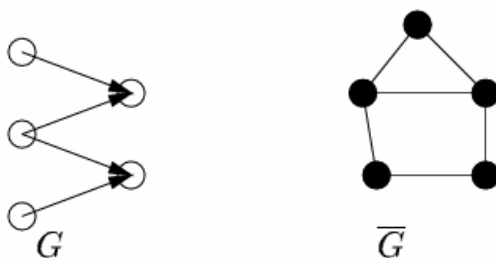


第八讲、相似图

相似图是图论中一类著名的图，它与区间图有着密切联系。边定向后的相似图称为部分序，许多 NP 难题在部分序上存在有效算法。本讲中我们将在部分序上解决一些 NP 问题，并讨论相似图、区间图、弦图之间的联系。

1. 介绍

无向图 G 是相似图，如果它能无环传递地定向；如果 G 的补图是相似图， G 称为伴相似图。我们已知区间图是伴相似图，但反之却不一定。图 1 显示了一个不是区间图的伴相似图。



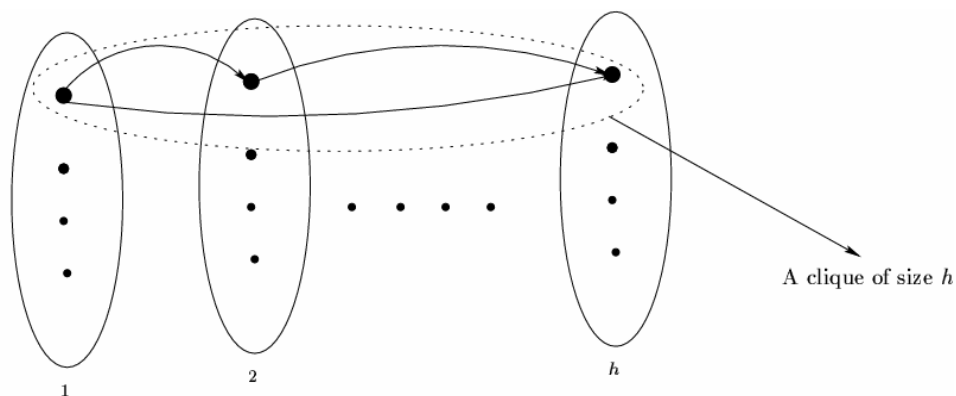
一个相似图可能由多种无环传递定向方式，每种方式对应于一个部分序。

下一节中我们将介绍在部分序上有效地解决一些 NP 问题；第 4 节中将讨论相似图、区间图、弦图之间的联系。

2. 一些算法

2.1 最大团

部分序是有向无环图 (DAG)，因此它存在一个确定的 H 函数 (见上讲)。我们能用线性时间计算出那个函数。如果在 H 函数中有 K 种值，则存在一条长为 K 的有向路径。由于定向具有传递性，这条路径上的点构成一个团。(图 2) 这就是一个最大团，因为一个团中不会有 H 值相同的顶点。显然这种算法用时是线性的。



同时我们就用 K 中颜色对顶点染色，易知 $W(G) = X(G) = K$ 。

2.2 权最大团

如果我们赋予顶点权函数 W ，定义包含顶点 $V_1..V_m$ 的团的权值为 $W(V_1) + \dots + W(V_m)$ ，权最大团问题就是要寻找一个权值最大的团，权可以为负。

在部分序上，我们可以使用动态规划解决这个问题。假定部分序 G 的顶点 $V_1..V_n$ 是一

个拓扑序列。定义 $C(V)$ 为包含 V 且最“大”顶点为 V 的权最大团的权。我们可以如下计算 C :

for $i \leftarrow 1$ to n

 Initialize $C(v_i)$ to be 0.

 for all predecessors v_j of v_i do

$C(v_i) \leftarrow \text{Max}\{C(v_i), W(v_i) + \text{Max}(0, C(v_j))\}$

最终权最大团的权为 $\text{MAX}\{C(V_1) \dots C(V_n)\}$ 。

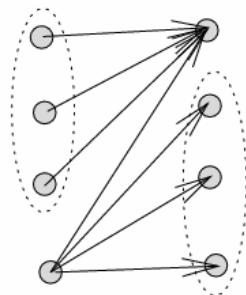
结论 1: 这个算法确实找到了权最大团。

证明: 假设以 V_i 为最大顶点的权最大团是 $V_{i1} \dots V_{ik}$, 其中 $V_{ik} = V_i$ 。如果 $K=1$, 显然算法是正确的; 如果 $K \geq 2$, 由于定向具有传递性, $V_{i1} \dots V_{ik-1}$ 必定是最大顶点为 V_{ik-1} 的权最大团 (否则那个权最大团替换 $V_{i1} \dots V_{ik-1}$, 加上 V_i 将形成一个权更大的团, 矛盾), 它的权是 $C(V_{ik-1})$, 因此原团的值就是 $W(V_i) + C(V_{ik-1})$, 这在算法中被计算过。即证。■

很容易知道算法用时是线性的。另外我们可以记录决策, 从而构造出一个权最大团。

2. 3 最大独立集

假设 H 函数值共有 K 种。所有具有相同 H 值的顶点形成一个独立集。我们也许会猜测独立数 $A(G)$ 就是具有各 H 值的顶点数的最大值。但图 3 显示了一个反例。不过, 我们任可以用多项式的时间找到部分序上的最大独立集。



定义 (1): 令 P 是一个部分序, P 上的一个链是一个两两可比的顶点集 (即一个全序)。

定义 (2): 令 P 是一个部分序, P 上的一个反链是一个两两不可比的顶点集。

【定理 1: 用最少数量的链覆盖一个部分序所需的链的数目等于该部分序上的反链的势的最大值。】

这个定理是 Dilworth 在 1950 年提出的, 这里暂不加证明地使用: P 。

定义 (3): 一个图的团覆盖是用该图中的若干团覆盖所有的顶点。图 G 的团覆盖数是对 G 进行团覆盖所需的最少团数。记为 $K(G)$ 。

不妨加一个限制: 团覆盖中的各个团两两没有交集。显然这不会改变 $K(G)$ 的值。

定理 (1): 对于任何部分序 G , 都有 $I(G) = K(G)$ 。 I 为独立数。

证明: 由于 G 是部分序, 因此 $W(G) = X(G)$, 即 G 是完美图 (见第十讲)。根基完美图定理, G 是伴完美图, 因此 $I(G) = K(G)$ 。■

定义 (3): 一个图 G 的广独立集是 G 的一个两两不连通的顶点子集。 G 的广独立集数是它最大广独立集的顶点个数, 记为 $I'(G)$ 。

定理 (2): 对于任意有向无环图 G , 它的广独立数等于其简单有向路径覆盖数 $C'(G)$ (这里的路径覆盖允许顶点被重复覆盖)。

证明: 构造图 G' , $V(G') = V(G)$, $(A, B) \in E(G')$, 当且仅当 G 中从 A 可以到达 B 。

由于 G 是有向无环图，易证 G' 是部分序。于是有 $I(G') = K(G')$ 。根据 G' 的定义， G' 的任意独立集就是 G 的广独立集，反之亦成立，所以有 $I(G') = I'(G)$ 。又对于 G 中的任意简单有向路径， G' 中存在一个包含该路径上各点的团，反之亦成立（利用完全图的竞赛图的性质），因此有 $C'(G) = K(G)$ 。于是 $I'(G) = C'(G)$ 。即证。■

推论 1: 二分图 $G = (X, Y, E)$ 中 (最大) 匹配数 $M(G) =$ (最小) 覆盖数 $B(G)$ 。

证明: 对 G 的每条边定向为 $X \rightarrow Y$ ，易知 G 的简单路径覆盖数 $C'(G) = |V| - M(G)$ (最长的简单有向路径长为 1)；有由于定向后“可达”与“相邻”等价，因此 $I'(G) = I(G) = |V| - B(G)$ 。由定理 (2)， $I'(G) = C'(G)$ 得 $M(G) = B(G)$ 。即证。■

对于部分序 G ，为求 $I(G)$ (即 $I'(G)$) 我们只要求出 $C'(G)$ (即 $K(G)$) 即可。

对于 $C'(G)$ 的求法，可以设定每个顶点访流量下限为 1，每条边流量下限为 0，上限都为无穷大，通过有上下界的最小可行流解决，具体细节这里不再展开。

2. 4 部分序上的其他算法

在部分序上可以有效地解决诸如最大独立集、最小团覆盖、求所有极大团等问题。

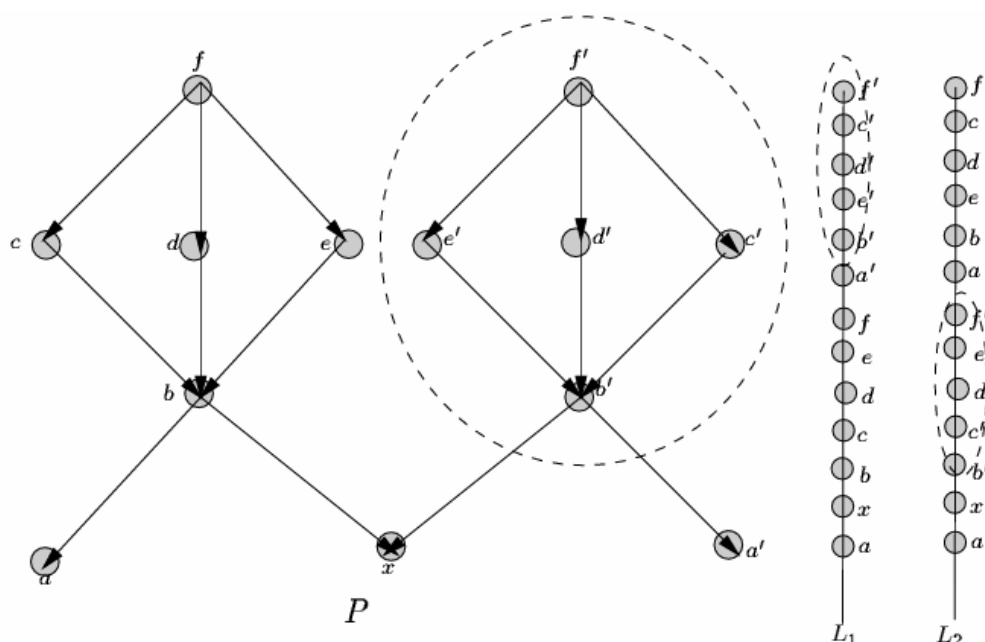
但是另一些问题，例如哈氏回路、支配集等仍是 NP 问题。这一部分的参考数目有许多 (见 PDF 文件)。

3. 部分序的尺度

每个部分序 P 都可以扩充成全序 (或称拓扑序)。令 $L(P)$ 为 P 的所有全序组成的集。

$L(P)$ 的中满足以下性质的子集 L_0 称为 P 的一个实现集: $\bigcap_{l \in L_0} l = P$ ， P 的最小实现集的大小称为 P 的尺度，即为 $D(P)$ 。

例如: 图 4 中的部分序 P 的尺度为 2。右侧是 P 的一个最小实现集。注意 P 的子图 (圈出部分)，也是一个尺度为 2 的部分序，它在两个全序中一次在元素 a 之前，一次在 a 之后。



我们可以用 $O(n)$ 的空间表示一个全序，因此我们可以用 $O(D \cdot n)$ 的空间表示一个尺度为 D 的部分序。这对尺度为常数的部分序不失为一种好办法。

一个部分序的子序是它顶点集的一个子集，顺序与原先相同 (即一个诱导子图)。一个子序的尺度不会大于它的母部分序的尺度。

【定理 3: 令 G 是一个相似图, P 是其上一个部分序, 若 G 与 \overline{G} 都是相似图, 则 $D(P) \leq 2$ 。】

【定理 4: 相似图上的两个部分序 P 、 Q 满足 $D(P) = D(Q)$ 。】

4. 再谈区间图

目前, 我们已知区间图都是弦图和伴相似图, 反之呢?

定理 5: 以下命题是定价的:

(1) G 是区间图

(2) G 没有长度大于 3 的无弦环, 且 G 是伴相似图。

(3) G 的极大团可以连续地编号。即我们可以讲它们排为 $C_1..C_k$, 满足对于任何 $v \in V$, 序列 $\{j | j \in \{1..k\}, v \in C_j\}$ 是连续整数集。

证明: (1) \Rightarrow (2): 我们已知这个命题成立。

(3) \Rightarrow (1): 令 $I(V) = [\text{Min}\{j | V \in C_j\}, \text{Max}\{j | V \in C_j\}]$ 。由 (3) 可知如果 $I(V) = [A, B]$, 那么对所有 $V \in C_j$ 有 $j \in [A, B]$ 。

如果 $(U, V) \in G$, 则 U, V 都在至少一个极大团 C_j 中, 因此 $j \in I(U) \cap I(V)$ 。反之如果 $j \in I(U) \cap I(V)$, U, V 都在一个极大团 C_j 中, 因此 $(U, V) \in G$ 。

(2) \Rightarrow (3):

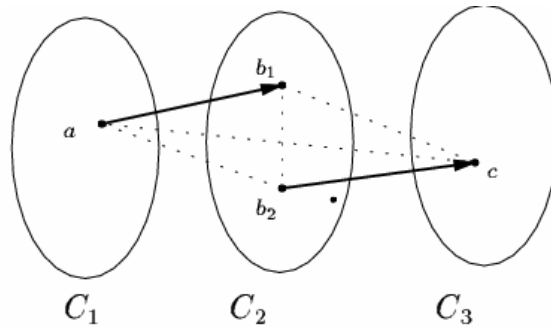
我们定义一个有向图 H , $V(H)$ 是 G 中所有极大团。 H 中 C_1 到 C_2 有边, 如果 \overline{G} 中存在

边 $U \rightarrow W$, 其中 $U \in C_1, W \in C_2$ 。这里 \overline{G} 表示将 G 的补图无环传递定向后的有向图。

结论 2: H 具有传递性。

证明: 假设 (C_1, C_2) 和 (C_2, C_3) 都在 H 中, 但 (C_1, C_3) 不在 H 中 (图 5)。存在顶

点 $A \in C_1, B_1, B_2 \in C_2, C \in C_3$ 满足 $(A, B_1), (B_2, C)$ 都在 \overline{G} 中。



假设 $B_1 = B_2$, 由于 \overline{G} 具有传递性, 可以推知 (A, C) 在 \overline{G} 中, 于是 $(C_1, C_3) \in H$, 矛盾。因此 $B_1 \neq B_2$ 。

假设 $(C, A) \in \overline{G}$, 则有 $(B_2, B_1) \in \overline{G}$ 。但 B_1, B_2 在同一个团中, 它们之间在 \overline{G} 不会有边, 矛盾。另外显然 $(A, C) \notin \overline{G}$, 于是有 $(A, C) \in G$ (G 是无向图)。

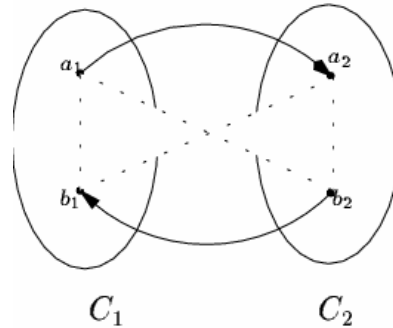
假设 $(B_1, C) \in \overline{G}$, 由 \overline{G} 的性质 $(C_1, C_3) \in H$, 矛盾。假设 $(C, B_1) \in \overline{G}$, 则 $(B_2,$

$B_1) \in \overline{G}$, 矛盾。于是有 $(B_1, C) \in G$ 。同理有 $(A, B_2) \in G$ 。

这样我们得到了 G 中的一个无弦四阶环 $(A, C, B1, B2)$ ，与 G 的性质矛盾。即证。■

结论 3: H 是无环的。

证明：由于 H 具有传递性，假设 H 有环，则该环必定是两个顶点间的双向边 $C1 \leftrightarrow C2$ (图 6)，否则由传递性会得出矛盾。



假设 $(A1, A2)$ 和 $(B1, B2) \in \overline{G}$ ，这里 $A1, B1 \in C1$; $A2, B2 \in C2$ 。显然 $A1 \neq B1$ (否

则由传递性由 $(B2, A2) \in \overline{G}$ ，矛盾)。同理 $A2 \neq B2$ 。

假设 $(A2, B1) \in \overline{G}$ ，则 $(A1, B1) \in \overline{G}$ ，矛盾。同理 $(B1, A2) \notin \overline{G}$ 。同样地在 \overline{G} 中 $A1, B2$ 之间没有边相联。于是 G 中有无弦四阶环 $(A1, B1, A2, B2)$ ，矛盾。即证。■

我们证明了 H 是无环传递的，因此它有拓扑序列。假设其中一个是 $C1..Cm$ 。

结论 4: 这个序列满足 (3)。

证明：用反证法。假设不满足 (3)，则存在 $U \in G$ 和 $I < J < K$ ，满足 $U \in Ci$, $U \in Ck$ ，但 $U \notin Cj$ 。

对于所有的 $W \in Cj$ ， \overline{G} 中 U 与 W 间不会有边，否则假如有边 $U \rightarrow W$ ，则 $(Ck, Cj) \in H$ ，因此拓扑序列中 Ck 不会在 Cj 之后；加入有边 $W \rightarrow U$ ，同理可得拓扑序列中 Ci 不会在 Cj 之前。于是在 G 中 U 与 W 之间有边。由于 W 的任意性， U 与 Cj 中任意顶点在 G 中都相邻，因为 $U \notin Cj$ ，所以 Cj 不是极大团，矛盾。■

综上所述，(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)。定理 5 得证。■

由定理 5，我们得知区间图是弦图与伴相似图的交集。且区间图中所有的极大团满足条件 (3)。对于证明中涉及的图 H ，不妨称它为极大团生成图。