MA101a 测验 3 (1.9–1.12)

姓名：______________

说明：本测验不允许使用计算器、笔记或教材．所有数字答案必须为精确值；例如，你应以 π 作答而非 3.14...，$\sqrt{2}$ 而非 1.414...，$\frac{1}{3}$ 而非 0.3333.... 请用完整的语句、正确的语法和书写规范进行论证．

写明你的全部解题过程!

你有20分钟时间．

问题 1 (4分)．叙述数列 $\{a_n\}$ 下确界的定义（注意包括无界的情况），并证明递减数列 $\{a_n\}$ 的下确界为其极限。

(1) 若 $\{a_n\}$ 有下界：对于实数 α 满足 ① $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n\geqslant\alpha$

② $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, s.t. $a_{n_0}<\alpha+\varepsilon$.

则 $\inf\{a_n\}=\alpha$.

若 $\{a_n\}$ 无下界：$\forall M>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, s.t. $a_{n_0}<-M$.

则 $\inf\{a_n\}=-\infty$.

(2) 证明：设 $\inf\{a_n\}=a_*$（a_* 可以是 $-\infty$），当 a_* 为实数时，

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ $a_m\in\{a_n\}$, s.t. $a_m<a_*+\varepsilon$.

由于 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $\inf\{a_n\}=a_*$ 知：当 $n>m$ 时，

$a_*-\varepsilon<a_*\leq a_n\leq a_m<a_*+\varepsilon$ 即 $|a_n-a_*|<\varepsilon$.

由极限定义知．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_*=\inf\{a_n\}$.

若 a_* 为 $-\infty$. $\forall M>0$, $\exists$ $a_m<-M$.

故 当 $n>m$ 时，$a_n\leq a_m<-M$.

由定义知．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty=\inf\{a_n\}$.

问题 2 (2分)．叙述 Heine-Borel 定理。

Heine-Borel 定理：

$[a,b]$ 为一个有限闭区间，则 $[a,b]$ 的任意一个开覆盖 $\{I_\lambda\}$.

即若 $[a,b]\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$（$\Lambda$ 为指标集），则一定存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

s.t. $[a,b]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}I_{\lambda_k}$

问题 3 (4分). 计算 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$。

(1) $a_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$

解：当 $n=4k+1$ 时，$a_{4k+1} = (4k+1)\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}) = 4k+1 \longrightarrow +\infty$，当 $k\to+\infty$ 时

当 $n=4k+3$ 时，$a_{4k+3} = (4k+3)\sin(2k\pi+\frac{3}{2}\pi) = -(4k+3) \to -\infty$，当 $k\to+\infty$ 时

故 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(2) $a_n = \dfrac{1+2^{1/2}+3^{1/3}+\cdots+n^{1/n}}{n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{n-(n-1)} = 1$

~~故~~ 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$