浅谈类比思想

长沙长郡中学 周戈林

内容摘要

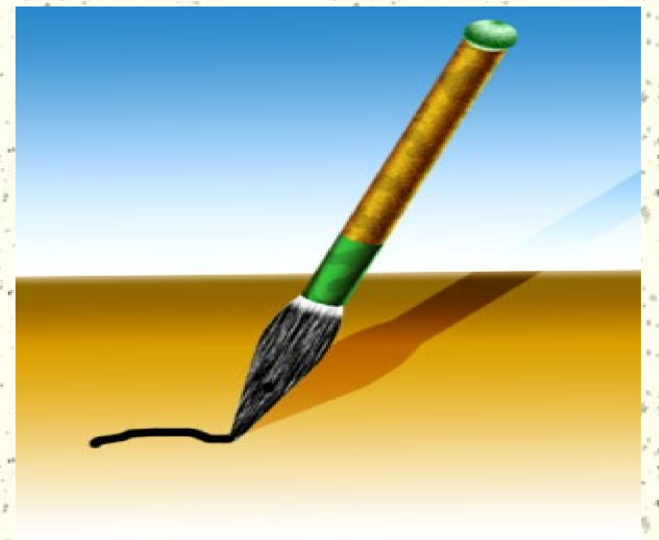
信息学是一门变幻莫测的艺术。它包含着海量的知识点。我们不能奢求掌握所有的知识；只能在已有知识的基础上，尽可能的把不熟悉的问题转化为熟悉的问题。类比思想，就是一种非常优秀的转化方法。

什么是类比呢？

类比是最有创造力的一种思维方法。它关注两个对象在某些方面的相同或相似之处，从而推测它们在其它方面也可能存在相同或相似之处。

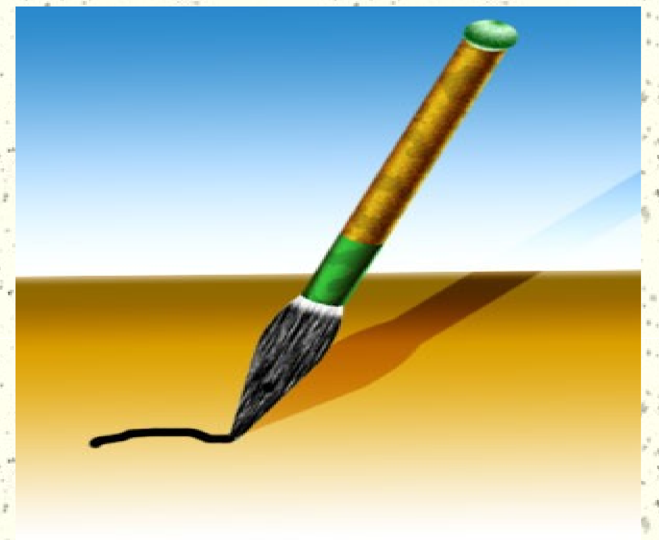
这就为我们解决复杂问题创造了条件。

什么是类比呢？（续）



铅笔与钢笔

铅笔与毛笔



简单类比与科学类比

- 铅笔和钢笔恰好都是硬笔，类比成功具有偶然性，它是基于直观上的感性认识，称之为简单类比
- 注意到铅笔与毛笔的不同点，类比成功带有某种必然性，它是基于逻辑上的理性认识，称之为科学类比

科学类比！

常见的类比模式

- 具体事物类比抽象模型

  餐巾问题（餐巾花费类比费用流）

- 相似算法之间的类比

  下面的例子

- 图形类比数式

  差分约束系统（不等式类比约束图）

相似算法之间的类比

有些算法是相似的:

- 在算法思想上相似
- 在算法依据上相似
- 在算法实现上相似

例：最小最大边问题 （USACO）

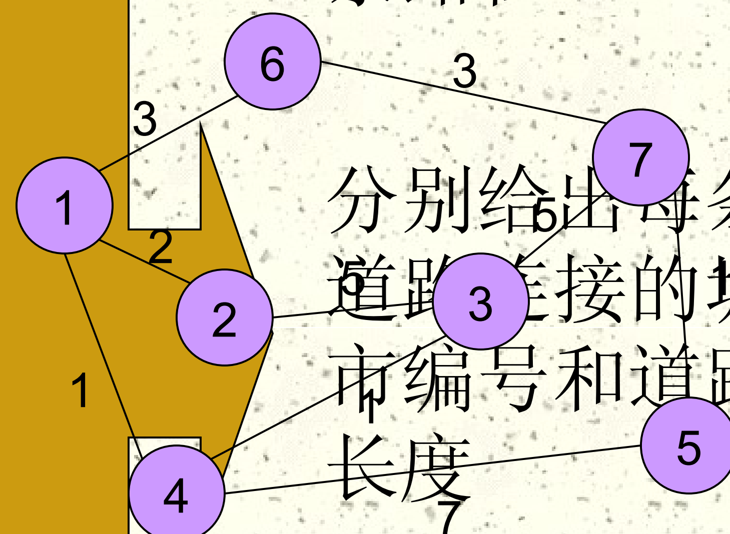
有 n 座城市，p 条双向道路把这些城市连接起来，一对城市之间可能有多条道路连接。FJ 要找到 k 条从城市 1 到城市 n 的路径，不同的路径不能包含相同的道路。在这一前提条件下，FJ 希望所有路径中经过的最长的道路最短。

输入样例

7 9 2
1 2 2
2 3 5
3 7 5
1 4 1
4 3 1
4 5 7
5 7 1
1 6 3
6 7 3

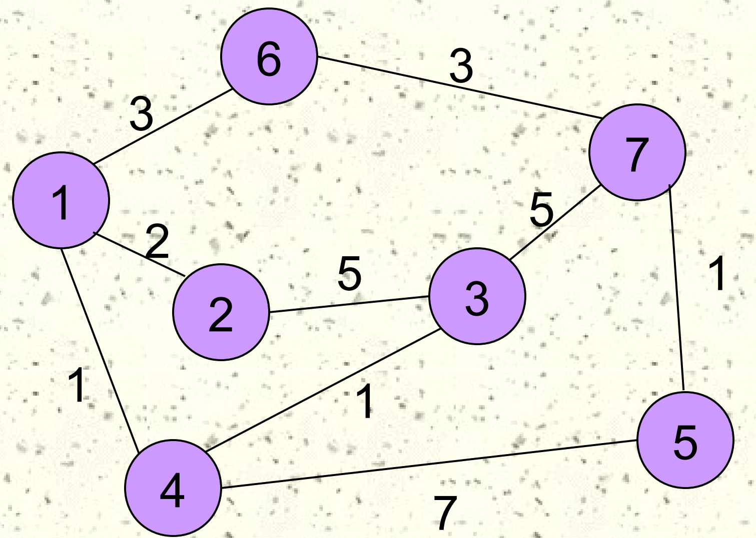
有 7 座城市， 9 条双向道路，FJ 希望找到 2 条路径

分别给出每条道路连接的城市编号和道路长度



输出样例

5



Max{3,3,2,5,5}=5

初步分析

这是一个关于流的问题。题目给定n个点和p条容量为1的无向边，每条边都拥有一个边权，要求找到一个流量至少为k的流，同时流通过的边权最大的边最小。

似曾相识？

最小最大匹配

！

最小最大匹配

- 这个匹配是在一个带权二分图上进行；
- 是一个完备匹配；
- 是满足上述条件的匹配中最大边权最小的匹配。

即定义 x=**max**{ 匹配边的权 }，求使 x 最小的完备匹配。

算法 1

利用参数搜索的思想，二分枚举一个 x，再判定这个 x 是否可以得到。根据判定的结果适当改变枚举区间。

设当前区间为 [min,max],x=(min+max) div 2

若 x 可行，则区间调整为 [min,x-1]

若 x 不行，则区间调整为 [x+1,max]

算法 1（续）

使用匈牙利算法判定能否得到完备匹配

类比

使用最大流算法判定能否得到不小于 k 的流

算法 1 效率分析

边数有 p 条，对其进行二分需要

O(logp)

每次判定需要执行一次最大流算法

每次找增广路复杂度 O(p)

至多找 k 次增广路 O(kp)

O(logp)*O(kp)= O(kplogp

)

小结

利用简单类比，我们得到了一个不错的算法。

这种“二分枚举法”十分直观

但是我们的类比停留在形式上！

继续寻找算法的相似点

最短路问题

- ✓最小费用最大流问题要求通过每条边的边权和最小

最小生成树问题

- ✓最小最大边问题要求最大边权最小

连续最短路算法

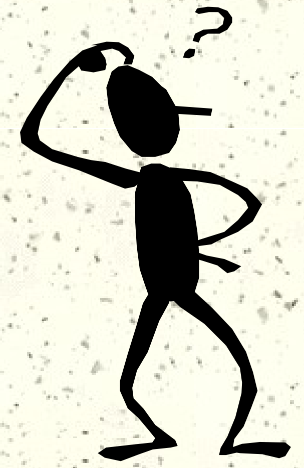
1. 初始流分布使每条边 e 都为 f(e)=0;
2. 在当前的容许流分布下修改各边 (i,j) 的费用 aij

$aij=wij$	$0<=fij<cij$
$aij=maxlongint$	$fij=cij$
$aij=-wji$	$fji>0$

3. 以 aij 为边长，找一条 s 到 t 的最短增广路

连续最短路算法（续）

4. 若能找到增广路就转 2，否则转 5
5. 输出结果



如果利用普里姆算法的思想寻找增广路会怎么样？

算法 2

1. 初始流分布使每条边都为 f(e)=0；
2. 设立临时距离标号 d[i]，表示当前能扩展到 i 的增广轨中最长边长度的最小值。初始时除源点以外的临时距离标号都为正无穷大。
3. 在计算距离标号时，假设 d[u] 已经被扩展，正在考察边 (u,v)：

……

算法 2（续）

假设正在考察边 (u,v)：

(I). 若 u 到 v 的流量为 0 且 v 到 u 的流量为 0，那么

$d[v] \leftarrow \min\{d[v], \max\{d[u], w(u,v)\}\}$；

(II). 若 v 到 u 的流量为 1，那么

$d[v] \leftarrow \min\{d[u], d[v]\}$；

4. 在求得所有的 d[v] 同时记录路径

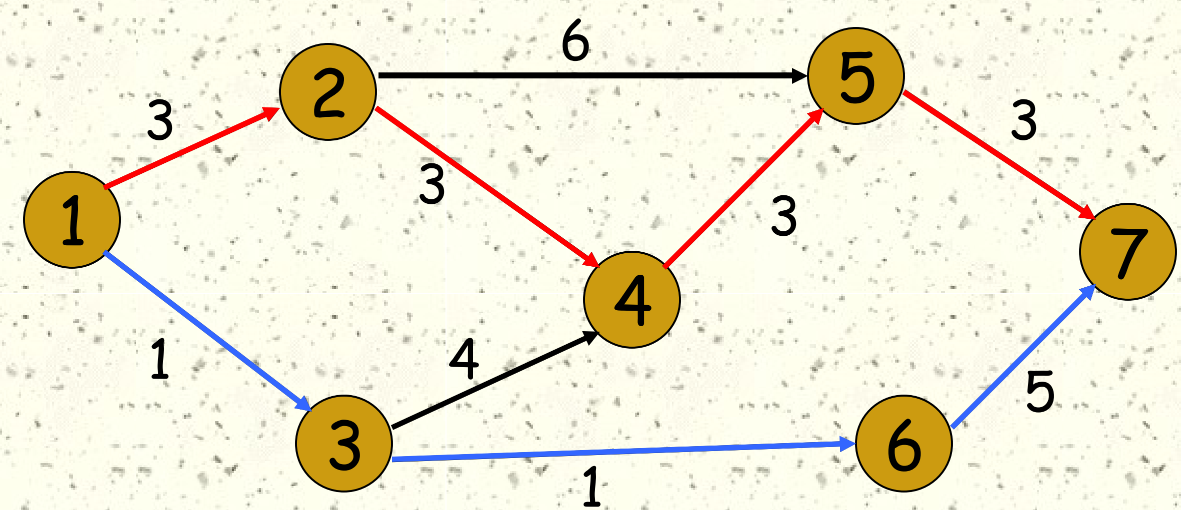
5. 当扩展次数超过 t 时结束，否则转 2

引理 1 的证明

引理 1：在算法依次找到的每条增广路中，n 的距离标号是单调不减的。

证明：算法优先扩展最短的增广路。若存在增广路 Path 与 Path' 满足 d[n]<d[n]'，则 Path 必在 Path' 前被扩展。因此n 的距离标号单调不减。

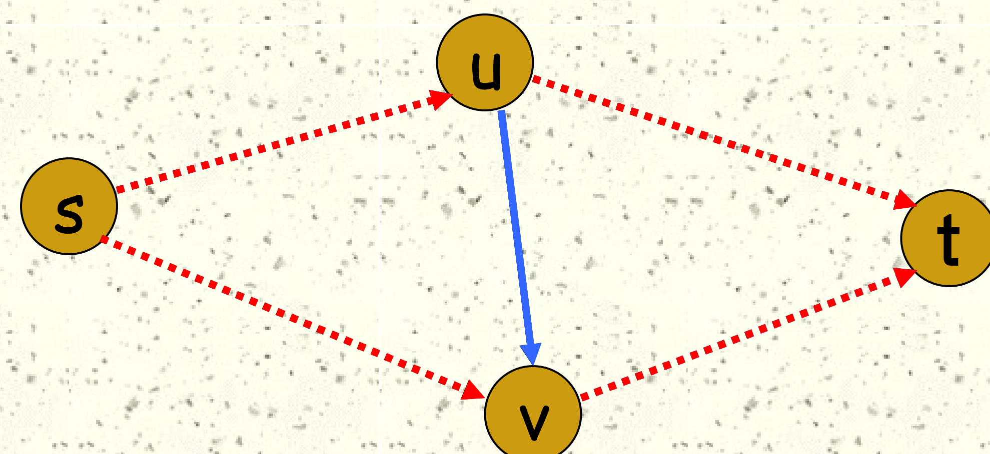
引理 1 的证明（续）



引理 2 的证明

引理 2： 扩展方式 2 不会使当前流经过的最长边变短。

证明：我们使用反证法来证明结论。假设某次扩展使得最长边变短，则必然出现了如下情况：

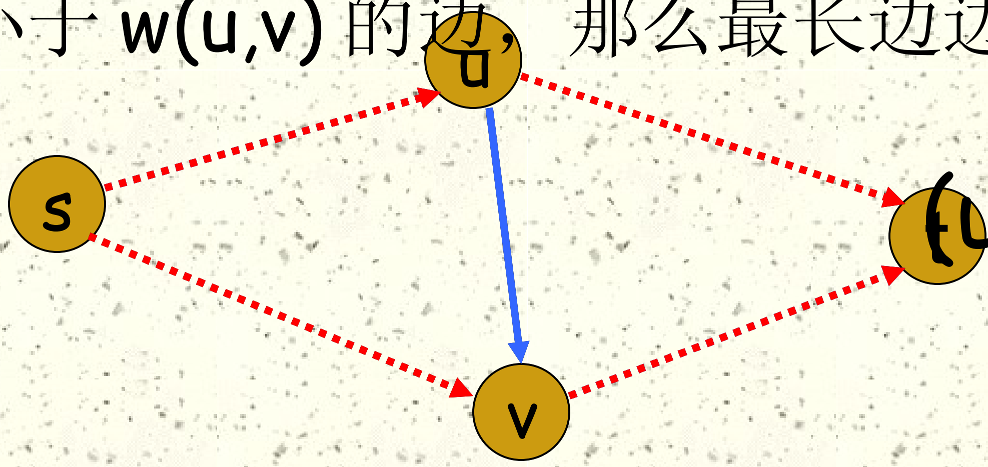


引理 2 的证明（续）

但如果所有边权都小于 w(u,v)，那么根据引理 1，算法会优先选择 s→ u→ t 和 s→ v→ t 两条路径，不会从 (u,v) 经过，这与假设矛盾。

也就是原来存在一条流的路径 s→u→v→t，方式 2 将其扩展成路径 s→v→t 和 1→u→t 。

若 (s,u)、(s,v)、(u,t)、(v,t) 四者中存在长度不小于 w(u,v) 的边，那么最长边边权不会减少；



(u,v) 不会是最长边

正确性的证明（续）

定理：算法 2 是正确的。

证明：根据引理 1 我们知道算法在贪心式地寻找增广路，而根据引理 2 我们知道算法得到的永远是当前流量下的最优解。因此算法是正确的。

算法 2 效率分析

流量每次增加 1，因此要增广 t 次

$O(k)$

每次增广需要执行一次普里姆算法

$O(n^2+p)$

$O(k)*O(n^2+p)=$ $O(k(n^2+p))$

算法1和算法2的比较

	算法1	算法2
时间复杂度	O(kplogp	O(k(n^2+p))
空间复杂度	O(p)	O(p)
编程难度	低	更低
类比种类	简单类比	科学类比

小结

最小最大边问题

形式上

简单类比

最小最大匹配问题

本质上

科学类比

最小费用流问题

可以用类比思想解决的问题特性

1. 可类比性

新问题与原问题相似

2. 可简化性

新问题比原问题简单

3. 可移植性

算法要与类比对象密切相关

感谢

谢谢大家

简单类比

对象 A 具有性质 P 、Q；

<u>对象 A' 具有性质 P'(P 与 P' 类似)</u>；

对象 A' 可能具有性质 Q'(Q 与 Q' 类似)

科学类比

对象 A 具有性质 P 、Q 和关系 R ;

<u>对象 A′ 具有性质 P′</u> ;

对象 A′ 具有性质 Q′ 和关系 R′

餐巾问题

公司在连续的 n 天内，每天对毛巾有一定的需求量，第 i 天需要 Ai 个。毛巾每次使用前都要消毒，新毛巾已消毒。消毒有两种方式， A 种方式的需要 a 天时间， B 种方式 b 天时间 (b>a) ， 2 种方式的价格分别为 fa 、fb ，购买一条新毛巾价格为 f(f>fa>fb) ，求用