Projektowanie Efektywnych Algorytmów
Przegląd zupełny
Programowanie dynamiczne

Jakub Klawon

7 Grudnia 2023

Spis treści

1 Wstęp teoretyczny

Tematem projektu jest przygotowanie programu do badania efektywności algorytmu symulowanego wyżarzania (ang. Simulated Annealing) w rozwiązywaniu problemu komiwojażera (ang. traveling salesman problem). Jest to algorytm heurystyczny służący do określania przybliżonego optimum dla danego problemu. Symulowanie wyżarzanie działa iteracyjnie, krok po kroku zbliżając się do optymalnego rozwiązania. W algorytmie wykorzystywany jest parametr symulujący temperaturę, która jest częścią wzoru określającego prawdopodobieństwo, z jakim możemy przyjąć gorszy wynik, niż najlepszy, który na ten moment posiadamy. Temperatura jest zmniejszana co iterację do momentu, aż jest na tyle niska, że prawdopodobieństwo na przyjęcie gorszego wyniku jest skrajnie niskie. Współczynnik takiego prawdopodobieństwa pomaga przeskoczyć optima lokalne i pomóc dostać się do optimum globalnego.

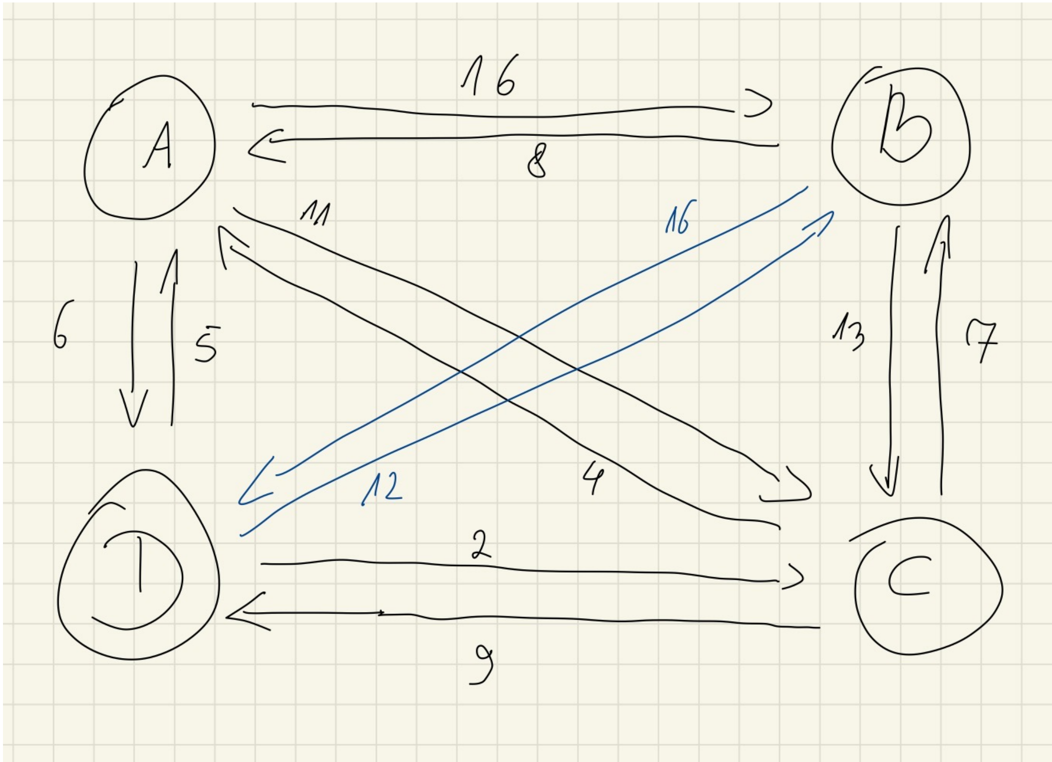
2 Opis implementacji algorytmu

1. Algorytm przyjmuje jako parametry: współczynnik chłodzenia, temperaturę końcową oraz początkową. Oblicza również początkową ścieżkę, w której dokonuje zmian losowo poprzez metodą zachłanną.
2. Temperatura początkowa obliczana jest na podstawie próbkowania 10 tys. różnic między sąsiadami ze wzoru $T_0 = \frac{-\Delta}{\ln 0.99}$.
3. Do przechowywania trasy tymczasowej oraz tej, przekazywanej jako wynik, wykorzystywana jest lista dwukierunkowa. Wynika to z faktu, że algorytm może często zmieniać zawartość ścieżki a dodawanie oraz usuwanie w liście jest bardzo znacznie efektywniejsze pod względem czasu, niż w tablicy dynamicznej.
4. Do generowania liczb losowych, zastosowana została klasa uniform_real_distribution zarówno dla typu integer jak i typu double.
5. Przy uzyskaniu najlepszego wyniku, algorytm generuje nowe wyniki na jego podstawie. Jeżeli akceptowany jest nowy wynik, czy to na podstawie różnicy, czy prawdopodobieństwa, algorytm sprawdza, czy różnica pomiędzy najlepszym wynikiem a aktualnym jest mniejsza niż $\frac{najlepszy\_wynik}{4}$. Umożliwia to dokładniejsze przeszukanie sąsiadów o najbardziej zbliżonych wynikach do najlepszego.

3 Przykład Praktyczny

3.1 Dane

$$\begin{vmatrix} 0 & 16 & 11 & 6 \\ 8 & 0 & 13 & 16 \\ 4 & 7 & 0 & 9 \\ 5 & 12 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$



Rysunek 1: Graficzne przedstawienie danych

3.2 Opis

1. Współczynnik chłodzenia zostaje ustawiony na 0.99, temperatura końcowa = 0.01.
2. Algorytm liczy temperaturę początkową na podstawie 10000 losowych sąsiadów. $T_0 = 747.01$.
3. Początkowa ścieżka wyznaczana jest sposobem zachłannym, od punktu startowego wyznacza kolejno najmniejszą wartość dla danego miasta. Ścieżka początkowa to A -> C -> D -> B -> A
4. Algorytm rozpoczyna działanie.
5. Najlepszy wynik = INT_MAX, aktualny wynik równy najlepszemu, aktualna temperatura równa T_0.
6. Rozpoczyna się pętla, sprawdzamy warunek temperatura > temperatura końcowa, $747.01 > 0.01$, więc algorytm kontynuuje działanie.
7. Losowa zamiana wierzchołków w obliczanym koszcie ścieżki, funkcja wskazuje D i C. Koszt ścieżki to 22.
8. Różnica między 23 a najlepszym wynikiem jest mniejsza od 0, więc 23 zostaje nowym aktualnym wynikiem ze ścieżką A -> D -> C -> B -> A. Aktualny wynik jest mniejszy od najlepszego wyniku, więc zostaje również najlepszym wynikiem.
9. Algorytm przeszukuje 50 sąsiadów zamieniając losowo miejsca znalezionej ścieżki. Nie znajduje jednak lepszego wyniku.
10. Temperatura zostaje obniżona, $747.01 * 0.99 = 739.54$.
11. Sprawdzamy warunek temperatura > temperatura końcowa, $739.54 > 0.01$, więc algorytm kontynuuje działanie.

12. Losowa zamiana wierzchołków w obliczanym koszcie ścieżki, funkcja wskazuje C i B. Koszt ścieżki to 35.

13. Różnica między 35 a najlepszym wynikiem jest dodatnia, sprawdzamy prawdopodobieństwo przyjęcia gorszego wyniku ze wzoru $\exp \frac{-\Delta}{temperatura} = 0.029$ a losowo wygenerowaną liczbą jest 0.042. Losowo wygenerowana liczba jest większa od prawdopodobieństwa, więc nie przyjmujemy gorszego wyniku.

14. Temperatura zostaje obniżona, $739.54 * 0.99 = 732.14$.

15. Algorytm wykonuje dalsze iteracje, do momentu kiedy wartość temperatury 0.00995036 jest mniejsza od 0.01 i kończy działanie. Najlepszym wynikiem zostaje 23 ze ścieżką A -> D -> C -> B -> A.

4 Plan eksperymentu

Eksperyment składa się z 4 części:

1. Pomiary czasu dla losowo generowanych przykładów - program generuje 50 różnych losowych instancji dla przedziału 10,20, ... ,140 elementów. Dla każdej liczby miast przelicza średnią z wyników. Zakres liczb znajdujących się w grafach to od 1 do 2000. Eksperyment prowadzony jest na temperaturze końcowej równej 0.001 i współczynnikach 0.99, 0.999 oraz 0.9999.

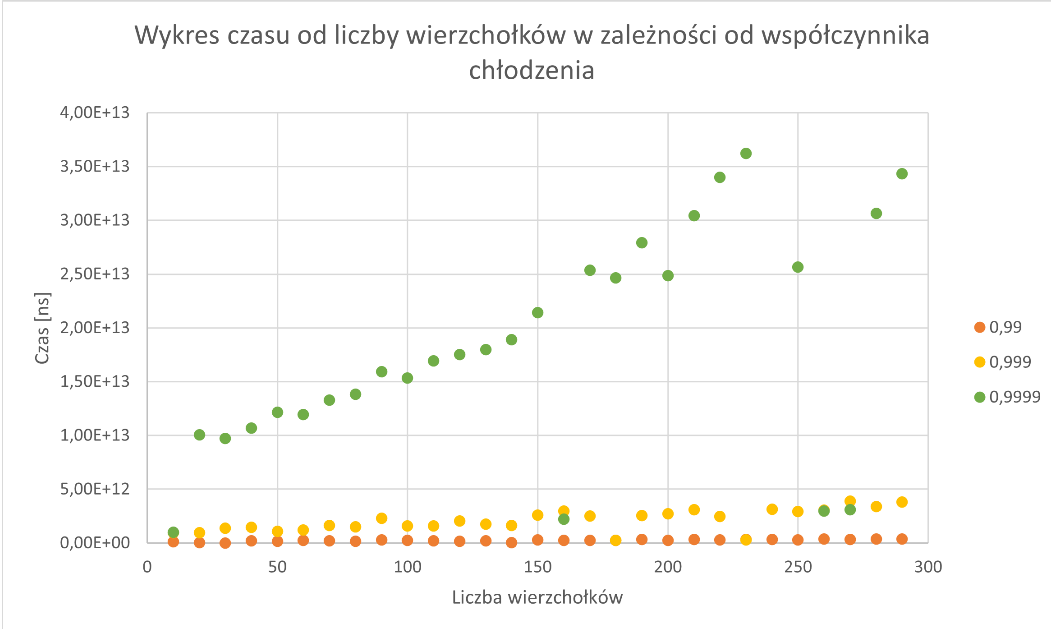
2. Wyniki poziomu błędu dla konkretnych przykładów - program działa na 19 plikach pobranych ze strony Uniwersytetu w Heidelbergu, dla których znane są optymalne wyniki. Korzystając ze wzoru $\frac{wynik - optymalny}{optymalny} * 100$ przekazuje błąd wyrażony w procentach. Dla każdego zestawu wykonuje 15 pomiarów, z których wylicza średnią. Temperatura końcowa w eksperymencie to 0.001 a współczynniki chłodzenia kolejno 0.99, 0.999 oraz 0.9999.

5 Wyniki eksperymentu

5.1 Pomiary czasu dla losowo generowanych przykładów

Liczba wierzchołków	Czas (0.99) [ns]	Czas (0.999) [ns]	Czas (0.9999) [ns]
10	1,33E+11	9,39E+11	1,00E+12
20	1,63E+10	9,40E+11	1,00E+13
30	9,43E+05	1,36E+12	9,73E+12
40	2,10E+11	1,44E+12	1,07E+13
50	1,58E+11	1,08E+12	1,21E+13
60	2,48E+11	1,21E+12	1,19E+13
70	2,21E+11	1,61E+12	1,33E+13
80	1,77E+11	1,49E+12	1,38E+13
90	2,69E+11	2,30E+12	1,59E+13
100	2,35E+11	1,59E+12	1,53E+13
110	2,10E+11	1,58E+12	1,69E+13
120	1,70E+11	2,04E+12	1,75E+13
130	1,93E+11	1,77E+12	1,80E+13
140	1,84E+10	1,61E+12	1,89E+13
150	2,85E+11	2,60E+12	2,14E+13
160	2,43E+11	2,96E+12	2,20E+12
170	2,24E+11	2,50E+12	2,54E+13
180	2,22E+11	2,24E+11	2,47E+13
190	3,12E+11	2,56E+12	2,79E+13
200	2,56E+11	2,72E+12	2,49E+13
210	3,06E+11	3,08E+12	3,04E+13
220	3,04E+11	2,45E+12	3,40E+13
230	3,17E+11	2,72E+11	3,62E+13
240	3,37E+11	3,12E+12	1,98E+14
250	2,83E+11	2,92E+12	2,56E+13
260	3,89E+11	3,04E+12	2,98E+12
270	3,19E+11	3,87E+12	3,09E+12
280	3,78E+11	3,39E+12	3,06E+13
290	3,75E+11	3,82E+12	3,43E+13

Tabela 1: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.99, 0.999 i 0.9999

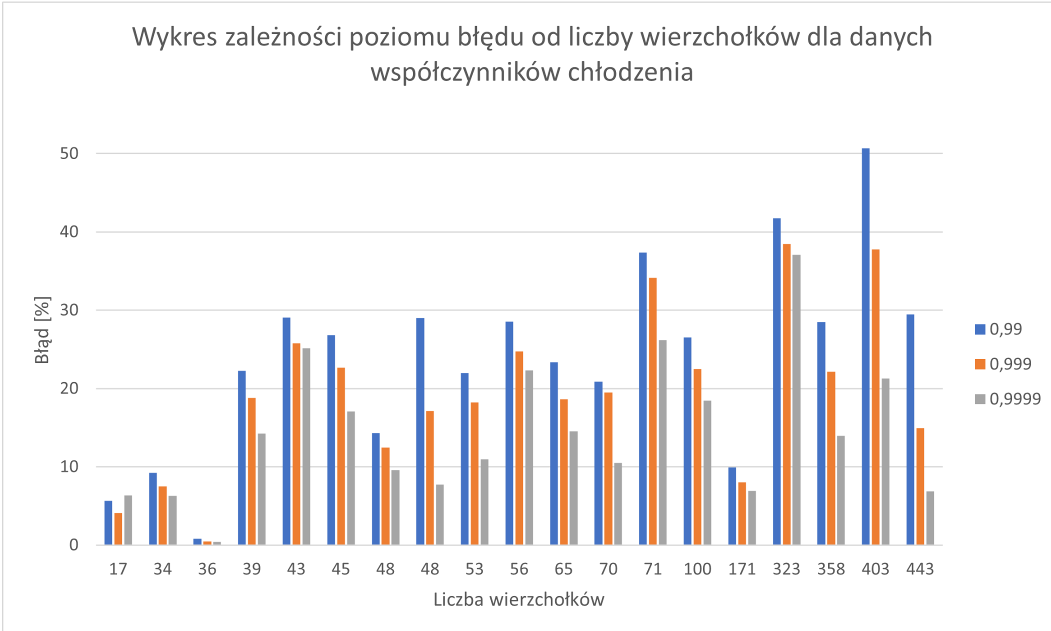


Rysunek 2: Wykres czasu od liczby wierzchołków w zależności od współczynnika chłodzenia

5.2 Wyniki poziomu błędu dla konkretnych przykładów

Liczba wierzchołków	Błąd (0.99) [%]	Błąd (0.999) [%]	Błąd (0.9999) [%]
17	5,64103	4,10256	6,32479
34	9,2244	7,5207	6,30937
36	0,806643	0,485172	0,383155
39	22,2443	18,8262	14,2219
43	29,088	25,767	25,1247
45	26,8318	22,6464	17,0946
48	14,2916	12,4504	9,58813
48	28,9975	17,125	7,73775
53	21,9751	18,2167	10,9746
56	28,5358	24,7367	22,3123
65	23,3665	18,6235	14,5357
70	20,9007	19,4705	10,5182
71	37,3899	34,1599	26,2099
100	26,4991	22,4889	18,441
171	9,89838	8,04437	6,93921
323	41,7253	38,4344	37,0817
358	28,4867	22,1317	13,9718
403	50,6965	37,7644	21,284
443	29,4442	14,9371	6,88303

Tabela 2: Pomiary dla współczynnika chłodzenia 0.99, 0.999 i 0.9999



Rysunek 3: Wykres zależności poziomu błędu od liczby wierzchołków dla danych współczynników chłodzenia

6 Wnioski

W projektowaniu algorytmu, jak wskazywała teoria, faktycznie największym wyzwaniem okazało się dopasowanie początkowych parametrów. Sposób obliczania temperatury początkowej jest kluczowy dla nadania na tyle odpowiedniego czasu, aby algorytm mógł znaleźć jak najlepszy wynik. Próbkowanie na ścieżce od miasta 1 do N dla 10000 losowych różnych ścieżek trwa na tyle krótko, że nie wpływa w znaczący sposób na czas wykonywania się programu a nadaje wartość, która pozwala na przejście przez krajobraz sąsiadów.

W zależności od liczby wierzchołków, możemy zauważyć, że dobranie mniejszego współczynnika zazwyczaj generuje lepszy wynik. Jednakże, dla małych wartości, większy współczynnik sprawia, że algorytm jest w stanie zaakceptować gorszy wynik i zawyżyć poziom błędu.

Czas wykonywania się algorytmu rośnie wraz z liczbą wierzchołków. Dla współczynnika 0.9999, czas trwania znacząco się wydłuża w porównaniu do większych wartości.