



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы и биоматематика»

Исследование дискретных и непрерывных моделей

Студенты 315 группы

Я. А. Григорьев

Г. С. Парастаев

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2018

Содержание

1	Постановка задачи	3
1.1	Динамическая система с дискретным временем	3
1.2	Динамическая система с непрерывным временем	3
2	Исследование системы с дискретным временем	4
2.1	Нахождение особых точек	4
2.2	Исследование особых точек на устойчивость	5
2.3	Бифуркационная диаграмма	8
2.4	Исследование системы на наличие циклов	9
2.4.1	Наличие циклов длины 2	11
2.4.2	Наличие циклов длины 3	11
2.5	Исследование многомерного показателя Ляпунова	11
3	Исследование системы с непрерывным временем	13
3.1	Интерпретация системы	13
3.2	Проведение редукции системы	14
3.3	Исследование неподвижных точек системы	15
3.4	Качественный анализ поведения системы	19
3.5	Наличие предельных циклов в системе	24
3.6	Биологическая интерпретация результатов	24
	Список литературы	25

1 Постановка задачи

1.1 Динамическая система с дискретным временем

Рассматривается следующая дискретная динамическая система:

$$\begin{cases} u_1(t+1) = u_1(t)(k_1 u_3(t) - f(t)), \\ u_2(t+1) = u_2(t)(k_2 u_1(t) - f(t)), \\ u_3(t+1) = u_3(t)(k_3 u_2(t) - f(t)). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь переменные $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что при любых $t = 1, 2, \dots$ выполнены следующие условия постоянства:

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 1. \quad (2)$$

Для системы (1) необходимо сделать следующее:

1. Найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость.
2. Проверить существование цикла длины 2.
3. Проверить существование цикла длины 3 и построить бифуркационную диаграмму.
4. Исследовать зависимость показателей Ляпунова в зависимости от изменения параметров системы.

1.2 Динамическая система с непрерывным временем

Рассматривается следующая непрерывная динамическая система:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t) - c \cdot \frac{P(t)E(t)}{A + P(t)}, \\ \frac{dE(t)}{dt} = -dE(t) + e \cdot \frac{P(t)E(t)}{A + P(t)} \cdot Q(t), \\ \frac{dQ(t)}{dt} = -\gamma Q(t) + R. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $a, b, c, d, e, \gamma, A, R > 0$ — параметры системы, R рассматривается как параметр, регулирующий подачу кислорода.

Для системы (3) требуется сделать следующее:

1. Дать интерпретацию системы.
2. Ввести новые безразмерные ограничения, максимально уменьшив число входных параметров. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров.
4. Для каждой характерной области значений параметров построить фазовый портрет системы. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае вычислить первое число Ляпунова. Установить характер цикла (устойчивый, неустойчивый и т.д.).
6. Дать биологическую интерпретацию полученных результатов.

2 Исследование системы с дискретным временем

Отметим, что в силу условия постоянства (2) функция $f(t)$ определяется однозначно:

$$\begin{aligned} u_1(t+1) + u_2(t+1) + u_3(t+1) = \\ = u_1(t)(k_1 u_3(t) - f(t)) + u_2(t)(k_2 u_1(t) - f(t)) + u_3(t)(k_3 u_2(t) - f(t)) = 1, \end{aligned}$$

то есть

$$f(t)(u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)) + 1 = f(t) + 1 = k_1 u_1(t) u_3(t) + k_2 u_1(t) u_2(t) + k_3 u_3(t) u_2(t).$$

В итоге получаем, что

$$f(t) = k_1 u_1(t) u_3(t) + k_2 u_1(t) u_2(t) + k_3 u_3(t) u_2(t) - 1.$$

Для удобства введём функцию $u_0(t) \equiv u_3(t)$. Обозначим через $g(u(t))$ вектор-функцию, которая находится справа от знака равенства в системе (1).

2.1 Нахождение особых точек

Определение 1. *Неподвижной точкой динамической системы с дискретным временем $u(t+1) = g(u(t))$ называется допустимая (то есть удовлетворяющая всем ограничениям системы) точка u^* такая, что $u^* = f(u^*)$.*

Рассмотрим систему (1). Заметим, что точка $(0, 0, 0)$ не является неподвижной точкой данной системы, так как в этой точке не выполнено условие постоянства (2).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда одна из координат неподвижной точки не равна нулю, а две другие равны нулю (без ограничения общности будем считать, что $u_1 \neq 0, u_2 = u_3 = 0$). При этом из условия постоянства (2) следует, что $u_1 = 1$, а первое уравнение в рассматриваемой системе (1) при $u_1(t+1) = u_1(t) = u_1$ превращается в уравнение $u_1 = u_1$, которое выполнено всегда, поэтому точка $(1, 0, 0)$ является неподвижной точкой системы. Аналогично, точки $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ являются неподвижными точками рассматриваемой системы (причём они не зависят от параметров k_1, k_2, k_3). Обозначим полученные точки через e_1, e_2, e_3 .

Теперь рассмотрим случай, когда одна из координат неподвижной точки равна нулю, а две другие не равны нулю (будем считать, что $u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 1 - u_2 \neq 0$). Рассмотрим второе уравнение в системе (1). При подстановках $u_2(t+1) = u_2(t) = u_2, u_3(t) = u_3$ и делении этого уравнения на $u_2 \neq 0$, получаем, что $1 = 1 - k_3 u_3 u_2$, то есть $k_3 u_3 u_2 = 0$, но тогда в силу того, что $k_3 > 0$, получаем, что либо $u_3 = 0$, либо $u_2 = 0$, что противоречит нашим предположениям. Делаем вывод, что неподвижных точек, удовлетворяющих сделанным предположениям, наша система не содержит.

Неподвижные точки системы (u_1^*, u_2^*, u_3^*) при $u_1^* \neq 0, u_2^* \neq 0, u_3^* \neq 0$ определяются следующими равенствами:

$$k_1 u_3^* = k_2 u_1^* = k_3 u_2^* = f^* + 1 = k_1 u_1^* u_3^* + k_2 u_1^* u_2^* + k_3 u_3^* u_2^*.$$

Эти равенства мы получили, поделив условия $u_i^* = u_i^*(k_i u_{i-1}^* - f^*)$, $i = 1, 2, 3$, на $u_i^* \neq 0$. Мы получили систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных (u_1^*, u_2^*, u_3^*) . Её решение имеет следующий вид (здесь учитывается условие $u_1^* + u_2^* + u_3^* = 1$):

$$u_{i-1}^* = \frac{c}{k_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$c = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1}.$$

При этом

$$f^* = c - 1.$$

2.2 Исследование особых точек на устойчивость

Определение 2. *Неподвижная точка u^* отображения $u(t+1) = g(u(t))$ называется устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых начальных данных $u(0)$ из δ -окрестности точки u^* вся траектория системы $u(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$ содержится в ε -окрестности точки u^* . Если, кроме того,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(u(t)) = u^*,$$

то точка u^ называется асимптотически устойчивой.*

Справедлива следующая общая теорема, доказательство которой может быть найдено в [3].

Теорема 1. *Пусть задана динамическая система с дискретным временем:*

$$u(t+1) = g(u(t)), \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

где g — гладкое отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n . Предположим, что отображение имеет неподвижную точку u^ : $g(u^*) = u^*$. Тогда неподвижная точка u^* устойчива (асимптотически), если все собственные значения μ_1, \dots, μ_n матрицы Якоби вектор-функции $g(u)$, вычисленной в точке u^* , удовлетворяют условию $|\mu_i| < 1$. Если же хоть одно собственное значение удовлетворяет условию $|\mu_i| > 1$, то положение равновесия u^* неустойчиво.*

Матрица Якоби нашей системы имеет вид:

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \frac{\partial g_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \frac{\partial g_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} & \frac{\partial g_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 u_3(1-2u_1) - 2k_2 u_1 u_2 - k_3 u_3 u_2 + 1 & -k_2 u_1^2 - k_3 u_1 u_2 & k_1 u_1 - k_1 u_1^2 - k_3 u_1 u_2 \\ k_2 u_2 - k_1 u_2 u_3 - k_2 u_2^2 & k_2 u_1(1-2u_2) - k_1 u_1 u_3 - 2k_3 u_3 u_2 + 1 & -k_1 u_1 u_2 - k_3 u_2^2 \\ -k_1 u_3^2 - k_2 u_2 u_3 & k_3 u_3 - k_2 u_1 u_3 - k_3 u_3^2 & k_3 u_2(1-2u_3) - 2k_1 u_1 u_3 - k_2 u_1 u_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Исследуем неподвижные точки e_1, e_2, e_3 . При подстановке точки e_1 в матрицу Якоби, получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её собственные значения равны $\mu_{1,2} = 1$, $\mu_3 = k_2 + 1 > 1$, и по теореме (1) получаем, что неподвижная точка e_1 является неустойчивой по Ляпунову для любых значений параметров k_1, k_2, k_3 . Так как наша система инвариантна относительно циклического сдвига, то получаем, что неподвижные точки e_2, e_3 также являются неустойчивыми по Ляпунову.

Подставим в матрицу Якоби оставшуюся неподвижную точку:

$$J(u^*) = -c^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{k_2 + k_3} & \frac{1}{k_2 + k_1 k_2} & -\frac{k_1}{k_2 k_3} \\ -\frac{k_2}{k_1 k_3} & \frac{1}{k_3 + k_1} & \frac{1}{k_3 + k_2 k_3} \\ \frac{1}{k_1 + k_1 k_3} & -\frac{k_3}{k_1 k_2} & \frac{1}{k_1 + k_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv J + I.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$|J(u^*) - \mu I| = |J - (\mu - 1)I| = 0.$$

Сделаем замену переменной $\lambda = \mu - 1$. Тогда характеристическое уравнение примет вид $|J - \lambda I| = 0$. Оно эквивалентно следующему характеристическому многочлену:

$$\lambda^3 + 2c\lambda^2 + 2c^2\lambda + c^3 = 0.$$

Получаем следующие корни:

$$\lambda_1 = -c, \quad \lambda_{2,3} = -c \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Делаем обратную замену $\mu = \lambda + 1$:

$$\mu_1 = 1 - c, \quad \mu_{2,3} = 1 - c \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

В силу того, что $k_1, k_2, k_3 > 0$, получаем, что $c > 0$.

Воспользуемся теоремой 1. Выясним, когда выполняются условия $|\mu_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$:

$$|\mu_1| < 1 \iff 0 < c < 2;$$

$$|\mu_{2,3}| < 1 \iff \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot c^2 < 1 \iff c^2 - c + 1 < 1 \iff c(c - 1) < 0 \iff 0 < c < 1.$$

Итоговое условие асимптотической устойчивости неподвижной точки u^* : $0 < c < 1$. При $c > 1$ неподвижная точка устойчивой не является. При $c = 1$ исследовать устойчивость неподвижной точки методами линейного анализа не представляется возможным. Обратим внимание, что в этом случае имеем $|\mu_{2,3}| = 1$, $\mu_2 = \overline{\mu_3}$, $|\mu_1| < 1$, из чего следует (см. [1]), что возникает бифуркация Неймарка–Сакера. Её иллюстрация приведена на рисунке 1.

Как мы увидим далее, в случае незначительного превышения параметром c области устойчивости $0 < c < 1$, характер поведения системы меняется, и наблюдается бифуркация рождения инвариантной кривой, которая представляет собой устойчивый цикл длины 6 (число $\pi/3$ кратно 2π). В области существования устойчивого цикла величина g_t осциллирует между фиксированными пределами.

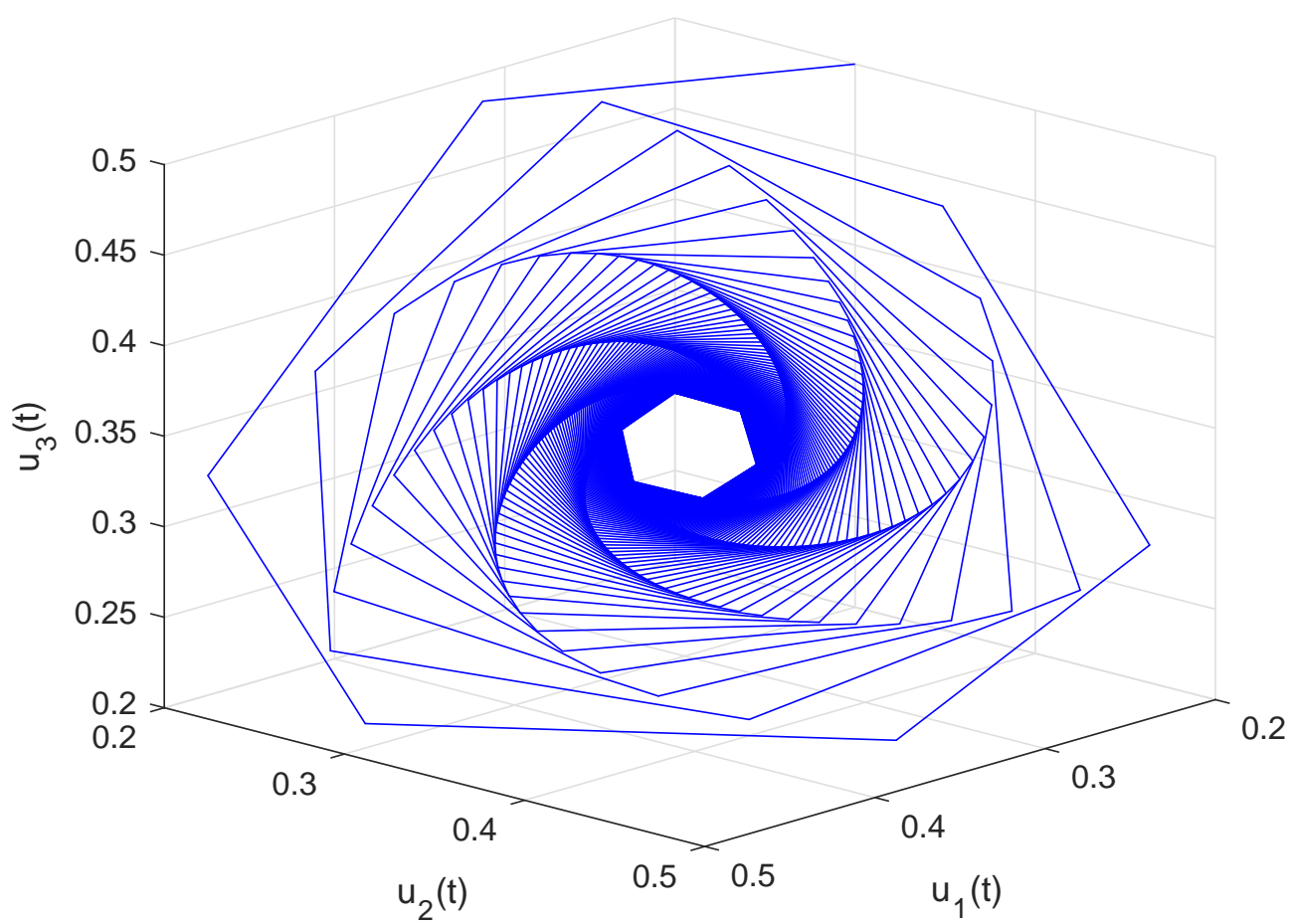


Рис. 1: Появление бифуркации Неймарка–Сакера при $c = 1$

2.3 Бифуркационная диаграмма

Введём несколько определений.

Определение 3. Бифуркацией называется изменение характера положений равновесия системы и соответствующей перестройки фазового портрета в зависимости от изменения одного или нескольких параметров системы.

Определение 4. Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.

Далее без ограничения общности будем считать, что $k_1 = k_2 = k_3 = k$ и будем непрерывно менять этот параметр (в этом случае непрерывно будет меняться и $c = (3k^{-1})^{-1} = k/3$, от которого, по существу, и зависит поведение нашей системы, как было показано при исследовании устойчивости неподвижных точек). Условие на устойчивость неподвижной точки в данном случае имеет вид: $0 < k < 3$.

Алгоритм построения бифуркационной диаграммы для рассматриваемой системы таков:

- Будем менять параметр k от $k_l = 2.75$ до $k_r = 4.25$ (численно было выявлено, что этот промежуток является наиболее показательным с точки зрения поведения траекторий системы). Для этого возьмём разбиение отрезка $[k_l, k_r]$ (в нашем случае производилось разбиение на $n = 1000$ точек) и будем перебирать параметр k по точкам данного разбиения.
- Для каждого фиксированного значения k выбираем некоторое начальное значение $u(0)$, удовлетворяющее условию постоянства (2) (для диаграмм, изображённых на рисунках 2–4, бралось начальное значение $u(0) = (0.2, 0.3, 0.5)$), и проводим $n_1 = 800$ итераций. Затем проводим ещё $n_2 = 200$ итераций, но каждую итерацию выводим на график (отдельно рисуем графики зависимости $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$ от k). Тем самым мы выведем все частичные пределы нашей системы при $t \rightarrow +\infty$.

Бифуркационные диаграммы приведены на рисунках 2–4.

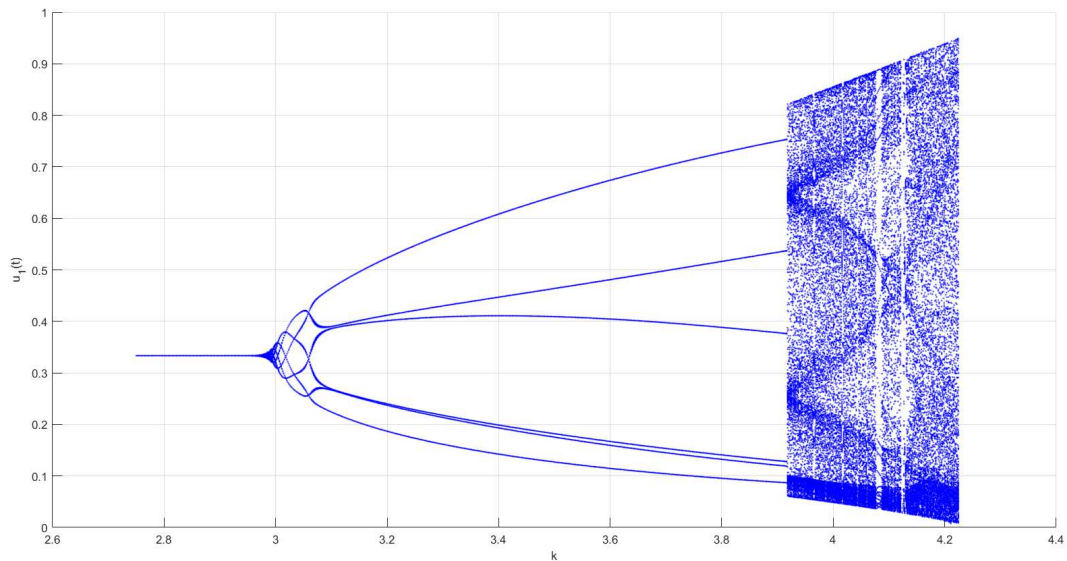


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма для функции $u_1(t)$

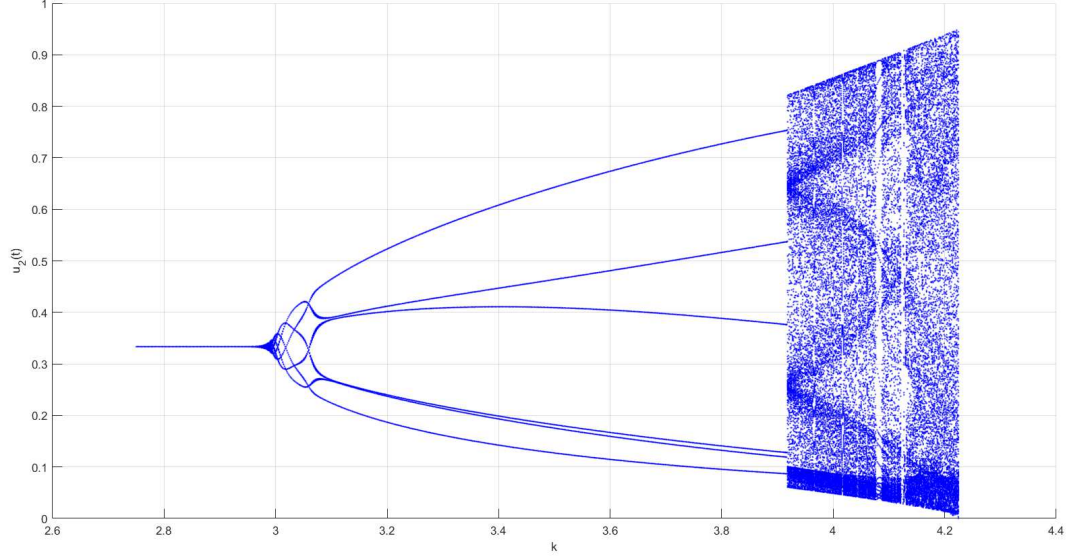


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма для функции $u_2(t)$

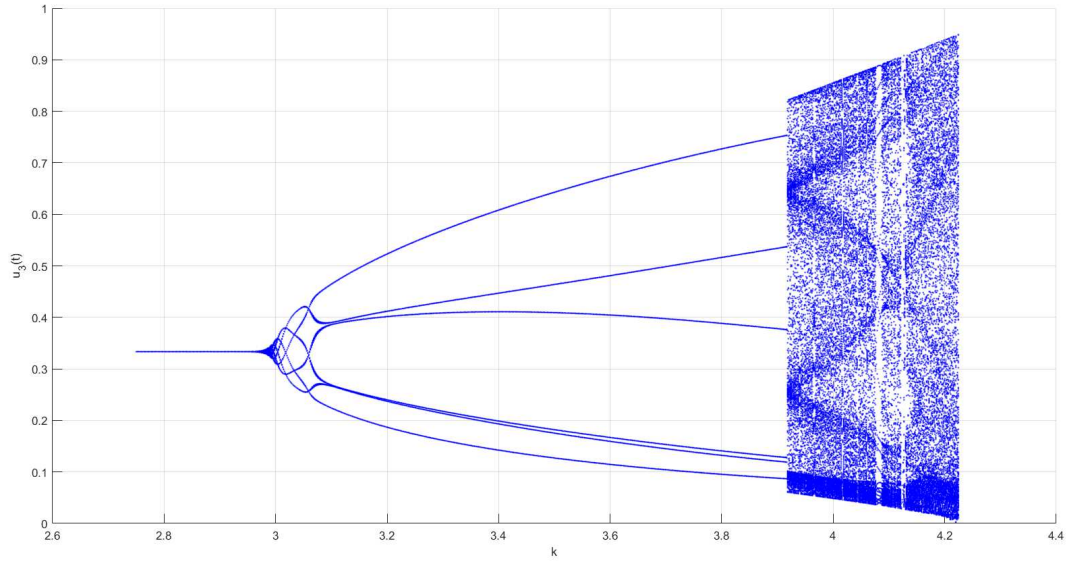


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма для функции $u_3(t)$

2.4 Исследование системы на наличие циклов

Определение 5. Циклом длины k называется набор попарно различных точек

$$u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)} :$$

$$g(u^{(1)}) = u^{(2)}, g(u^{(2)}) = u^{(3)}, \dots, g(u^{(k-1)}) = u^{(k)}, g(u^{(k)}) = u^{(1)}.$$

Из определения 5 следует, что для нахождения цикла длины k достаточно найти неподвижную точку системы $u(t+1) = g(g(\dots g(u(t)) \dots)) := g^{(k)}(u(t))$.

Из вида бифуркационных диаграмм следует, что при $k > 3$ имеет смысл искать цикл длины 6. И действительно, для фиксированного $k \in (3, 3.92]$ такой цикл находится численно в

программе из уравнения $u(t) = g^{(6)}(u(t))$. Например, для $k = 3.4$ начальной точкой цикла будет точка $u^{(6)} = (0.447, 0.4108, 0.1422)$ (а так же все точки $f^{(i)}(u^{(6)})$ для всех $i = 1, 2, 3, 4, 5$). Фазовый портрет для этого случая приведён на рисунке 5 (проведены первые $n = 800$ итераций).

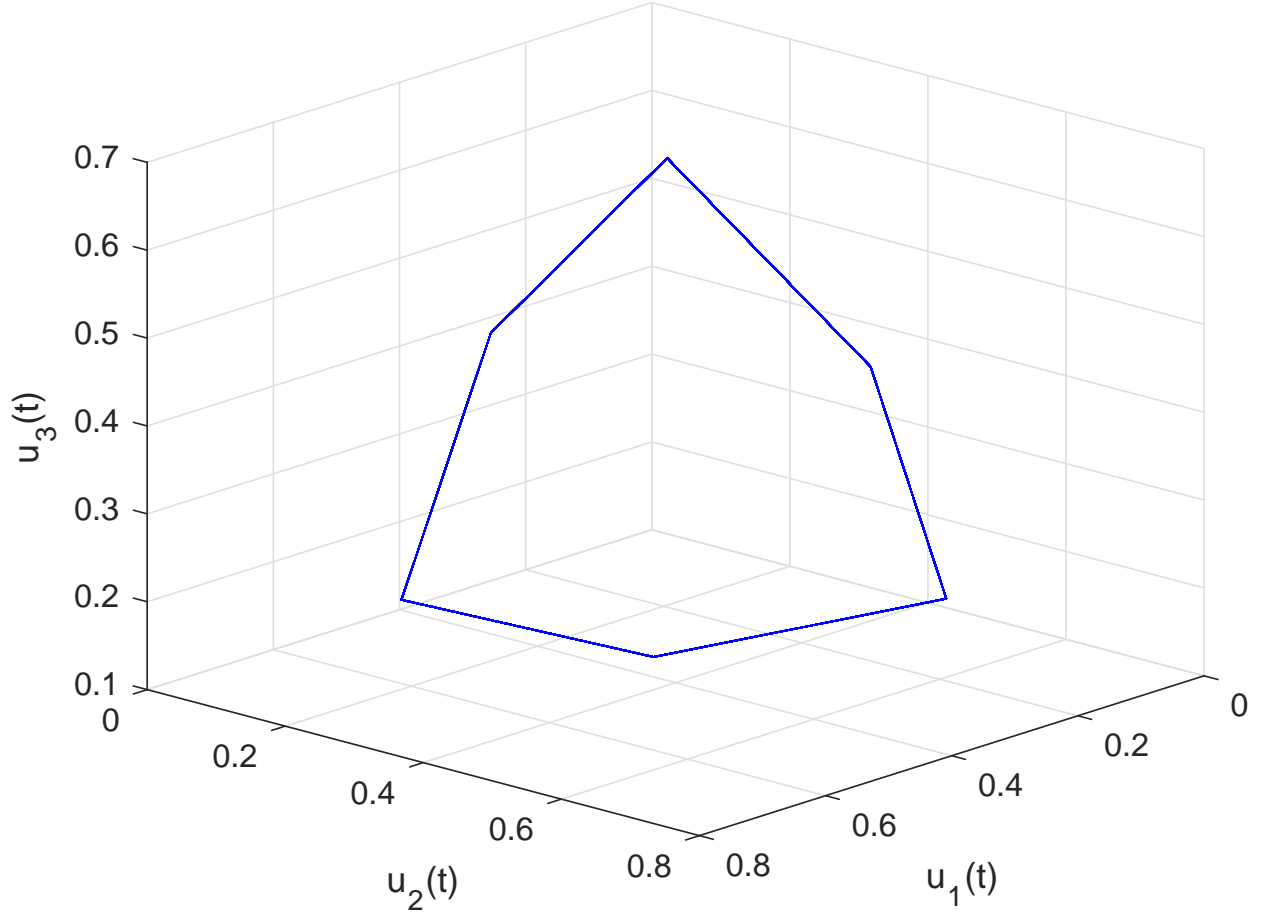


Рис. 5: Фазовый портрет системы для случая $u(0) = u^{(6)}$, $k = 3.4$

Вопрос о существовании циклов различной длины в одномерном случае был решён в работе [2]. Для формулировки основного результата введём упорядочивание всех натуральных чисел:

$$\begin{aligned}
 & 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ \\
 & \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
 & \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
 & \succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \dots \succ \\
 & \succ \dots \succ \\
 & \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
 \end{aligned}$$

В работе [2] доказана следующая

Теорема 2. Пусть $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, и пусть g имеет цикл длины k . Тогда g имеет цикл длины t для всех таких t , что $k \succ t$ в указанном выше порядке.

К сожалению, аналогичных результатов для многомерного случая получено не было.

2.4.1 Наличие циклов длины 2

Для нахождения циклов длины 2 необходимо решить уравнение $u(t) = g^{(2)}(u(t))$. В силу нашего предположения $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Пусть $u(t) = (a, b, c)$, а $u(t+1) = (d, e, h)$. Тогда в силу условия постоянства (2) получаем, что $c = 1 - a - b$, $h = 1 - d - e$. Так как мы хотим найти цикл длины 2, то положим $(d, e, h) = g((a, b, c))$, $(a, b, c) = g((d, e, h))$. Аналитически (символьно в программе) было получено, что данная система решений относительно a, b, d, e, k не имеет, из чего делаем вывод, что циклов длины 2 наша система не содержит ни при каких $k > 0$.

Данный вывод был проверен численно в программе, причём здесь уже перебирались значения параметров $k_1 \geq k_2 \geq k_3 > 0$ и различные допустимые начальные приближения. Использовалась функция `fsolve` из программного пакета MatLab, которая не дала никаких иных корней, кроме неподвижной точки u^* и нулевой точки $(0, 0, 0)$.

2.4.2 Наличие циклов длины 3

Аналогично предыдущему подпункту, здесь требовалось решить уравнение $u(t) = g^{(3)}(u(t))$. В силу того, что переменные u_1 , u_2 и u_3 входят в функцию $g(u)$ симметрично, то решение данного уравнения существует только в ситуации, когда функция $g(u)$ в точке цикла длины 3 совершает циклический сдвиг переменных, то есть $g((a, b, c)) = (c, a, b)$, $g((c, a, b)) = (b, c, a)$, $g((b, c, a)) = (a, b, c)$ (либо в другую сторону). В силу условия постоянства (2) получаем, что $c = 1 - a - b$. Аналитическое решение уравнения $g((a, b, c)) = (c, a, b)$ содержит 7 корней относительно тройки (k, a, b) , однако во всех 7-ми случаях $k = 1$, причём лишь один корень является вещественным относительно переменных a, b и совпадает с неподвижной точкой системы. Тем самым делаем вывод, что циклов длины 3 наша система тоже не содержит. Данный факт был проверен численно для произвольных положительных значений параметров k_1, k_2, k_3 .

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что единственной возникающей в системе инвариантной кривой является устойчивый цикл длины 6, который появляется при $k \in (3, 3.92]$ (устойчивость доказывается из вида бифуркационной диаграммы). При $k > 3.92$ возникает хаос, природу которого исследовать невозможно в силу многомерности задачи (в одномерном случае это объяснялось наличием в системе циклов длины 3, которые порождали циклы любой другой длины в силу теоремы 2).

2.5 Исследование многомерного показателя Ляпунова

Определение 6. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение и $A(u)$ — его матрица Якоби. Через r_k^m , $k = 1, \dots, n$, обозначим длину k -ой величины (в порядке убывания) ортогональной оси эллипсоида $A_m(U)$, $U = \{u : |u_0 - u| \leq 1\}$. k -ым числом Ляпунова траектории, начинающейся в u_0 , называется величина

$$l_k(u_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (r_k^m)^{\frac{1}{m}},$$

если этот предел существует. k -ым показателем Ляпунова траектории, начинающейся в u_0 , называется величина

$$h_k(u_0) = \ln(l_k(u_0)).$$

Из [1] известен алгоритм вычисления показателей Ляпунова:

1. Задаём n ортонормированных векторов ν_0^i , $i = 1, \dots, n$, присваиваем $\sigma_0^i = 0$, $t = 0$.
2. Находим $u(t+1) = g(u(t))$, $\nu_i(t+1) = A(u(t))\nu_i(t)$.
3. Ортогонализуя систему векторов $\nu_i(t+1)$, получаем векторы $\tilde{\nu}_i(t+1)$.

4. Вычисляем $\sigma_{t+1}^i = \sigma_t^i + \ln \|\tilde{\nu}_i(t+1)\|$, $i = 1, \dots, n$.

5. Нормируя систему векторов $\tilde{\nu}_i(t+1)$, получаем ортонормированный базис на следующем шаге:

$$\nu_i(t+1) = \frac{\tilde{\nu}_i(t+1)}{\|\tilde{\nu}_i(t+1)\|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

6. Увеличиваем время: $t = t + 1$.

7. Повторяем пункты 2–6 нужное число N раз.

8. Получаем окончательную оценку показателей Ляпунова:

$$h_i \approx \frac{\sigma_N^i}{N}, \quad i = 1, \dots, n.$$

По этому алгоритму была написана программа и получена зависимость показателей Ляпунова h_i , $i = 1, 2, 3$, которая приведена на рисунке 6 (N бралось равным 1000, $u(0) = (0.2, 0.3, 0.5)$). Из него видно, что $h_1(k) \geq h_2(k) \geq h_3(k)$, что согласуется с определением 6.

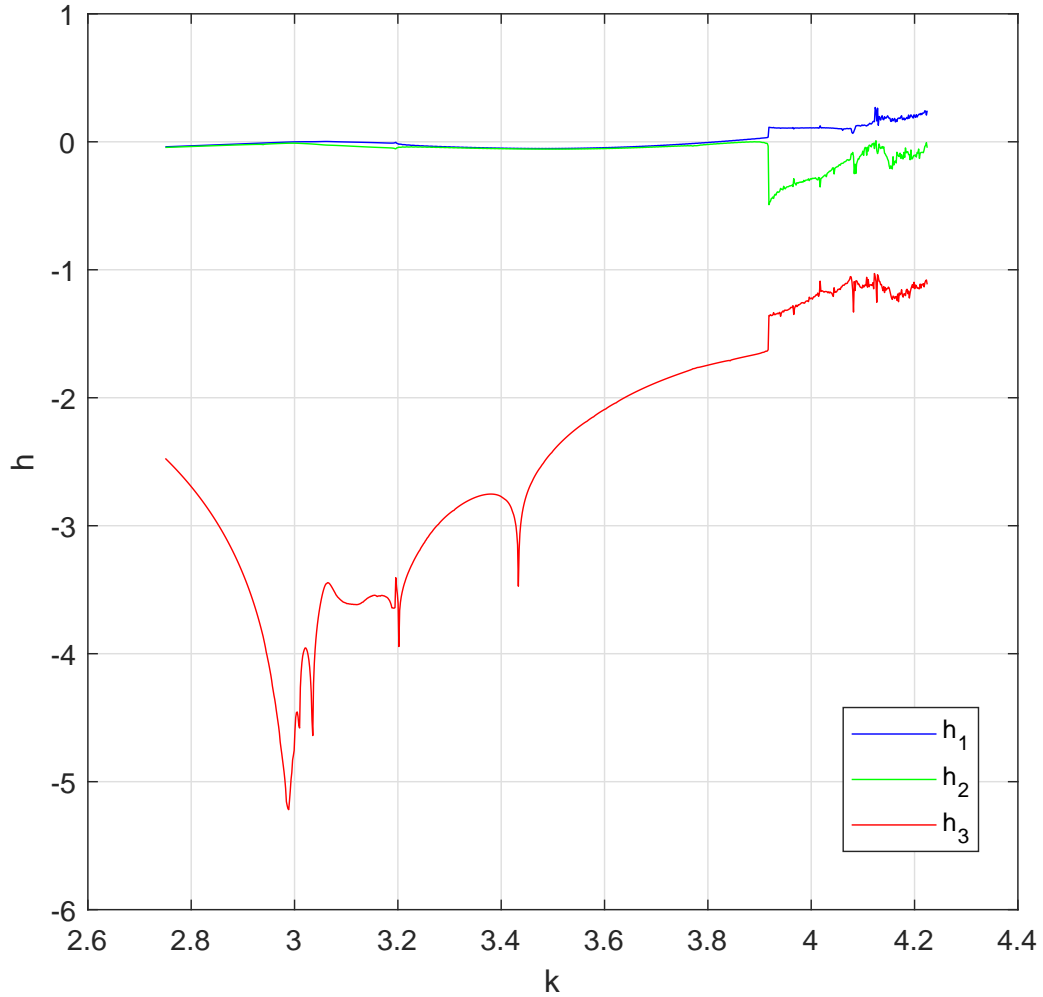


Рис. 6: Зависимость показателей Ляпунова от параметра k

3 Исследование системы с непрерывным временем

3.1 Интерпретация системы

Объясним, на основе каких соображений возникает исходная система.

В промышленных условиях биологическая очистка сточной воды осуществляется в специальных реакторах, называемых аэротехами. Основное значение такого реактора состоит в том, чтобы путем направленного воздействия на поступающую в него сточную воду добиться на его выходе концентрации органических загрязнений, которая не превышает заранее установленных значений. Биохимические процессы, протекающие в аэротехе, отличаются значительной сложностью и их теоретическое изучение до сих пор нельзя считать завершенным.

Для начала рассмотрим математическую модель сточных вод, основанную на следующих представлениях:

- Процесс биохимического окисления загрязнителя будем трактовать как «**поедание**» его микроорганизмами активного ила;
- *Загрязнитель* рассматривается как «**жертва**», а *биологический активный ил* — как «**хищник**»;
- Имеется **постоянный** источник загрязнителя;
- Активный ил способен перерабатывать загрязнение до определенного **предела**;
- *Изменение концентрации* активного ила в чистой воде убывает по **экспоненциальному закону**.

Тогда динамику системы биологической очистки сточных вод можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = a - bD(P) - cf(P, E), \\ \dot{E}(t) = -dE(t) + eh(P, E). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь

$P(t)$ — **концентрация загрязнения** воды,

$E(t)$ — **плотность биомассы** активного ила,

$D(P)$ — **функция диссипации**, характеризующая *естественный распад* загрязнения,

$f(P, E), h(P, E)$ — **трофические функции**, характеризующие *процесс очистки* загрязнителя биологически активным илом,

$a > 0$ — *мощность* источника загрязнения,

$d > 0$ — постоянная, характеризующая *скорость убывания* массы активного ила в чистой воде,

$b, c, e > 0$ — положительные постоянные.

Частный случай такой системы при предположениях о том, что

$$D(P) = P, \quad (5)$$

$$f(P, E) = h(P, E) = \frac{PE}{A + P}, \quad A = \text{const} > 0, \quad (6)$$

частично разобран в [1].

Вернемся к исходной системе. Она имеет прямую связь с системой (4). Дело в том, что в действительности процесс взаимодействия биологически активного ила и загрязнителя имеет еще одну важную компоненту. Это процесс **аэрации** — насыщения ила кислородом, который значительно повышает способность переработки биологически активным илом загрязнителя. С учетом данного обстоятельства и предположений (5)–(6) математическая модель процесса очистки может быть представлена как раз-таки в виде исходной системы:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = a - bP(t) - c \cdot \frac{P(t)E(t)}{A + P(t)}, \\ \frac{dE(t)}{dt} = -dE(t) + e \cdot \frac{P(t)E(t)}{A + P(t)}Q(t), \\ \frac{dQ(t)}{dt} = -\gamma Q(t) + R. \end{cases}$$

Здесь

$Q(t)$ — концентрация кислорода,

$R = \text{const} > 0$ — постоянная, определяющая величину притока кислорода в систему в единицу времени,

$\gamma = \text{const} > 0$ — положительная постоянная, а трофическая функция согласно (6) имеет вид

$$f(P, E) = \frac{PE}{A + P}.$$

3.2 Проведение редукции системы

Под *редукцией* системы понимается ее упрощение путем введения новых безразмерных переменных, которые сократят число исходных безразмерных параметров.

Введем новые безразмерные переменные

$$\tau = A_4 t, P(t) = A_1 u(\tau), E(t) = A_2 v(\tau), Q(t) = A_3 w(\tau); \quad A_i = \text{const} > 0, i = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

Подставив (7) в исходную систему, получим:

$$\begin{cases} A_1 A_4 \dot{u} = a - b A_1 u - c \cdot \frac{A_1 A_2 u v}{A + A_1 u}, \\ A_2 A_4 \dot{v} = -d A_2 v + e \cdot \frac{A_1 A_2 A_3 u v w}{A + A_1 u}, \\ A_3 A_4 \dot{w} = -\gamma A_3 w + R. \end{cases}$$

Преобразуем ее к виду:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{a}{A_1 A_4} - \frac{b}{A_4} u - \frac{c A_2}{A A_4} \cdot \frac{u v}{1 + \frac{A_1}{A} u}, \\ \dot{v} = -\frac{d}{A_4} v + \frac{e A_1 A_3}{A A_4} \cdot \frac{u v w}{1 + \frac{A_1}{A} u}, \\ \dot{w} = -\frac{\gamma}{A_4} w + \frac{R}{A_3 A_4}. \end{cases}$$

Наложим на параметры $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ условия, которые образуют следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A} = 1, \\ \frac{b}{A_4} = 1, \\ \frac{c A_2}{A A_4} = 1, \\ \frac{e A_1 A_3}{A A_4} = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) однозначно разрешима ввиду того, что число уравнений равно числу неизвестных. Поэтому, разрешая ее, получаем связь новых безразмерных параметров с исходными:

$$\begin{cases} A_1 = A, \\ A_4 = b, \\ A_2 = \frac{Ab}{b^c}, \\ A_3 = \frac{b}{e}. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{a}{A_1 A_4} = \frac{a}{Ab}, \quad \beta = \frac{d}{A_4} = \frac{d}{b}, \quad \gamma = \frac{\gamma}{A_4} = \frac{\gamma}{b}, \quad R = \frac{R}{A_3 A_4} = \frac{eR}{b^2}. \quad (10)$$

Таким образом, с учетом (9) и (10) исходная система приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha - u - \frac{uv}{1+u}, \\ \dot{v} = -\beta v + \frac{uvw}{1+u}, \\ \dot{w} = -\gamma w + R. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, R = \text{const} > 0$.

Редукция системы проведена. В дальнейшем будем работать с системой (11).

Заметим, что хоть нам и удалось провести редукцию системы, число параметров равно четырем, что превышает желаемый результат в два параметра. Поэтому далее будем считать, что параметры γ и R фиксированы.

3.3 Исследование неподвижных точек системы

Определение 7. Положениями равновесия (неподвижными точками) динамической системы с непрерывным временем (11) называются такие точки $z^* = (u^*, v^*, w^*) \in \mathbb{R}^3$, что $f(z^*) = 0$.

Здесь $f(z) = f(u, v, w) = (f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w))$, где f_1, f_2, f_3 — это функции, стоящие в правой части соответствующих уравнений, образующих систему (11).

Займемся поиском неподвижных точек. Приравняем правую часть системы (11) к нулю и рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \alpha - u - \frac{uv}{1+u} = 0, \\ -\beta v + \frac{uvw}{1+u} = 0, \\ -\gamma w + R = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Перепишем ее в более удобном виде:

$$\begin{cases} \alpha - u - v \left(1 - \frac{1}{1+u} \right) = 0, \\ v \left(\frac{uw}{1+u} - \beta \right) = 0, \\ w = \frac{R}{\gamma}. \end{cases}$$

Обратим внимание на второе уравнение полученной системы и рассмотрим значение переменной $u = u^*$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{u^*}{1 + u^*} = \frac{\gamma\beta}{R}, \quad (13)$$

при условии, что $R > \gamma\beta$. Из уравнения находим, что

$$u^* = \frac{\gamma\beta}{R - \gamma\beta}.$$

Заметим также, что последнее уравнение системы (12) всегда имеет единственное решение. Тогда система (11) имеет нетривиальную неподвижную точку

$$M_1(u_1^*, v_1^*, w_1^*),$$

где u_1^* , v_1^* и w_1^* имеют вид

$$u_1^* = u^* = \frac{\gamma\beta}{R - \gamma\beta}, \quad v_1^* = \frac{R}{\gamma\beta}(\alpha - u_1^*), \quad w_1^* = \frac{R}{\gamma}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что для того, чтобы точка M_1 имела место, необходимо, чтобы $u_1^* \leq \alpha$.

Определение 8. *Положение равновесия u^* динамической системы (11) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого u_0 :*

$$\|u_0 - u^*\| < \delta$$

выполняется неравенство

$$\|u(t, u_0) - u^*\| < \varepsilon$$

для всех $t > 0$.

Если, кроме того,

$$u(t; u_0) - u^* \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$, то положение равновесия u^ называется асимптотически устойчивым.*

Если же положение равновесия не является устойчивым по Ляпунову, то говорят, что оно неустойчиво.

Исследуем точку M_1 на устойчивость. Для начала найдем матрицу Якоби:

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{v}{(1+u)^2} & -\frac{u}{1+u} & 0 \\ \frac{vw}{(1+u)^2} & \frac{wu}{1+u} - \beta & \frac{vu}{1+u} \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Пусть n_+ , n_0 , n_- — число собственных значений матрицы Якоби $J(u^*)$ в положении равновесия u^* (с учетом их кратности) с положительной, равной нулю и отрицательной вещественной частью соответственно.

Определение 9. *Положение равновесия динамической системы (11) называется гиперболическим, если $n_0 = 0$, т.е. не существует собственных чисел, расположенных на мнимой оси. Гиперболическое положение равновесия называется гиперболическим седлом, если $n_+n_- = 0$.*

Воспользуемся теоремой, приведенной в [1].

Теорема 3 (А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре). Пусть u^* — гиперболическое положение равновесия (11). Пусть n_+ , n_- — число собственных значений $J(u^*)$ с положительной и отрицательной вещественной частью соответственно. Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия u^* асимптотически устойчиво, если $n_+ > 0$, то неустойчиво.

Подставим в матрицу Якоби (15) точку M_1 и получим:

$$\begin{aligned} J(M_1) &= \begin{pmatrix} -1 - \frac{v_1^*}{(1+u_1^*)^2} & -\frac{u_1^*}{1+u_1^*} & 0 \\ \frac{v_1^* w_1^*}{(1+u_1^*)^2} & \frac{w_1^* u_1^*}{1+u_1^*} - \beta & \frac{v_1^* u_1^*}{1+u_1^*} \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\alpha(R-\gamma\beta)^2 + \beta^2\gamma^2}{R\gamma\beta} & -\frac{\gamma\beta}{R} & 0 \\ \frac{(R-\gamma\beta)^2}{\gamma^2\beta} \left(\alpha - \frac{\gamma\beta}{R-\gamma\beta} \right) & 0 & \alpha - \frac{\gamma\beta}{R-\gamma\beta} \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для удобства обозначим

$$J_{11} = -\frac{\alpha(R-\gamma\beta)^2 + \beta^2\gamma^2}{R\gamma\beta} < 0, \quad J_{12} = -\frac{\gamma\beta}{R} < 0, \quad J_{21} = \frac{(R-\gamma\beta)^2}{\gamma^2\beta} \left(\alpha - \frac{\gamma\beta}{R-\gamma\beta} \right) > 0. \quad (16)$$

Решим уравнение:

$$\det(J(M_1) - \lambda I) = 0.$$

Как нетрудно заметить, определитель матрицы $J(M_1) - \lambda I$ легко разложить по последней строке, поэтому получаем следующее выражение:

$$\det(J(M_1) - \lambda I) = (-\gamma - \lambda)(-\lambda(J_{11} - \lambda) - J_{21}J_{12}).$$

Преобразовав к удобному виду, получаем уравнение вида:

$$-(\gamma + \lambda)(\lambda^2 - J_{11}\lambda - J_{21}J_{12}) = 0. \quad (17)$$

Из уравнения (17) легко находим первый корень: $\lambda_1 = -\gamma < 0$. Оставшиеся два корня ищутся по формуле корней квадратного уравнения:

$$\lambda_{2,3} = \frac{J_{11} \pm \sqrt{J_{11}^2 + 4J_{21}J_{12}}}{2}.$$

Если $D = J_{11}^2 + 4J_{21}J_{12} > 0$, то имеем еще два вещественных корня. Очевидно, что

$$\lambda_2 = \frac{J_{11} - \sqrt{J_{11}^2 + 4J_{21}J_{12}}}{2} < 0.$$

Покажем, что тогда и $\lambda_3 < 0$:

$$2\lambda_3 = J_{11} + \sqrt{J_{11}^2 + 4J_{21}J_{12}} < \{J_{21}J_{12} < 0 \implies J_{11}^2 + 4J_{21}J_{12} < J_{11}^2\} < J_{11} + |J_{11}| = J_{11} - J_{11} = 0.$$

Следовательно, $\lambda_3 < 0$.

Если $D = 0$, то имеем один вещественный корень

$$\lambda_2 = \frac{J_{11}}{2} < 0.$$

Если же $D < 0$, то имеем два комплексных корня. Нам здесь достаточно заметить, что

$$\operatorname{Re} \lambda_{2,3} = \frac{J_{11}}{2} < 0.$$

Итак, вне зависимости от значения дискриминанта D получили, что $n_0 = n_+ = 0$, поэтому точка M_1 является не только гиперболическим положением равновесия системы (11), но и ее гиперболическим седлом, причем по теореме 3 она асимптотически устойчива.

Как нетрудно заметить, в системе (11) есть еще одна неподвижная точка:

$$M_2(u_2^*, v_2^*, w_2^*),$$

где u_2^*, v_2^*, w_2^* имеют вид

$$u_2^* = \alpha, v_2^* = 0, w_2^* = \frac{R}{\gamma}. \quad (18)$$

Вычислим матрицу Якоби в точке M_2 :

$$J(M_2) = \begin{pmatrix} -1 - \frac{v_2^*}{(1+u_2^*)^2} & -\frac{u_2^*}{1+u_2^*} & 0 \\ \frac{v_2^* w_2^*}{(1+u_2^*)^2} & \frac{w_2^* u_2^*}{1+u_2^*} - \beta & \frac{v_2^* u_2^*}{1+u_2^*} \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{R\alpha}{\gamma(1+\alpha)} - \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Получили верхнюю треугольную матрицу. Поэтому матрица $J(M_2) - \lambda I$ также является верхней треугольной, что означает, что собственные значения матрицы Якоби расположены на ее диагонали:

$$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = \frac{R\alpha}{\gamma(1+\alpha)} - \beta, \lambda_3 = -\gamma < 0.$$

Выясним, при каких условиях λ_2 принимает соответствующий знак:

$$\lambda_2 = \frac{R\alpha}{\gamma(1+\alpha)} - \beta \vee 0. \quad (19)$$

Рассмотрим три случая.

1. $R > \gamma\beta$.

В этом случае условие (19) эквивалентно тому, что

$$\alpha \vee \frac{\gamma\beta}{R - \gamma\beta}.$$

Есть несколько вариантов.

- $\frac{\gamma\beta}{R - \gamma\beta} < \alpha$.

Выражение, стоящее в правой части, является компонентой u_1^* неподвижной точки M_1 , и в этом случае точка M_1 имеет место. Тем самым $\lambda_2 > 0$, то есть, точка M_2 является неустойчивой.

- $\frac{\gamma\beta}{R-\gamma\beta} = \alpha$.

В этом случае $\lambda_2 = 0$, но при этом точки M_1 и M_2 совпадают. Поэтому имеем одну неподвижную точку $M_1 = M_2 = M$, являющуюся устойчивой.

- $\frac{\gamma\beta}{R-\gamma\beta} > \alpha$.

В этом случае точки M_1 как таковой не существует (точнее, она существует, но становится некорректно определенной, так как $v_1^* < 0$), а $\lambda_2 < 0$, то есть, точка M_2 является устойчивой.

2. $R \leq \gamma\beta$.

Уже здесь можно говорить о том, что точки M_1 как таковой не существует, так как в этом случае отсутствует решение уравнения (13). Отсюда следует, что

$$\lambda_2 = \frac{R\alpha}{\gamma(1+\alpha)} - \beta \leq \frac{\gamma\beta\alpha}{\gamma(1+\alpha)} - \beta = -\frac{\beta}{1+\alpha} < 0,$$

то есть $\lambda_2 < 0$. Поэтому точка M_2 является устойчивой.

3.4 Качественный анализ поведения системы

Итак, согласно выкладкам, сделанным в предыдущем разделе, получены два варианта, качественно различимые друг от друга:

1. $R - \gamma\beta > \frac{\gamma\beta}{\alpha} > 0$.

Две неподвижные точки M_1 и M_2 : M_1 — устойчива, M_2 — неустойчива.

2. $R - \gamma\beta = \frac{\gamma\beta}{\alpha} > 0$ или $0 < R - \gamma\beta < \frac{\gamma\beta}{\alpha}$ или $R - \gamma\beta \leq 0$.

Мы имеем одну неподвижную точку, причем в первом подслучае $M_1 = M_2 = M$, а во втором и в третьем имеем точку M_2 . Эта точка является устойчивой.

Проиллюстрируем каждый случай соответствующим фазовым портретом. Здесь во всех приведенных ниже примерах $\gamma = 0.5$, $R = 20$, причем рассматривается система на отрезке времени $[0, T]$, $T = 12$.

На графиках *красный цвет* для неподвижной точки означает, что точка неустойчива, в то время как *зеленый цвет* свидетельствует об ее устойчивости.

Из рисунков 8–10 ясно видно, что все подслучаи случая 2 топологически эквивалентны друг другу.

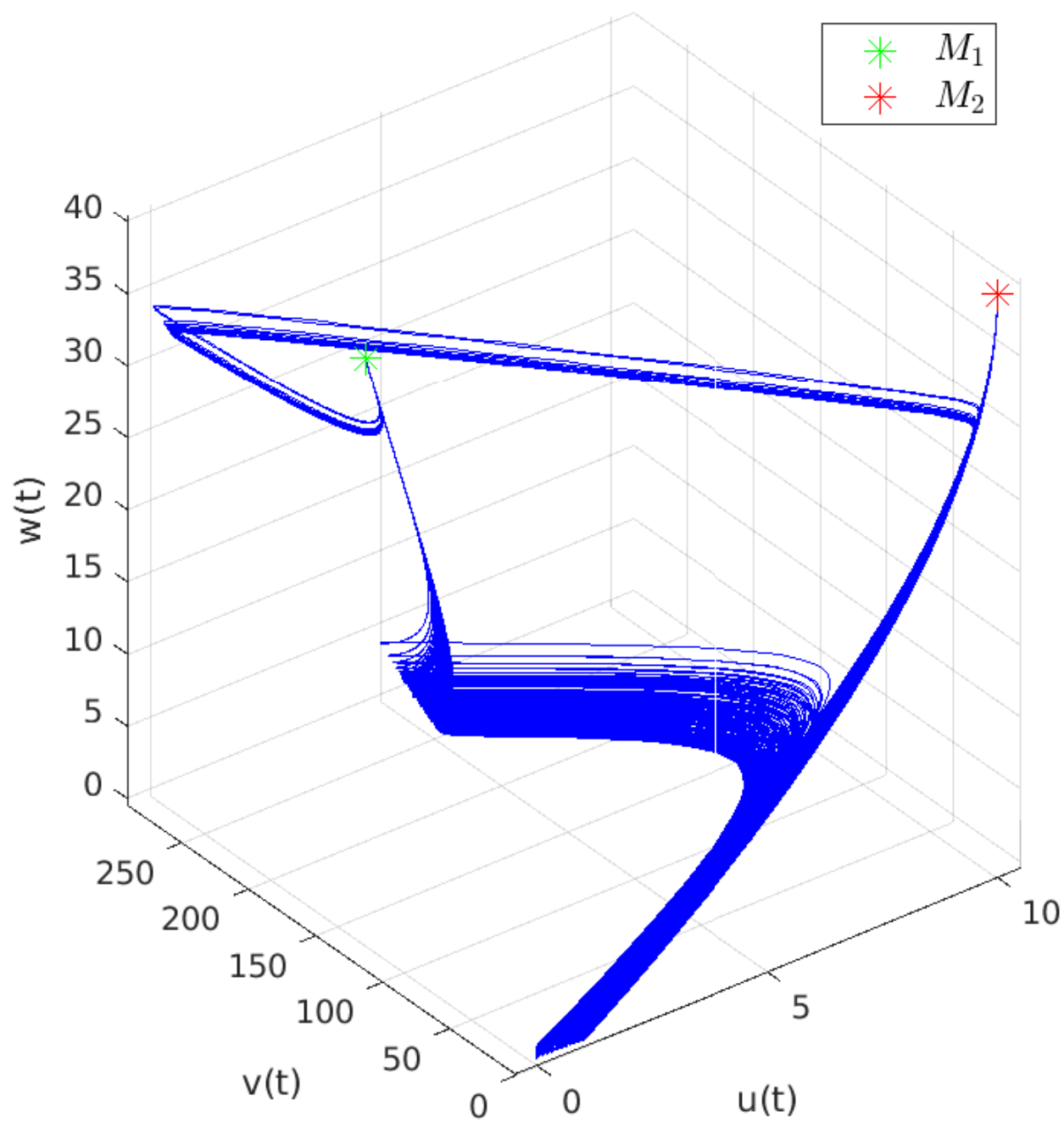


Рис. 7: Фазовый портрет для случая 1 при $\alpha = 10, \beta = 3$.

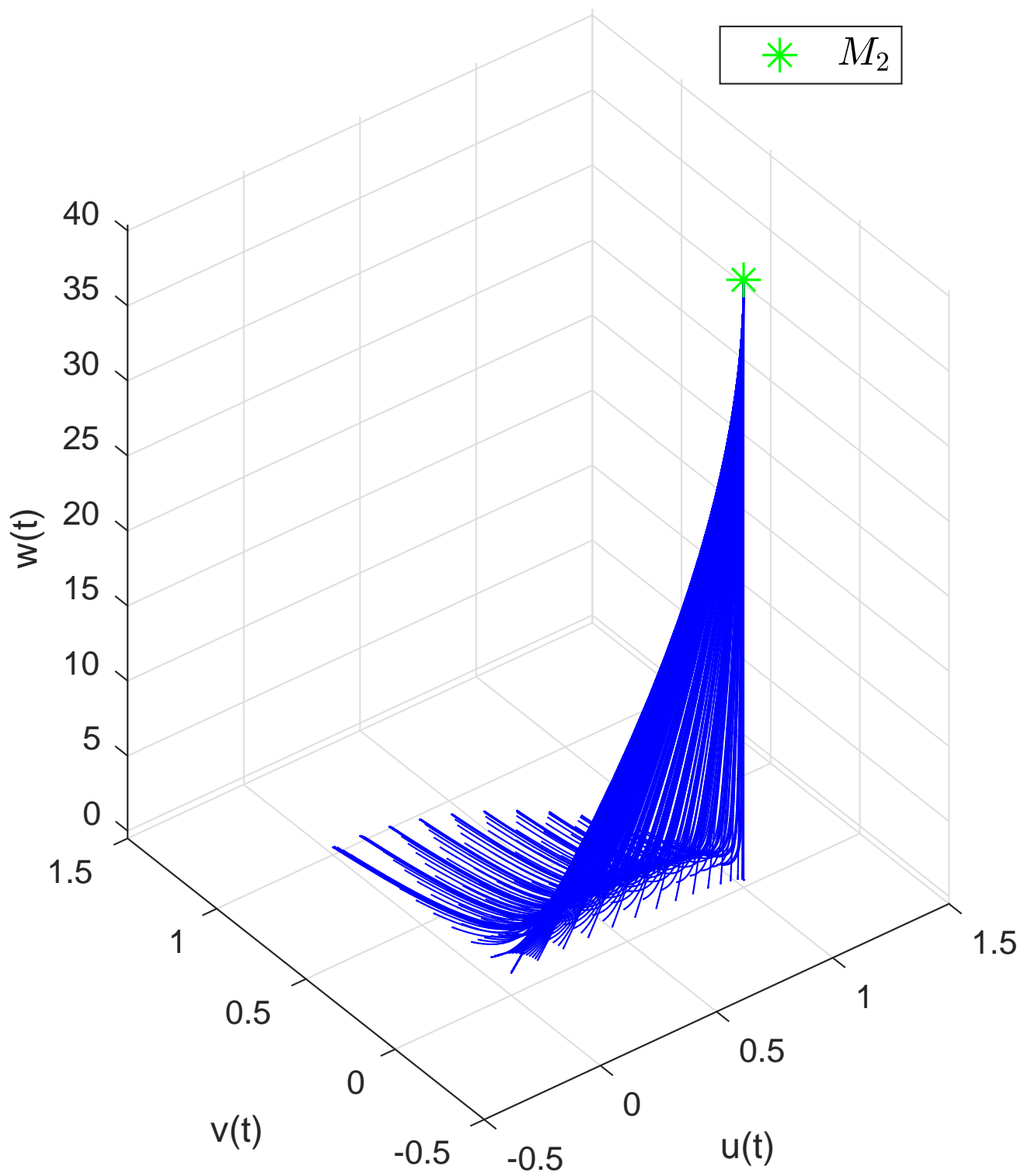


Рис. 8: Фазовый портрет для случая 2, подслучай 1 при $\alpha = 1, \beta = 20$.

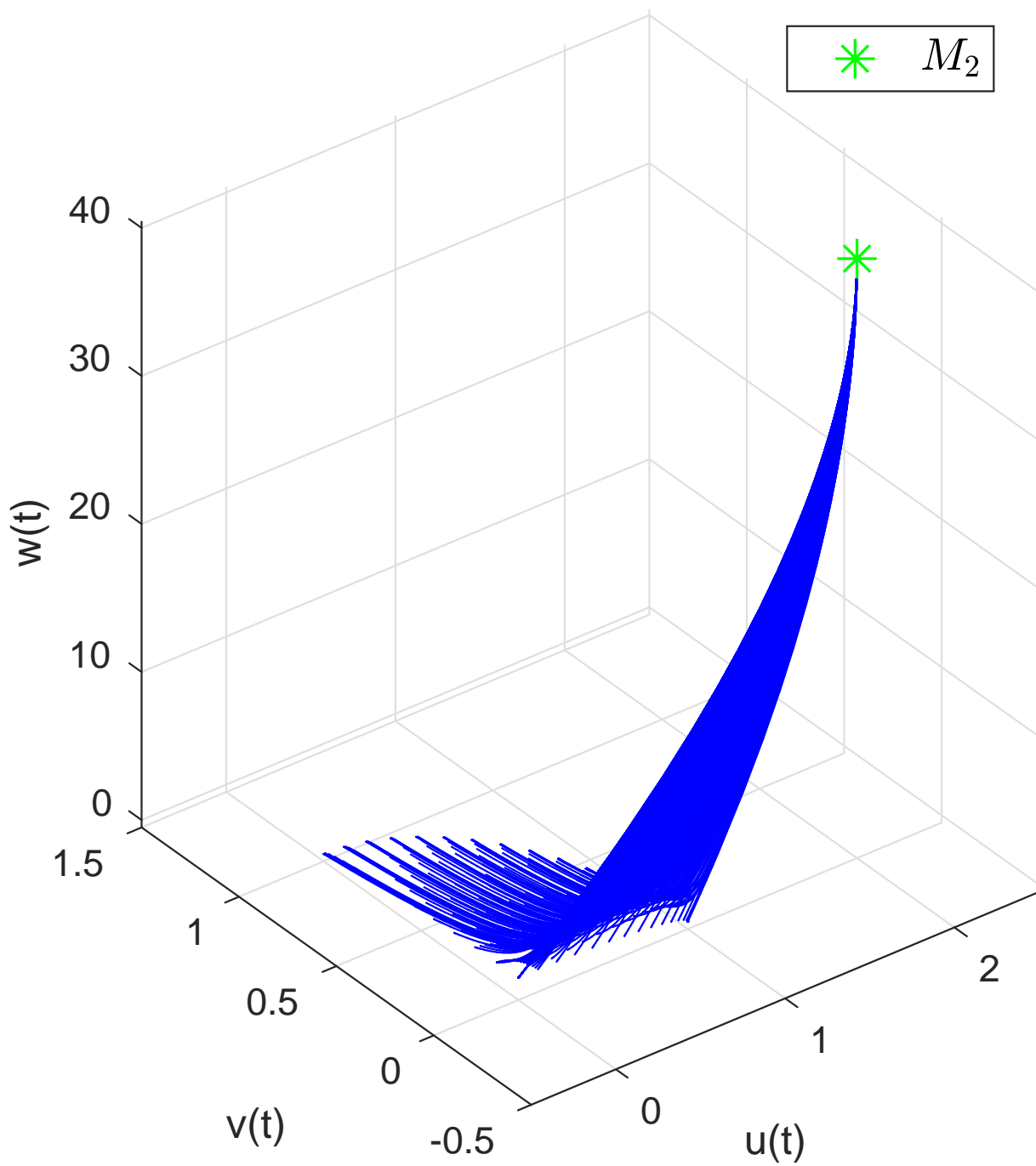


Рис. 9: Фазовый портрет для случая 2, подслучай 2 при $\alpha = 2, \beta = 30$.

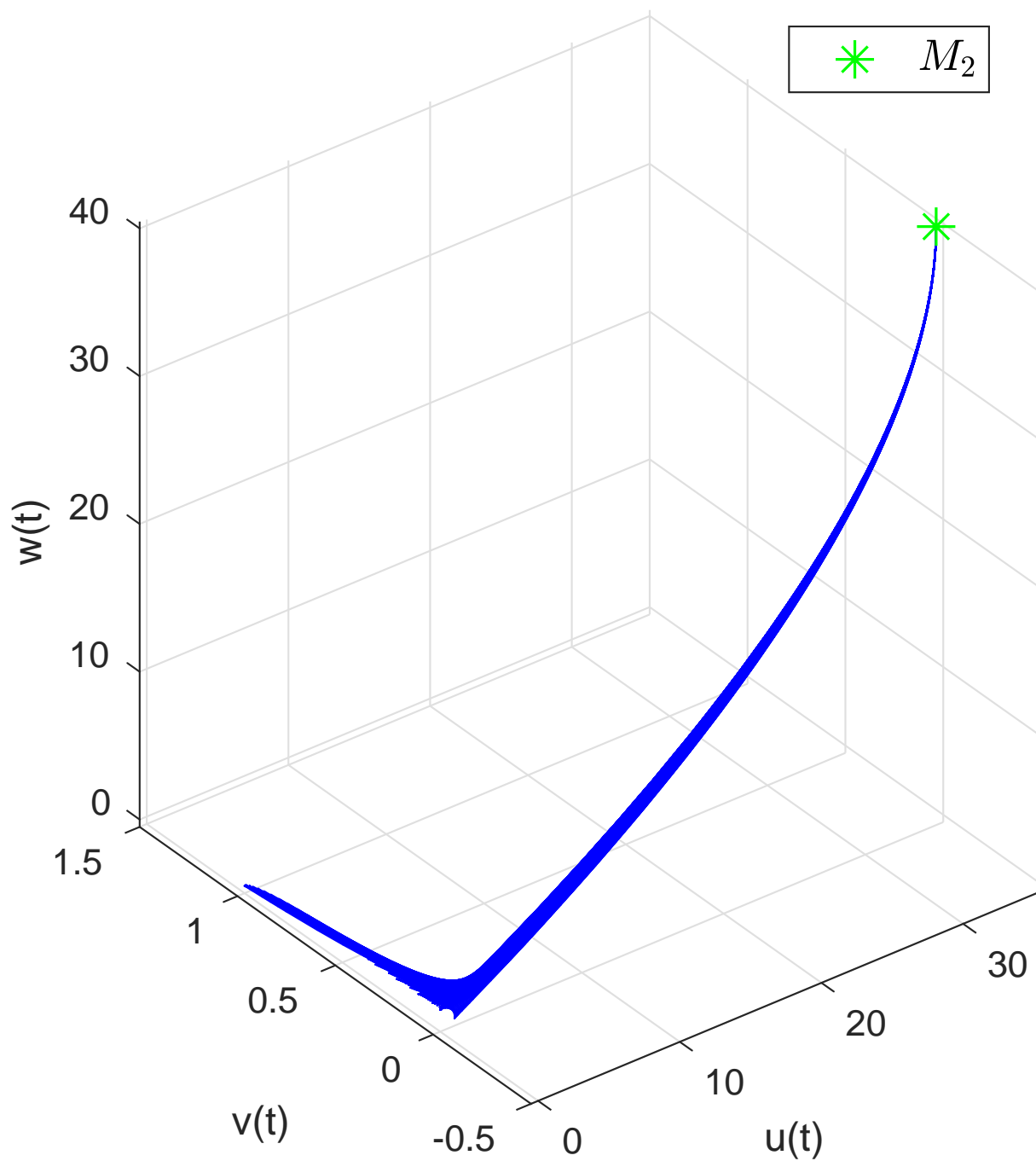


Рис. 10: Фазовый портрет для случая 2, подслучай 3 при $\alpha = 35, \beta = 50$.

3.5 Наличие предельных циклов в системе

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (20)$$

Определение 10. Решение $u(t)$ задачи (20) называется периодическим с периодом $T > 0$, если $u(t + T) = u(t)$ для любого t , период T — наименьшее из таких чисел, для которых выполняется последнее равенство.

Определение 11. Замкнутую траекторию $\gamma(u_0)$ системы (20) будем называть предельным циклом, если в окрестности этой траектории нет других замкнутых орбит.

Определение 12. Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре–Андропова–Хопфа, или бифуркацией рождения цикла.

В рассматриваемой системе, как мы выяснили ранее, ни при каких допустимых наборах значений параметров не возникают чисто мнимые ненулевые собственные значения (то есть те собственные значения, которые целиком лежат на мнимой оси). Из этого следует, что бифуркация рождения цикла в изучаемой системе невозможна, и предельных циклов не возникает.

3.6 Биологическая интерпретация результатов

Вспомним смысл системы (11), полученной в результате редукции исходной системы (3) (как нетрудно заметить, они в биологическом смысле эквивалентны друг другу). В рассматриваемой модели $u(t)$ — концентрация загрязнения воды, $v(t)$ — плотность биомассы активного ила, а $w(t)$ — концентрация кислорода. В соответствии с проделанными выкладками проинтерпретируем поведение системы с точки зрения биологии.

1. $R - \gamma\beta > \frac{\gamma\beta}{\alpha} > 0$.

В этом случае мы наблюдаем следующую картину. В зависимости от задания начальных данных по функциям u, v, w мы можем видеть два варианта развития событий.

Первый вариант заключается в том, что поскольку точка M_1 является устойчивой неподвижной точкой системы (11), то конечным положением для большинства траекторий системы будет служить именно точка M_1 , то есть система через определенный промежуток времени будет стабилизироваться. Тем самым, будут установлены определенные уровни концентрации загрязнения воды, плотности биомассы активного ила и концентрации кислорода соответственно. Эти уровни определяются компонентами u_1^*, v_1^* и w_1^* точки M_1 , которые вычислены по формуле (14).

Есть, однако, и второй вариант. Малой части траекторий все же удастся прийти в точку M_2 , которая, как мы выяснили ранее, является неустойчивой. Это означает, что концентрация загрязнения воды и концентрация кислорода установятся на значениях, равных α и $\frac{R}{\gamma}$ соответственно, но при этом плотность биомассы активного ила станет равной нулю.

2. $R - \gamma\beta \leq \frac{\gamma\beta}{\alpha}$.

Здесь любая траектория системы (11) вне зависимости от начальных данных попадает в точку M_2 , которая в данном случае является устойчивой. Это означает, что через некоторое время плотность биомассы активного ила неизбежно станет равной нулю, а концентрация загрязнения воды и концентрация кислорода станут равными α и $\frac{R}{\gamma}$ соответственно.

Список литературы

- [1] Братусь А. С, Новожилов А. С, Платонов А. П. «*Динамические системы и модели биологии*», 2011 год.
- [2] Шарковский А. Н. «*Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя*», 1964 год.
- [3] Alligood K. T, Sauer T. D., Yorke J. A. «*Chaos. An introduction to dynamical systems*», 1996 год.