7. The Probabilistic Method Sources • Rosen 451

Intro Den probabilististiske metode er ikke ikke konstruktiv bevismetode der kan hjælpe med at bestemme eksistensen af et element i et sæt. I og med at det ikke er konstruktivt, giver det os ikke kvaliteten i rent faktisk et finde et element som så, men blot beviser tilstedeværelsen. Måden den virker er som følger: Antag at vi leder efter et element med en speciel attribut, hvis vi har et sæt hvor hvis vi trækker et tilfældig element og sandsynligheden for at det ikke har den attribut er mindre end 1, så må det nødvendigvis betyde at der eksistere mindst et element der har attributen der trækker sandsynligheden ned. Ækvivalent, så bedtyder det, at hvis sandsynligheden for at trække et element med denne attribut er større end 0, så må der være et element der trækker denne sandsynlighed på.

$$S = \{a_0, a_1, ..., a_j, ..., a_{n-1}, a_n\}$$

Givet et tilfældigt element

$$a_j$$

og en function der fortælle om den har den ønskede attribut

$$f(a_j) = true|false$$

Da kan vi konkludere at

$$pr(f(a_j) = false) < 1 \to \exists a_i \in S : f(a_i) = true$$

$$pr(f(a_j) = true) > 0 \to \exists a_i \in S : f(a_i) = true$$

K-sat problem Antag at vi har et k-sat problem, vi vil da forsøge at bevise, at der eksisterer en løsning såfremt at vi har

$$m < 2^k$$

clauses. Vi lader en random variable

$$X_i$$

notere om clause i ikke er satisfied sådan at den er en hvis den ikke er satisfied.

Vi kan da udregne Expected antal unsatisfied clauses

$$E[X] = \sum_{i=0}^{m} E[X_i] = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2}^k = \sum_{i=0}^{m} 2^{-k} = m2^{-k} < 1$$

Vi ved at der er mindre end en da, m er mindre end k. Nu vil vi prøve at udregne hvad chancen er for at antallet af ikke satisfied er større end én ved markovs

$$pr(X \geq 1) = \frac{E[X]}{1} < 1$$

Da chancen er mindre end én må der være noget der trækker fra bunden, altså der må eksistere end løsning hvor alle er satisfied.

Bipartite I aktion kan det eksempelvis bruges til at bevise at der for enhver graph eksistere en spanning bipartite subgraph. Lad os først opdele alle vertices i to sæt med sandsynligheden 0.5, sådan at vi har to sæt

$$G = (V, E), |E| = m, |V| = n$$

$$S \subseteq V$$

$$T \subseteq V \setminus S$$

Lad X bestemme hvor mange edges der har vertices fra forskellige sæt, vi kan udregne X som

$$X = X_0 + X_1 + ... + X_m$$

Vi kan udregne det forventede antal edges der forbinder de to sæt, da expected value for hver indicater variable er en halv.

$$E[X] = \sum_{i=0}^{m} E[X_i] = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

Hvilken konkluderer vores bevise, apparantly.