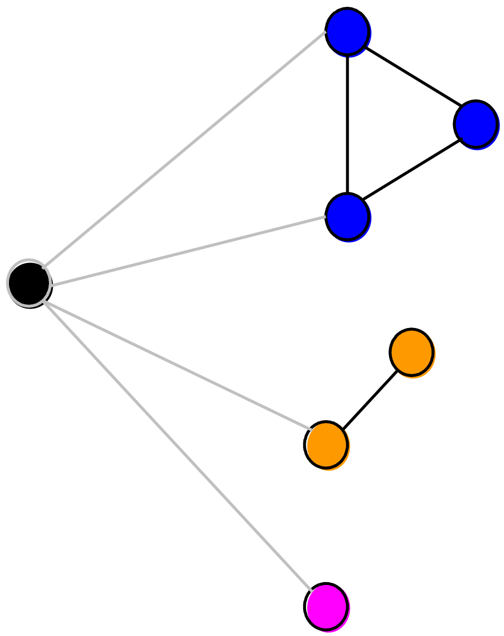
观察下图



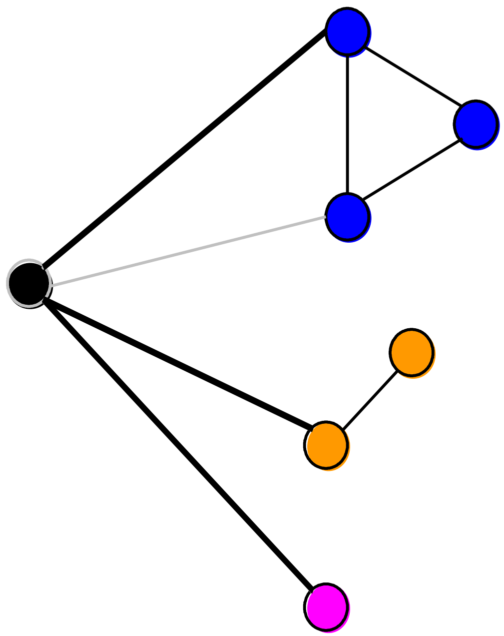
k≤2，不存在 k 度限制生成树



将 v_0 从图中删去，图中将会出现 3 个连通分量

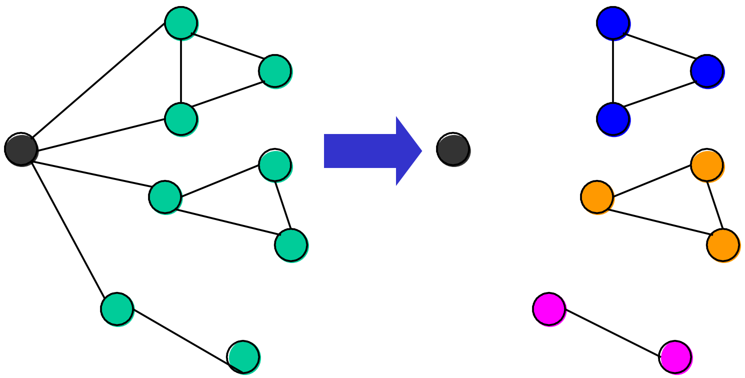


而这 3 个连通分量必须通过 v_0 来连接，k<3 无解

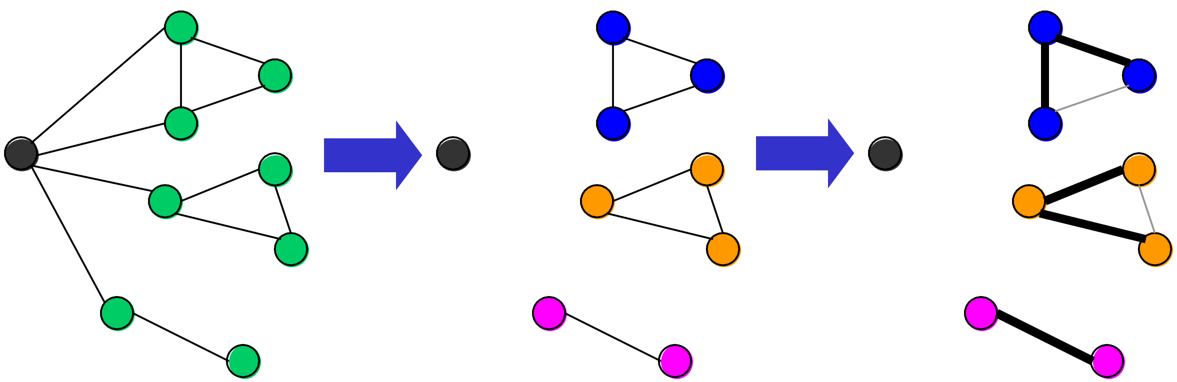


如何求最小 m 度限制生成树

删去 v_0，图中出现 m 个连通分量，k=m 是问题有解的最小值。

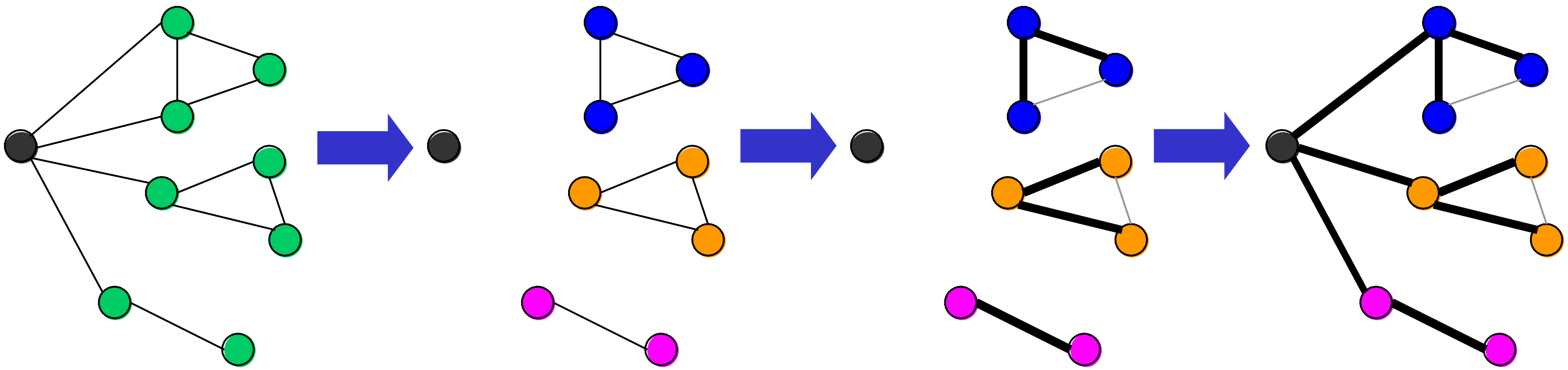


我们先分别对 m 个连通分量求最小生成树。



最小 m 度限制生成树

每个连通分量中找一条与 v_0 关联的权值最小的边与 v_0 连接。



流程

确定问题有解时 k 的最小值 m → $O(V\log_2 V+E)$ → 最小 m 度限制生成树 → $O(V)$ → 最小 m+1 度限制生成树

→ $O(V)$ → 最小 m+2 度限制生成树 → $O(V)$ → …… → $O(V)$ → 最小 k 度限制生成树

$O(V\log_2 V+E)$ 的操作一次

$O(V)$ 的操作 k 次

总复杂度为

$O(V\log_2 V+E+kV)$

例题

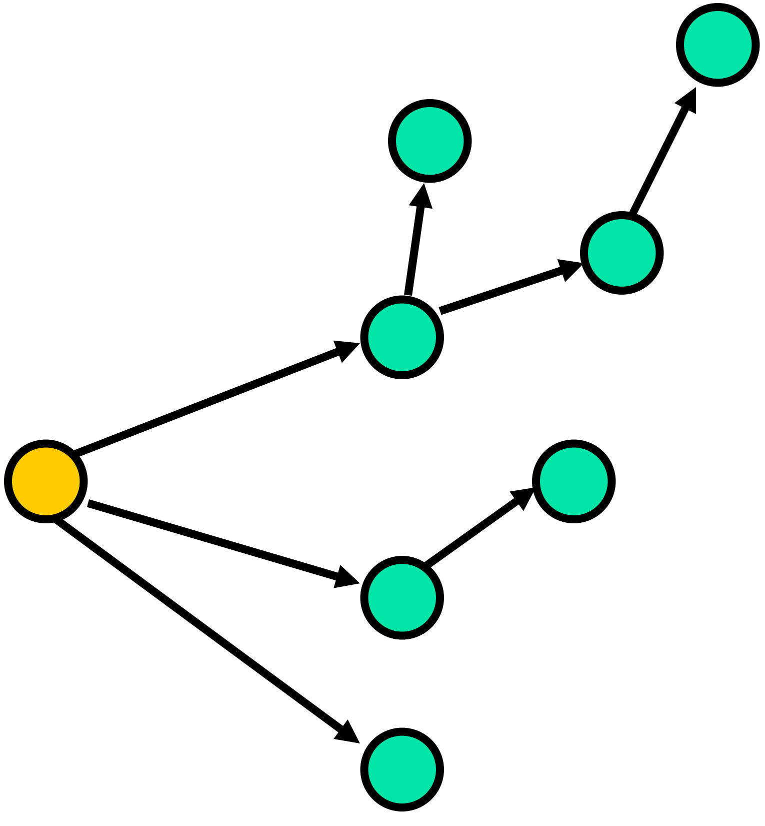
- 时间复杂度 $O(N^2)$
- 空间复杂度 $O(N)$

应用范围

- 问题与最小生成树模型联系紧密
- 某个对象有特殊限制
- 实际生活：铺设电话线，运输货物等

例二 秘密的牛奶运输

Farmer John 要把他的牛奶运输到各个销售点。运输过程中，可以先把牛奶运输到一些销售点，再由这些销售点分别运输到其他销售点，如此下去。



例二 秘密的牛奶运输

运输的总距离越小，运输的成本也就越低。低成本的运输是Farmer John所希望的。不过，他并不想让他的竞争对手知道他具体的运输方案，所以他希望采用费用第二小的运输方案而不是最小的。现在请你帮忙找到该运输方案。

- 最小生成树可以求运输费用最小的方案。
- 原问题等价于求次小生成树。

次小生成树

- 设 $G=(V,E,\omega)$ 是连通的无向图，T 是图 G 的一个最小生成树。如果有另一棵树 T_1，满足不存在树 T'，$T' \neq T, \omega(T') < \omega(T_1)$，则称 T_1 是图 G 的次小生成树。

定理

- 定理：设T是图G的最小生成树，如果T_1满足 $\omega(T_1)=\min\{\omega(T') \mid T' \in N(T)\}$，则$T_1$是G的次小生成树。
- 也就是说，最小生成树邻集中权值和最小的一棵生成树即为该图的次小生成树。

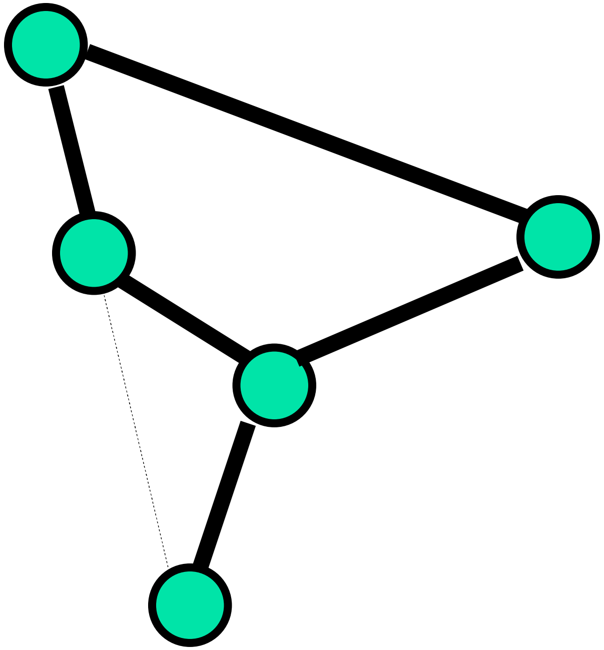
通过上述定理，自然就得到了解题的思路

分两步进行：

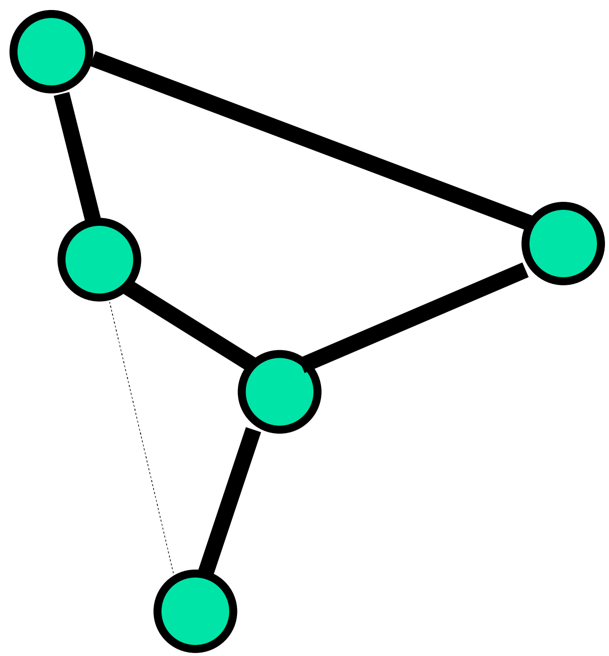
- 首先求出图 G 的最小生成树 T
- 接着求出 T 的邻集中权值和最小的生成树

第二步如何高效地实现是问题的关键

先来看一个例子，如下图



图上出现了一个环。显然我们需要删去环上权值最大的边（添加的边是不允许被删除的）。



与上一个问题的情况十分相似

预处理

- 最后，考虑如何预处理。
- 因为树上两点间的路径是唯一的，所以可以直接通过BFS求得。
- 预处理的时间复杂度是$O(V^2)$。

- 记 Best(v_1, v_2) 为最小生成树 T 的路径 v1->v2 上权值最大的边。
- 可以通过预处理计算出 Best 。
- 这样，对于枚举的边，可以用 O(1) 的时间找到所形成环上的权值最大的边。于是枚举的复杂度降为 O(E) 。

流程

- 下面给出求次小生成树的流程。

首先求图G的最小生成树T

$O(V\log_2 V+E)$

预处理，求出树T中每两个点间路径上的权值最大的边　$O(V^2)$

枚举不在树上的边添加到树上，计算出环上的权值最大的边　$O(E)$

那么，该算法总的时间复杂度为$O(V^2)$

总结

- 两类拓展问题的讨论至此告一段落。
- 在上文的两个例题中，我们通过对最小生成树模型的拓展，成功的解决了问题。
- 最小生成树问题的拓展是多种多样的。

总结

- 不能拘泥于经典模型，而是要根据实际情况，适当地对经典模型加以拓展，建立出符合题目本身特点的模型。
- 一切拓展都是建立在原模型基础上的，两者间有着密切的联系。
- 扎实的基本功； 大胆的创新

谢谢大家