§1. Formules générales.

Dans ce formulaire, on appellera courbe de genre 1 sur un schéma de base S un morphisme propre et plat de présentation finie

$$p : E \longrightarrow S,$$

muni d'une section e contenue dans l'ouvert de lissité, dont les fibres géométriques sont des courbes réduites irréductibles de genre arithmétique 1. Les fibres géométriques de p sont donc soit :

a) une courbe elliptique, i.e. une courbe propre, lisse et connexe de genre 1,

b) une droite projective dont on a identifié deux points distincts (cubique dans $\mathbf{P}_2$ à point double ordinaire), (multiplicatif)

c) une droite projective dont on a identifié deux points infiniment voisins (cubique dans $\mathbf{P}_2$ à singularité cuspidale). (additif)

On dira dans le cas a) (resp. b),c)) que la fibre est de type elliptique (resp. multiplicatif, resp. additif).

Si E est une courbe de genre 1 sur S, on définit un faisceau inversible ω sur S par la formule

$$\omega = e^{*}\Omega^{1}_{E/S}.$$

La section e est un diviseur de Cartier relatif de E sur S ; de plus, on vérifie fibre par fibre que

$$R^{1}p_{*}\mathcal{O}(ne) = 0, \quad n > 0 .$$

Il en résulte, par Riemann-Roch, que pour $n > 0$, le faisceau $p_{*}\mathcal{O}(ne)$ est localement libre de rang n, et que sa formation commute à tout changement de base. La suite exacte de cohomologie fournit de plus une suite exacte

$$0 \longrightarrow p_* \mathcal{O}(ne) \longrightarrow p_* \mathcal{O}((n+1)e) \longrightarrow \omega^{\otimes -(n+1)} \longrightarrow 0 \qquad (n > 0).$$

Par ailleurs, $\mathcal{O}(e)$ étant localement libre de rang 1, on vérifie fibre par fibre, compte tenu de (SGA 1 X 1.2), que

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \quad \mathcal{O}_E \xrightarrow{\sim} \quad p_* \mathcal{O}(e).$$

En d'autres termes, les $p_* \mathcal{O}(me)$ pour $1 \leq m \leq n$ définissent une filtration de $p_* \mathcal{O}(ne)$, de gradué associé

$$\mathrm{Gr}\, p_* \mathcal{O}(ne) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^{n} \omega^{\otimes -i} . \tag{1.1}$$

Le morphisme p est d'intersection complète relative ; il en résulte que $Rp^! \mathcal{O}_S \in D^+(E)$ a un seul groupe de cohomologie non nulle, $R^1 p^! \mathcal{O}_S$, et que ce dernier est un faisceau inversible sur E ; on l'appelle le faisceau des différentielles régulières sur E et on le désigne par $\Omega^{reg}_{E/S}$. Là où p est lisse, on a $\Omega^{reg}_{E/S} = \Omega^1_{E/S}$. La dualité montre que $R^1 p_* \Omega^{reg}_{E/S}$ est isomorphe à $\mathcal{O}$, $p_* \Omega^{reg}_{E/S}$ est donc localement libre, de formation compatible à tout changement de base et, raisonnant fibre par fibre, on en déduit que

$$p_* \Omega^{reg}_{E/S} \xrightarrow{\sim} e^* \Omega^1_{E/S} = \omega ,$$

et que pour la flèche adjointe à la flèche inverse

$$p^* \omega \xrightarrow{\sim} \Omega^{reg}_{E/S} .$$

Les sections de $\Omega^{reg}_{E/S}$ ainsi associées aux sections de ω sur S

s'appellent les différentielles invariantes.

Soit π une section inversible de ω ; il existe, localement pour la topologie de Zariski, une base $(y,x,1)$ de $p_*\mathcal{O}(3e)$ telle que l'image de y dans $\omega^{\otimes -3}$ soit $\pi^{\otimes -3}$, que x appartienne à $p_*\mathcal{O}(2e)$, et que son image dans $\omega^{\otimes -2}$ soit $\pi^{\otimes -2}$. Si π' est une autre section inversible de ω , les bases correspondantes s'écrivent toutes, sous forme implicite (pour r,s,t convenables)

$$(1.2) \qquad \begin{cases} x = u^2x' + r \\ y = u^3y' + su^2x' + t \\ \pi' = u\pi \end{cases}$$

Le faisceau $\mathcal{O}(3e)$ est très ample et $(x,y,1)$ sont les coordonnées projectives d'un plongement de E dans $\mathbf{P}^2/S$.

La courbe image vérifie

$$(1.3) \qquad y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 .$$

Pour vérifier l'existence et l'unicité de cette équation, on utilise (1.1) , en regardant les deux membres de (1.3) comme des section de $p_*\mathcal{O}(6e)$: en effet, $y^2 - x^3$ est dans $p_*\mathcal{O}(6e)$, xy dans $p_*\mathcal{O}(5e)$, x^2 dans $p_*\mathcal{O}(4e)$, y dans $p_*\mathcal{O}(3e)$, x dans $p_*\mathcal{O}(2e)$ et 1 dans $p_*\mathcal{O}$.

Si on pose

$$F(x,y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6$$

la forme différentielle invariante définie par π s'écrit

$$\pi = dx/F_y = - dy/F_x \qquad \text{soit}$$

$$\pi = \frac{dx}{2y+a_1x+a_3} = \frac{dy}{3x^2+2a_2x+a_4-a_1y}$$

Réciproquement toute équation (1.3) est l'équation non homogène d'une courbe de genre 1 plongée comme une cubique dans $\mathbf{P}^2$ et présentant un point d'inflexion en (0,1,0) avec la droite de l'infini pour tangente d'inflexion (ceci signifie que la droite de l'infini découpe sur la courbe un diviseur égal à trois fois le point (0,1,0)).

On pose alors

$$(1.4)\quad \begin{cases} b_2 = a_1^2 + 4a_2 \quad b_4 = a_1a_3 + 2a_4 \quad b_6 = a_3^2 + 4a_6 \\ -b_8 = a_1a_3a_4 + a_4^2 - a_1^2a_6 - a_2a_3^2 - 4a_2a_6 \\ d_6 = b_2b_4 - 18b_6 \quad d_8 = b_2^2b_4 - 48b_4^2 + 18b_2b_6 \end{cases}$$

On a

$$-4b_8 = b_4^2 - b_2b_6$$

$$12d_6 = c_6 + b_2c_4 \qquad -12d_8 = c_4^2 + b_2c_6$$

$$(1.5)\quad \begin{aligned} c_4 &= b_2^2 - 24b_4 \qquad -c_6 = b_2^3 - 36b_2b_4 + 216b_6 \\ \Delta &= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6 \\ &= b_4^3 - 27b_6^2 + b_8(36b_4 - b_2^2) \end{aligned}$$

Soient maintenant (x',y',π') reliés à (x,y,π) par (1.2). On a :

$$(1.6)\quad \begin{cases} ua_1' = a_1 + 2s \\ u^2a_2' = a_2 - sa_1 + 3r - s^2 \\ u^3a_3' = a_3 + ra_1 + 2t = F_t(r,t) \\ u^4a_4' = a_4 - sa_3 + 2a_2r - (t+rs)a_1 + 3r^2 - 2st = -F(r,t) - sF_t(r,t) \\ u^6a_6' = a_6 + ra_4 + r^2a_2 + r^3 - ta_3 - t^2 - rta_1 = -F(r,t) \end{cases}$$

$$(1.7)\quad \begin{cases} u^2b_2' = b_2 + 12r \\ u^4b_4' = b_4 + rb_2 + 6r^2 \quad \text{(forme de discr. } c_4\text{)} \\ u^6b_6' = b_6 + 2rb_4 + r^2b_2 + 4r^3 \quad \text{(forme de discr. } 16\,\Delta\text{)} \\ u^8b_8' = b_8 + 3rb_6 + 3r^2b_4 + r^3b_2 + 3r^4 \\ u^6d_6' = d_6 + c_4r \\ u^8d_8' = d_8 - c_6r \end{cases}$$

$$(1.8)\qquad u^4c_4' = c_4 \qquad u^6c_6' = c_6 \qquad u^{12}\Delta' = \Delta\ .$$

Les formules (1.8) expriment que la section $c_4\pi^{\otimes 4}$ (resp. $c_6\pi^{\otimes 6}$, resp. $\Delta\pi^{\otimes 12}$) du fibré $\omega^{\otimes 4}$ (resp. $\omega^{\otimes 6}$, $\omega^{\otimes 12}$) ne dépend pas du choix arbitraire de π, x et y.

Voici le dictionnaire avec les notations de Ogg. Ogg considère la courbe

$$G(x,y) = y^2 + \alpha_1 xy + \alpha_3 y + x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_6 = 0$$

munie de la forme différentielle $-dx/G_y = dy/G_x$. On peut prendre pour fonctions (y,x) de Tate y et $-x$. Les quantités a_i, b_i, c_i, Δ, définies plus haut sont alors, avec les notations de Ogg

Tate	y	x	a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	b_2	b_4	b_6	b_8	c_4	c_6	Δ
Ogg	y	$-x$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	α_3	α_4	$-\alpha_6$	β_2	β_4	β_6	$-\beta_8$	γ_4	$-\gamma_6$	Δ .

§2. Cas où 2 et 3 sont inversibles.

Lorsque 2 et 3 sont inversibles, on peut d'une et d'une seule façon choisir x et y (π étant donné) de sorte que dans l'équation (1.3) on ait $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. On a alors

(2.1) $\quad y^2 = x^3 + a_4x + a_6 \qquad$, avec $\quad \pi = dx/2y$,

(2.2) $\quad c_4 = -2^4 3a_4 \quad , \quad c_6 = -2^5 3^3 a_6 \quad , \quad \Delta = 2^4(-4a_4^3 - 27a_6^2)$.

Posant $Y = 2y$, $X = x$, on retombe sur la forme de Weierstrass

(2.3) $\quad Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$, avec $\pi = dX/Y$, et

(2.4) $\quad g_2 = -4a_4 = \frac{1}{12} c_4 \quad g_3 = -4a_6 = \frac{1}{216} c_6 \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2$.

PROPOSITION 2.5. <u>Au dessus de</u> $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[2^{-1},3^{-1}])$, <u>il existe un schéma de modules pour les courbes de genre un munies d'une forme différentielle invariante inversible</u>. <u>Ce schéma est</u>

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[2^{-1},3^{-1}][g_2,g_3]) \quad ,$$

<u>avec pour courbe universelle (en coordonnées non homogènes)</u>

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$$

<u>et pour différentielle invariante</u> $\pi = dX/Y$

De plus, lorsque 2 et 3 sont inversibles, la donnée d'une forme différentielle invariante suffit à rigidifier une courbe de genre 1.

Il résulte aussitôt de (2.2) qu'on a

(2.6) $$c_4^3 - c_6^2 = 1728\,\Delta$$

et cette formule, se réduisant à une identité algébrique, est valable en toute caractéristique.

§3. Cas où 2 est inversible.

Supposons que E soit une courbe de genre un sur une base S où 2 soit inversible. La forme différentielle invariante π étant donnée, on peut choisir x et y tels que dans (1.3) on ait $a_1 = a_3 = 0$. Les changements de coordonnées respectant cette condition s'obtiennent en faisant $u = 1$, $s = t = 0$ dans (1.2).

On a donc

$$(3.1) \quad y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

$$(3.2)\begin{cases} b_2 = 4a_2 \quad b_4 = 2a_4 \quad b_6 = 4a_6 \quad d_6 = 8(a_2a_4 - 9a_6) \\ c_4 = 2^4(a_2^2 - 3a_4) \quad -c_6 = 2^6a_2^3 - 2^5 3^2 a_2a_4 + 2^5 3^3 a_6 \\ \Delta = 2^4\delta \ , \end{cases}$$

où δ est le discriminant du second membre de (3.1). Le discriminant δ étant invariant par translation, il suffit de vérifier cette identité algébrique pour 3 inversible et $a_2 = 0$.

Lorsque c_4 est inversible, un et un seul choix de x et y donne $d_6 = 0$, i.e. $a_2a_4 - 9a_6 = 0$. On a, lorsque cette condition est remplie,

$$(3.3) \quad -c_6 = 2^6(a_2^3 - 3^3a_6) \qquad \Delta = 2^6(-a_2^3a_6 - a_4^3 + 2.3^3a_6^2)$$

et

$$(3.4) \qquad \begin{cases} a_2c_4 = -2^{-2}c_6 \\ a_4c_4^2 = -2^2 3^2\Delta \\ a_6c_4^3 = c_6\Delta \end{cases}$$

Il suffit de vérifier ces identités en caractéristique 0, auquel cas la troisième est le produit des deux premières, puisque $d_6 = 0$.

PROPOSITION 3.5. *Au dessus de* $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[2^{-1}])$, *il existe un schéma de module pour les courbes de genre un munies d'une forme différentielle invariante inversible et telles que* c_4 *soit inversible. Ce schéma est*

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[2^{-1}][a_2, a_4, a_6, (a_2^2 - 3a_4)^{-1}]/(a_2a_4 - 9a_6))$$

avec pour courbe universelle (en coordonnés non homogènes)

$$y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

et pour différentielle invariante $\pi = dx/2y$.

De plus, sous ces hypothèses, la donnée d'une forme différentielle invariante suffit à rigidifier une courbe.

§4. Caractéristiques 2 et 3 .

a) Caractéristique 2

En caractéristique 2 , $(1.6)_1$ se réduit à $ua_1' = a_1$, ce qui signifie que la section $a_1\pi$ de ω ne dépend pas du choix de π, x et y . On a

$$c_4 = a_1^4 \quad \text{et} \quad c_6 = a_1^6 . \tag{4.1}$$

En caractéristique 2 , la forme différentielle ne suffit plus jamais à rigidifier une courbe de genre un.

b) Caractérisitque 3

En caractéristique 3 , $(1.7)_2$ se réduit à $u^2b_2' = b_2$, ce qui signifie que la section $b_2\pi^{\otimes 2}$ de $\omega^{\otimes 2}$ ne dépend pas du choix de π, x et y . On a

$$c_4 = b_2^2 \quad \text{et} \quad c_6 = -b_2^3 . \tag{4.2}$$

c) <u>Cas où</u> $2 = 0$, $a_1 = 0$ (<u>donc</u> $c_4 = c_6 = 0$).

Dans ce cas, la forme π étant donnée, on peut choisir x et y tels que (1.3) soit

$$(4.3) \qquad y^2 + a_3y = x^3 + a_4x + a_6 \qquad \pi = \frac{dx}{a_3} = dy/x^2 + a_4 \qquad \Delta = a_3^4 .$$

Les autres systèmes (π, x, y) donnant une équation de cette forme s'obtiennent en faisant $r = s^2$ dans (1.2) et

$$(4.4) \qquad \begin{cases} u^3a_3' = a_3 \\ u^4a_4' = a_4 + sa_3 + s^4 \\ u^6a_6' = a_6 + s^2a_4 + ta_3 + s^6 + t^2 . \end{cases}$$

d) <u>Cas où</u> $3 = 0$, $b_2 = 0$ (<u>donc</u> $c_4 = c_6 = 0$) .

Dans ce cas, lorsque l'équation est mise sous forme (3.1) , on a $a_2 = 0$

$$(4.5) \qquad y^2 = x^3 + a_4x + a_6 \qquad \pi = a_4^{-1}dy = dx/2y \qquad \Delta = -a_4^3 .$$

Les autres systèmes (π, x, y) donnant une équation de cette forme s'obtiennent en faisant $s = t = 0$ dans (1.2) et

$$(4.6) \qquad \begin{cases} u^4a_4' = a_4 \\ u^6a_6' = a_6 + ra_4 + r^3. \end{cases}$$

e) <u>Cas où</u> c_4 <u>est inversible</u>, <u>au voisinage de</u> 2 .

Lorsque c_4 est inversible, S est réunion d'un ouvert où 2 est inversible et d'un ouvert où a_1 l'est. Remplaçant S par un ouvert contenant tous les points de caractéristique 2 , on peut alors trouver π, x et y tels que $a_1 = 1$ et $a_3 = 0$. Les changements de coordonnées (u, r, s, t) tels que $a_1' = 1$, $a_3' = a_4' = 0$ vérifient alors $u = 1 + 2s$, $r = -2t$ et $a_4 = t(1 + 4(a_2 - 3t))$. D'après le théorème des fonctions implicites, cette dernière équation (en t) admet une solution congrue à a_4 mod 2 au voisinage étale de tout point de caractéristique 2 . Remplaçant S par S'/S , étale sur S et recouvrant les points de caractéristique 2 , on peut donc trouver π, x et y donnant lieu à une équation

(4.7) $\qquad y^2 + xy = x^3 + a_2x^2 + a_6 \qquad \pi = dx/(x + 2y)$.

Si 2 est nilpotent dans S , il n'est pas nécessaire de remplacer S par un S' .

Au voisinage de la caractéristique 2 , les autres choix de x, y donnant lieu à une telle équation s'obtiennent en faisant, dans (1.2)

(4.8) $\qquad r = t = 0 \qquad u = 1 + 2s$

et on a alors

(4.9) $$\begin{cases} u^2 a_2' = a_2 - s - s^2 \\ u^6 a_6' = a_6 \end{cases}$$

et modulo 2

(4.10) $\qquad c_4 = 1 \qquad c_6 = 1 \qquad \Delta = a_6$.

§5. Applications.

PROPOSITION 5.1. Si E est une courbe de genre un sur un corps algébriquement clos, E est de type elliptique (resp. multiplicatif, resp. additif) si et seulement si $\Delta \neq 0$ (resp. $\Delta = 0$ et $c_4 \neq 0$, resp. $\Delta = c_4 = 0$).

a) Lorsque la caractéristique $p \neq 2$, la première assertion résulte de la troisième formule (3.2) . Lorsque $p = 2$ et $c_4 \neq 0$, on vérifie aussitôt que la différentielle de (4.7) ne s'annule qu'en $(0, 0)$, et Δ est elliptique si et seulement si $\Delta = a_6 \neq 0$. Pour $p = 2$ et $c_4 = 0$, on raisonne de même sur (4.3) .

b) Lorsque $p \neq 2$, il résulte de (3.2) que $\Delta = c_4 = 0$ si et seulement si le deuxième membre de (3.1) a toutes ses racines égales, ce qui caractérise le cas additif.

c) Lorsque $p = 2$, $\Delta = 0$, $c_4 \neq 0$, la partie principale de (4.7) en $(0, 0)$ est $y^2 + xy + a_2 x^2 = 0$, ce qui correspond à un point double à tangentes distinctes.

d) Lorsque $p = 2$, $\Delta = 0$, $c_4 = 0$, la partie principale de (4.3) en $(0, 0)$ est $y^2 + a_4 x + a_6 = 0$, ce qui correspond à une singularité cuspidale.

Soit alors E une courbe de genre un sur une base S, sans fibre de type additif. Puisque Δ et c_4 ne sont jamais simultanément nuls, et sont respectivement des sections de $\omega^{\otimes 12}$ et $\omega^{\otimes 4}$, on définit une section j de $\mathbf{P}^1/S$ par les formules

$$(5.2) \qquad \begin{cases} j = c_4^3 / \Delta \\ j - 1728 = c_6^2 / \Delta . \end{cases}$$

PROPOSITION 5.3. *Soient* E *et* E' *deux courbes de genre un sur* S, *sans fibre additive*.

(I) $\underline{\mathrm{Isom}}(E,E')$ *est représentable, fini et non ramifié sur* S.

(II) *Si* $j_E = j_{E'}$, *la projection de* $\underline{\mathrm{Isom}}(E,E')$ *sur* S *est surjective*.

(III) *Si* $j_E = j_{E'}$ *ne prend pas les valeurs* 0 *et* 1728, $\underline{\mathrm{Isom}}(E,E')$ *est un revêtement étale de rang* 2 *de* S.

Donnons-nous E et E' par des équations (1.3) et (1.3)'. Se donner un isomorphisme entre E et E' revient à se donner u, r, s et t, vérifiant les équations (1.6), donc aussi (1.7) et (1.8), u devant de plus être inversible. Par hypothèse, localement sur S, c_4 ou Δ est inversible (5.1), et de même c_4' ou Δ' l'est.

Localement sur S , les équations (1.8) sont donc des équations de dépendance intégrale pour u et u^{-1} , les équations $(1.7)_6$ ou $(1.7)_8$ des équations de dépendance intégrale pour r et enfin $(1.6)_6$ (resp. $(1.6)_2$) est une équation de dépendance intégrale pour t (resp. s) . Ceci prouve que $\underline{\mathrm{Isom}}(E,E')$ est représentable par un schéma fini que S ; il est même non ramifié car les courbes considérées n'ont pas d'automorphismes infinitésimaux (respectant l'origine).

Lorsque 2 est inversible sur S , l'assertion (III) résulte de l'énoncé plus précis suivant.

PROPOSITION 5.4. *Soient E et E' deux courbes de genre un sur S , sans fibre additive, munies de formes différentielles invariantes π et π' , et de même invariant modulaire. On suppose que 2 , c_4 et c_6 sont inversibles. Alors, le schéma $\underline{\mathrm{Isom}}(E,E')$ s'identifie au schéma défini par l'équation*

$$\lambda^2 = c_4 c_6' / c_6 c_4' .$$

En vertu de (3.6) , se donner (E, π) revient à se donner a_2 , a_4 et a_6 vérifiant $a_2 a_4 - 9a_6 = 0$, et un isomorphisme de E sur E' est décrit par λ tel que (E, π) soit isomorphe à $(E',\lambda\pi')$, i.e. par λ vérifiant

$$(5.4.1) \qquad a_2' = \lambda^2 a_2 \qquad a_4' = \lambda^4 a_4 \qquad a_6' = \lambda^6 a_6 .$$

Par hypothèse $j = j'$, de sorte que (c_4^3, c_6^2, Δ) est proportionnel à $(c_4'^3, c_6'^2, \Delta')$, et que $\mu = c_4 c_6'/c_6 c_4'$ vérifie

$$(5.4.2) \qquad c_4' = \mu^2 c_4 \qquad c_6' = \mu^3 c_6 \qquad \Delta' = \mu^6 \Delta .$$

En vertu de (3.4) , on a alors

$$a_2' = \mu a_2 \qquad a_4' = \mu^2 a_4 \qquad a_6' = \mu^3 a_6 .$$

De plus, d'après (3.4) encore, localement, soit a_2, soit a_4 et a_6 sont inversibles, de sorte que (5.4.1) équivaut à $\lambda^2 = \mu$.

Pour prouver (III) en général, il reste à étudier le voisinage de la caractéristique 2. Des arguments standard permettraient même de se restreindre au cas où 2 est nilpotent. D'après 4 e), on peut supposer que les courbes considérées se mettent sous la forme (4.7)

$$y^2 + xy = x^3 + a_2x + a_6 .$$

Un isomorphisme d'une telle courbe E sur une autre E' est défini par (u, r, s, t) vérifiant (1.6), et en particulier (cf. 4. e) $t(1 + 4(a_2 - 3t)) = 0$. Puisque t vérifie une équation de dépendance intégrale, seule la solution $t = 0$ est possible dans un voisinage de la caractéristique 2. Dans ce voisinage, les isomorphismes $E \xrightarrow{\sim} E'$ sont décrits par s vérifiant (4.9) pour $u = 1 + 2s$. Dans un voisinage peut-être plus petit, la première de ces équations

$$(1 + 2s)^2 a_2' = a_2 - s - s^2$$

définit un revêtement étale de degré deux et, si $j = j'$, implique la seconde. Pour le voir, on se ramène à supposer que $a_2 = a_2'$ et on remarque que d'après (4.10)

$$1/j = a_6 + 2\, R(a_2, a_6)$$

pour une fraction rationnelle R.

Pour vérifier (II) dans les cas non couverts par (III), on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos et que $c_4 = 0$ ou $c_6 = 0$, i.e. que $j = 0$ ou $j = 1728$. Soit p la caractéristique du corps.

a) $p \neq 2, 3$: on met la courbe sous la forme (2.1) ; si $c_4 = 0$ (resp. $c_6 = 0$) on a $a_4 = 0$ (resp. $a_6 = 0$) et on peut par homothétie transformer la courbe en la courbe type

(5.5) $$y^2 = x^3 + 1 \qquad (\text{si} \quad c_4 = 0)$$

(5.6) $$y^2 = x^3 - x \qquad (\text{si} \quad c_6 = 0)$$

b) $p = 3$ et $b_2 = 0$: on met la courbe sous la forme (4.5) ; résolvant (4.6) pour $a_4' = 1$ et $a_6' = 0$, on met la courbe sous la forme type

(5.7) $$y^2 = x^3 - x \qquad (\text{si} \quad 3 = 0, \quad b_2 = 0)$$

c) $p = 2$ et $a_1 = 0$: ici, on met la courbe sous la forme (4.3) et on résoud (4.4) avec $a_3 = 1$, $a_4 = a_6 = 0$ pour obtenir la forme type

(5.8) $$y^2 + y = x^3 \qquad (\text{si} \quad 2 = 0, \quad a_1 = 0)$$

Pour compléter le tableau, reste à décrire les automorphismes des courbes elliptiques.

PROPOSITION 5.9. *Soit* E *une courbe de genre un sur une base* S , *sans fibre additive*.

(I) *Si* c_4 *et* c_6 *sont inversibles, les seuls automorphismes de* E *(respectant l'origine) sont l'identité et la symétrie*

$$(x, y) \longmapsto (x, -y - a_1 x - a_3) .$$

(II) *Si* 2 *et* 3 *sont inversibles, l'application canonique*

(5.10) $$\underline{\mathrm{Aut}}(E) \longrightarrow \mathbf{G}_m$$

donnée par l'action sur les différentielles invariantes, est une immersion fermée.

(III) *Si* 2 *et* 3 *sont inversibles, et que* $c_4 = 0$ *(resp.*

$c_6 = 0$) l'image de (5.10) est μ_6 (resp. μ_4) .

Supposons maintenant que S soit le spectre d'un corps algébriquement clos.

(IV) Si $3 = b_2 = 0$, $\mathrm{Aut}(E)$ est isomorphe au produit semi-direct (non commutatif) de $\mathbf{Z}/(4)$ par $\mathbf{Z}/(3)$, et l'image de (5.10) est μ_4 .

(V) Si $2 = a_1 = 0$, $\mathrm{Aut}(E)$ est géométriquement d'ordre 24, et l'image de (5.10) est μ_3 (voir aussi 7.4).

PREUVE :

(I) D'après (5.3) , il n'y a en effet pas plus de deux automorphismes.

(II et III) Lorsque les courbes sont mises sous la forme (2.1) , il résulte de (2.5) que les automorphismes sont décrits par leur action sur π et que $\lambda \in \mathbf{G}_m$ définit un automorphisme si et seulement si

$$c_4 = \lambda^4 c_4 \quad \text{et} \quad c_6 = \lambda^6 c_6 \ ,$$

d'où les assertions.

(IV) Si la courbe est mise sous forme (4.5) , les automorphismes sont donnés par (1.2) : $x' \longmapsto x$, pour $s = t = 0$ et

$$\begin{cases} u^4 = 1 \\ r^3 + ra_4 + a_6(1 - u^2) = 0 \end{cases}$$

et la loi de composition par

$$(u',r') \circ (u,r) = (uu' \ , \ u'^2 r + r') \ .$$

Lorsque la courbe est mise sous forme (5.7) , ces équations se réduisent à $u \in \mu_4$ et $r \in \mathbf{F}_3$.

(V) Si la courbe est mise sous forme (4.3), les automorphismes sont donnés par (1.2) : $x' \longmapsto x$, pour $r = s^2$ et

$$\begin{cases} u^3 = 1 \\ s^4 + sa_3 + a_4(1-u) = 0 \\ t^2 + ta_3 + s^6 + s^2 a_4 = 0 \end{cases}$$

et la loi de composition par

$$(u', s', t') \circ (u, s, t) = (uu', u's + s', u'^3 t + t' + u'^2 s^2 s').$$

Lorsque la courbe est mise sous forme (5.5), ces équations se réduisent à

$$u \in \mu_3 \quad s \in \mathbf{F}_4 \quad t^2 + t = s^3 \quad (= 0 \text{ ou } 1 \text{ selon que } s = 0 \text{ ou } s \neq 0).$$

§6. Anneau des formes modulaires entières.

On appelle forme modulaire entière de poids n une loi qui, à chaque courbe de genre un sur une base S, associe une section de $\omega^{\otimes n}$, et ce de façon compatible au changement de base. Il reviendrait au même de se limiter aux courbes sans fibres additives.

PROPOSITION 6.1. L'anneau des formes modulaires entières est engendré sur $\mathbf{Z}$ par c_4, c_6 et Δ soumis à la seule relation

$$c_4^3 - c_6^2 = 1728\,\Delta . \tag{6.2}$$

Appliquant la définition à la courbe (1.3), on voit qu'une forme modulaire entière de poids n s'exprime comme polynôme de poids n en les a_i. Pour 2 et 3 inversibles, il résulte de 2.5 que ces formes sont les polynômes en c_4 et c_6, et en particulier que c_4, et c_6 , et en particulier que c_4 , c_6 et Δ ne satisfont pas à d'autres relations que (6.2) . Reste à prouver que, si un polynôme en c_4 , c_6 et Δ est identiquement nul en caractéristique 2 (resp. 3) , alors il est divisible par 2 (resp. 3) dans $\mathbf{Z}[c_4, c_6, \Delta]/(c_4^3 - c_6^2 - 1728\,\Delta)$, ce qui signifie qu'il est divisible par $c_4^3 - c_6^2$ dans $\mathbf{Z}/(2)[c_4, c_6, \Delta]$ (resp. $\mathbf{Z}/(3)[c_4, c_6, \Delta]$) . Cela résulte de la structure de l'anneau des formes modulaires de caractéristique 2 (resp. 3) :

PROPOSITION 6.2.

(I) <u>L'anneau des formes modulaires de caractéristique</u> 2 <u>est</u> $\mathbf{Z}/(2)[a_1, \Delta]$, <u>et</u> $c_4 = a_1^4$, $c_6 = a_1^6$.

(II) <u>L'anneau des formes modulaires de caractéristique</u> 3 <u>est</u> $\mathbf{Z}/(3)[b_2, \Delta]$, <u>et</u> $c_4 = b_2^2$, $c_6 = -b_2^3$.

On a vu en 4 a) et 4 b) que a_1 (resp. b_2) est une forme modulaire de caractéristique 2 (resp. 3) .

En caractéristique 2 , cherchons tout d'abord les formes modulaires relatives aux seules courbes telle que a_1 soit inversible. Ces courbes se mettent sous forme (cf. (4.1))

$$y^2 + a_1xy = x^3 + a_2x^2 + a_6 \qquad \pi = \frac{dx}{a_1x}$$

et, compte tenu de (4.3) , on voit que ces formes s'écrivent

$$a_1^{-n} P(a_1, a_6) \quad \text{pour } P \text{ isobare, ou encore}$$
$$a_1^{-m} Q(a_1, \Delta)$$

et cela garde un sens pour $a_1 = 0$, $\Delta \neq 0$ si et seulement si on avait en fait affaire à un polynôme en a_1 et Δ .

En caractéristique 3 , raisonnant de même d'abord sur les courbes telles que c_4 soit inversible, et remarquant que $d_6 = 0$ équivaut alors à $a_4 = 0$ dans (3.1), on voit que toute forme modulaire s'écrit

$$b_2^{-n} P(b_2, \Delta) \quad \text{pour } P \text{ isobare ,}$$

et que cette forme modulaire est définie aussi pour $j = 0$ si et seulement si elle s'écrit comme polynôme en b_2 et Δ.

REMARQUE 6.3. La forme modulaire a_1 (resp. $-b_2$), qui n'existe qu'en caractéristique $p = 2$ (resp. 3) est l'<u>invariant de Hasse</u> de poids $p - 1$.

§7. <u>Loi de groupe</u>.

Le fait (7.1) admis sans démonstration figure dans l'article de Deligne et Rapoport, dans ces Proceedings (vol. II, p.189, prop. 2.7).

Soient E de genre un sur S et E° le lieu lisse de E/S. Pour x une section de E/S, notons $m(x)$ l'idéal qui définit $x(S) \subset E$.

PROPOSITION 7.1. <u>Il existe une et une seule addition</u>

$$+ \ : \ E^\circ \times E \longrightarrow E$$

<u>telle que, après tout changement de base, pour toutes sections</u> x <u>de</u> E°/S <u>et</u> y <u>de</u> E/S, <u>on ait, localement sur</u> S

$$m(x + y) \simeq \mathcal{O}(e) \otimes \mathcal{O}(-x) \otimes m(y) .$$

Cette addition fait de E° un schéma en groupe commutatif sur S, agissant sur E. La symétrie $a \longmapsto -a$ se prolonge à E. Pour E sous la forme de Tate (1.3), la symétrie s'écrit

(7.2) $$(x, y) \longmapsto (x, -y - a_1 x - a_3) .$$

Ceci résulte de (5.9) (I) par spécialisation. Les points d'ordre 2 sont les points fixes de cette involution. Par élimination, on trouve que la coordonnée x des points d'ordre 2 autre que l'origine (à l'infini) vérifie (cf. 3.1)

$$(7.3) \qquad 4x^3 + b_2 x^2 + 2b_4 x + b_6 = 0 .$$

7.4. Si S est le spectre d'un corps algébriquement clos k de caractéristique $p \neq 3$, et E une courbe elliptique sur S, on sait que le groupe E_3 des points d'ordre 3 est isomorphe à $(\mathbf{Z}/3)^2$, que $\overset{2}{\Lambda} E_3$ est canoniquement isomorphe à μ_3 et que $\mathrm{Aut}(E)$ s'injecte dans $SL(E_3)$.

Lorsque $p = 2$ et que $a_1 = 0$, comparant les ordres, on trouve

$$\mathrm{Aut}(E) \cong SL(2, \mathbf{F}_3) .$$

On peut montrer que l'anneau des endomorphismes de E est l'anneau des quaternions entiers d'Hurwitz (ordre maximal du corps de quaternions ramifié en 2 et ∞) ; $\mathrm{Aut}(E)$ est encore isomorphe au groupe des unités

$$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \quad \frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2}$$

de cet anneau.

§8. Courbe de Tate. (Pour les définitions sur $\mathbf{Z}$, voir l'article cité de Deligne-Rapoport; pour les démonstrations, voir le livre de Roquette.)

La courbe de Tate est la courbe elliptique sur $\mathbf{Z}((q))$ qui, en terme rigide-analytique, s'écrit

$$E = \mathbf{G}_m / q^{\mathbf{Z}} .$$

Elle se prolonge en une courbe de genre un sur $\mathbf{Z}[[q]]$, et est une cubique nodale pour $q = 0$. On la munit de la forme différentielle "du/u" , où u est la coordonnée courante sur $\mathbf{G}_m$.

Comme coordonnées x,y on peut prendre

$$(8.1)\qquad x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{q^n u}{(1-q^n u)^2} - 2 \sum_{n > 0} \frac{n q^n}{1-q^n}$$

$$y = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{q^{2n} u^2}{(1-q^n u)^3} + \sum_{n > 0} \frac{n q^n}{1-q^n} .$$

On a alors une équation

$$(8.2)\qquad y^2 + xy = x^3 + a_4 x + a_6$$

où

$$(8.3)\qquad \begin{cases} a_4 = - 5 \sum_1^\infty \sigma_3(n)\, q^n \\ a_6 = - \sum_1^\infty \dfrac{5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)}{12}\, q^n \end{cases}$$

et

$$(8.4)\qquad \begin{cases} c_4 = 1 + 240 \sum_1^\infty \sigma_3(n)\, q^n & (E_4 = c_4) \\ -c_6 = 1 - 504 \sum_1^\infty \sigma_5(n)\, q^n & (E_6 = -c_6) \\ \Delta = q \prod_1^\infty (1 - q^n)^{24} \end{cases}$$