MA101a 测验 5 (2.4–2.7)

姓名：______________

说明：本测验不允许使用计算器、笔记或教材．所有数字答案必须为精确值；例如，你应以 π 作答而非 3.14...，$\sqrt{2}$ 而非 1.414...，$\frac{1}{3}$ 而非 0.3333.... 请用完整的语句、正确的语法和书写规范进行论证．

写明你的<u>全部</u>解题过程!

你有20分钟时间．

问题 1 (2分)．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{x}$ 。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1$

问题 2 (3分)．设函数 f 在 x_0 连续且 $f(x_0) < 0$。求证：存在开区间 (a, b) 使得任意 $x \in (a, b)$ 满足 $f(x) < 0$。

证：取 $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$，由 f 在 x_0 处连续知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow$ 对于 $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$，$\exists\, \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D$.

有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$，$f(x_0) < 0$

即 $f(x) < f(x_0) + \dfrac{|f(x_0)|}{2} = \dfrac{f(x_0)}{2} < 0$.

#.

问题 3 (5分).

(1) 分别叙述函数的左极限与左连续的定义。

① $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$. s.t. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0)$.

有 $|f(x)-l|<\varepsilon$

② 左连续即为 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0]$.

有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

(2) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的单调函数，令 $g(x)=f(x-)$。证明函数 g 在 $\mathbb{R}$ 上处处有定义。

证: 即证 $\forall x$. $f(x-)$ 存在. 不妨设 f 在 R 上单调增.

则 $E=\{f(t): -\infty<t<x\}$ 有上界 $f(x)$.

由确界原理知 $\sup E$ 存在, 记作 A. 因此 $A\le f(x)$.

接下来证 $f(x-)=A$: $\forall \varepsilon>0$, 由于 $A=\sup E$.

即 $\exists \delta>0$, s.t. $f(x-\delta)>A-\varepsilon$.

又 f 单调增, 则 $\forall t: x-\delta<t<x$. 有 $f(x-\delta)\le f(t)\le A<A+\varepsilon$.

即 $\forall t\in(x-\delta, x)$, 有 $-\varepsilon<f(t)-A<\varepsilon$

$\Leftrightarrow |f(t)-A|<\varepsilon$.

$\Rightarrow \forall x$, $f(x-)$ 存在.

#

(3) 证明以上 g 是 $\mathbb{R}$ 上的左连续函数。

证: 要证 g 在 R 上左连续, 即证

$\forall x_0\in R$, $g(x_0-)=g(x_0)=f(x_0-)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$. s.t. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0)$.

有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$.

由于 $f(x_0-)$ 存在. 则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$. s.t. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0)$.

$|f(x)-f(x_0-)|<\varepsilon$

设 f 单调增, 则 $\forall t, x$: $x_0-\delta<x<t<x_0$.

有 $f(x)\le f(t-)\le f(x_0-)$ $\Rightarrow$

$|g(t)-g(x_0)|=|f(t-)-f(x_0-)|\le|f(x)-f(x_0-)|<\varepsilon$

即 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. $\forall t\in(x_0-\delta, x_0)$. 有 $|g(t)-g(x_0)|<\varepsilon$.

$\Rightarrow g(x_0-)=g(x_0)$

#