

2. Inclusion Exclusion Sources • Rosen 535

Intro Ofte kunne vi godt tænke os at tælle to forskellige sæt hvor hvert sæt forklarer en form for attribut. Problemet er at vi nogle gang kan have overlap i disse sæt og vi er derfor i fare for double counting. Eksempelvis, En gruppe af håndbold og fodboldspillere har idrætsdag og vi kender størelsen af hvor mange der spiller håndbold og fodbold. Hvis vi bare lagde de to tal sammen, da ville vi dobbelt tælle personer der potentielt spillede både håndbold og fodbold. Mere generelt bliver vi nødt til at trække intersection fra de to sæt

$$A, B$$

sådan at

$$A \cup B = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dette kan tegnes som et Venn-diagram med tre sæt for at udlede den generelle form.

Counting Onto-functions Vi kan også vælge at bruge inclusion-exclusion til at tælle ting der ikke har en attribut. Med onto-functions kunne det være først at tælle alle potentielle onto-functions, for der efter at trække alle fra med en given attribut, navnlig så

$$N(p'_0, p'_1, \dots, p'_n) = N - \sum_i N(p_i) + \sum_{j,i} N(p_i, p_j) \dots$$

Vi kunne forestille også at tælle eksempelvis onto-functions, lad da

$$m$$

være antallet af ting vi mapper fra og

$$n$$

være antallet af ting vi mapper til. Lad da

$$p_i, i \in m$$

være variablen der indikere at en funktion IKKE mapper til en given kasse. Vi kan da først udregne det maximale antal onto-funktioner

$$N = n^m$$

Når vi skal tælle alle de funktioner der ikke mapper til en bestemt kasse, er det det samme som kun at mappe til

$$n - 1$$

kasse. Da vi kunne have “udelukket” hvilken som helst af de n kasser, skal vi også tælle hvor mange muligheder vi havde for at vælge

$$\sum_i N(p_i) = C(1, n) \cdot (n-1)^m$$

Hvis vi tæller dem der udelukker to kasser har vi

$$\sum_{i,j} N(p_i, p_j) = C(2, n) \cdot (n-2)^m$$

Hatcheck problem Hvad er chancen for at ingen får sin hat igen givet n personer? Vi kan tælle dearrangments over permutationer. Vi udregner dearrangments som permutationer minus antallet permutationer hvor et element har sin originale plads, plus dem der har to på sin oprindelige plads osv. Ligesom onto-funktion.