MA101a 测验 4 (1.13–2.3)

姓名：______________

说明：本测验不允许使用计算器、笔记或教材．所有数字答案必须为精确值；例如，你应以 π 作答而非 3.14...，$\sqrt{2}$ 而非 1.414...，$\frac{1}{3}$ 而非 0.3333.... 请用完整的语句、正确的语法和书写规范进行论证．
写明你的<u>全部</u>解题过程!
你有20分钟时间．

问题 1 (5分)．设 $\ell_1, \ell_2, \cdots$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上可数条直线。求证：存在 $\mathbb{R}^2$ 上一点不在任何直线 ℓ_i 上。（提示：证明有一条直线其斜率与所有 ℓ_i 不同。）

证：设 R^2 上所有直线的斜率的集合为 K.

则 $K=(-\infty,+\infty)\cup\{\infty\}$.

可知 $K\sim R$.

设 $\{l_1,\cdots l_n,\cdots\}$ 这可数条直线的斜率集合为 K'.

则 K' 是可数的，即 K' 是 R 的真子集.

$\Rightarrow$ 存在直线 l_0，使其斜率 $k_0\in K\setminus K'$.

即存在直线 l_0 与 $\{l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots\}$ 中直线不同.

即使 l_0 与 $\{l_1,\cdots l_n,\cdots\}$ 中每条直线相交，交点也是可数的. 而 l_0 上的点是不可数的.

$\Rightarrow l_0$ 存在一点 $x_0\notin l_i$，$(i=1,2,\cdots n,\cdots)$.

即存在 R^2 上一点不在任何直线 l_i 上.

问题 2 (2分). 试将函数 $f(x) = e^x$ 表示成奇函数 $g(x)$ 和偶函数 $h(x)$ 的和。

解：$f(x) = e^x = \dfrac{(e^x - e^{-x}) + (e^x + e^{-x})}{2}$　　$x \in (-\infty, +\infty)$

令 $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，$h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

易见 $g(-x) = -g(x)$，$h(-x) = h(x)$

问题 3 (3分). 分别计算上题中函数 f, g, h 的反函数及各反函数的定义域。

解：① $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$，$x \in (0, +\infty)$

② $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$：　令 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，得：

$$(e^x)^2 - 2y \cdot e^x - 1 = 0$$

解得 $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$，由于 $e^x > 0$，故

$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

即 $g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$。由于 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty, +\infty)$

故 $g^{-1}(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

③ $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$，当 $x \le 0$ 时，$h'(x) = \dfrac{(e^x)^2 - 1}{2e^x} \le 0$。

等号当且仅当 $x=0$ 成立，此时 $h(x)$ 严格单调递减，且 $h(x) \in [1, +\infty)$

同理 $x > 0$ 时，$h'(x) > 0$，$h(x)$ 严格单调递增，且 $h(x) \in (1, +\infty)$

当 $x > 0$ 时，令 $y_1 = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (e^x)^2 - 2y_1 \cdot e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 1}$

但 $x > 0$ 时，$e^x > 1$。故 $e^x = y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1} \Rightarrow x = \ln(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1})$

即此时，$h^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$，$(x \in (1, +\infty))$

同理 $x < 0$ 时，可得 $e^x = y_2 - \sqrt{y_2^2 - 1}$（设 $y_2 = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$）（$x<0$ 时，$e^x < 1$）

即此时，$h^{-1}(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ $(x \in [1, +\infty))$