*SUR LES GROUPES D'EILENBERG-MAC LANE. II**

By Henri Cartan

Université de Paris

Communicated by Saunders Mac Lane, May 18, 1954

1. *Les Algèbres d'Homologie* $H_*(\Pi, n; Z_p)$.—Π désigne un *groupe cyclique* (fini ou infini), Z_p le corps des entiers mod p (premier). On notera $E(m; \Lambda)$ la Λ-algèbre graduée de base $(1, x)$, x de degré m, avec $x^2 = 0$; x s'appelle le générateur de l'*algèbre extérieure* $E(m; \Lambda)$, à coefficients dans l'anneau Λ. On notera $P(m; \Lambda)$ la Λ-algèbre graduée de base $(1, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots)$, $x^{(k)}$ de degré km, avec la multiplication

$$x^{(k)}x^{(h)} = \frac{(k+h)!}{k!h!}\, x^{(k+h)};$$

$x^{(1)} = x$ s'appelle le "générateur" de l'*algèbre des polynômes modifiée* $P(m; \Lambda)$. Les algèbres $E(m; \Lambda)$ et $P(m; \Lambda)$ sont *anticommutatives* (car on supposera, pour $P(m; \Lambda)$, que m est pair si Λ n'est pas de caractéristique 2).

Prenons $\Lambda = Z_p$. On a une "construction" (au sens de I, § 2), d'algèbre initiale $A = Z_p(\Pi)$, et dont voici l'algèbre finale N: si Π est cyclique infini, $N = E(1; Z_p)$ avec différentielle nulle; si Π est cyclique d'ordre p^f, $N = E(1; Z_p) \otimes_{Z_p} P(2; Z_p)$ avec différentielle nulle. Si Π est cylique d'ordre premier à p, l'algèbre N est acyclique, donc $H_*(\Pi, n; Z_p)$ est acyclique pour tout $n \geq 1$.

On cherche une *construction itérée* ayant comme algèbre initiale $E(1; Z_p) \approx H_*(Z, 1; Z_p)$, resp. $E(1; Z_p) \otimes P(2; Z_p) \approx H_*(Z_{p^f}, 1; Z_p)$. D'après I, §2, il suffit de faire une construction pour chaque facteur du produit tensoriel. Plus généralement:

I. *Construction ayant* $E(m-1; Z_p)$ *pour algèbre initiale* (m *pair*). Soit $A = E(m-1; Z_p)$, $N = P(m; Z_p)$; l'algèbre $M = A \otimes N$, munie de la différentielle d définie par $dx = 0$, $dy^{(h)} = xy^{(h-1)}$ (x générateur de A, y générateur de N), est acyclique; par passage au quotient, d est nul sur l'*algèbre finale* $P(m; Z_p)$. La *suspension* envoie x en y.

II. *Construction ayant* $P(m; Z_p)$ *comme algèbre initiale*. Soit x le "générateur" de $P(m; Z_p)$. Notons $Q_p(n)$ l'algèbre graduée, quotient de l'algèbre des polynômes $Z_p[u]$ par l'idéal (u^p), u de degré n. Soit f_k l'homomorphisme d'algèbres $Q_p(p^k m) \to P(m; Z_p)$ qui envoie le générateur u_k de $Q_p(p^k m)$ dans $x^{(p^k)}$. Les f_k identifient l'algèbre $P(m; Z_p)$ au produit tensoriel (infini) $\otimes_{k \geq 0} Q_p(p^k m)$. Soit $A_k = Q_p(p^k m)$; c'est l'algèbre initiale d'une construction: prendre $N_k = E(p^k m + 1; Z_p) \otimes P(p^{k+1}m + 2; Z_p)$ et, sur l'algèbre $M_k = A_k \otimes N_k$, la différentielle d définie par

$$du_k = 0, \qquad dy_k = u_k, \qquad dz_k^{(h)} = (u_k)^{p-1} y_k z_k^{(h-1)} \tag{1.1}$$

(y_k, z_k: générateurs de $E(p^k m + 1; Z_p)$, $P(p^{k+1}m + 2; Z_p)$). Par passage au quotient, d est nul sur N_k. Par produit tensoriel, on trouve une *construction d'algèbre initiale* $A = P(m; Z_p)$ *et d'algèbre finale* $N = \otimes_{k \geq 0} N_k$. La *suspension* envoie $x^{(p^k)} = u_k$ en y_k, et est nulle sur les autres éléments de la base de $P(m; Z_p)$.

Par itération des constructions I et II, l'algèbre d'homologie $H_*(\Pi, n; Z_p)$ (pour $\Pi = Z$ ou Z_{p^f}) est un produit tensoriel d'algèbres extérieures à un générateur de degré impair, et d'algèbres de polynômes modifiées à un générateur de degré pair. Chaque générateur u de $H_*(\Pi, n; Z_p)$ a pour suspension un générateur de $H_*(\Pi, n + 1; Z_p)$; u est dit *primitif* s'il n'est pas le suspendu d'un générateur de $H_*(\Pi, n - 1; Z_p)$. Chaque générateur u de $H_*(\Pi, n; Z_p)$ est caractérisé par l'unique générateur primitif v dont il est le suspendu itéré; si $v \in H_*(\Pi, m; Z_p)$, m s'appelle l'*indice* de u. Si u est de degré $n + q$, q est le *degré stable* de u (invariant par suspension). L'ensemble de tous les générateurs primitifs est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des suites d'entiers $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ (k entier ≥ 0 quelconque) telles que

$$a_0 = 0 \text{ si } \Pi = Z, \qquad a_0 = 0 \text{ ou } 1 \text{ si } \Pi = Z_{p^f}; \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_i \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{2p-2} \text{ pour } 0 \leq i \leq k; \\ a_1 \geq 2p - 2, \qquad a_{i+1} \geq pa_i \qquad (1 \leq i \leq k - 1). \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Le degré stable q et l'indice m sont donnés par

$$q = a_0 + a_1 + \ldots + a_k, \tag{1.4}$$

$$m + q = \left[\frac{p}{p-1}\, a_k\right] \tag{1.5}$$

(on note $[\lambda]$ le plus petit entier $> \lambda$). Mais la formule (1.5) est en défaut si $p = 2$ et a_k impair.

Or, pour $p = 2$, $E(m; Z_2) \otimes P(2m; Z_2) \approx P(m; Z_2)$; d'où une *construction d'algèbre initiale* $P(m; Z_2)$ *et d'algèbre finale* $\otimes_{k \geq 0} P(2^k m + 1; Z_2)$. La suspension envoie $x^{(2^k)} \in P(m; Z_2)$ dans le "générateur" de $P(2^k m + 1; Z_2)$. Par itération, l'algèbre d'homologie $H_*(\Pi, n; Z_2)$ est un produit tensoriel d'algèbres de polynômes modifiées; les générateurs primitifs admettent encore la description (1.2), (1.3), et les formules (1.4) et (1.5) sont valables sans restriction. D'où:

THÉORÈME 3.—*Pour* $n \geq 1$, *p premier impair, l'algèbre d'homologie* $H_*(\Pi, n; Z_p)$ ($\Pi = Z$ *ou* Z_{p^f}) *est isomorphe à un produit tensoriel d'algèbres extérieures (à un générateur de degré impair) et d'algèbres de polynômes modifiées (à un générateur de degré pair). Pour* $n \geq 2$, $p = 2$, *l'algèbre d'homologie* $H_*(\Pi, n; Z_2)$ ($\Pi = Z$ *ou* Z_{2^f}) *est isomorphe à un produit tensoriel d'algèbres de polynômes modifiées. Dans tous les cas, le nombre des générateurs dont le degré stable est q est celui des suites* $(a_0, \ldots, a_k)$ *satisfaisant aux formules* (1.2), (1.3), *et* (1.4), *et telles que* $pa_k < (p - 1)(n + q)$.

2. *Les Algèbres de Cohomologie* $H^*(\Pi, n; Z_p)$.—Notons $P^*(m; \Lambda)$ l'algèbre des polynômes $\Lambda[u]$ à un générateur u de degré m, munie de la *multiplication ordinaire;* $E^*(m; \Lambda)$ désigne la même chose que $E(m; \Lambda)$.

On sait que l'algèbre de cohomologie $H^*(Z_{p^f}, 1; Z_p)$ est isomorphe à $E^*(1, Z_p) \otimes P^*(2; Z_p)$, sauf si $p^f = 2$; et que $H^*(Z_2, 1; Z_2) \approx P^*(1; Z_2)$. Dans chacune des constructions I et II ci-dessus, on peut définir un opérateur s qui en fait une construction *spéciale* (cf. I, § 3). En appliquant la méthode de I, § 7, on trouve, par itération:

THÉORÈME 4.[1]—*Pour* $n \geq 1$, *p premier impair, l'algèbre de cohomologie* $H^*(\Pi, n; Z_p)$ ($\Pi = Z$ *ou* Z_{p^f}) *est isomorphe à un produit tensoriel d'algèbres extérieures (à un générateur de degré impair) et d'algèbres de polynômes ordinaires (à un générateur de degré pair). Pour* $n \geq 2$, $p = 2$, $H^*(\Pi, n; Z_2)$ ($\Pi = Z$ *ou* Z_{2^f}) *est isomorphe à un* *produit tensoriel d'algèbres de polynômes ordinaires. Dans tous les cas, le nombre des générateurs dont le degré stable est q est celui des suites* $(a_0, \ldots, a_k)$ *satisfaisant aux formules* (1.2), (1.3), *et* (1.4), *et telles que* $pa_k < (p - 1)(n + q)$.

3. *Constructions à Coefficients Entiers.*—Soit m un entier pair ≥ 2. On note simplement $E(m - 1)$ l'algèbre extérieure $E(m - 1; Z)$, et $P(m)$ l'algèbre $P(m; Z)$. Pour tout entier h, soit $E_h(m - 1)$ l'algèbre graduée $E(m - 1) \otimes P(m)$ munie de la différentielle $dx = 0$, $dy^{(k)} = hxy^{(k-1)}$ (x, y: générateurs de $E(m - 1)$, $P(m)$); c'est une DGA-algèbre, et x s'appelle le "générateur" de $E_h(m - 1)$. On introduit aussi une DGA-algèbre $P_h(m)$ dont la définition complète est trop longue pour être explicitée ici; il suffit de savoir ceci: comme algèbre graduée, $P_h(m) = P(m) \otimes C$, où C est une algèbre graduée dont tous les éléments de base (sauf l'élément 1) sont de degé $> m$; l'injection $x \to x \otimes 1$ de $P(m)$ dans $P_h(m)$ identifie $P(m)$ à une sous-algèbre de $P_h(m)$ sur laquelle la différentielle de $P_h(m)$ est nulle, et définit donc un homomorphisme $P(m) \to H_*(P_h(m))$; en fait, ceci identifie $H_*(P_h(m))$ à un quotient de $P(m)$. D'une façon précise, soit u le "générateur" de $P(m)$, qu'on appelle aussi le "générateur" de $P_h(m)$; l'élément $u^{(i)} \in P(m)$ a pour image dans $H_*(P_h(m))$ un élément dont l'ordre est le quotient de ih par le produit des composantes p-primaires de ih (relatives à tous les p premiers ne divisant pas h).

Une méthode analogue à celle du § 1, mais plus compliquée, donne le résultat suivant:

THÉORÈME 5.—*Soit* $\Pi = Z$ *(resp.* Z_h *avec* $h = p^f$*). Pour n impair, l'algèbre* $H_*(\Pi, n; Z)$ *est isomorphe à l'algèbre d'homologie d'un produit tensoriel de DGA-algèbres*[2] $E(n) \otimes G(\Pi, n)$ *(resp.* $E_h(n) \otimes G(\Pi, n)$*); pour n pair,* $H_*(\Pi, n; Z)$ *est isomorphe à l'algèbre d'homologie d'un produit tensoriel* $P(n) \otimes G(\Pi, n)$ *(resp.* $P_h(n) \otimes G(\Pi, n)$*). Dans tous les cas,* $G(\Pi, n)$ *est un produit tensoriel (en général infini) de DGA-algèbres de la forme* $E_p(m - 1)$ *et* $P_p(m)$ *pour tous les p premiers (resp. pour l'unique p premier divisant h). Le nombre des "générateurs" de* $G(\Pi, n)$ *relatifs à un p premier, et de degré stable* $q \geq 1$, *est celui des suites* $(a_0, \ldots, a_k)$ *satisfaisant aux formules* (1.2), (1.3), (1.4) *et*

$$a_k \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2p - 2), \tag{3.1}$$

et telles que $pa_k < (p - 1)(n + q)$.

Les constructions à coefficients entiers permettent aussi de déterminer les *opérateurs de Bockstein* dans la cohomologie $H^*(\Pi, n; Z_p)$. Soit X un complexe de cochaînes (à coefficients entiers, sans torsion); soit $x \in X$, de degré q, tel que $dx = (-1)^{q+1}p^f x'$; x' est un cocyle dont l'image dans $H^{q+1}(X \otimes Z_p)$ est transformé, par l'opérateur $\beta(p^f)$, de l'image de x dans $H^q(X \otimes Z_p)$. L'opérateur $\beta(p)$ est défini sur $H^q(X \otimes Z_p)$ et à valeurs dans $H^{q+1}(X \otimes Z_p)$; $\beta(p^f)$ n'est défini que sur le noyau de $\beta(p^{f-1})$, et prend ses valeurs dans le conoyau de $\beta(p^{f-1})$. Les $\beta(p^f)$ *commutent avec la suspension.*

On démontre: soit u_0 l'unique générateur de degré n de $H^*(Z_{p^f}, n; Z_p)$ ("classe fondamentale"); alors $\beta(p^h) \cdot u_0 = 0$ pour $h < f$, et $\beta(p^f) \cdot u_0$ est l'unique générateur de degré $n + 1$. Pour $\Pi = Z$ ou Z_{p^f}, soit u un générateur de $H^*(\Pi, n; Z_p)$, de schéma $(a_0, \ldots, a_k)$ avec $k \geq 1$, $a_k \equiv 0$ (mod $2p - 2$); alors[3] $\beta(p) \cdot u$ est le générateur de schéma $(a_0', \ldots, a_k')$, avec $a_i' = a_i$ pour $i < k$ et $a_k' = a_k + 1$.

4. *Relation avec les Opérations de Steenrod.*—Soit $a = (2p - 2)\lambda + \epsilon$, λ entier, $\epsilon = 0$ ou 1. Pour tout espace topologique X, définissons St_p^a: $H^i(X, Z_p) \rightarrow H^{i+a}(X, Z_p)$ comme suit: si $\epsilon = 0$, St_p^a est l'opération $\mathcal{P}_p^\lambda$ de Steenrod;[4] si $\epsilon = 1$, St_p^a est le composé $\beta(p) \circ \mathcal{P}_p^\lambda$ (pour $p = 2$, on prend simplement $St_2^a = Sq^a$, carré de Steenrod). Soit I une suite $(a_0, \ldots, a_k)$ satisfaisant à la formule (1.3); on pose $St_p^I = St_p^{a_k} \circ \ldots \circ St_p^{a_1}$ si $a_0 = 0$; si $a_0 = 1$, on pose $St_p^{I,f} = St_p^{a_k} \circ \ldots \circ St_p^{a_1} \circ \beta(p^f)$.

Les générateurs qui interviennent dans le Théorème 4 peuvent être choisis de plusieurs manières. Les opérations de Steenrod permettent de fixer ce choix; leurs propriétés vis-à-vis des puissances p-ièmes et de la suspension conduisent en effet au:

THÉORÈME 6.[1]—*Soit* $\Pi = Z$ (*resp.* $\Pi = Z_{p^f}$), *et soit* u_0 *la classe fondamentale de* $H^*(\Pi, n; Z_p)$. *On peut prendre comme système de générateurs des algèbres extérieures et des algèbres de polynômes du Théorème 4, l'ensemble des* $St_p^I(u_0)$ (*resp. des* $St_p^I(u_0)$ *et des* $St_p^{I,f}(u_0)$), *où* I *parcourt l'ensemble des suites* $(a_0, \ldots, a_k)$ *satisfaisant aux formules* (1.2) *et* (1.3), *et telles que* $pa_k < (p - 1)(n + a_0 + \ldots + a_k)$.

COROLLAIRE. Pour un entier q donné, l'ensemble des $St_p^I(u_0)$ (resp. des $St_p^I(u_0)$ et des $St_p^{I,f}(u_0)$), où I parcourt l'ensemble des suites $(a_0, \ldots, a_k)$ satisfaisant *aux* formules (1.2), (1.3), et (1.4), est une *base* du Z_p-espace vectoriel $H^{n+q}(\Pi, n; Z_p)$, dès que $n > q$.

5. *Calcul des "Groupes Stables"* $H_{n+q}(\Pi, n; Z), n > q$.—Les opérations de Steenrod St_p^I sont transposées d'homomorphismes dans l'*homologie*, qu'on notera St_I^p. Soit Π un groupe abélien *quelconque;* si $I = (a_0, \ldots, a_k)$, avec $a_0 = 0$, $a_1 + \ldots + a_k = q$, soit θ_I^p l'homomorphisme composé

$$H_{n+q}(\Pi, n; Z) \rightarrow H_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \xrightarrow{St_I^p} H_n(\Pi, n; Z_p) \approx \Pi/p\Pi.$$

Si $I = (a_0, \ldots, a_k)$, avec $a_0 = 1$, $a_1 + \ldots + a_k = q - 1$, soit θ_I^p le composé

$$H_{n+q}(\Pi, n; Z) \rightarrow H_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \xrightarrow{St_J^p} H_{n+1}(\Pi, n; Z_p) \approx {}_p\Pi,$$

où J désigne $(a_1, \ldots, a_k)$, et ${}_p\Pi$ désigne le groupe des éléments d'ordre p de Π.

THÉORÈME 7.[5]—*Pour* $q \geq 1$, *et* $n > q$, $H_{n+q}(\Pi, n; Z)$ *est un groupe de torsion; soit* $L_q(\Pi; p)$ *sa composante p-primaire. Pour chaque suite* $I = (a_0, \ldots, a_k)$ *telle que* $a_0 = 0$ *ou* 1, *et satisfaisant aux formules* (1.3), (1.4), *et* (3.1), θ_I^p *applique* $L_q(\Pi; p)$ *sur* $\Pi/p\Pi$, *resp. sur* ${}_p\Pi$. *Soit* N_I^p *l'intersection des noyaux des* θ_J^p *pour toutes les suites* $J \neq I$; *alors* $L_q(\Pi; p)$ *est somme directe des* N_I^p, *et* θ_I^p *est un isomorphisme de* N_I^p *sur* $\Pi/p\Pi$, *resp. sur* ${}_p\Pi$.

COROLLAIRE. Pour $n > q \geq 1$, $H_{n+q}(\Pi, n; Z)$ est isomorphe (non canoniquement) à $H_{n+q}(Z, n; \Pi)$.

* Cette note fait suite à la précédente, citée "I." Voir, these PROCEEDINGS, **40,** 467–471, 1954.

[1] Ce théorème a déjà été démontré, dans le cas $p = 2$, par J. P. Serre, *Comm. Math. Helv.*, **27,** 198–231, 1953; voir §2.

[2] Le produit tensoriel de deux DGA-algèbres a été défini en I, §1.

[3] Il y a une exception: $p = 2$, $a_k + 1 = n + a_0 + \ldots + a_{k-1}$ impair; alors $\beta(2)\cdot u$ est le carré du générateur dont le schéma est $(a_0, \ldots, a_{k-1})$.

[4] N. Steenrod, these PROCEEDINGS, **39,** 217–223, 1953, formule (6.8).

[5] Les groupes stables $H_{n+q}(\Pi, n; Z)$ $(n > q)$, pour Π abélien quelconque, étaient connus au moins pour $q \leq 3$; dans le cas $\Pi = Z$, ils avaient été calculés pour $q \leq 10$ (Eilenberg-Mac Lane, these PROCEEDINGS, **36,** 657–663, 1950). On trouve aussi chez Serre, *op. cit.*, des renseignements sur la composante 2-primaire des groupes stables $H_{n+q}(\Pi, n; Z)$.