染色法和构造法在棋盘上的应用

广东北江中学　方奇

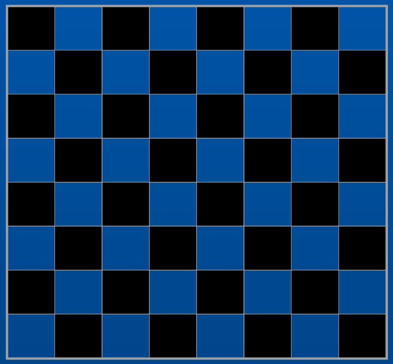
目录

1　基本概念

● 棋盘

所谓 m*n 棋盘，指由 m 行 n 列方格构成的 m*n 矩形。每个方格成为棋盘的格，位于第 i 行 j 列的格记为 a(i,j)。当 i+j 为奇（偶）数时，称 a(i,j) 为奇（偶）格。

● 染色法



用不同颜色对棋盘格子进行染色，起到分类的效果。

类似国际象棋盘上的黑白二染色，称为“自然染色”。

● 构造法

直接列举出某种满足条件的数学对象或反例导致结论的肯定与否定，或间接构造某种对应关系，使问题根据需要进行转化的方法，称之为构造法。

2 棋盘的覆盖

- **棋盘的覆盖**

指用若干图形去覆盖棋盘。覆盖的每个图形也由若干格子组成，称为覆盖形。约定任两个覆盖形互不重叠，任一覆盖形中任一格总与棋盘上某格重合。

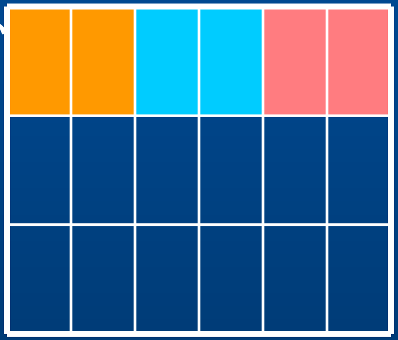
按覆盖效果，可分为*完全覆盖*、*饱和覆盖*、*无缝覆盖*和*互异覆盖*。

完全覆盖：各个覆盖形的总格子数等于棋盘的总格子数

按覆盖形，可分为*同形覆盖*（只有一种覆盖形）和*异形覆盖*（有多种覆盖形）。

2-1　　同形覆盖

- **例 1**　给出 m, n, k，试用若干 1*k 的矩形覆盖 m*n 的棋盘。
- **分析**
- 　　有**定理 1**：*m*n 棋盘存在 1*k 矩形的完全覆盖的充分必要　条件是 $k|m$ 或 $k|n$ 。*
- 证明：
- 　　充分性是显然的。用构造法。当 $k|n$ 时，每一行用 n/k 个　　1*k 的矩形恰好完全覆盖。$k|m$ 情况类似



- 　　必要性。当 n, m 均不能被 k 整除时，设
- $m=m1*k+r, 0<r<k$
- $n=n1*k+s, 0<s<k$
- 　　并约定 $r>=s$（否则旋转 90°）

2-1 同形覆盖

1	2	3	…	k	1	2	3	…	k	……	1	2	3	…	s
2	3	4	…	1	2	3	4	…	1	……	2	3	4	…	s+1
3	4	…	…	2	3	4	…	…	2	……	3	4	…	…	:
:	:			:	:	:			:	……	:	:			:
k	1	…	…	k-1	k	1	…	…	k-1	……	k	1	…	…	s+k-1
1	2	3	…	k	1	2	3	…	k	……	1	2	3	…	s
2	3	4	…	1	2	3	4	…	1	……	2	3	4	…	s+1
3	4	…	…	2	3	4	…	…	2	……	3	4	…	…	:
:	:			:	:	:			:		:	:			:
k	1	…	…	k-1	k	1	…	…	k-1	……	k	1	…	…	s+k-1
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	……	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:		:	:	:	:	:
1	2	3	…	k	1	2	3	…	k	……	1	2	3	…	s
2	3	4	…	1	2	3	4	…	1	……	2	3	4	…	s+1
3	4	…	…	2	3	4	…	…	2	……	3	4	…	…	:
:	:			:	:	:			:	……	:	:			:
r	r+1	…	…	r+k-1	r	…	…	…	r+k-1	……	r	r+1	…	…	r+s-1

m=m1*k+r　n=n1*k+s　r>=s

2-1　　同形覆盖

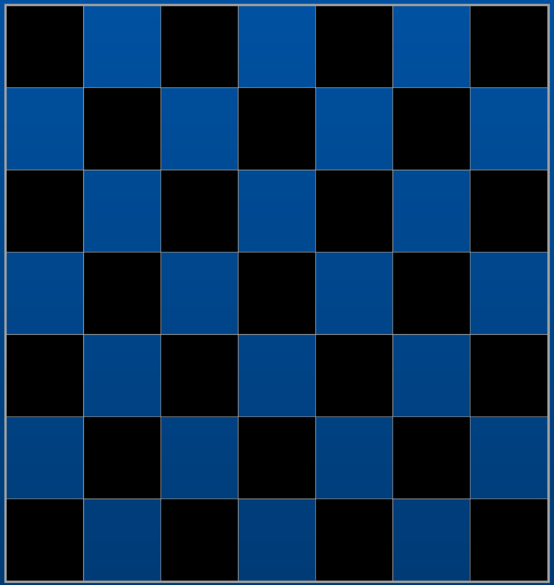
- 由上面的定理 1 ，可彻底解决 m*n 棋盘的 p*q 矩形完全覆盖问题

- 定理 2　　$m*n$ 棋盘存在 $p*q$ 矩形的完全覆盖充分必要条件是 m, n 满足下列条件之一：
- （i）† p/x 且 q/y
- （ii）　$p/x, q/x,$ 且存在自然数 a, b ，使 $y=ap+bq$
- 其中 $\{x, y\}=\{m, n\}$

2-2　　异形覆盖

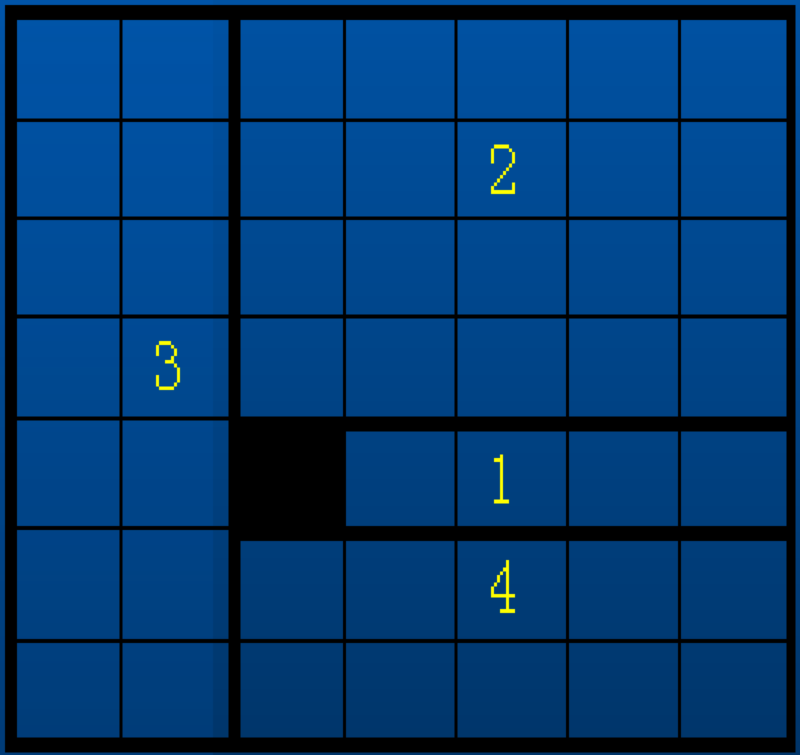
- **例 2**　　　设有 m*n 的棋盘，当 m*n 为奇数时，尝试删去一个格子，剩下部分用若干 1*2 的矩形覆盖；当 m*n 为偶数时，尝试删去两个格子，剩下部分用若干 1*2 的矩形覆盖。

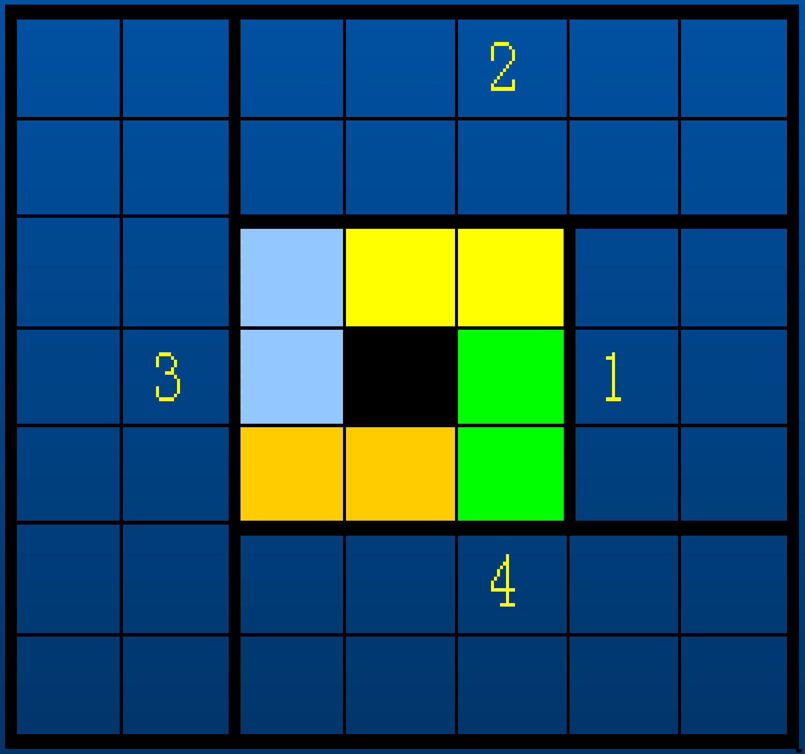
- 分析：
- 1　　先来考虑 m*n 为奇数的情况
- 　　　一方面，将棋盘自然染色。无论怎么放，一个 1*2 的矩形必盖住一个黑格和一个白格，而棋盘上的黑格比白格多 1，于是只能去掉一个黑格（即偶格）。



2-2　　异形覆盖

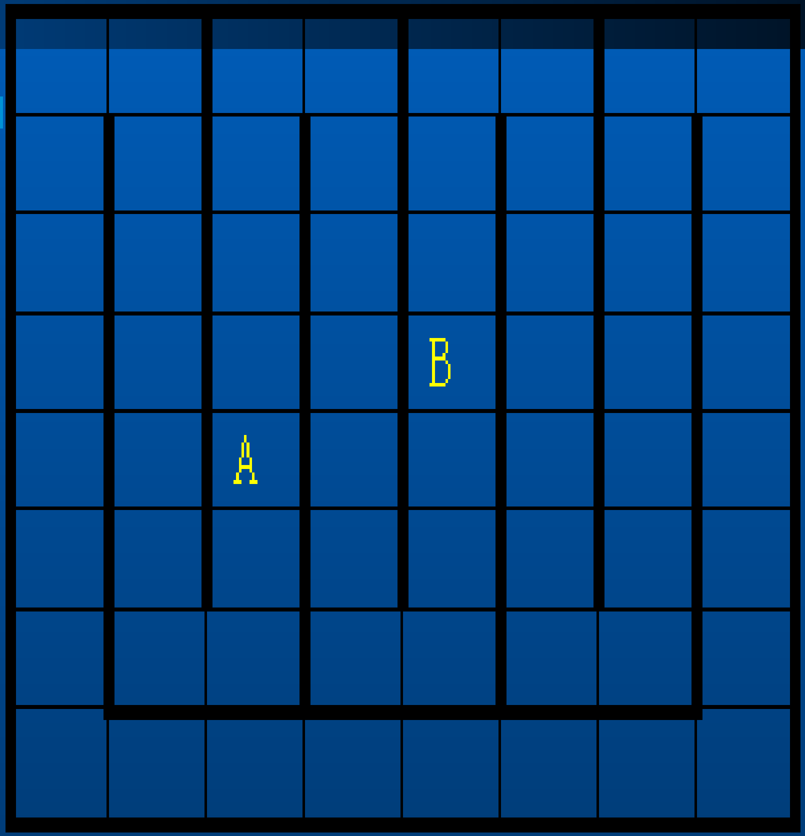
- 另一方面，设去掉偶格为 a(i, j)，用构造法必能得到可行解
  - i 与 j 同为奇数
  - i 与 j 同为偶数





2-2　　异形覆盖

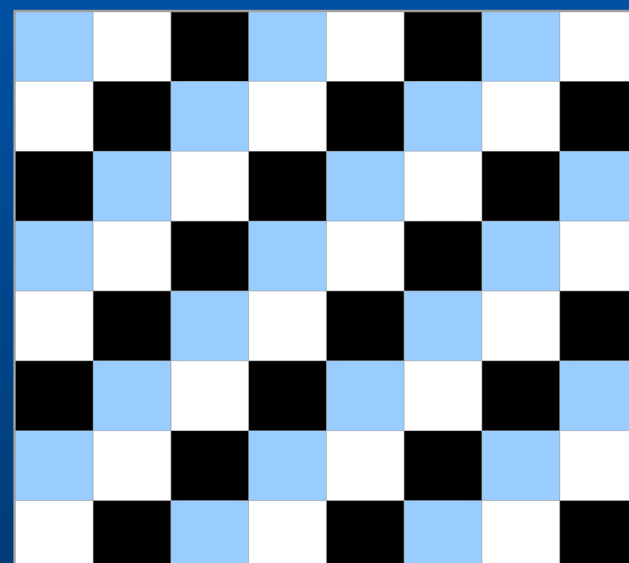
- 2　再考虑 m*n 为偶数的情况
- 　　类似地，由自然染色法得知，去掉的两格必定异色，即一个奇格，一个偶格（不然两种格子总数不等）
- 　　另一方面，用构造法，总可以用一些粗线将棋盘隔成宽为 1 的长条路线，使从任一格出发可以不重复地走遍棋盘并回到出发点。



2-2　　异形覆盖

- 针对染色法，上面的例子都是利用“各类颜色格子总数必须相等”这一条件推出矛盾，但有些时候，只考虑这个条件是不够充分的。
- **例 3**　　8*8 棋盘剪去哪个方格才能用 21 个 1*3 的矩形覆盖？
- **分析**
- 　　考虑到对称性，只有剪去

a(3,3)、 **a(3,6)**、 **a(6,3)**、 **a(6,6)** 中的某一个　才能满足题意。



蓝色： 21 个

白色： 22 个

黑色： 21 个

2-3　小结

- 覆盖类问题其实是一个难度较大的课题，这里只讨论了一些简单的情况，以说明染色法与构造法的应用
- 需要补充的是，染色法的种类形形色色、五花八门。考虑到可推广性和易操作性，本文只着重研究了“间隔染色法”（即自然染色法的推广）

3　马的遍历

- 马行走规则
- 　　从 2*3 的矩形一个角按对角线跳到另一个角上
- 马的遍历
- 　　从一个格出发按跳马规则不重复地走遍所有格
- 棋盘中马的遍历问题分两类
- 　　(1)　马的哈密尔顿链
- 　　(2)　马的哈密尔顿圈

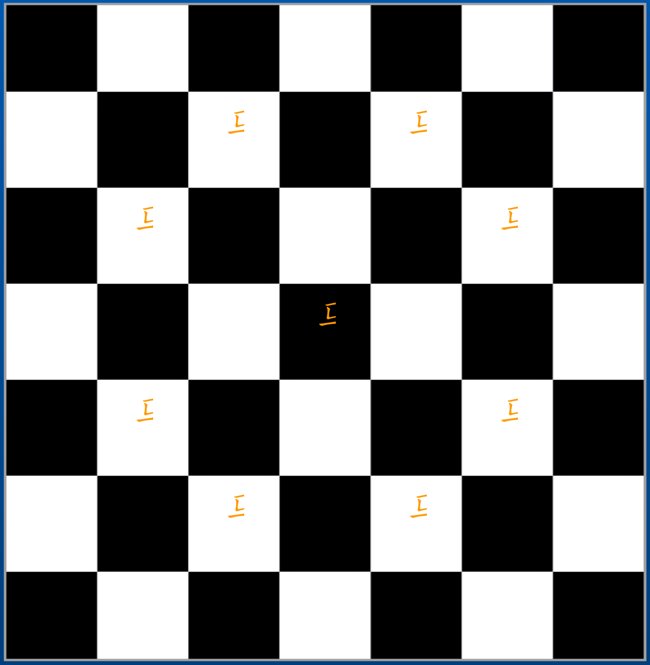
3-2　马的哈氏链

- 通常有三种方法
- 1　**贪心法**——每一步跳向度最小的点　（度数指可一步到达且未经过的点的个数）
- 2　**分治法**——将棋盘分成几个小棋盘，分别找哈氏链，再接起来
- 3　**镶边法**——先在一个小棋盘中找到哈氏链，然后在棋盘四周镶边，已产生大棋盘的哈氏链。
- 按上述方法不难得到下面结论：
- n*n 棋盘存在哈氏链的充要条件是 n>3 。

3-2　　马的哈氏圈

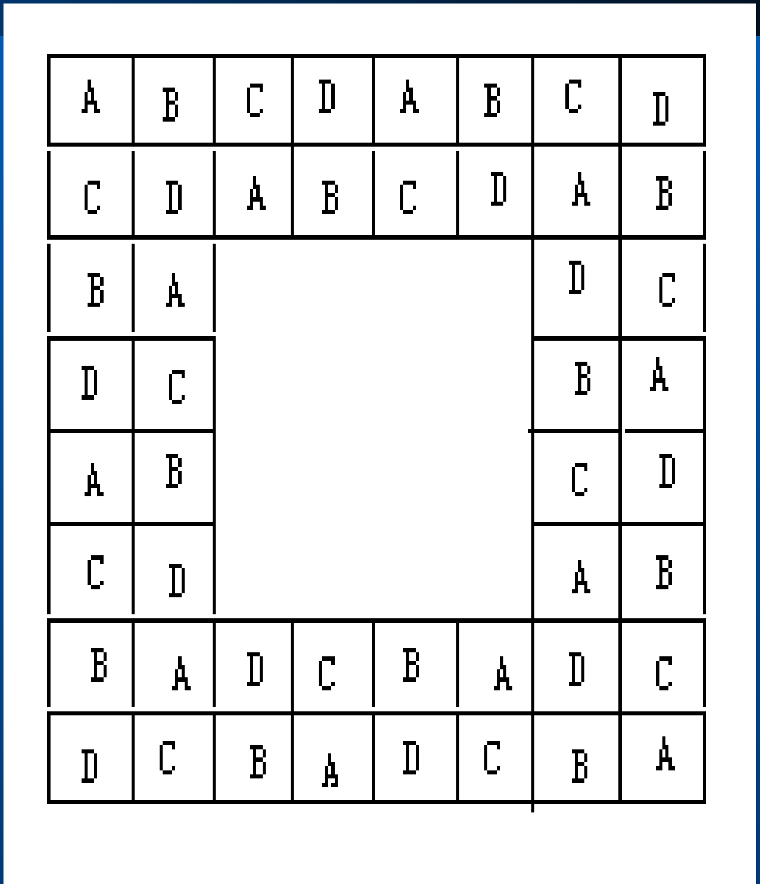
- 例 4　求 n*n 棋盘的哈氏圈

- 分析　：
- 将棋盘自然染色，考察无解情况。
- 马无论怎么走，都必须按黑格—白格—黑格—白格．．．．．．．如此循环。由于要回到起点（起点与终点同色），途经两种颜色的格子数必相等，可知 n 为奇数时无解。
- 因为大小限制， n<6 时也无解



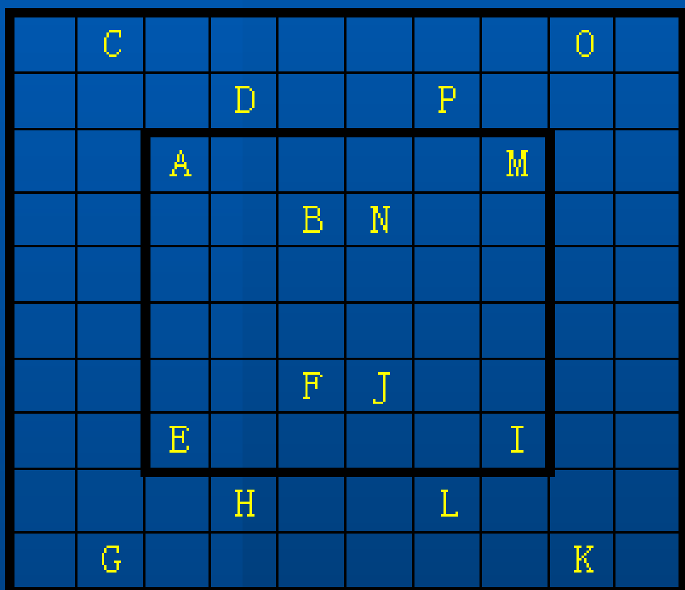
3-2　马的哈氏圈

- 当 n>=6 且为偶数时，用镶边法构造
- n*n 的大矩形是由 (n-4)*(n-4) 的小矩形套上一个宽为 2 的环组成的。而宽为 2 的环有一个特点，就是可用四条回路 A、B、C、D 刚好覆盖
- 假设 (n-4)*(n-4) 的棋盘已找到哈氏圈
- 那么只要设法将 A、B、C、D 四条回路嵌入其中，则 n*n 的矩形的哈式圈就构造出来了



3-2 马的哈氏圈

- 1） n 除以 4 余 2 时，
- 在内矩形四个角（A 、 E 、 I 、 M ）上分别开口。

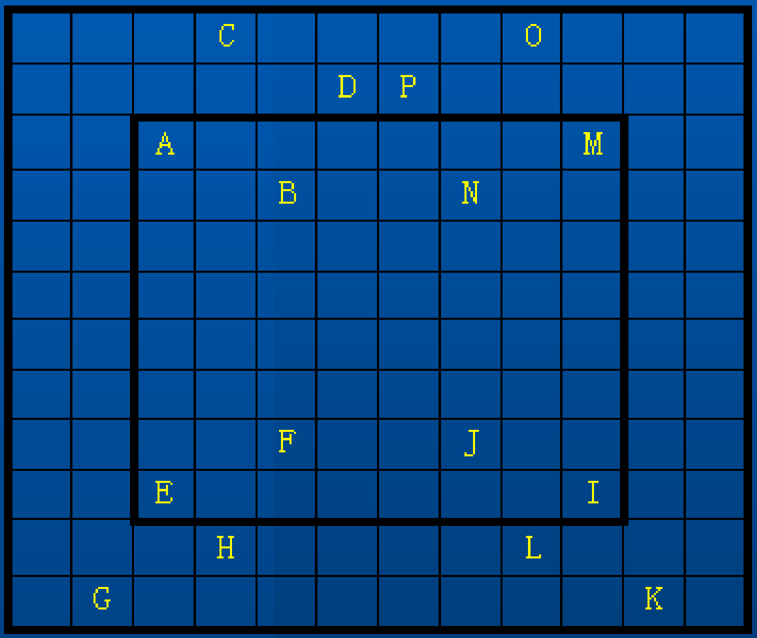


1	16	19	26	7	4
20	25	2	5	18	27
15	26	17	8	3	6
24	21	32	11	28	9
35	14	23	30	33	12
22	31	34	13	10	29

- 1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A 、 B 上对接，变成 A-C- . . . -D-B
- 2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E 、 F 上对接，变成 E-G- . . . -H-F
- 3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I 、 J 上对接，变成 I-K- . . . -L-J

3-2 马的哈氏圈

- 2） n 除以 4 余 0 时
- 在内矩形四个角（A、E、I、M）上分别开口。



1	54	47	38	49	52	31	26
46	39	2	53	32	27	22	51
55	64	37	48	3	50	25	30
40	45	56	33	28	23	4	21
63	36	61	44	57	20	29	24
60	41	34	15	12	5	8	19
35	62	43	58	17	10	13	6
42	59	16	11	14	7	18	9

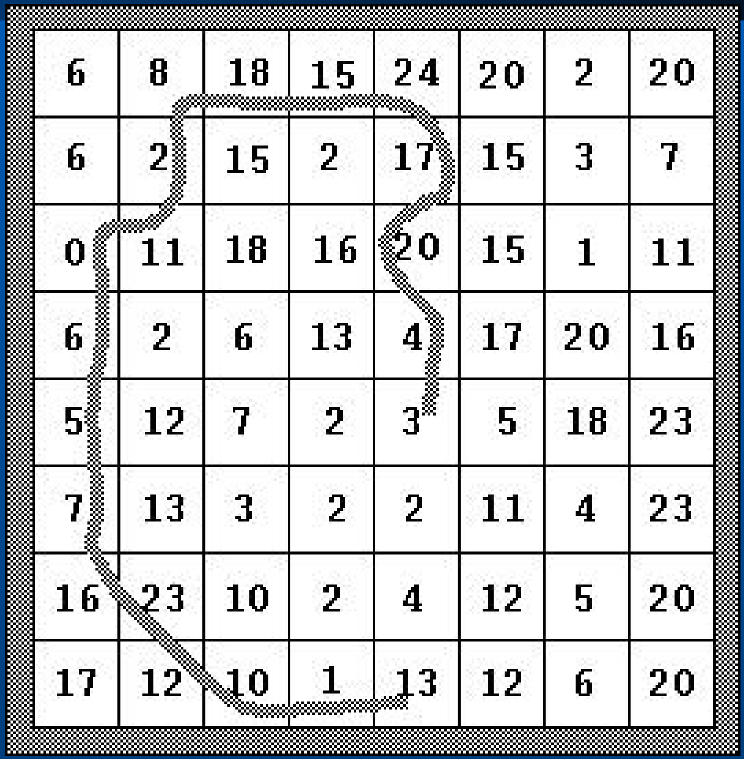
- 1 将 C 与 D 所在的外回路与“内矩形”的回路在 A 、 B 上对接，变成 A-C-．．．-D-B
- 2 将 G 与 H 所在的外回路与“内矩形”的回路在 E 、 F 上对接，变成 E-G-．．．-H-F
- 3 将 K 与 L 所在的外回路与“内矩形”的回路在 I 、 J 上对接，变成 I-K-．．．-L-J

3-2　马的哈氏圈

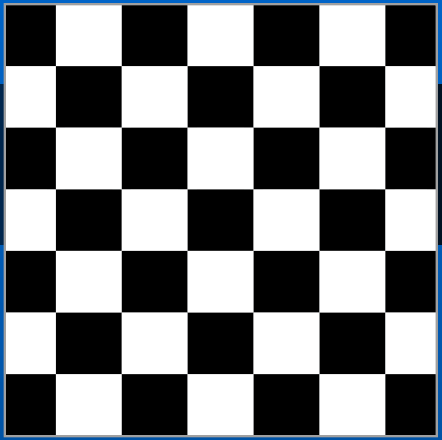
- 一个猜想：
- m*n （ m<=n ）棋盘不存在哈氏圈的充要条件是：
- m, n 满足下列条件之一
- （ 1 ）　　　　　　m, n 都是奇数
- （ 2 ）　　　　　　m=1, 2 或 4
- （ 3 ）　　　　　　m=3 且 n=4, 6, 8
- 还没有证明

4 其它应用

- **例 5** 蠕虫世界 （Uva）
- 蠕虫在一张 N*N 的网上爬行。每个网格上有一个数字，蠕虫不能经过相同的数字两次。开始的时候，蠕虫任意选择一个格子作为起始点。它爬行只能沿水平或竖直方向，且不能超出网外。蠕虫如何移动才能到达尽可能多的网格呢？右面是一个样例。



4 其它应用



- 分析：
- 采用“染色法”贪心出一个上界。
- 1 自然染色
- 2 设 Tfree,Tblack,Twhite 分别记录三类格子数量
- 对每一种数字（1， 2， 3……）分析
- 1）只存在标有该数字的白色格子， Twhite←Twhite+1
- 2）只存在标有该数字的黑色格子， Tblack←Tblack+1
- 3）存在标有该数字的黑白两色格子， Tfree←Tfree+1
- 3 估价上界
- **Lmax= (Twhite+Tfree)*2+1 (Twhite+Tfree<Tblack)**
- **Twhite+Tfree+Tblack (Twhite+Tfree≥Tblack)**
- (假设 Twhite<=Tblack, 否则交换即可)

5　结语

- 染色法　ô　• 存在性问题
- 构造法　□　• 可行性问题

- 在以棋盘为模型的问题中，综合运用这两种方法，双管齐下，往往能收到事半功倍的效果！

谢谢！