第九讲、区间图的判定

本讲中我们回顾区间图三个等价命题的证明，这是区间图判定的基础。我们同时回顾怎样在弦图上寻找极大团，并了解如果这个图是区间图，这些团可以如何编号。寻找编号可以简化为顶点－团矩阵中行的连续 1 性质。我们还将介绍 PQ 树，这是判定一个矩阵是否具有连续 1 性质的基础数据结构。

1．介绍

区间图是若干区间的相交图。许多难题在区间图上可以有效地解决。因此怎样高效地判定区间图在理论和实践上都有重要的意义。这就是本讲的中心内容。

译者注：此处仅作简译，大家可以练练 E 文。☺

2．区间图的性质

译者注：本节请参见第八讲第四节，内容完全一致，不过格式比较规范，有兴趣的读者可以自己看看 PDF 文件。

3．区间图的判定

以上结论使我们得到了区间图判定的一个算法，大致思路如下：

```
INPUT: a graph G
OUTPUT: yes, G is an interval graph; or no, G is not an interval graph

1. Find all the maximal cliques of G.
2. Try to order the maximal cliques of G such that the set of cliques
   containing any given vertex of G are consecutive.
```

3．1 寻找极大团

寻找任意图的所有极大团问题甚至不只是 NP 问题，存在有些图的极大团数目是指数级的。不过区间图的极大团不会多于线性的数量级。我们只考虑弦图，因为区间图都是弦图。

定理 2：有 N 个顶点的弦图中至多有 N 个极大团。

证明：令 G 是一个弦图，σ 是 G 的一个完美消除序列。对所有的 V，{V}∪Pred{V}是一个团，这样的团共有 N 个。我们证明每个极大团都是这种形式的。

令 M 是 G 的一个极大团，则 M⊆{V}∪Pred{V}，V 是 M 中序号最大的顶点。由于 M 是极大团，所以 M＝{V}∪Pred{V}。即证。█

思考 1：相似图的极大团数是什么数量级的？

【将相似图无环传递定向后，每个极大团一一对应与一条极长链。定义如下一个有向无环图 G：|V（G）|＝N^2，分为 N 个顶点子集 V1..Vn，每个顶点到所有所在子集号大于它的顶点连弧，则极长链有 O（N^N）条，因此极大团数目是指数级的。】

思考 2：一个更强的结论。{Vi}∪Pred{Vi}是极大团，当且仅当对 Vi 的任何后继 Vj，至少有一个 Vi 的前驱不是 Vj 的前驱。这个结论的正确性很容易得知，这里不再证明。实践中，可以对每个顶点设置一个函数 M（V），表示{V}∪Pred{V}是否是极大团，初始时都置为 TRUE。处理顶点 V 时，考虑它最大的前驱（如果存在的话）U，如果 U 的所有前驱都是 V 前驱则令 M（U）＝FALSE，易知只要考虑这一个顶点即可（假如有其他顶点的前驱都是 V 的前驱，则它的前驱都是 U 的前驱，因此处理 U 时已经置为 FALSE 了）。

这表明可以使用与判定完美消除序列类似的算法来获得所有的极大团，这一步用时 O（n+m）。

思考 3：执行寻找所有极大团的算法前必须确信该图是弦图，仅此算法的 STEP1 必须在执行判定弦图的某个算法之后才可实行。

3．2 寻找极大团的一个“连续性”序列

这个问题可以简化为判定一个矩阵是否具有行连续 1 性质，见下文。

3．3．连续 1 性质

令 G 是一个图，A 是 G 的一个顶点－团矩阵，即 A 的每一行代表 G 的一个顶点，每一列代表 G 的一个极大团，且满足：

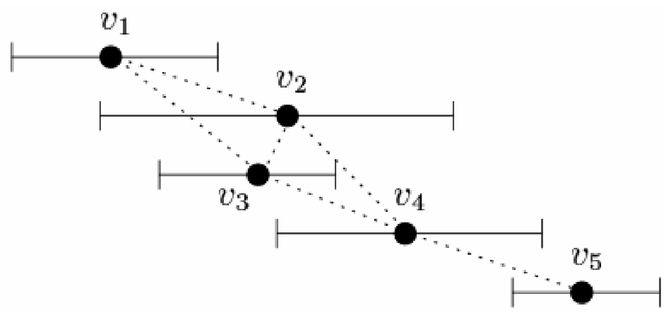
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i \in C_j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

寻找 G 团的“连续性”编号就是寻找将 A 的各列的一种重排方式，使得每行中的所有 1 都是连续的。如果这种重排方式存在，就称这个矩阵具有行连续 1 性质。

3．3．1．一个例子

考虑以下这个图 G：

其中的所有极大团有 C1={V1,V2,V3},C2 ={V2,V3,V4},C3={V4,V5}。它的顶点－团矩阵如下：



	C_1	C_2	C_3
v_1	1	0	0
v_2	1	1	0
v_3	1	1	0
v_4	0	1	1
v_5	0	0	1

可以看见每行的 1 都是连续的，因此 C1、C2、C3 确实是一个“连续”的极大团序列。

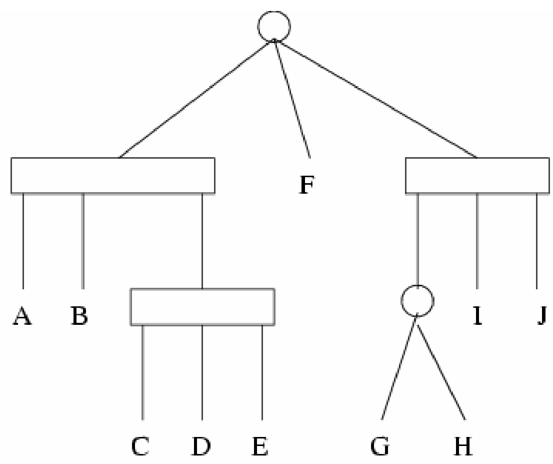
3．4．PQ 树

判定一个矩阵是否具有行连续 1 性质可以如下表述：

给定一个有限集 X 和 X 的一个子集集合 L，求 X 的一个重排Π（X），满足对 $\forall I \in L$，I 中的元素在Π中是连续的。

1976 年，Booth 与 Loeker 提出了一个称为 PQ 树的数据结构来解决这个问题。

从左到右记下 PQ 树的各个叶节点，表示一个重排Π（X）。PQ 树的节点有两种类型：Q 类型，用矩形标识，表示它的子节点只可以是给定的顺序或它的反序；P 类型，用圆形标识，表示它的子节点的任何重排方式都是允许的。



例如以下的 PQ 树表示可行的排列有：

- ABCDEFGHIJ

- ABEDCFGHIJ
- EDCBAFGHIJ
- FCDEBAJIHG

3．5．测试算法

测试图 G 是否是区间图的算法中，STEP2 初始时建立一个 PQ 树，包含一个 P 节点作为根，顶点－团矩阵的每个列都是根的一个子节点；接着算法依次处理各个约束条件。下一讲中我们将了解这个算法细节，并证明 PQ 树能够在有效的时间内进行更新，精确地说，在 O（m+n）的时间内。