

MA101a 测验 2 (1.5–1.8)

姓名: _____

说明: 本测验不允许使用计算器、笔记或教材。所有数字答案必须为精确值; 例如, 你应以 π 作答而非 $3.14\dots$, $\sqrt{2}$ 而非 $1.414\dots$, $\frac{1}{3}$ 而非 $0.3333\dots$ 。请用完整的语句、正确的语法和书写规范进行论证。

写明你的全部解题过程!

你有20分钟时间。

问题 1 (2分). 叙述Cauchy列的定义。

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ s.t. } \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon.$

或 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ s.t. } \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^*, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$

问题 2 (2分). 叙述闭区间套定理。

$I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$

若 $|I_n| = b_n - a_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, 则

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 含有唯一的一点。

问题 3 (6分). 求极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1-n)^n$$

$$证: |(-n)^n| = (n-1)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad (1-(2k+1))^{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1-n)^n = \infty.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n(n-1)}}$$

$$\text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0$$

$$\text{故上式} = \frac{1}{e^0} = 1.$$