3. Recurrence Relations Sources

• Rosen 497

Intro Recurrence relations er relationer hvor noget er afhængigt af tidligere recursive kald. Et eksempel kunne være Fibonacci talrækken

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

Homogeneuos Reccurence Vi kan have en form på vores recurrence relation der gør at vi kan standardisere løsninger, eksempelvis er Fibonacci rækken ovenfor en homogen recurrence relation

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + ... + c_k \cdot a_{n-k}, c_k \neq 0$$

Når vi skal løse homogeneus recurrence leder vi efter en løsning af formen

$$a_n = r^n$$

hvor det skal gælde at

$$r^n = c_1 \cdot r^{n-1} + c_2 \cdot r^{n-2} + ... + c_k \cdot r^{n-k}$$

Ved at substrahere alle led fra højre og dividere med

$$r^{n-k}$$

får vi

$$r^k - c_1 \cdot r^{k-1} - c_2 \cdot r^{k-2} - ... - c_k = 0$$

For at simplificere gør vi det kun på formen for andengrads sådan at

$$r^2 - r \cdot c_1 - c_2 = 0$$

Hvor vi har to løsninger for

$$r$$

. Da kan vi løse

$$a_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n$$

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_2 \cdot r_2^n - a_n}{r_1^n}$$

Og mere artikmetik. Vi kan løse det ved at indsætte værdier i n fra vores basecases.

Non-homogeneuos Recurrence Relations Hvis vi gerne vil løse recurrence relations som ikke er homogene men har formen

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + ... + c_k \cdot a_{n-k} + F(n), c_k \neq 0$$

Hvor funktionen er afhængig af n, da kan vi løse den ved første at løse den tilsvarende homogene recurrence og der efter finde en specific løsning

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$$

Efter at have fundet en løsning på den homogene uden at finde konstanter

$$\alpha_i$$

kan vi prøve at gætte løsningen for

$$F(n)$$

. Lad os antage at den var lineær, i så fald kunne et gæt på formen være

$$a \cdot n + b$$

Vi kan så udskifte alle led i vores recurrence funktion sådan at

$$a_n = a \cdot n + b$$
$$a_{n-1} = a \cdot (n - 1) + b$$
$$a_{n-k} = a \cdot (n - k) + b$$

Vi kan da prøve at flytte alle led hen på den ene side og se om vi kan finde nogle løsninger for konstanterne

$$a, b$$

Hvis muligt har vi løsningen

$$a_n^{(p)} = a \cdot n + b$$

Vi kan nu indsætte det i formlen overfor og finde konstanter fra den homogene løsningen og da er vi færdige.