Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Динамическое программирование и процессы управления»

Эллипсоидальные оценки для множества разрешимости

Студенты 415 группы
Я. А. Григорьев
А. С. Селякин

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2018

Содержание

1 Теория

1.1 Элементы эллипсоидального исчисления

Определение. *Множество*

$$\mathcal{E}(q, Q) = \left\{x : \left\langle (x-q), Q^{-1}(x-q) \right\rangle\right\} \leqslant 1,$$

где $x, q \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно определённая матрица, называется невырожденным эллипсоидом.

Определение. *Опорной функцией множества $M \subset \mathbb{R}^n$ называется функция, задаваемая на сопряжённом пространстве векторов, такая что*

$$\rho(l|M) = \sup_{x \in M} \langle l, x \rangle .$$

Из [1] известно, что для опорной функции невырожденного эллипсоида справедливо следующее выражение:

$$\rho(l|\mathcal{E}(q, Q)) = \langle l, q \rangle + \langle l, Ql \rangle^{\frac{1}{2}} .$$

Замечание. *Так как выпуклое множество однозначно определяется своей опорной функцией, то эллипсоид можно определять следующим образом:*

$$\mathcal{E}(q, Q) = \left\{x \in \mathbb{R}^n | \left\langle x, l \right\rangle \leqslant \langle l, q \rangle + \langle l, Ql \rangle^{\frac{1}{2}}\right\},$$

где $q \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметрическая неотрицательно определённая матрица. Заметим, что такое определение допускает вырожденность матрицы Q, в таком случае эллипсоид называется вырожденным. Именно в таком виде определение эллипсоида и рассматривается в данной работе.

1.2 Задача

Имеется следующая задача.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [t_0, t_1] \\ x(t_1) \in \mathcal{X}_1 = \mathcal{E}(x_1, X_1), \\ u(t) \in \mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)), \\ u(t) \in \mathbb{R}^m, x(t) \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Определение. *Множество*

$$\mathcal{W}(t, t_1, X_1) = \{x : \exists u \in \mathcal{P}, X(t_1, t, x) \cap X_1 \neq \varnothing\}$$

называется множеством разрешимости задачи (1).

Определение. *Трубкой разрешимости называется многозначное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ такое, что*

$$\mathcal{W}[t] = \mathcal{W}(t, t_1, X_1).$$

Требуется построить множество и трубку разрешимости задачи (1).

Выпишем решение системы (1) с помощью формулы Коши:

$$x(t) = X(t, t_1)x + \int\limits_{t_1}^{t} X(t, \tau)B(\tau)y(\tau)d\tau.$$

С учётом ограничений получаем, что

$$\mathcal{W}[t] = X(t,t_1)\mathcal{E}(x_1,X_1) - \int\limits_t^{t_1} X(t,\tau)B(\tau)\mathcal{E}(p(\tau),P(\tau))d\tau =$$

$$= \mathcal{E}(X(t,t_1)x_1, X(t,t_1)X_1X^T(t,t_1)) - \int\limits_t^{t_1} \mathcal{E}\left(X(t,\tau)B(\tau)p(\tau), X(t,\tau)B(\tau)P(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)\right)d\tau.$$

1.3 Внешние эллипсоидальные оценки множества разрешимости

Для $\mathcal{W}[t]$ будем строить внешнюю оценку:

$$I = \mathcal{E}(q_0,Q_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(q(\tau),Q(\tau))d\tau \subseteq \mathcal{E}(q^+,Q^+).$$

Здесь для краткости

$$\mathcal{E}(X(t,t_1)x_1, X(t,t_1)X_1X^T(t,t_1)) = \mathcal{E}(q_0,Q_0),$$

$$\mathcal{E}\left(X(t,\tau)B(\tau)p(\tau), X(t,\tau)B(\tau)P(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)\right) = \mathcal{E}(q(\tau),Q(\tau)).$$

Интеграл от эллипсоида можно рассматривать как предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю. Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[t_0,t_1]$ с шагом h:

$$I_N = \mathcal{E}(q_0,Q_0) + \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}(q(\tau_i),Q(\tau_i))h.$$

Необходимо построить внешнюю оценку для суммы N эллипсоидов. Сначала проведём рассуждения для $N=2$. Тогда внешняя оценка их суммы будет иметь в качестве своих параметров $q^+ = q_1 + q_2$, $Q^+ = (p_1+p_2)\left(\frac{Q_1}{p_1} + \frac{Q_2}{p_2}\right)$. Рассмотрим условие касания:

$$\rho(l|\mathcal{E}^+) = \rho(l|\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2) \leftrightarrow \langle q_1+q_2, l\rangle + \left\langle l, Q^+l\right\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle q_1,l\rangle + \langle q_2,l\rangle + \langle l,Q_1l\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle l,Q_2l\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Далее заметим:

$$\left\langle l, Q^+l\right\rangle = \langle l,Q_1l\rangle + \langle l,Q_2l\rangle + \frac{p_2}{p_1}\langle l,Q_1l\rangle + \frac{p_1}{p_2}\langle l,Q_2l\rangle \geqslant \left(\langle l,Q_1l\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle l,Q_2l\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2,$$

причём равенство достигается при $p_1 = \langle l,Q_1l\rangle^{\frac{1}{2}}$, $p_2 = \langle l,Q_2l\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Равенство опорных функций означает, что у эллипсоидов имеется общая опорная точка, формула для которой для произвольного эллипсоида $\mathcal{E}(q,Q)$ имеет вид:

$$x_l = \frac{Ql}{\langle l,Ql\rangle^{\frac{1}{2}}} + q.$$

Обобщая полученную выше оценку из N эллипсоидов, получим следующие выражения:

$$q_N^+ = \sum_{i=1}^{N} q_i,$$

$$Q_N^+ = \left(\sum_{i=1}^N p_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{p_j}\right),$$

равенство достигается при $p_i = \langle l, Q_i l\rangle^{\frac{1}{2}}$. Перейдя к пределу при $N \to \infty$ и вернувшись к исходным обозначениям, получим формулы для параметров внешней оценки множества достижимости:

$$q^+ = q_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} q(\tau)d\tau,$$

$$Q^+ = \left(p_1 + \int\limits_{t_0}^{t_1} p_2(\tau)d\tau\right) \cdot \left(\frac{1}{p_1}X(t,t_1)X_1X^T(t,t_1) + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{p_2(\tau)}X(t,\tau)B(\tau)P(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)d\tau\right).$$

Продифференцируем полученные выше выражения. Таким образом, $Q^+(t)$ и $q^+(t)$ — решения систем

$$\begin{cases} \dot{q}^+(t) &= A(t)q^+(t) + B(t)p_2(t), \\ q^+(t_1) &= x_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Q}^+(t) &= A(t)Q^+(t) + Q^+(t)A^T(t) - \dfrac{p_2(t)}{p_1 + \int\limits_t^{t_1} p_2(\tau)d\tau}Q^+(t) - \dfrac{p_1 + \int\limits_t^{t_1} p_2(\tau)d\tau}{p_2(t)}B(t)P(t)B^T(t), \\ Q^+(t_1) &= X_1. \end{cases}$$

Выражения же на $p_1, p_2(\tau)$ примут вид:

$$p_1 = \left\langle l, X(t,t_1)X_1X^T(t,t_1)l\right\rangle^{\frac{1}{2}},$$

$$p_2(\tau) = \left\langle l, X(t,\tau)B(\tau)P(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)l\right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Для того чтобы оценка в каждый момент времени касалась множества разрешимости в направлении $l(t)$, p_1 и $p_2(\tau)$ не должны явно зависеть от времени. Введём замену $l(t) = X^T(t_1,t)l_1$ и получим:

$$p_1 = \langle l_1, X_1 l_1\rangle^{\frac{1}{2}},$$

$$p_2(\tau) = \left\langle l_1, X(t_1,\tau)B(\tau)P(\tau)B^T(\tau)X^T(t_1,\tau)l_1\right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Перебирая различные l_1 (например, по единичной сфере) и взяв пересечение полученных при этом эллипсоидов, получим точное множество и трубку достижимости.

1.4 Внутренние эллипсоидальные оценки множества разрешимости

В данном пункте мы не будем столь подробно выводить все формулы, а сразу выпишем ответ. Итак, для центра эллипсоида $\mathcal{E}(q^-, Q^-)$, который является внутренней аппроксимацией множества разрешимости, выполняется $q^- = q^+$, а для его матрицы конфигурации Q^- справедливо выражение $Q^- = Q_*^T Q_*$, где

$$\begin{cases} \dot{Q}_*(t) &=& Q_*(t)A^T(t) - S(t)(B(t)P(t)B^T(t))^{\frac{1}{2}}, \\ Q_*(t_1) &=& X_1^{\frac{1}{2}}, \\ S(t) &=& \dfrac{1}{\lambda(\tau)} \cdot X_1^{\frac{1}{2}} a^{-1}(\tau), \\ a(\tau) &=& P^{\frac{1}{2}}(\tau)B^T(\tau)X^T(t_1, \tau), \\ \lambda(\tau) &=& \dfrac{\left\| X_1^{\frac{1}{2}} l_1 \right\|}{\|a(\tau)l_1\|}; \\ S(t_1) &=& I. \end{cases}$$

2 Примеры работы программы

2.1 Пример №1

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее представлен результат работы программы в виде проекции трубки достижимости на динамическую плоскость.

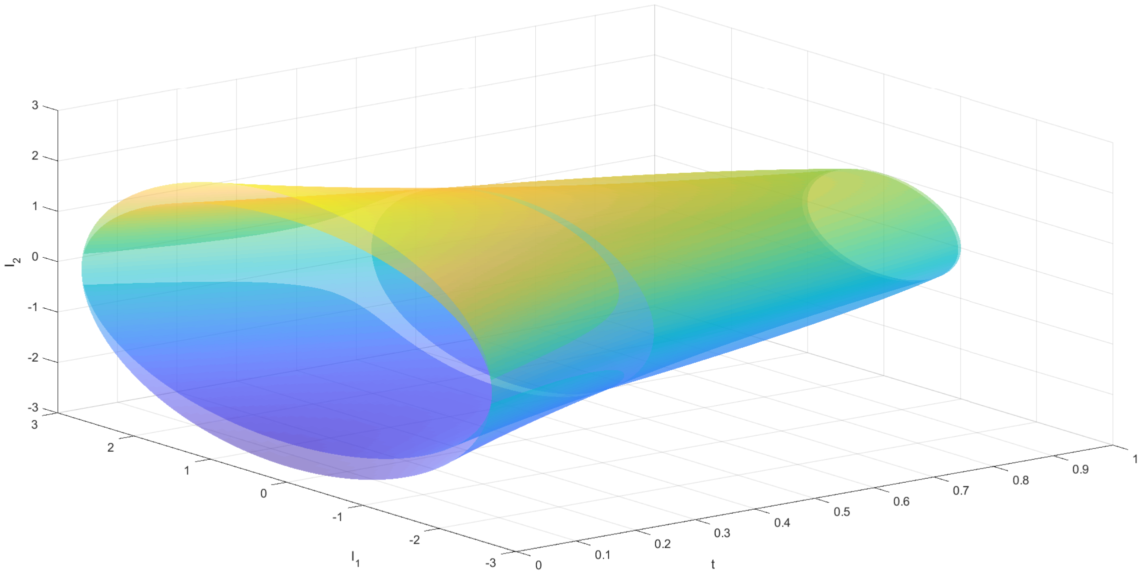

Рис. 1: Трубка разрешимости для примера №1 в проекции на динамическую плоскость

2.2 Пример №2

Пусть

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

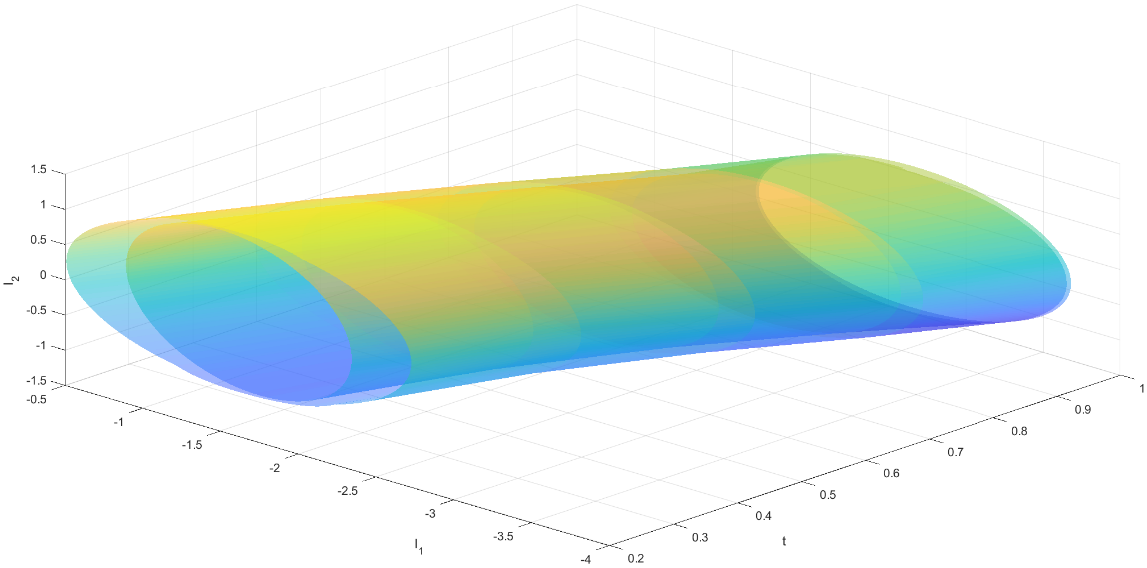

Рис. 2: Трубка разрешимости для примера №2 в проекции на статическую плоскость

Список литературы

[1] Kurzhanski A. B., Varaiya P. *«Dynamics and Control of Trajectory Tubes»*, Birkhäuser, 2014.

[2] Куржанский А. Б., Востриков И. В. *Лекции по курсу «Динамическое программирование и процессы управления»*, 2018.