9. Uses of Indicator Random Variables

Indicator Random Variables Vi kan ofte udregne kørertid på en algoritme ved at udregne dens expected value på en random variable der beskriver kørertiden ved at tælle hvornår et event sker. Vi kan beskrive om et sådan event ved en indicator random variable der kan tage en binære valg og evaluerer til enten én hvis eventet sker eller nul hvis ikke.

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n, X_i \in 0, 1$$

Vi er derved interesseret i at finde den expected value af antallet af events.

$$E[X] = E[\sum_{i=0}^{n} X_i] = \sum_{i=0}^{n} E[X_i] = \sum_{i=0}^{n} X_i * pr(X_i)$$

Et eksempel er the hiring problem, lad os antage at vi har

$$n$$

kandidater hvor hver kandidat er vurderet til at have en score mellem

$$0..n$$

. Hver gang vi får en ny kandidat der er bedre end den foregående, ansætter vi personen. Under antagelse at rækkefølgen er tilfældig, hvor mange personer skal vi da ansætte? Givet overstående, kan vi modellere om en person bliver ansat med en random indikater variable. Vi udregner at en person i rækken bliver ansat med sandsynligheden

$$E[X_I] = pr(X_i) = 1/i$$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} 1/i = ln(n)$$

K-sat problem Antag at vi har et k-sat problem, vi vil da forsøge at bevise, at der eksisterer en løsning såfremt at vi har

$$m < 2^k$$

clauses. Vi lader en random variable

$$X_i$$

notere om clause i ikke er satisfied sådan at den er en hvis den ikke er satisfied.

Vi kan da udregne Expected antal unsatisfied clauses

$$E[X] = \sum_{i=0}^{m} E[X_i] = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2}^k = \sum_{i=0}^{m} 2^{-k} = m2^{-k} < 1$$

Vi ved at der er mindre end en da, m er mindre end k. Nu vil vi prøve at udregne hvad chancen er for at antallet af ikke satisfied er større end én ved markovs

$$pr(X \geq 1) = \frac{E[X]}{1} < 1$$

Da chancen er mindre end én må der være noget der trækker fra bunden, altså der må eksistere end løsning hvor alle er satisfied.