

Projektowanie Efektywnych Algorytmów

Przegląd zupełny

Programowanie dynamiczne

Jakub Klawon

7 Grudnia 2023

Spis treści

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Wstęp teoretyczny | 2 |
| 2 | Opis implementacji algorytmu | 2 |
| 3 | Przykład Praktyczny | 2 |
| 3.1 | Dane | 2 |
| 3.2 | Opis | 3 |
| 4 | Plan eksperymentu | 4 |
| 5 | Wyniki eksperymentu | 4 |
| 5.1 | Pomiary czasu dla losowo generowanych przykładów | 4 |
| 5.2 | Wyniki poziomu błędu dla konkretnych przykładów | 6 |
| 5.3 | Zależność poziomu błędu od czasu | 8 |
| 6 | Wnioski | 10 |

1 Wstęp teoretyczny

Tematem projektu jest przygotowanie programu do badania efektywności algorytmu symulowanego wyżarzania (ang. Simulated Annealing) w rozwiązywaniu problemu komiwojażera (ang. traveling salesman problem). Jest to algorytm heurystyczny służący do określania przybliżonego optimum dla danego problemu. Symulowanie wyżarzania działa iteracyjnie, krok po kroku zbliżając się do optymalnego rozwiązania. W algorytmie wykorzystywany jest parametr symulujący temperaturę, która jest częścią wzoru określającego prawdopodobieństwo, z jakim możemy przyjąć gorszy wynik, niż najlepszy, który na ten moment posiadamy. Temperatura jest zmniejszana co iterację do momentu, aż jest na tyle niska, że prawdopodobieństwo na przyjęcie gorszego wyniku jest skrajnie niskie. Współczynnik takiego prawdopodobieństwa pomaga przeskoczyć optima lokalne i pomóc dostać się do optimum globalnego.

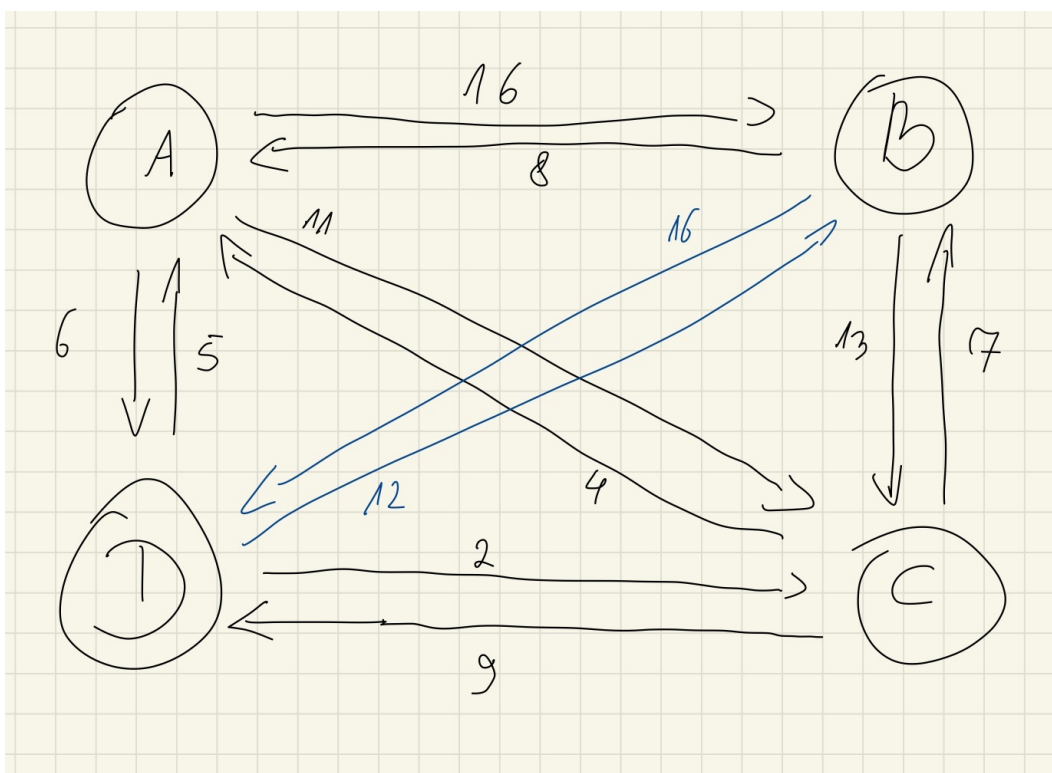
2 Opis implementacji algorytmu

1. Algorytm przyjmuje jako parametry: współczynnik chłodzenia, temperaturę końcową oraz początkową. Oblicza również początkową ścieżkę, w której dokonuje zmian losowo poprzez metodą zachłanną.
2. Temperatura początkowa obliczana jest na podstawie próbkowania 10 tys. różnic między sąsiadami ze wzoru $T_0 = \frac{-\Delta}{\ln 0.99}$.
3. Do przechowywania trasy tymczasowej oraz tej, przekazywanej jako wynik, wykorzystywana jest lista dwukierunkowa. Wynika to z faktu, że algorytm może często zmieniać zawartość ścieżki a dodawanie oraz usuwanie w liście jest bardzo znacznie efektywniejsze pod względem czasu, niż w tablicy dynamicznej.
4. Do generowania liczb losowych, zastosowana została klasa `uniform_real_distribution` zarówno dla typu `integer` jak i typu `double`.

3 Przykład Praktyczny

3.1 Dane

| | | | |
|---|----|----|----|
| 0 | 16 | 11 | 6 |
| 8 | 0 | 13 | 16 |
| 4 | 7 | 0 | 9 |
| 5 | 12 | 2 | 0 |



Rysunek 1: Graficzne przedstawienie danych

3.2 Opis

1. Współczynnik chłodzenia zostaje ustawiony na 0.99, temperatura końcowa = 0.01.
2. Algorytm liczy temperaturę początkową na podstawie 10000 losowych sąsiadów. $T_0 = 747.01$.
3. Początkowa ścieżka wyznaczana jest sposobem zachłannym, od punktu startowego wyznacza kolejno najmniejszą wartość dla danego miasta. Ścieżka początkowa to A -> C -> D -> B -> A
4. Algorytm rozpoczyna działanie.
5. Najlepszy wynik = INT_MAX, aktualny wynik równy najlepszemu, aktualna temperatura równa T_0 .
6. Rozpoczyna się pętla, sprawdzamy warunek temperatura > temperatura końcowa, $747.01 > 0.01$, więc algorytm kontynuuje działanie.
7. Losowa zamiana wierzchołków w obliczanym koszcie ścieżki, funkcja wskazuje D i C. Koszt ścieżki to 22.
8. Różnica między 22 a najlepszym wynikiem jest mniejsza od 0, więc 22 zostaje nowym aktualnym wynikiem ze ścieżką A -> D -> C -> B -> A. Aktualny wynik jest mniejszy od najlepszego wyniku, więc zostaje również najlepszym wynikiem.
9. Temperatura zostaje obniżona, $747.01 * 0.99 = 739.54$.
10. Sprawdzamy warunek temperatura > temperatura końcowa, $739.54 > 0.01$, więc algorytm kontynuuje działanie.
11. Losowa zamiana wierzchołków w obliczanym koszcie ścieżki, funkcja wskazuje C i B. Koszt ścieżki to 44.

12. Różnica między 44 a najlepszym wynikiem jest dodatnia, sprawdzamy prawdopodobieństwo przyjęcia gorszego wyniku ze wzoru $\exp \frac{-\Delta}{temperatura} = 0.029$ a losowo wygenerowaną liczbą jest 0.042. Losowo wygenerowana liczba jest większa od prawdopodobieństwa, więc nie przyjmujemy gorszego wyniku.
13. Temperatura zostaje obniżona, $739.54 * 0.99 = 732.14$.
14. Algorytm wykonuje 1117 iteracji, do momentu, w którym temperatura przyjmuje wartość 0.00995036, która jest mniejsza od 0.01 i kończy działanie. Najlepszym wynikiem zostaje 23 ze ścieżką A -> D -> C -> B -> A.

4 Plan eksperymentu

Eksperyment składa się z 4 części:

1. Pomiary czasu dla losowo generowanych przykładów - program generuje 50 różnych losowych instancji dla przedziału 10,20, ... ,140 elementów. Dla każdej liczby miast przelicza średnią z wyników. Zakres liczb znajdujących się w grafach to od 1 do 2000. Eksperyment prowadzony jest na temperaturze końcowej równej 0.001 i współczynnikach 0.99, 0.999 oraz 0.9999.
2. Wyniki poziomu błędu dla konkretnych przykładów - program działa na 19 plikach pobranych ze strony Uniwersytetu w Heidelbergu, dla których znane są optymalne wyniki. Korzystając ze wzoru $\frac{\text{wynik}-\text{optymalny}}{\text{optymalny}} * 100$ przekazuje błąd wyrażony w procentach. Dla każdego zestawu wykonuje 15 pomiarów, z których wylicza średnią. Temperatura końcowa w eksperymencie to 0.001 a współczynniki chłodzenia kolejno 0.99, 0.999 oraz 0.9999.
3. Zależność poziomu błędu od czasu - dla każdego zestawu z poprzedniego punktu badań, program sprawdził również czas wykonywania algorytmu.

5 Wyniki eksperymentu

5.1 Pomiary czasu dla losowo generowanych przykładów

| Liczba wierzchołków | Czas [ns] |
|---------------------|-----------|
| 10 | 2,17E+11 |
| 20 | 2,05E+11 |
| 30 | 2,18E+11 |
| 40 | 2,26E+10 |
| 50 | 2,43E+11 |
| 60 | 2,52E+11 |
| 70 | 2,66E+11 |
| 80 | 2,77E+11 |
| 90 | 2,94E+11 |
| 100 | 3,04E+11 |
| 110 | 3,15E+10 |
| 120 | 3,28E+11 |
| 130 | 3,51E+11 |
| 140 | 3,60E+11 |

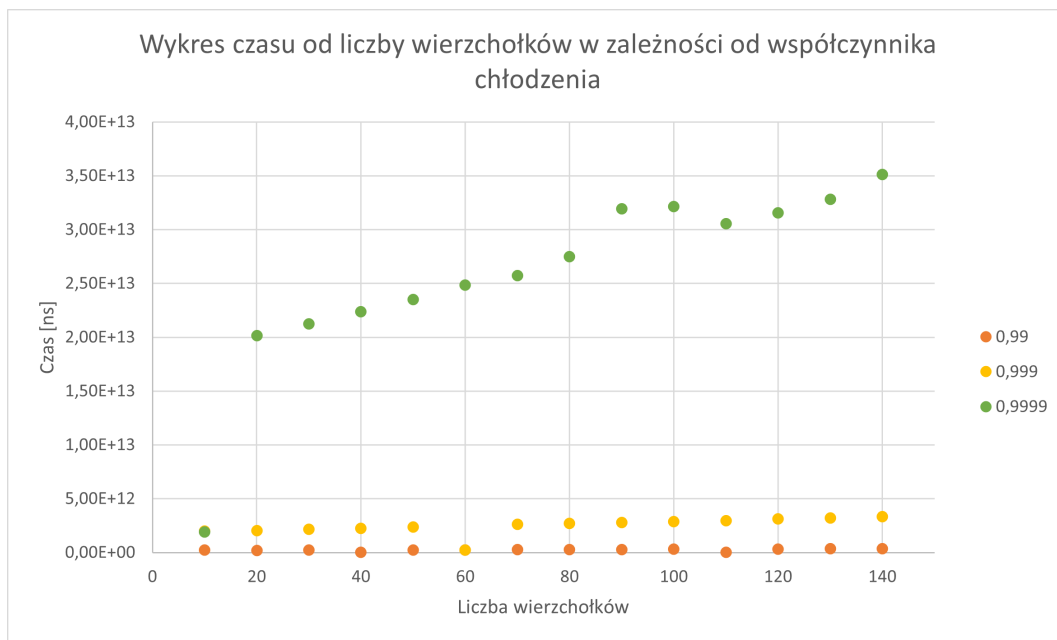
Tabela 1: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.99

| Liczba wierzchołków | Czas [ns] |
|---------------------|-----------|
| 10 | 2,00E+12 |
| 20 | 2,02E+12 |
| 30 | 2,16E+12 |
| 40 | 2,25E+12 |
| 50 | 2,36E+12 |
| 60 | 2,47E+11 |
| 70 | 2,63E+12 |
| 80 | 2,71E+12 |
| 90 | 2,79E+12 |
| 100 | 2,87E+12 |
| 110 | 2,96E+12 |
| 120 | 3,12E+12 |
| 130 | 3,22E+12 |
| 140 | 3,34E+12 |

Tabela 2: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.999

| Liczba wierzchołków | Czas [ns] |
|---------------------|-----------|
| 10 | 1,92E+12 |
| 20 | 2,02E+13 |
| 30 | 2,12E+13 |
| 40 | 2,24E+13 |
| 50 | 2,35E+13 |
| 60 | 2,48E+13 |
| 70 | 2,57E+13 |
| 80 | 2,75E+13 |
| 90 | 3,19E+13 |
| 100 | 3,21E+13 |
| 110 | 3,06E+13 |
| 120 | 3,16E+13 |
| 130 | 3,28E+13 |
| 140 | 3,51E+13 |

Tabela 3: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.9999



Rysunek 2: Wykres czasu od liczby wierzchołków w zależności od współczynnika chłodzenia

5.2 Wyniki poziomu błędu dla konkretnych przykładów

| Liczba wierzchołków | Błąd [%] |
|---------------------|----------|
| 17 | 83,9316 |
| 53 | 38,378 |
| 70 | 9,93458 |
| 34 | 98,8034 |
| 36 | 38,378 |
| 39 | 9,93458 |
| 45 | 25,0389 |
| 48 | 25,7298 |
| 56 | 15,9477 |
| 65 | 16,181 |
| 71 | 31,8694 |
| 171 | 47,2015 |
| 100 | 42,0337 |
| 43 | 33,7949 |
| 323 | 43,9201 |
| 358 | 22,7381 |
| 403 | 1,22776 |
| 443 | 30,3922 |
| 48 | 55,718 |

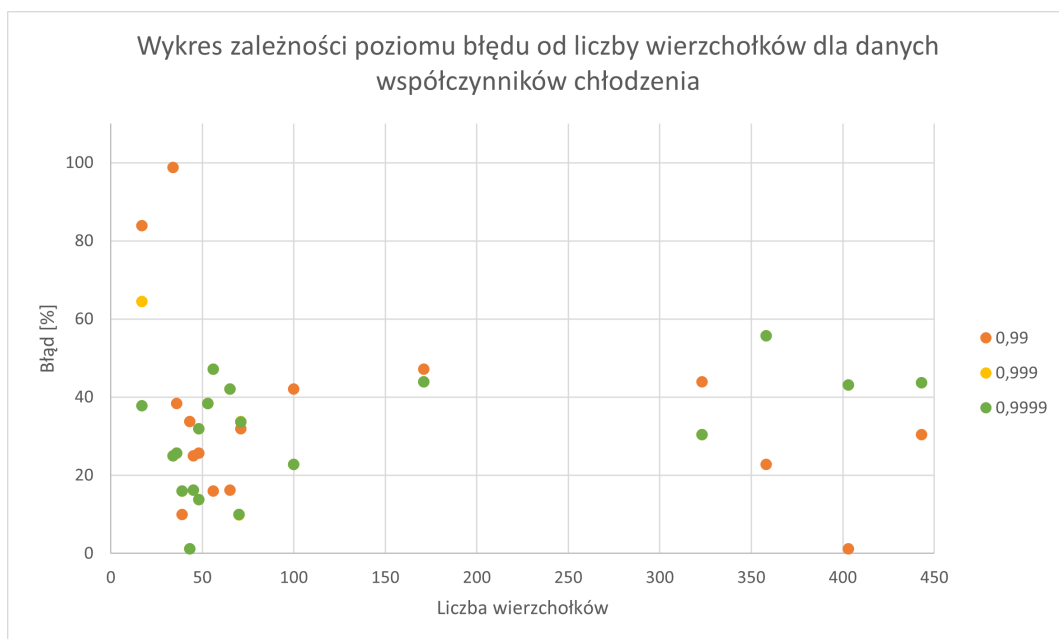
Tabela 4: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.99

| Liczba wierzchołków | Błąd [%] |
|---------------------|----------|
| 17 | 64,444 |
| 53 | 38,378 |
| 70 | 9,892 |
| 34 | 25,0389 |
| 36 | 25,7298 |
| 39 | 15,9477 |
| 45 | 16,181 |
| 48 | 31,8694 |
| 56 | 47,1891 |
| 65 | 42,0337 |
| 71 | 33,7949 |
| 171 | 43,9201 |
| 100 | 22,7381 |
| 43 | 1,22776 |
| 323 | 30,3922 |
| 358 | 55,718 |
| 403 | 43,1643 |
| 443 | 43,75 |
| 48 | 13,8122 |

Tabela 5: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.999

| Liczba wierzchołków | Błąd [%] |
|---------------------|----------|
| 17 | 37,7778 |
| 53 | 38,378 |
| 70 | 9,93458 |
| 34 | 25,0389 |
| 36 | 25,7298 |
| 39 | 15,9303 |
| 45 | 16,181 |
| 48 | 31,8694 |
| 56 | 47,2015 |
| 65 | 42,0337 |
| 71 | 33,706 |
| 171 | 43,9201 |
| 100 | 22,7381 |
| 43 | 1,22776 |
| 323 | 30,3922 |
| 358 | 55,718 |
| 403 | 43,1643 |
| 443 | 43,7426 |
| 48 | 13,8122 |

Tabela 6: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.9999



Rysunek 3: Wykres zależności poziomu błędu od liczby wierzchołków dla danych współczynników chłodzenia

5.3 Zależność poziomu błędu od czasu

| Liczba wierzchołków | Błąd [%] | Czas [ns] |
|---------------------|----------|-----------|
| 17 | 83,9316 | 1,72E+11 |
| 53 | 38,378 | 2,36E+11 |
| 70 | 9,93458 | 2,79E+11 |
| 34 | 98,8034 | 2,03E+11 |
| 36 | 38,378 | 2,05E+11 |
| 39 | 9,93458 | 2,08E+11 |
| 45 | 25,0389 | 2,17E+11 |
| 48 | 25,7298 | 2,25E+11 |
| 56 | 15,9477 | 2,30E+11 |
| 65 | 16,181 | 2,39E+11 |
| 71 | 31,8694 | 2,50E+11 |
| 171 | 47,2015 | 3,71E+11 |
| 100 | 42,0337 | 3,08E+10 |
| 43 | 33,7949 | 2,13E+11 |
| 323 | 43,9201 | 5,45E+11 |
| 358 | 22,7381 | 5,99E+11 |
| 403 | 1,22776 | 6,55E+11 |
| 443 | 30,3922 | 7,16E+11 |
| 48 | 55,718 | 2,35E+11 |

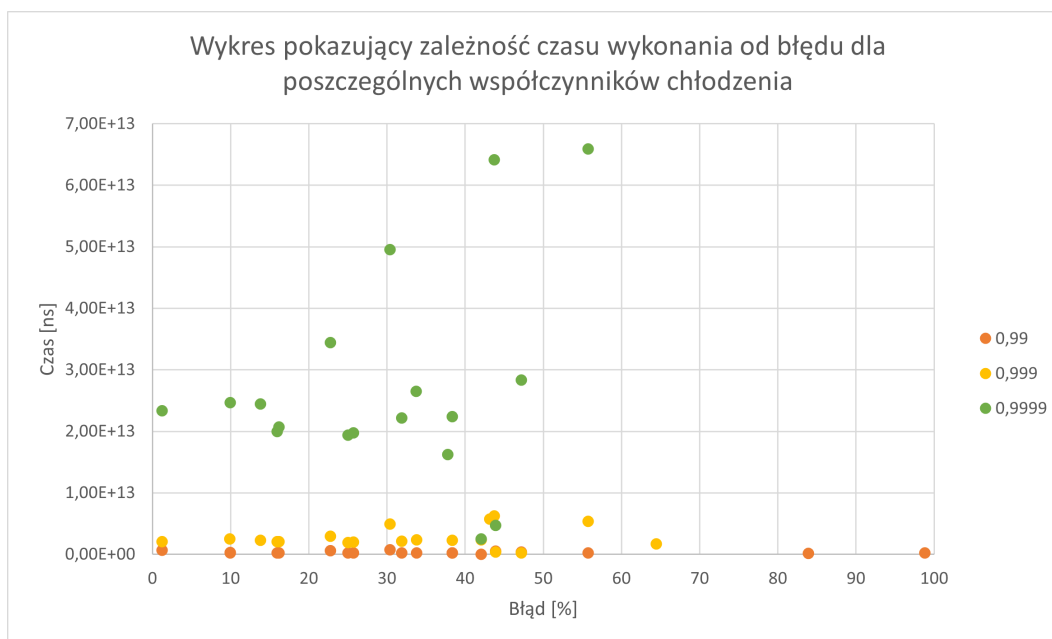
Tabela 7: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.99

| Liczba wierzchołków | Błąd [%] | Czas [ns] |
|---------------------|----------|-----------|
| 17 | 64,444 | 1,68E+12 |
| 53 | 38,378 | 2,28E+12 |
| 70 | 9,892 | 2,48E+12 |
| 34 | 25,0389 | 1,94E+12 |
| 36 | 25,7298 | 1,97E+12 |
| 39 | 15,9477 | 2,08E+12 |
| 45 | 16,181 | 2,07E+12 |
| 48 | 31,8694 | 2,10E+12 |
| 56 | 47,1891 | 2,20E+11 |
| 65 | 42,0337 | 2,34E+12 |
| 71 | 33,7949 | 2,38E+12 |
| 171 | 43,9201 | 3,48E+11 |
| 100 | 22,7381 | 2,92E+12 |
| 43 | 1,22776 | 2,08E+12 |
| 323 | 30,3922 | 4,92E+12 |
| 358 | 55,718 | 5,34E+12 |
| 403 | 43,1643 | 5,75E+12 |
| 443 | 43,75 | 6,27E+12 |
| 48 | 13,8122 | 2,30E+12 |

Tabela 8: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.999

| Liczba wierzchołków | Błąd [%] | Czas [ns] |
|---------------------|----------|-----------|
| 17 | 37,7778 | 1,62E+13 |
| 53 | 38,378 | 2,24E+13 |
| 70 | 9,93458 | 2,46E+13 |
| 34 | 25,0389 | 1,93E+13 |
| 36 | 25,7298 | 1,97E+13 |
| 39 | 15,9303 | 2,00E+13 |
| 45 | 16,181 | 2,07E+13 |
| 48 | 31,8694 | 2,22E+13 |
| 56 | 47,2015 | 2,83E+13 |
| 65 | 42,0337 | 2,51E+12 |
| 71 | 33,706 | 2,65E+13 |
| 171 | 43,9201 | 4,69E+12 |
| 100 | 22,7381 | 3,44E+13 |
| 43 | 1,22776 | 2,33E+13 |
| 323 | 30,3922 | 4,95E+13 |
| 358 | 55,718 | 6,59E+13 |
| 403 | 43,1643 | 9,28E+13 |
| 443 | 43,7426 | 6,41E+13 |
| 48 | 13,8122 | 2,45E+13 |

Tabela 9: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.9999



Rysunek 4: Wykres pokazujący zależność czasu wykonania od błędu dla poszczególnych współczynników chłodzenia

6 Wnioski

W projektowaniu algorytmu, jak wskazywała teoria, faktycznie największym wyzwaniem okazało się dopasowanie początkowych parametrów. Sposób obliczania temperatury początkowej jest kluczowy dla nadania na tyle odpowiedniego czasu, aby algorytm mógł znaleźć jak najlepszy wynik. Próbkowanie na ścieżce od miasta 1 do N dla 10000 losowych różnych ścieżek trwa na tyle krótko, że nie wpływa w znaczący sposób na czas wykonywania się programu a nadaje wartość, która pozwala na przejście przez krajobraz sąsiadów.

Wyniki poziomu błędu dla danych współczynników chłodzenia pokazały, że nie musi być on wcale bardzo mały, aby minimalizować błąd. Dla liczby wierzchołków do 323 możemy zauważyć, że najniższy współczynnik, czyli 0.9999, faktycznie wskazuje mniejszy poziom błędów i generuje lepszy wynik. Jednocześnie czas wykonania algorytmu jest niewiele większy niż dla większych współczynników. Dla większej liczby wierzchołków, zdecydowanie lepiej radzi sobie wyższy współczynnik. Może wynikać to z faktu, że za niski współczynnik pozwala na wydłużenie działania i zwiększa prawdopodobieństwo akceptowania gorszego wyniku.

Wyniki eksperymentu pokazują, że czas trwania algorytmu nie gra tutaj aż tak dużej roli. Dla $N < 328$, jeżeli zachodzi potrzeba, żeby działał bardzo szybko - wybieramy bardzo duży współczynnik, w tym przypadku 0.99, a jeśli zależy nam na dokładności i niewiele dłuższym czasie działania - wybieramy bardzo mały współczynnik, np. 0.9999. Dla $N > 328$, najlepiej używać zawsze dużego współczynnika. Poprawia to zarówno wynik, jak i czas wykonywania się algorytmu.

Zależność czasu wykonania od błędu nie pokazuje nam zbyt wiele, ale jeśli dodamy do tego liczbę wierzchołków to ułatwia to wyciąganie sensownych wniosków.