

δ -ANNEAUX ET VECTEURS DE WITTANDRÉ JOYAL*Presented by P. Ribenboim, F.R.S.C.*Résumé

Nous donnons à la théorie des vecteurs de Witt une formulation nouvelle en utilisant les méthodes de l'algèbre universelle et de la théorie des catégories. On introduit une structure algébrique, celle de δ -anneau. Un δ -anneau est un anneau commutatif muni d'une opération unaire supplémentaire satisfaisant à des identités algébriques simples. Le résultat principal consiste à montrer que le foncteur oubliant de la catégorie des δ -anneaux vers celle des anneaux commutatifs possède un adjoint à droite W . Un calcul explicite permet l'identification de $W(A)$ avec l'anneau des vecteurs de Witt sur A . On donne des démonstrations plus conceptuelles de plusieurs résultats de la théorie des vecteurs de Witt [7,2].

1- δ -anneaux

Fixons une fois pour toute un nombre premier p et une puissance $q = p^r$ ($r \geq 0$).

DEFINITION 1 Un δ -anneau A est un anneau commutatif muni d'une opération unaire $\delta: A \rightarrow A$ satisfaisant aux identités suivantes:

- i) $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{p} \binom{q}{i} x^i y^{q-i}$
- ii) $\delta(xy) = x^q \delta(y) + \delta(x) y^q + p \delta(x) \delta(y)$, $\delta(1) = 0$

Nous dirons aussi que A est un δ -anneau relativement au couple (p, q) .

Ces conditions entraînent que l'opération unaire $f(x) = x^q + p\delta(x)$ est un endomorphisme de l'anneau A :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

$$f(1) = 1$$

Nous dirons que f est l'endomorphisme de Frobenius. Inversement, soit f un endomorphisme d'un anneau commutatif A sans p -torsion. Supposons que pour tout $x \in A$

$$f(x) \equiv x^q \pmod{pA}$$

On obtient une structure de δ -anneau sur A en définissant δ comme suit:

$$\delta(x) = \frac{1}{p}(f(x) - x^q)$$

Exemple 1. L'anneau \mathbb{Z} admet une seule structure de δ -anneau puisque le seul endomorphisme de \mathbb{Z} est l'identité.

Exemple 2 Soit L une extension galoisienne d'un corps K . Soit $B \subset L$ un anneau de valuation discrète et soit $A = B \cap K$. On suppose que $p = p \cdot 1$ est une uniformisante pour B et que $A/pA \cong \mathbb{F}_q$. On sait montrer [1] l'existence d'une substitution de Frobenius $\sigma \in \text{Galois}(L/K)$ caractérisée par

$$i) \quad \sigma(B) = B$$

$$ii) \quad \sigma(x) \equiv x^q \pmod{pB}$$

Un morphisme de δ -anneau est un homomorphisme d'anneaux qui préserve δ . Nous dirons aussi que c'est un δ -morphisme. On vérifie que l'endomorphisme de Frobenius est un δ -morphisme.

THEOREME 1 Soit $Z[x_0, x_1, \dots]$ l'anneau des polynômes sur une suite infinie d'indéterminés. Il y a une seule structure de δ -anneau sur $Z[x_0, x_1, \dots]$ pour laquelle $\delta(x_n) = x_{n+1}$ pour tout n . Muni de cette structure, $Z[x_0, x_1, \dots]$ est un δ -anneau libre sur x_0 .

Désignons par \underline{A} la catégorie des anneaux et par $\underline{\delta A}$ celle des δ -anneaux.

THEOREME 2 Le foncteur oubliant $U: \underline{\delta A} \rightarrow \underline{A}$ possède un adjoint à droite $W: \underline{A} \rightarrow \underline{\delta A}$.

La théorie des catégories [6] met en évidence l'équivalence entre le théorème précédent et le suivant:

THEOREME 3 Soient $A \rightarrow B$ et $A \rightarrow C$ des morphismes de δ -anneaux. Considérons le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & C \\ + & & + i_2 \\ B & \rightarrow & B \otimes C \\ i_1 & & A \end{array}$$

Il y a sur $B \otimes C$ une seule structure de δ -anneaux pour laquelle i_1 et i_2 sont des δ -morphisms.

On peut donner une démonstration directe de ces théorèmes ou encore utiliser [8,9]. Comme conséquence, on a:

COROLLAIRE Le foncteur $W: \underline{A} \rightarrow \underline{\delta A}$ est représentable par l'anneau $Z[x_0, x_1, \dots]$. Il y a une bijection naturelle:

$$\gamma_A: W(A) \cong A^{\mathbb{N}}$$

La bijection γ_A s'explique comme suit:

$$\begin{aligned} W(A) &= \text{Hom}_\delta(Z[x_0, x_1, \dots], W(A)) \\ &= \text{Hom}(Z[x_0, x_1, \dots], A) \\ &= A^N \end{aligned}$$

2- Vecteurs de Witt

Pour voir que $W(A)$ est isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt sur A , il suffira d'utiliser une description différente du δ -anneau libre sur un générateur. Cette description est basée sur le résultat suivant.

PROPOSITION 1 On peut définir dans la théorie des δ -anneaux une suite unique d'opérations unaires $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$ vérifiant les identités

$$r^n(x) = \delta_0(x)^{q^n} + p\delta_1(x)^{q^{n-1}} + \dots + p^n\delta_n(x) \quad (n \geq 0)$$

Les deux premiers termes de la suite sont $\delta_0(x) = x$ et $\delta_1(x) = \delta(x)$.

PROPOSITION 2 Il y a sur $Z[y_0, y_1, y_2, \dots]$ une seule structure de δ -anneau pour laquelle $\delta_n(y_0) = y_n$ pour tout $n \geq 0$. Muni de cette structure, $Z[y_0, y_1, y_2, \dots]$ est un δ -anneau libre sur y_0 .

THEOREME 4 Si $q=p$ l'anneau $W(A)$ s'identifie à l'anneau des vecteurs de Witt sur A .

A chaque élément $x \in W(A)$ correspondant un vecteur de Witt $\pi_A(x) \in A^N$. La description de π_A est semblable à celle de γ_A mais elle utilise plutôt le δ -anneau libre $Z[y_0, y_1, \dots]$.

L'endofoncteur composé $\overset{W}{A} \rightarrow \overset{U}{\delta A} \rightarrow A$ est une co-monade [6,3,2] sur A . Pour simplifier, nous noterons encore ce foncteur par W . On a des transformations naturelles

$$W(A) \xrightarrow{E_A} A \quad W(A) \xrightarrow{E_A} W(W(A))$$

satisfaisant à des conditions d'associativité et d'unité. L'homomorphisme E_A est étroitement relié à l'exponentielle de Artin-Hasse [3]. Une structure de δ -anneau sur A équivaut à une structure de co-algèbre [6] $\delta: A \rightarrow W(A)$. Celle-ci se décrit comme suit: pour tout $x \in A$ on a $\pi_A \delta(x) = (\delta_0(x), \delta_1(x), \dots)$.

Remarques

- 1) Soit A un anneau sans p -torsion muni d'un endomorphisme f tel que pour tout $x \in A$, $f(x) \equiv x^q \pmod{pA}$. Le lemme de Dieudonné-Cartier [4, page 508] affirme l'existence d'un homomorphisme $s_f: A \rightarrow W(A)$. Ce résultat s'interprète comme suit dans le contexte présent: les hypothèses entraînent l'existence d'une structure de δ -anneau sur A et on vérifie que $s_f = \delta$.
- 2) Sous les hypothèses de la remarque précédente, on donne une description particulièrement simple de $W(A)$ [5]. Posons

$$B = \{(a_n) \in A^{\mathbb{N}} \mid a_{n+1} \equiv f(a_n) \pmod{p^{n+1}} \forall n\}$$

On vérifie que B est un sous-anneau de l'anneau produit $A^{\mathbb{N}}$. L'opérateur de translation $t((a_n)) = (a_{n+1})$ est un endomorphisme de B et pour tout $x \in B$,

$$t(x) \equiv x^q \pmod{pB}$$

Comme B est sans p -torsion, on a une structure de δ -anneau sur B pour laquelle t est l'endomorphisme de Frobenius. On vérifie ensuite directement

qu'avec la projection $B \rightarrow A$, B devient le δ -anneau co-libre sur l'anneau A , donc que $B \cong W(A)$.

Bibliographie

- [1] Bourbaki. Algèbre, Chap. V, 11.
- [2] Bourbaki. Algèbre, Chap. 8 et 9.
- [3] M. Hazewinkel. Formal Groups and Applications. Academic Press Monographs 78, 1978.
- [4] L. Illusie. Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. 4^e série, t12, 1979, p. 501 à 661.
- [5] M. Lazard. Commutative Formal Groups. Lect. Notes in Math. 443, Springer-Verlag.
- [6] S. MacLane. Category theory for the working Mathematician. Graduate text in Math. 5, Springer Verlag.
- [7] P. Ribenboim. L'Arithmétique des corps. Hermann, Paris 1972.
- [8] D.O. Tall, G.C. Wraith. Representable Functors and Operations on Rings. Proceedings of the London Mathematical Society (3) 20 (1970) p. 619-643.
- [9] G.C. Wraith. Algebras over theories. Colloquium Mathematicum. vol. XXIII (1971) fasc 2.

Département de Mathématiques
et d'informatique
Université du Québec à Montréal

Received March 28, 1985