# 草　　稿　　纸

quiz 1

1. 证明：$\sqrt{3}$ 是无理数

证：假设$\sqrt{3}$是有理数，不妨设 $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$，$p,q\in N^*$，且 $p$ 与 $q$ 互质。

故 $p^2=3q^2$，则 $3\mid p^2$

由于 3 为质数，则 $p$ 是 3 的倍数，设 $p=3m$，$m\in N^*$。

$\Rightarrow (3m)^2=3q^2$ 即 $q^2=3m^2$

从而 $q$ 是 3 的倍数，因而 $p,q$ 是 3 的倍数，与互质矛盾。

#

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}$$

3. 证明：$a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$。

证：$a>1$ 时，$\exists N_1>0$，s.t. $\frac{a}{N_1}<1$

因而 $\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{N_1-1}}{1\cdots(N_1-1)}\cdot\frac{a}{N_1}\cdots\frac{a}{n}<C\left(\frac{a}{N_1}\right)^n$

其中 $C=\frac{a^{N_1-1}}{(N_1-1)!}\cdot\left(\frac{a}{N_1}\right)^{-(N_1-1)}$

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln(\frac{\varepsilon}{C})}{\ln(\frac{a}{N_1})}\right]+1$，当 $n>N$ 时，$0<\frac{a^n}{n!}<\varepsilon$。

# 草　　稿　　纸

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

(法二). 设 $a_n = \frac{a^n}{n!}$. 则 $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{a}{n+1}$.

对于 $a>1$, $\exists\, n>0$, s.t. $\frac{a}{n}<1$.

故从某项开始. $\{a_n\} \searrow$. 又 $a_n>0$.

故 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$ 存在. 设为 $A$.

在 $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{a}{n+1}$ 两边同取极限有:

$$A = A \cdot 0 \Rightarrow A = 0.$$

4. 解: $0 \le a \le b$.

$\Rightarrow \quad b^n \le a^n + b^n \le 2b^n$

$\Rightarrow \quad b \le (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} \le 2^{\frac{1}{n}} b$

而 $n\to\infty$, $2^{\frac{1}{n}} \to 1$.

由夹逼法知, $\lim_{n\to\infty} (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} = b$