



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

## «Оптимальное управление»

Задание №1. Линейная задача быстрогодействия

*Студент 315 группы*

Я. А. Григорьев

*Руководитель практикума*

к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теория и аналитика</b>	<b>4</b>
2.1	Принцип максимума Понтрягина . . . . .	4
2.2	Вычисление опорных функций . . . . .	5
2.2.1	Опорная функция множества $\mathcal{P}$ . . . . .	5
2.2.2	Опорная функция множества $\mathcal{X}_0$ . . . . .	7
2.2.3	Опорная функция множества $\mathcal{X}_1$ . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Описание алгоритма поиска оптимального управления</b>	<b>10</b>
3.1	Основной алгоритм . . . . .	10
3.2	Условие трансверсальности в конечный момент . . . . .	11
3.3	Случай вырождения принципа максимума . . . . .	12
3.4	Уточнение решения . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Примеры работы программы</b>	<b>15</b>
4.1	Автономные системы . . . . .	15
4.1.1	Система №1 . . . . .	15
4.1.2	Система №2 . . . . .	21
4.2	Неавтономные системы . . . . .	23
4.2.1	Система №3 . . . . .	23
4.2.2	Система №4 (пример разрывности времени по целевому множеству) . . . .	28
	<b>Список литературы</b>	<b>30</b>

# 1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, t \in [0, +\infty). \quad (1)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $A(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ . На значения управляющих параметров  $u$  наложено ограничение:  $u \in \mathcal{P}$ . Пусть  $\mathcal{X}_0$  — начальное множество значений фазового вектора,  $\mathcal{X}_1$  — целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время  $t_1^* > 0$ , за которое траектория системы, выпущенная в момент времени  $t_0$  из некоторой точки множества  $\mathcal{X}_0$ , может попасть в некоторую точку множества  $\mathcal{X}_1$ .

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 \leq x_2 \leq b - cx_1^2\}, a, b, c > 0;$$

$\mathcal{X}_0$  — шар радиуса  $r > 0$  с центром в начале координат,

$$\mathcal{X}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2 - d| + x_1^2 \leq k\};$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам  $A, B, t_0, a, b, c, k, x_1, r, d$  определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приблизённо) найти значение  $t_1^*$ , построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряжённых переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной оптимальной траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближённых результатов.
2. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы  $A$ ). Необходимо также исследовать на непрерывность величину  $t_1^*$  по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

Будем предполагать, что компоненты матриц  $A$  и  $B$  являются непрерывными функциями, а управление  $u$  будем искать в классе кусочно-непрерывных функций. Как известно из теории дифференциальных уравнений, при таких предположениях компоненты траектории будут непрерывными и кусочно-гладкими функциями.

## 2 Теория и аналитика

### 2.1 Принцип максимума Понтрягина

Сформулируем некоторые необходимые определения и связанные с ними свойства, а также теорему, на использовании которой строится решение нашей задачи (см. [1]).

**Определение 1.** Опорной функцией множества  $Z \subset \mathbb{R}^n$  в направлении  $l$  называется число  $\rho(l|Z) = \sup_{z \in Z} \langle l, z \rangle$ , где направление  $l \in \mathbb{R}^n$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $Z \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое и ограниченное множество (а следовательно, является компактом). Тогда в определении опорной функции этого множества супремум можно заменить на максимум, который достигается на точке, лежащей на границе этого множества.

*Доказательство.* Так как для любого фиксированного направления  $l$  функция  $\langle l, z \rangle$  непрерывна, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает своей точной верхней грани (в силу того, что множество  $Z$  компактно). Пусть эта верхняя грань достигается на внутренней точке  $z^0 \in Z$ . Тогда в силу определения внутренней точки найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что  $\varepsilon$ -окрестность точки  $z^0$  также входит во множество  $Z$ . Возьмём точку  $z^1 = z^0 + \varepsilon l$  из этой окрестности, тогда  $\langle l, z^1 \rangle = \langle l, z^0 \rangle + \varepsilon \sqrt{\|l\|} > \langle l, z^0 \rangle$ . Тем самым, получаем, что упомянутая выше точная верхняя грань скалярного произведения достигается только на границе множества  $Z$ .  $\square$

**Теорема 1. (принцип максимума Понтрягина для линейной задачи быстрогодействия (1)).** Пусть  $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$  — оптимальная пара для задачи (1), причём  $t_1^*$  — соответствующее этой паре минимальное время. Тогда существует такая функция  $\psi(t), t \in [t_0, t_1^*]$  (называемая сопряжённой переменной), являющаяся непрерывно дифференцируемой функцией, нигде не обращающейся в нуль, удовлетворяющая сопряжённому уравнению  $\dot{\psi} = -A^T(t)\psi$ , такая, что выполнены следующие три условия:

1.  $\langle B^T(t)\psi(t), u^*(t) \rangle = \rho(\psi(t)|B(t)\mathcal{P})$  — условие максимума;
2.  $\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0)|\mathcal{X}_0)$ ;
3.  $\langle -\psi(t_1^*), x^*(t_1^*) \rangle = \rho(-\psi(t_1^*)|\mathcal{X}_1)$ .

Здесь через  $\rho(l|Z)$  обозначена опорная функция множества  $Z$  в направлении  $l$ . Условия 2) и 3) называются условиями трансверсальности.

Докажем вспомогательное

**Утверждение 2.** Для любых  $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$  справедливо:

$$\langle a, Cb \rangle = \langle C^T a, b \rangle.$$

*Доказательство.* Утверждение проверяется непосредственно путем покомпонентной записи скалярных произведений слева и справа в доказываемом равенстве:

$$\langle a, Cb \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^m C_{ij} b_j = \sum_{j=1}^m b_j \cdot \sum_{i=1}^n C_{ji}^T a_i = \langle b, C^T a \rangle = \langle C^T a, b \rangle.$$

$\square$

**Следствие 1.** Для опорной функции произвольного множества  $Z \subset \mathbb{R}^m$  и для произвольной матрицы  $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$  справедливо:

$$\rho(l|CZ) = \rho(C^T l|Z).$$

**Следствие 2.** Условие 1) в теореме 1 (условие максимума) можно заменить на эквивалентное условие:

$$1. \langle B^T(t)\psi(t), u^*(t) \rangle = \rho(B^T(t)\psi(t)|\mathcal{P}).$$

Из теоремы 1 видно, что одним из возможных путей решения нашей задачи является перебор возможных значений сопряженной функции и построение по ней претендентов на оптимальную пару. А для этого в силу следствия 2 нам достаточно вычислить опорные функции трёх множеств:  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{X}_0$  и  $\mathcal{X}_1$ . Этому посвящён следующий подраздел.

## 2.2 Вычисление опорных функций

Докажем ещё одно вспомогательное

**Утверждение 3.**

$$\rho(l|X + Y) = \rho(l|X) + \rho(l|Y).$$

*Доказательство.* Утверждение проверяется непосредственно путем записи определения опорных функций, участвующих в равенстве:

$$\rho(l|X + Y) = \sup_{z \in X+Y} \langle l, z \rangle = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y} \langle l, x + y \rangle = \sup_{x \in X} \langle l, x \rangle + \sup_{y \in Y} \langle l, y \rangle = \rho(l|X) + \rho(l|Y).$$

□

Теперь всё готово для вычислений.

### 2.2.1 Опорная функция множества $\mathcal{P}$

Начнём с множества  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 \leq x_2 \leq b - cx_1^2\}, a, b, c > 0;$$

Оно ограничено двумя параболой:  $x_2 = ax_1^2$  с вершиной в точке  $(0, 0)$  и  $x_2 = b - cx_1^2$  с вершиной в точке  $(0, b)$ . Точки их пересечения:  $(\pm \sqrt{\frac{b}{a+c}}, \frac{ab}{a+c})$ . Для того, чтобы было проще вычислять опорную функцию множества  $\mathcal{P}$ , представим его в следующем виде:  $\mathcal{P} = (0, \frac{ab}{a+c}) + \mathcal{P}'$ , где

$$\mathcal{P}' = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 - \frac{ab}{a+c} \leq x_2 \leq b - \frac{ab}{a+c} - cx_1^2 \right\}.$$

В силу утверждения 3 получаем, что

$$\rho(l|\mathcal{P}) = \left\langle l, \left(0, \frac{ab}{a+c}\right) \right\rangle + \rho(l|\mathcal{P}') = l_2 \frac{ab}{a+c} + \rho(l|\mathcal{P}'),$$

так как опорная функция одноточечного множества есть скалярное произведение направления на точку этого множества. Так как множество  $\mathcal{P}'$  симметрично относительно оси  $Ox_2$ , то  $\rho((l_1, l_2)|\mathcal{P}') = \rho((-l_1, l_2)|\mathcal{P}')$ , поэтому можем для определённости считать, что  $l_1 \geq 0$ , а в итоговом ответе все вхождения  $l_1$  заменить на  $|l_1|$ . Итак, рассмотрим четыре случая:

1.  $l_1 = 0$ . В этом случае, как можно заметить из утверждения 1,

$$\rho(l|\mathcal{P}) = l_2 \frac{ab}{a+c} + \begin{cases} l_2 \cdot \left(b - \frac{ab}{a+c}\right), & l_2 > 0, \\ -l_2 \frac{ab}{a+c}, & l_2 \leq 0; \end{cases} = \begin{cases} l_2 b, & l_2 > 0, \\ 0, & l_2 \leq 0. \end{cases}$$

2.  $l_2 = 0$ . Аналогично, получаем, что в этом случае

$$\rho(l|\mathcal{P}) = 0 \cdot \frac{ab}{a+c} + l_1 \cdot \sqrt{\frac{b}{a+c}} = l_1 \cdot \sqrt{\frac{b}{a+c}}.$$

3.  $l_1 > 0, l_2 > 0$ . Исследуем множество  $\mathcal{P}'$ . Очевидно, что в этом случае стоит рассматривать только те пары  $(x_1, x_2) \in \mathcal{P}'$ , что  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . В силу утверждения 1 супремум достигнется на границе множества  $\mathcal{P}'$ , в данном случае на параболе

$$x_2 = b - \frac{ab}{a+c} - cx_1^2. \quad (2)$$

Построим функцию Лагранжа для нахождения максимума скалярного произведения при условии (2) (в данном случае она просто совпадёт со скалярным произведением, то есть имеем задачу безусловного экстремума):

$$L(x_1) = l_1 x_1 + l_2 \left(b - \frac{ab}{a+c} - cx_1^2\right).$$

Тогда её первая и вторая производные:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx_1} &= l_1 - 2l_2 c x_1; \\ \frac{d^2 L}{dx_1^2} &= -2l_2 c < 0. \end{aligned}$$

При этом, очевидно,

$$\rho(l|\mathcal{P}') = \max_{x_1 \in \mathcal{P}'} L(x_1).$$

Получаем, что точкой минимума должна быть точка  $x_1 = \frac{l_1}{2l_2 c}$  (при этом по формуле (2) получаем, что  $x_2 = b - \frac{ab}{a+c} - \frac{l_1^2}{4l_2^2 c}$ ), если эта точка принадлежит множеству  $\mathcal{P}'$ , то есть если

$$x_1 \in \left[0, \sqrt{\frac{b}{a+c}}\right].$$

Условие  $x_1 \geq 0$  при наших предположениях выполняется автоматически, а условие

$$x_1 \leq \sqrt{\frac{b}{a+c}}$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $l_1 \leq 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}$ . В случае, когда  $l_1 > 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}$  получаем, что  $\frac{dL}{dx_1} > 0$  для всех  $x_1 \in \left[\sqrt{\frac{b}{a+c}}\right]$ , и, следовательно, максимум достигается при  $x_1 = \sqrt{\frac{b}{a+c}}$  (по формуле (2) получаем, что в данном случае  $x_2 = 0$ ). В итоге

$$\rho(l|\mathcal{P}') = \max_{x_1 \in \mathcal{P}'} \left( l_1 x_1 + l_2 \left(b - \frac{ab}{a+c} - cx_1^2\right) \right) = \begin{cases} bl_2 - \frac{abl_2}{a+c} + \frac{l_1^2}{4cl_2}, & l_1 \leq 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}, \\ l_1 \sqrt{\frac{b}{a+c}}, & l_1 > 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}. \end{cases}$$

4.  $l_1 > 0, l_2 < 0$ . Аналогично предыдущему пункту получаем, что супремум достигнется при  $0 \leq x_1 \leq \sqrt{\frac{b}{a+c}}$  и  $x_2 = ax_1^2 - \frac{ab}{a+c}$ . Снова введём функцию Лагранжа и посчитаем её первую и вторую производные:

$$L(x_1) = l_1 x_1 + l_2 \left( ax_1^2 - \frac{ab}{a+c} \right);$$

$$\frac{dL}{dx_1} = l_1 + 2l_2 a x_1;$$

$$\frac{d^2 L}{dx_1^2} = 2l_2 a < 0.$$

Путем рассуждений, аналогичных рассуждениям в предыдущем пункте, получим, что

$$\rho(l|\mathcal{P}') = \max_{x_1 \in \mathcal{P}'} \left( l_1 x_1 + l_2 \left( ax_1^2 - \frac{ab}{a+c} \right) \right) = \begin{cases} \frac{l_1^2}{-4cl_2} - \frac{abl_2}{a+c}, & l_1 \leq -2al_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}, \\ l_1 \sqrt{\frac{b}{a+c}}, & l_1 > -2al_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}. \end{cases}$$

Видим, что вырожденные случаи можно объединить с основными, и получаем итоговый результат:

$$\begin{aligned} \rho(l|\mathcal{P}) &= l_2 \frac{ab}{a+c} + \rho(l|\mathcal{P}') = \\ &= \begin{cases} bl_2 + \frac{l_1^2}{4cl_2}, & l_2 > 0, |l_1| \leq 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}; \\ |l_1| \sqrt{\frac{b}{a+c}} + l_2 \frac{ab}{a+c}, & \begin{cases} l_2 \geq 0, |l_1| > 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}, \\ l_2 < 0, |l_1| > 2a|l_2| \sqrt{\frac{b}{a+c}}; \end{cases} \\ \frac{l_1^2}{4a(-l_2)}, & l_2 < 0, |l_1| \leq 2a|l_2| \sqrt{\frac{b}{a+c}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Обратим внимание, что полученная функция получилась непрерывной в  $\mathbb{R}^2$ , что является лакмусовой бумажкой правильности вычислений. Заметим, что при  $l \neq 0$  однозначно определены максимизаторы скалярного произведения (то есть те точки множества  $\mathcal{P}$ , на которых достигается  $\sup_{x \in \mathcal{P}} \langle l, x \rangle$ ):

$$\arg \max_{x=(x_1, x_2) \in \mathcal{P}} \langle l, x \rangle = \begin{cases} \left( \frac{l_1}{2cl_2}, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} \right), & l_2 > 0, |l_1| \leq 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}; \\ \left( \operatorname{sgn}(l_1) \sqrt{\frac{b}{a+c}}, \frac{ab}{a+c} \right), & \begin{cases} l_2 \geq 0, |l_1| > 2cl_2 \sqrt{\frac{b}{a+c}}, \\ l_2 < 0, |l_1| > 2a|l_2| \sqrt{\frac{b}{a+c}}; \end{cases} \\ \left( -\frac{l_1}{2al_2}, \frac{l_1^2}{4al_2^2} \right), & l_2 < 0, |l_1| \leq 2a|l_2| \sqrt{\frac{b}{a+c}}. \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2.2 Опорная функция множества $\mathcal{X}_0$

Множество  $\mathcal{X}_0$  — это шар радиуса  $r > 0$  с центром в начале координат. Очевидно, что

$$\rho(l|\mathcal{X}_0) = r \|l\| = r \sqrt{l_1^2 + l_2^2},$$

где

$$\arg \max_{x=(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_0} \langle l, x \rangle = \left( r \frac{l_1}{\|l\|}, r \frac{l_2}{\|l\|} \right). \quad (4)$$

### 2.2.3 Опорная функция множества $\mathcal{X}_1$

Рассмотрим множество  $\mathcal{X}_1$ :

$$\mathcal{X}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2 - d| + x_1^2 \leq k\} = (0, d) + \mathcal{X}'_1,$$

где

$$\mathcal{X}'_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| + x_1^2 \leq k\}.$$

Тогда, согласно утверждению 3, получаем, что

$$\rho(l|\mathcal{X}_1) = dl_2 + \rho(l|\mathcal{X}'_1). \quad (5)$$

Следовательно, требуется найти  $\rho(l|\mathcal{X}'_1)$ . Заметим, что множество  $\mathcal{X}'_1$  симметрично относительно начала координат, следовательно, можно рассмотреть только случай  $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0$ . В случае, когда  $l_1 = 0$ , очевидно,

$$\rho(l|\mathcal{X}'_1) = \max_{x_2 \in \mathcal{X}'_1} (l_2 x_2) = l_2 k,$$

в случае  $l_2 = 0$  получаем, что

$$\rho(l|\mathcal{X}'_1) = \max_{x_1 \in \mathcal{X}'_1} (l_1 x_1) = l_1 \sqrt{k}.$$

Далее считаем, что  $l_1 > 0, l_2 > 0$ . Тогда супремум достигнется на границе (причём, очевидно,  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ), то есть для максимизирующей точки справедливо равенство:

$$x_2 = k - x_1^2. \quad (6)$$

Найдём этот супремум и точки, на которых он достигается. По аналогии с вычислением опорной функции множества  $\mathcal{P}$  запишем функцию Лагранжа, принимая во внимание условие (6), а также найдём первую и вторую производные этой функции:

$$L(x_1) = l_1 x_1 + l_2 (k - x_1^2) = -l_2 x_1^2 + l_1 x_1 + l_2 k;$$

$$\frac{dL}{dx_1} = -2l_2 x_1 + l_1;$$

$$\frac{d^2 L}{dx_1^2} = -2l_2 < 0.$$

В этом случае, очевидно,

$$\rho(l|\mathcal{X}'_1) = \max_{x_1 \in \mathcal{X}'_1} L(x_1).$$

Получаем, что максимизатором является точка  $x_1 = \frac{l_1}{2l_2}$ , если она входит в множество  $\mathcal{X}'_1$ , то есть если  $0 \leq \frac{l_1}{2l_2} \leq \sqrt{k}$ , а это верно тогда и только тогда, когда  $\frac{l_1}{2\sqrt{k}} \leq l_2$ . В том случае, когда  $\frac{l_1}{2\sqrt{k}} > l_2$ , очевидно, что  $\frac{dL}{dx_1} > 0$  для любого  $x_1 \leq \sqrt{k}$ , тогда максимальное значение достигнется в точке  $x_1 = \sqrt{k}$ . Получаем, что при  $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0$

$$\rho(l|\mathcal{X}'_1) = \begin{cases} \sqrt{k} l_1, & l_2 < \frac{l_1}{2\sqrt{k}}, \\ l_2 k + \frac{l_1^2}{4l_2}, & l_2 \geq \frac{l_1}{2\sqrt{k}}. \end{cases}$$



Случаи  $l_1 = 0$  и  $l_2 = 0$  автоматически учитываются в описанной выше формуле, кроме случая  $l_1 = l_2 = 0$ , но здесь  $\rho(l|\mathcal{X}'_1) = 0$ , и супремум достигается на любой точке из  $\mathcal{X}'_1$ . Приняв во внимание формулу (5), а также учтя, что  $l_1$  и  $l_2$  могут иметь различные знаки, получим окончательную формулу:

$$\rho(l|\mathcal{X}_1) = \begin{cases} dl_2 + \sqrt{k}|l_1|, & |l_2| < \frac{|l_1|}{2\sqrt{k}}, \\ |l_2|k + \frac{l_1^2}{4|l_2|} + dl_2, & |l_2| \geq \frac{|l_1|}{2\sqrt{k}}. \end{cases}$$

Обратим внимание, что при  $l \neq 0$  точки множества, в которых достигается  $\sup_{x \in \mathcal{X}_1} \langle l, x \rangle$  (максимизаторы) определены однозначно:

$$\arg \max_{x=(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1} \langle l, x \rangle = \begin{cases} \left( \sqrt{k} \cdot \operatorname{sgn}(l_1), d \right), & |l_2| < \frac{|l_1|}{2\sqrt{k}}, \\ \left( \frac{l_1}{2|l_2|}, d + \operatorname{sgn}(l_2) \left( k - \frac{l_1^2}{4l_2^2} \right) \right), & |l_2| \geq \frac{|l_1|}{2\sqrt{k}}. \end{cases} \quad (7)$$

## 3 Описание алгоритма поиска оптимального управления

### 3.1 Основной алгоритм

Вернёмся к принципу максимума, который был ранее сформулирован (теорема 1). Вспомним соотношения из этого принципа, которые связывают оптимальную пару  $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ , являющуюся решением задачи (1), и сопряжённую функцию  $\psi(\cdot)$ :

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi; \quad (8)$$

$$\langle B^T(t)u^*(t), \psi(t) \rangle = \rho(B^T(t)\psi(t)|\mathcal{P}); \quad (9)$$

$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0)|\mathcal{X}_0); \quad (10)$$

$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1)|\mathcal{X}_1). \quad (11)$$

Легко видеть, что если функция  $\psi(t)$  удовлетворяет всем условиям теоремы 1 (то есть условиям (8)–(11)), то для любого  $\alpha > 0$  функция  $\alpha\psi(t)$  также будет им удовлетворять. Тогда без ограничения общности будем считать, что  $\|\psi(t_0)\| = 1$ .

Далее, пусть у нас есть  $\psi(t) \neq 0, \forall t \geq t_0$  — сопряжённая функция для оптимальной пары. Тогда если  $B^T(t)\psi(t) \neq 0$ , то из условия (9) однозначно определяется  $u^*(t)$ , соответствующее  $\psi(t)$ . Так как  $\psi(t_0) \neq 0$ , то  $x^*(t_0)$  также однозначно определяется по  $\psi(t_0)$  из условия (10) (то, что это можно сделать, показано при вычислении опорных функций для множеств  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{X}_0$ ), а следовательно, мы можем вычислить всю траекторию  $x^*(t)$  как решение следующей задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t, \psi(t));$$

$$x(t_0) = f(\psi(t_0)).$$

Таким образом, если бы нам была известна сопряжённая функция, то по ней мы могли бы при определённых условиях восстановить и оптимальную пару. С другой стороны, из теоремы 1 следует, что если оптимальное решение существует, то сопряжённая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (8). Также, как мы уже сказали выше, можно считать, что  $\|\psi(t_0)\| = 1$ . Из этого следует, что все возможные значения  $\psi(t_0)$  (а значит, и  $\psi(t), \forall t \geq t_0$ ) можно описать одним параметром. Второй параметр системы — это время прибытия фазовой точки во множество  $\mathcal{X}_1$ . Итак, мы имеем два параметра и неиспользованное второе условие трансверсальности (11), которое даёт два соотношения на параметры. Подбрав параметры, удовлетворяющие этим соотношениям, мы могли бы выделить класс управлений, подозрительных на оптимальность.

При решении задачи численно мы будем строить сетку на полуинтервале  $[0, 2\pi)$ :

$$0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$$

и для каждого  $\varphi_i$  численно решать систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t); \\ \psi_1(t_0) = \cos(\varphi_i); \\ \psi_2(t_0) = \sin(\varphi_i); \\ u(t) = f_1(t, \psi(t)); \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ x(t_0) = f_2(\psi(t_0)); \end{array} \right.$$

(здесь функции  $f_1$  и  $f_2$  определяются соотношениями (9) и (10) соответственно), начиная с момента  $t_0$  и заканчивая некоторым фиксированным моментом  $t_1^{\max}$  или же достижением фазовой переменной множества  $\mathcal{X}_1$ . После этого осталось выбрать среди всех дошедших до множества  $\mathcal{X}_1$  фазовых траекторий ту, которая сделала это за наименьшее время. Это наименьшее время и будет приближённым решением нашей задачи.

Для решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся стандартной функцией MatLab `ode45`, которая представляет из себя реализацию алгоритма Дормана–Принса — метод Рунге–Кутты четвёртого–пятого порядка, автоматически подбирающего шаг так, чтобы локальные абсолютная и относительная погрешности были не больше некоторых наперёд заданных чисел.

Проверка на то, пересекла ли траектория множество  $\mathcal{X}_1$ , осуществляется на каждом шаге интегрирования при вызове `event function`, внутри которой осуществляется проверка выполнения условия

$$|x_2 - d| + x_1^2 - k < \varepsilon.$$

Здесь  $\varepsilon$  — задаваемая пользователем неотрицательная константа. Если это условие выполняется, то можно с некоторой точностью считать, что  $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1$ , и интегрирование прекращается. При этом могут возникнуть трудности с детектированием пересечения фазовой траектории с множеством  $\mathcal{X}_1$  из-за того, что с течением времени шаг увеличивается и может достигать порядка параметров  $k$  и  $d$  множества  $\mathcal{X}_1$ . Для устранения этой проблемы будем уменьшать максимально возможные абсолютную и относительную погрешности, что будет вести к уменьшению шага интегрирования.

### 3.2 Условие трансверсальности в конечный момент

Условие трансверсальности (11) при таком решении нельзя задействовать напрямую. Но можно сказать, что при увеличении точности используемых численных методов, погрешность в его выполнении должна уменьшаться. Для оценки погрешности в условии трансверсальности (11) будем вычислять косинус между посчитанным значением  $\psi(t_1)$  и тем, которое должно быть из этого условия трансверсальности. Косинус был выбран только потому, что по нему удобнее всего оценивать остроту угла между векторами — чем косинус больше, тем острее угол, а чем более тупой угол, тем меньше значение косинуса.

Значение  $\psi(t_1)$ , по теореме 1 в точке  $x(t_1)$ , лежащей на границе  $\mathcal{X}_1$ , в которую пришла траектория, должна быть таким, что  $\rho(\psi(t_1)|\mathcal{X}_1) = \langle \psi(t_1), x(t_1) \rangle \equiv \psi^1$ . Будем считать, что

$$\|\psi^1\| = 1.$$

Рассмотрим опорную функцию множества  $\mathcal{X}_1$  и те точки  $x \in \mathcal{X}_1$ , на которых достигается  $\max_{x \in \mathcal{X}_1} \langle \psi^1, x \rangle$ .

Есть три варианта (они следуют из формулы (7)):

1.  $x_2(t_1) = d$ . В этом случае  $\psi^1$  может принимать все такие значения, что  $|\psi_2^1| < \frac{|\psi_1^1|}{2\sqrt{k}}$ ,  $\text{sgn}(\psi_1^1) = \text{sgn}(x_1(t_1))$ .
2.  $x_2(t_1) < d$ . В этом случае  $\psi_2^1 < 0$ . Для нахождения  $\psi^1$  нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (\psi_1^1)^2 + (\psi_2^1)^2 = 1; \\ x_1(t_1) = \frac{\psi_1^1}{2|\psi_2^1|}. \end{cases}$$

Её решением, при условии  $\psi_2^1 < 0$ , будет

$$\psi_1^1 = 2x_1(t_1)\sqrt{\frac{1}{1+4x_1^2(t_1)}},$$

$$\psi_2^1 = -\sqrt{\frac{1}{1+4x_1^2(t_1)}}.$$

3.  $x_2(t_1) > d$ . Этот случай отличается от предыдущего только знаком  $\psi_2^1$ .

Косинус вычисляется по формуле

$$\frac{\langle \psi(t_1), \psi^1 \rangle}{\|\psi(t_1)\|}.$$

При этом во втором и третьем случае мы по  $x(t_1)$  однозначно восстанавливаем  $\psi^1$ . В первом случае, если  $|\psi_2(t_1)| < \frac{|\psi_1(t_1)|}{2\sqrt{k}}$  и  $\text{sgn}(\psi_1(t_1)) = \text{sgn}(x_1(t_1))$ , то косинус считается равным единице, а если же эти условия не выполняются, то за  $\psi^1$  берётся тот вектор, удовлетворяющий этим условиям, у которого угол с  $\psi(t_1)$  наименьший.

### 3.3 Случай вырождения принципа максимума

Отдельно остановимся на случае  $B^T(t)\psi(t) = 0$ . В этом случае  $u(t)$  не определяется однозначно по условию (9). Мы можем по формуле Коши (см [1]) представить  $x(t)$  в виде

$$x(t) = X(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (12)$$

где  $X(t, \tau)$  — решение задачи Коши

$$\frac{\partial X(t, \tau)}{\partial t} = A(t)X(t, \tau), \quad (13)$$

$$X(\tau, \tau) = E.$$

Решением данной задачи Коши является следующая матричная экспонента:

$$X(t, \tau) = e^{\int_{\tau}^t A(s)ds},$$

причём по нашей договоренности компоненты матрицы  $A(t)$  являются непрерывными функциями, поэтому по первой теореме Вейерштрасса на отрезке  $[0, t_1^{\max}]$  они ограничены некоторой общей константой  $M$ . Тогда интеграл

$$\int_{\tau}^t A(s)ds$$

можно равномерно (покомпонентно) оценить через матрицу

$$Mt_1^{\max} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Известно, что матричная экспонента определена для любой матрицы, в том числе и для матрицы (14). В итоге получаем, что функция  $X(t, \tau)$  ограничена для любых  $t, \tau : 0 \leq t, \tau \leq t_1^{\max}$ .

Теперь пусть в некоторой точке  $t$ ,  $0 \leq t \leq t_1^{\max}$   $B^T(t)\psi(t) = 0$ . Рассмотрим матрицу

$$B_\delta \equiv B + \delta \cdot I,$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \delta > 0$$

Очевидно, что  $B_\delta^T(t)\psi(t) = \delta \cdot I\psi(t) = \delta\psi(t) \neq 0$ , так как по уже доказанному ранее  $\psi(t) \neq 0$  ни в одной точке  $t: 0 \leq t \leq t_1^{\max}$ . Следовательно, из условия транверсальности (10) при подстановке вместо матрицы  $B$  матрицы  $B_\delta$  однозначно найдётся управление  $u_\delta(t)$ . Так как первоначально из условия транверсальности нельзя было однозначно выделить управление, то имеем право взять  $u_\delta(t)$ , так как оно удовлетворяет условию транверсальности (10) для матрицы  $B$ . Оценим погрешность полученной при этом траектории. Будем считать, что  $B^T(t)\psi(t) \equiv 0$  на некотором отрезке  $[t_a, t_b]$ . Очевидно, что максимальную погрешность траектория будет иметь при

$$t_a = 0, t_b = t_1^{\max}.$$

Так как траектории непрерывны, то можем взять норму из  $C[0, t_1^{\max}]$ .

Пусть

$$x(t) = X(t, 0)x(0) + \int_0^t X(t, \tau)B(\tau)u_\delta(\tau)d\tau,$$

$$x_\delta(t) = X(t, 0)x(0) + \int_0^t X(t, \tau)B_\delta(\tau)u_\delta(\tau)d\tau.$$

Тогда для любого  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|x^i(t) - x_\delta^i(t)\| &= \max_{t \in [0, t_1^{\max}]} |x^i(t) - x_\delta^i(t)| = \delta \max_{t \in [0, t_1^{\max}]} \left| \int_0^t (X_{i1}(t, \tau)u_\delta^1(\tau) + X_{i2}(t, \tau)u_\delta^2(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \left\{ u_{\max} \equiv \max \left( b, \sqrt{\frac{b}{a+c}} \right) \right\} \leq \delta u_{\max} \left( \max_{\substack{t \in [0, t_1^{\max}] \\ \tau \in [0, t]}} |X_{i1}(t, \tau)| + \max_{\substack{t \in [0, t_1^{\max}] \\ \tau \in [0, t]}} |X_{i2}(t, \tau)| \right) \int_0^{t_1^{\max}} d\tau \leq \\ &\leq 2\delta u_{\max} \cdot t_1^{\max} \cdot \max_{\substack{s \in [0, t_1^{\max}] \\ j=1,2}} |X_{ij}(s, 0)|. \end{aligned}$$

В итоге для евклидовой нормы имеем

$$\|x(t) - x_\delta(t)\| \leq 2\sqrt{2}\delta u_{\max} \cdot t_1^{\max} \cdot \max_{\substack{s \in [0, t_1^{\max}] \\ i,j=1,2}} |X_{ij}(s, 0)|.$$

В силу сказанного выше величина справа определена, и более того, стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0 + 0$ . Тогда для заранее заданной погрешности вычислений  $\varepsilon_x$  можно подобрать такое  $\delta$ , что невязка траектории при замене матрицы  $B$  матрицей  $B_\delta$  будет не превышать  $\varepsilon_x$ .

### 3.4 Уточнение решения

При «уточнении» решения задачи среди всех управлений выбирается то, при котором траектория приходит в целевое множество за минимальное время  $t_{\min}$ . Далее задача пересчитывается, но интервал разбиения по  $\psi_0$  уменьшается в три раза по сравнению с предыдущим (изначально он составляет  $2\pi$ ) и располагается так, что  $\psi_0$ , соответствующее  $t_{\min}$ , находится в его центре. Разбиение этого интервала происходит таким же количеством точек, что и разбиение исходного. После пересчёта выбирается новое минимальное время, после чего формируется множество  $\{\psi_{0i}\}$  — тех значений  $\psi_0$ , для которых время прибытия отличается от минимального не более, чем на заранее заданную константу. Среди всех  $\{\psi_{0i}\}$  выбирается то, для которого погрешность в условии трансверсальности (11) минимальна, а траектория и время, соответствующие этому значению  $\psi_0$ , считаются оптимальными. Если же сначала не было ни одной траектории, дошедшей до целевого множества, то количество точек разбиения увеличивается в три раза. Также в программе реализована возможность глобального улучшения результата, которая заключается в увеличении количества точек разбиения в два раза с сохранением длины отрезка разбиения.

## 4 Примеры работы программы

### 4.1 Автономные системы

#### 4.1.1 Система №1

Решим следующую систему:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, a = b = 1, c = 2, k = r = 0.5, d = 3. \quad (15)$$

Количество узлов в сетку  $\psi_0$  для этой системы (и для всех последующих) возьмём равным 61. Матрица  $A$  имеет комплексные собственные значения с положительной вещественной частью:  $1 \pm 2.236i$ . Результат работы: оптимальное время 0.31224, условие трансверсальности выполнено на 99.6%. После первого улучшения: оптимальное время 0.31198, условие трансверсальности выполнено на 99.973%. После второго улучшения: оптимальное время 0.31196, условие трансверсальности выполнено на 100%.

Все графики, кроме фазовых траекторий, приведены только для начального решения.

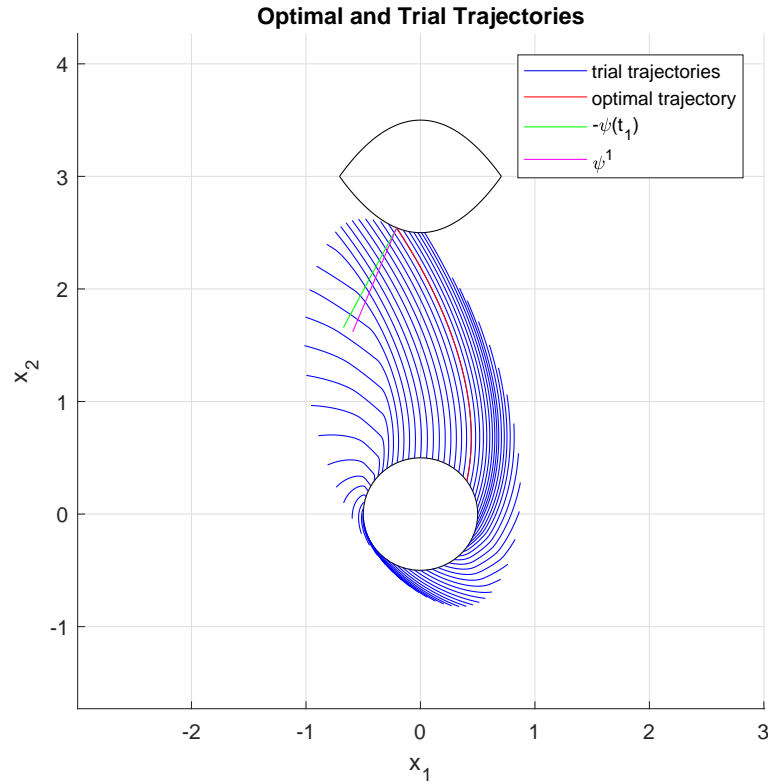


Рис. 1: Фазовые траектории системы (15) после первоначального решения

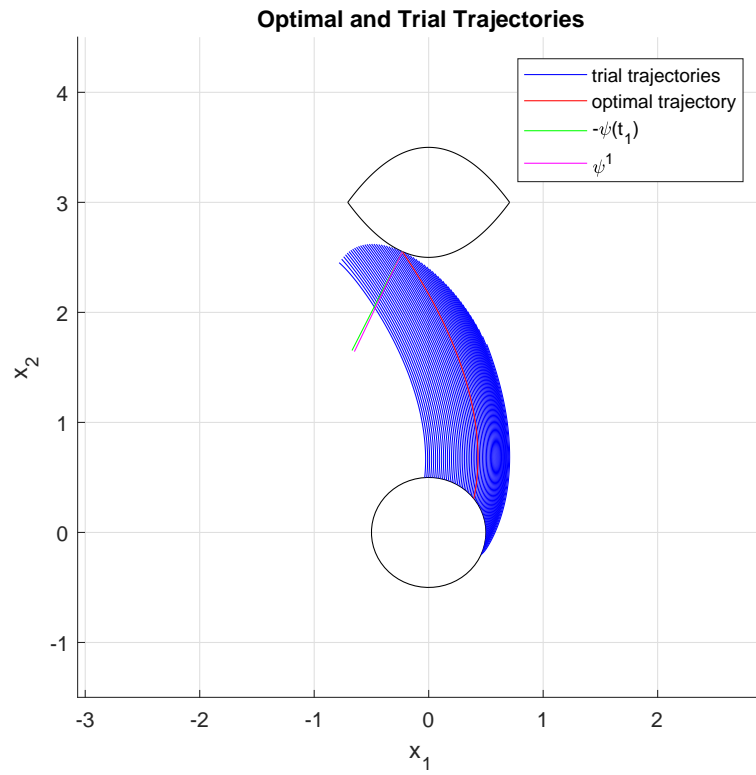


Рис. 2: Фазовые траектории системы (15) после первого уточнения

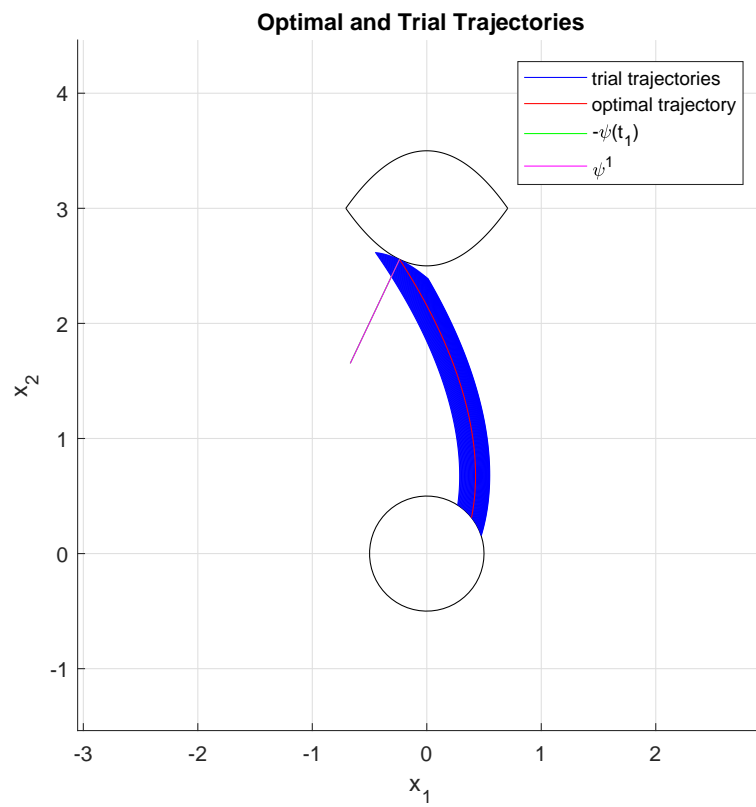


Рис. 3: Фазовые траектории системы (15) после второго уточнения



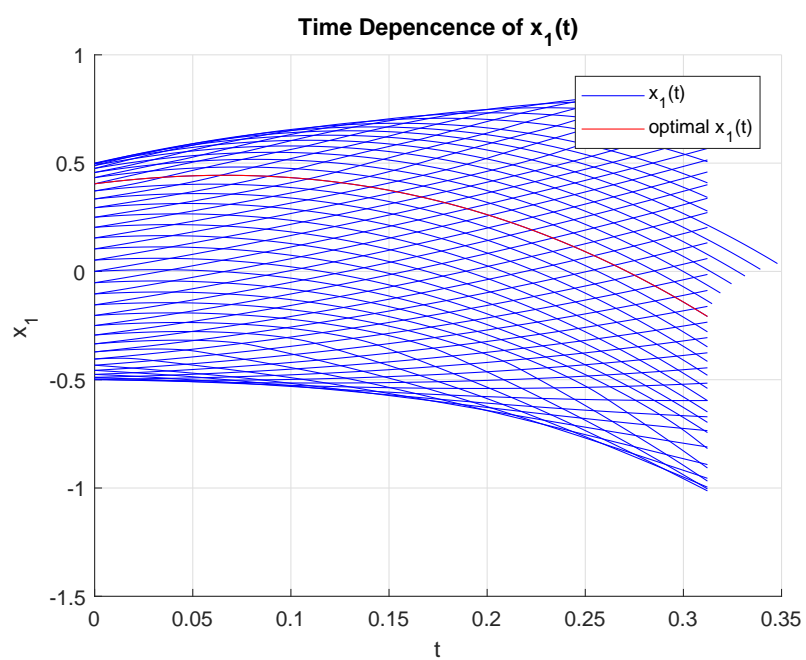


Рис. 4: Зависимость  $x_1(t)$  от времени в системе (15)

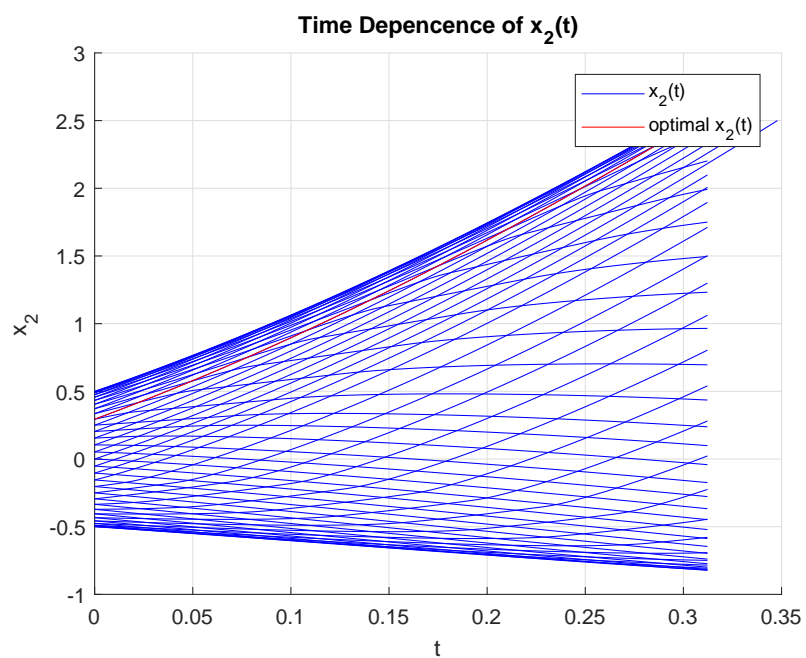


Рис. 5: Зависимость  $x_2(t)$  от времени в системе (15)

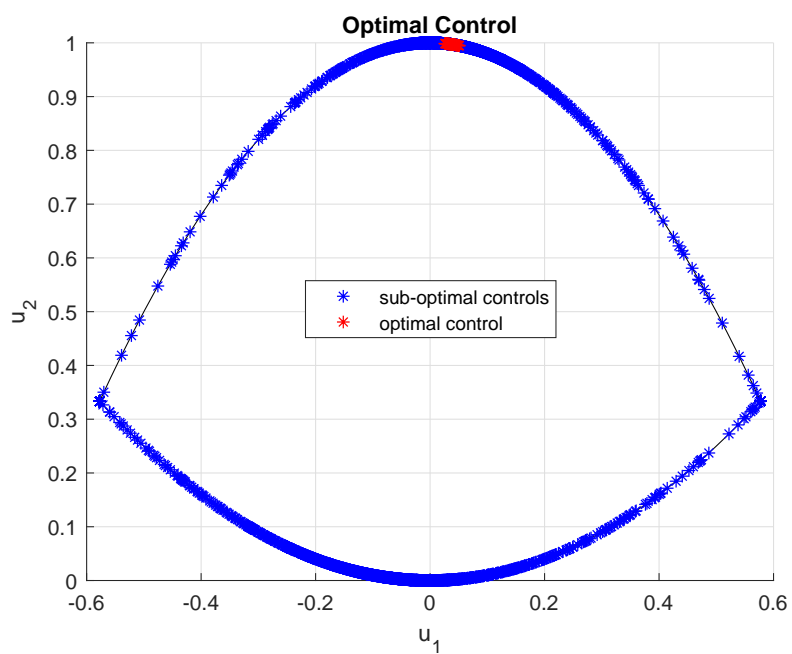


Рис. 6: Оптимальное управление в системе (15)

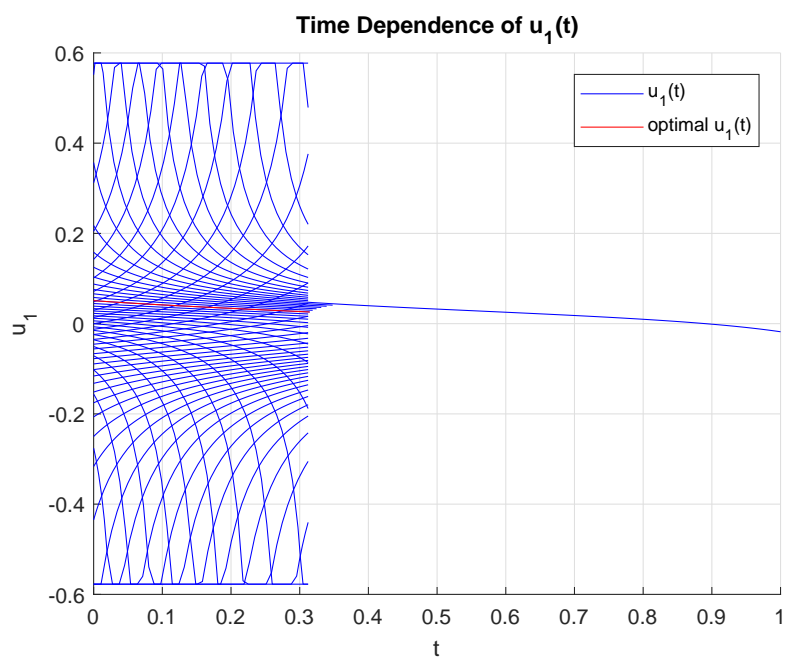


Рис. 7: Зависимость  $u_1(t)$  от времени в системе (15)

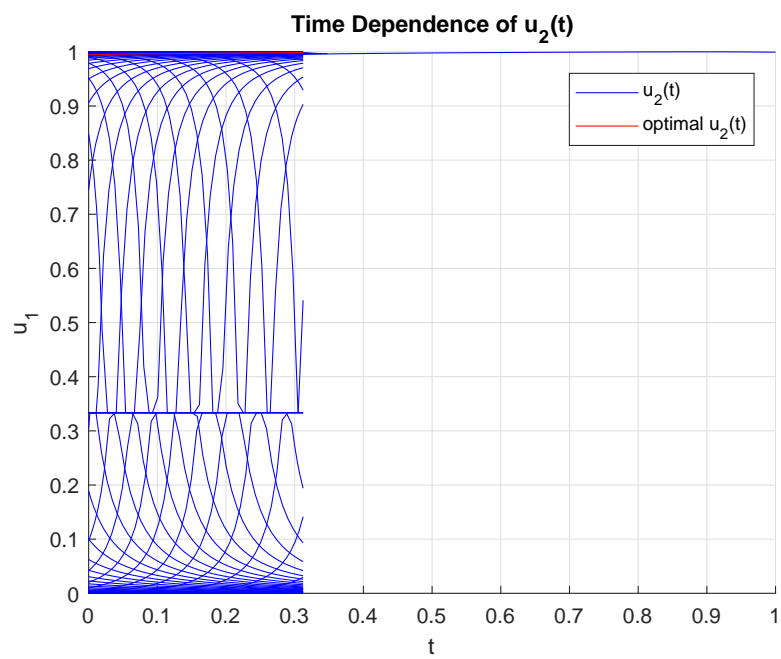


Рис. 8: Зависимость  $u_2(t)$  от времени в системе (15)

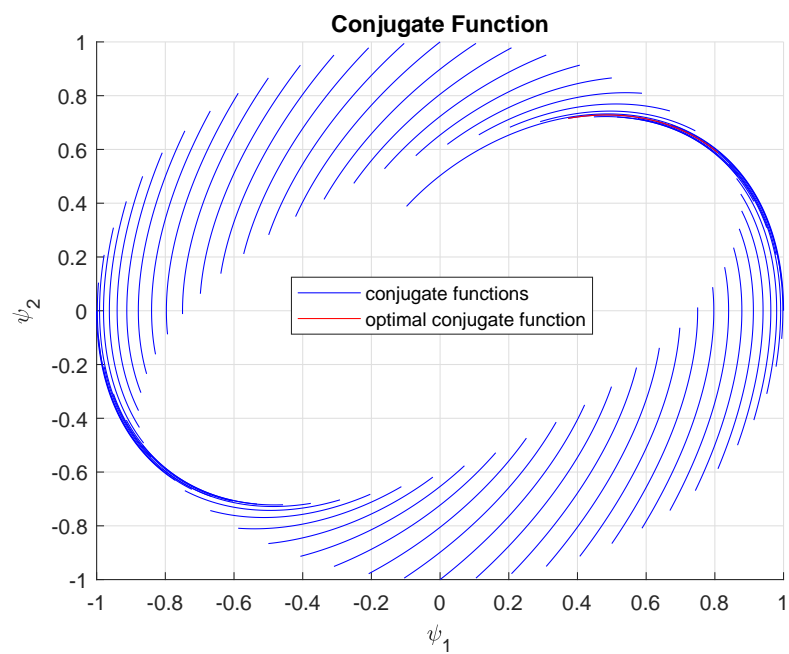


Рис. 9: Сопряжённая функция в системе (15)

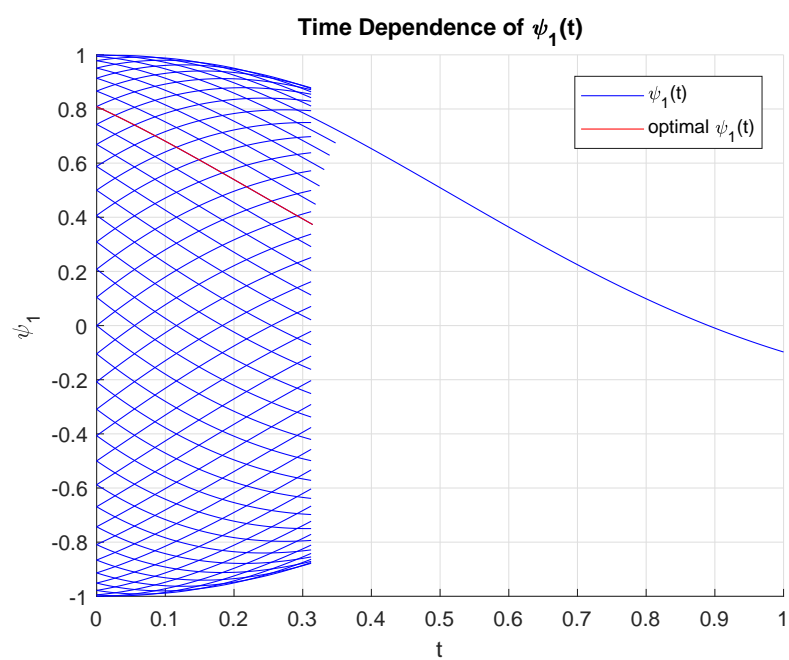


Рис. 10: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени в системе (15)

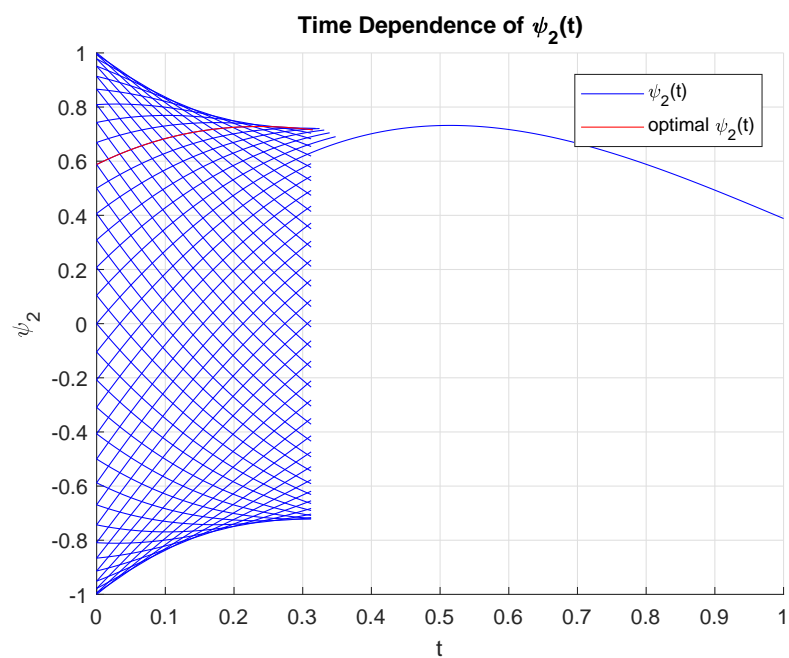


Рис. 11: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени в системе (15)

#### 4.1.2 Система №2

Решим следующую систему:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, a = c = 0.3, b = k = 1, r = 0.5, d = -2. \quad (16)$$

Матрица  $A$  имеет два совпадающих собственных значения:  $-1$ . Результат работы: оптимальное время 0.44617, условие трансверсальности выполнено на 99.943%. После первого улучшения: оптимальное время 0.31198, условие трансверсальности выполнено на 99.973%. После второго улучшения: оптимальное время 0.31196, условие трансверсальности выполнено на 100%.

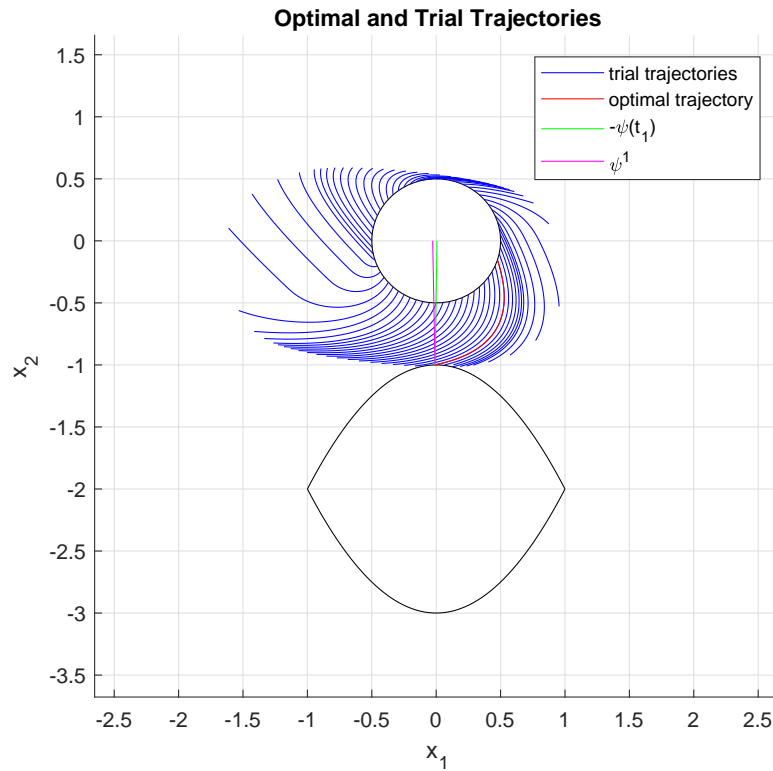


Рис. 12: Фазовые траектории системы (16) после первоначального решения

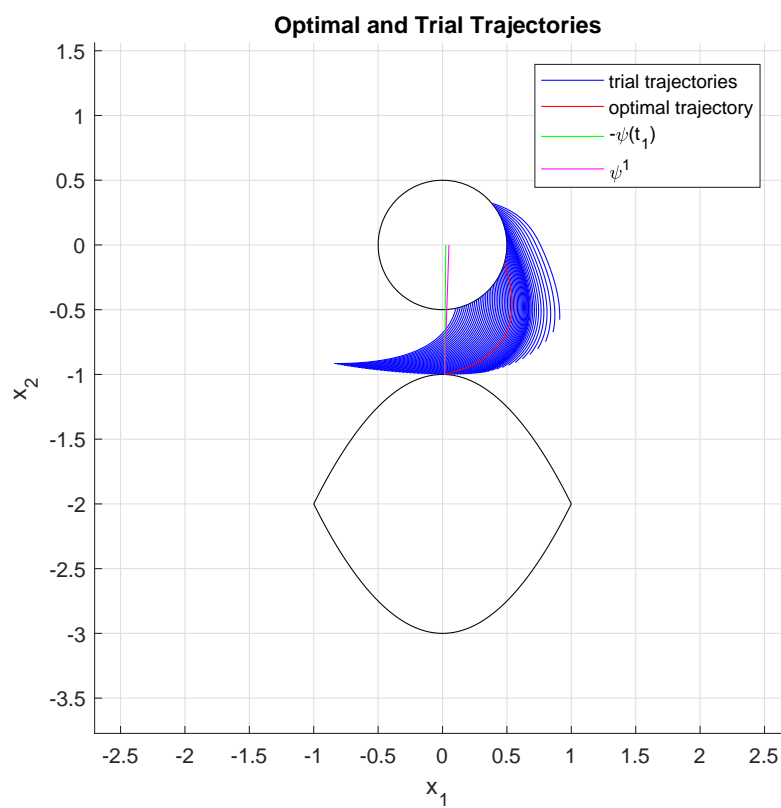


Рис. 13: Фазовые траектории системы (16) после первого уточнения

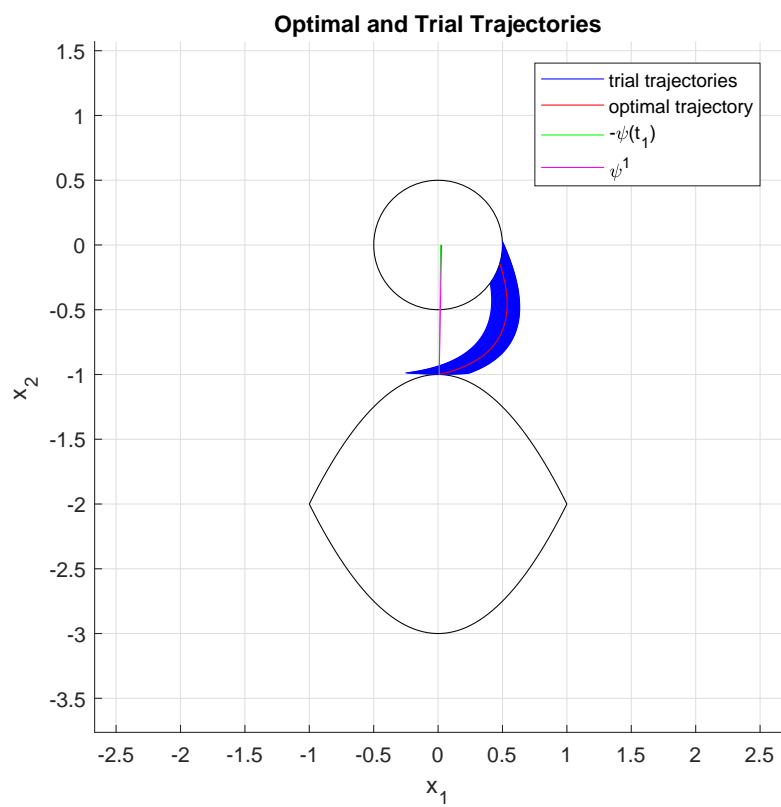


Рис. 14: Фазовые траектории системы (16) после второго уточнения

## 4.2 Неавтономные системы

### 4.2.1 Система №3

Решим следующую систему:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(t^2) & 0 \\ -1 & -2\cos(4t^2) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2\sin(t) & -\frac{1}{t+1} \\ 0 & -\sin(3t) \end{pmatrix}, a = 1, b = 5, c = 2, k = r = 0.5, d = 2. \quad (17)$$

Результат работы: оптимальное время 1.4571, условие транверсальности выполнено на 99.489%.

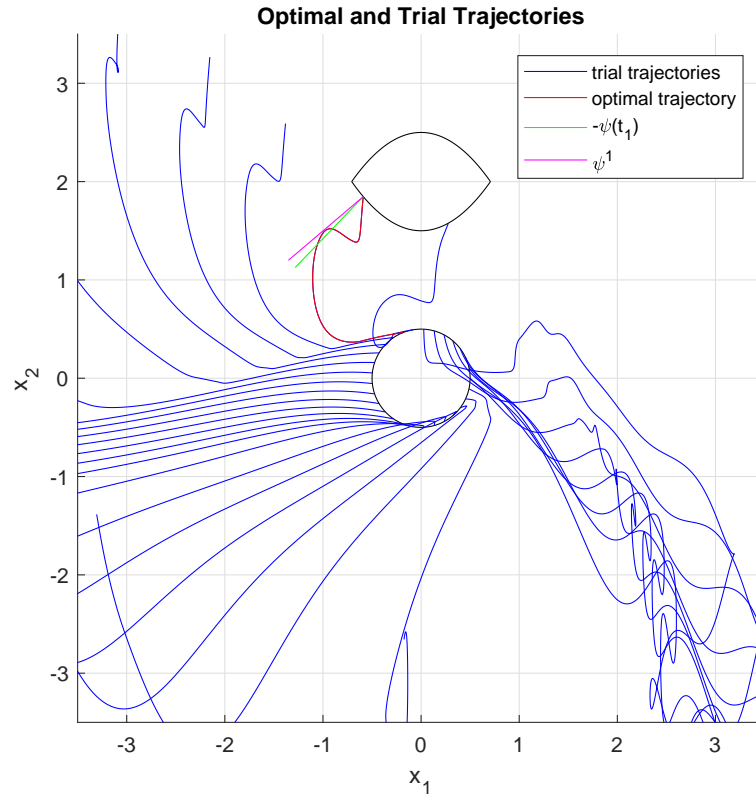


Рис. 15: Фазовые траектории системы (17)

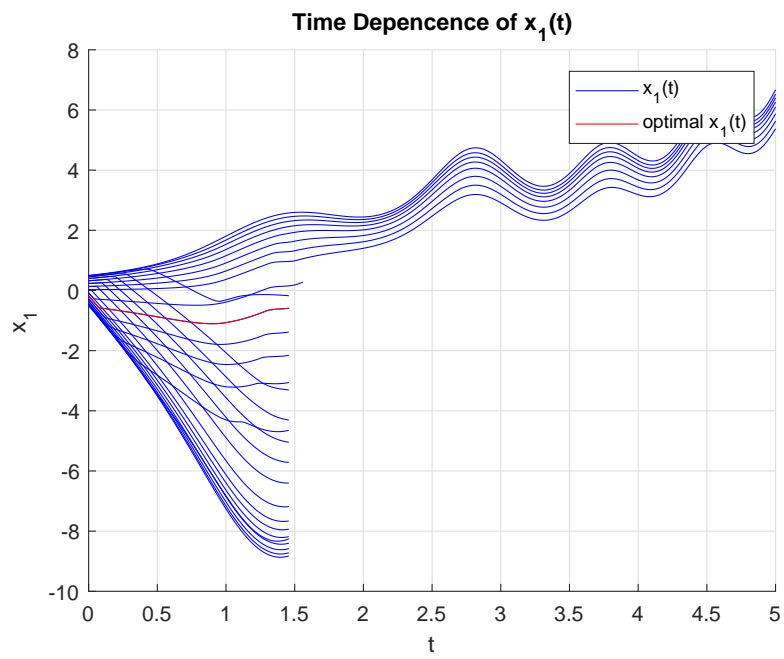


Рис. 16: Зависимость  $x_1(t)$  от времени в системе (17)

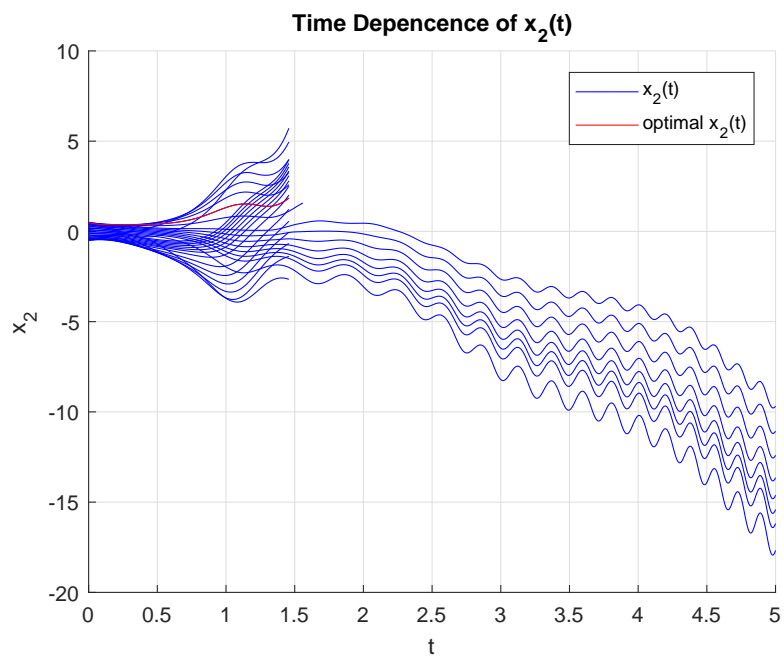


Рис. 17: Зависимость  $x_2(t)$  от времени в системе (17)



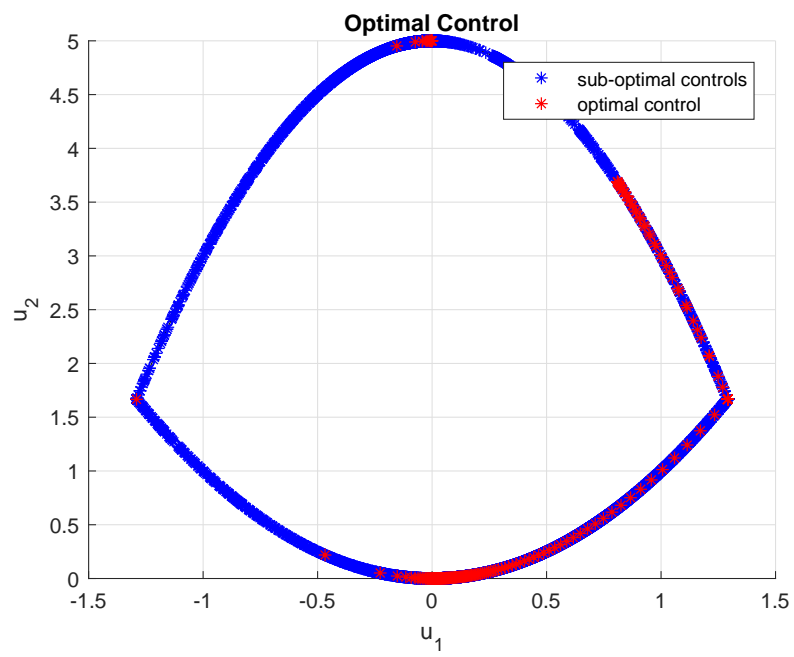


Рис. 18: Оптимальное управление в системе (17)

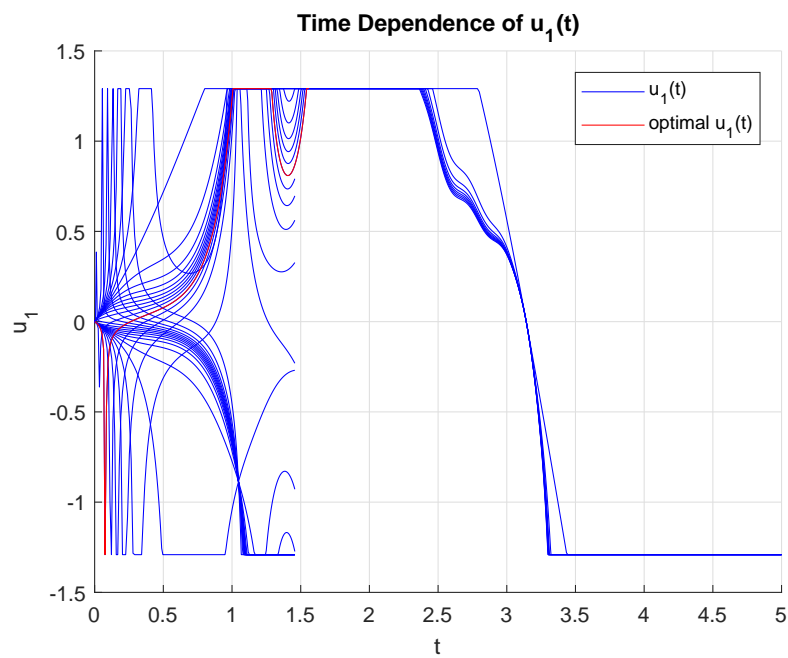


Рис. 19: Зависимость  $u_1(t)$  от времени в системе (17)

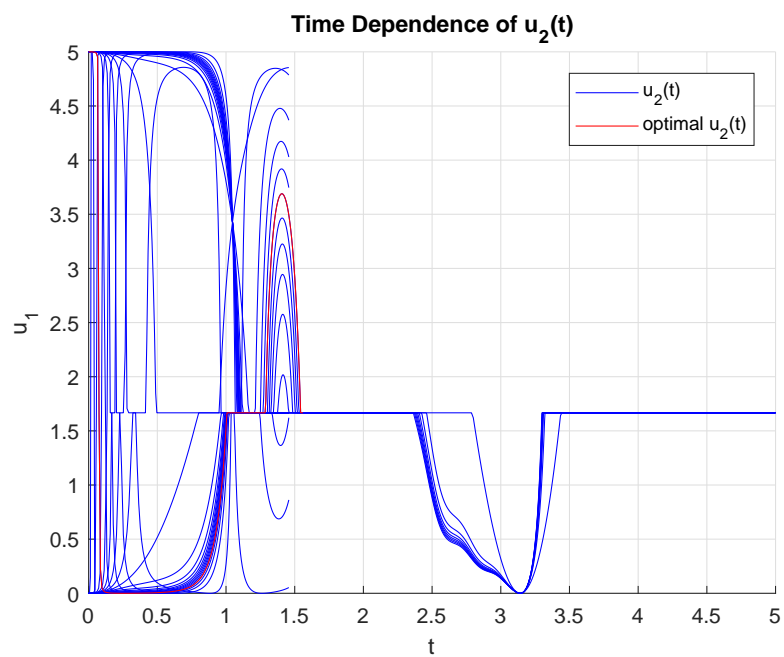


Рис. 20: Зависимость  $u_2(t)$  от времени в системе (17)

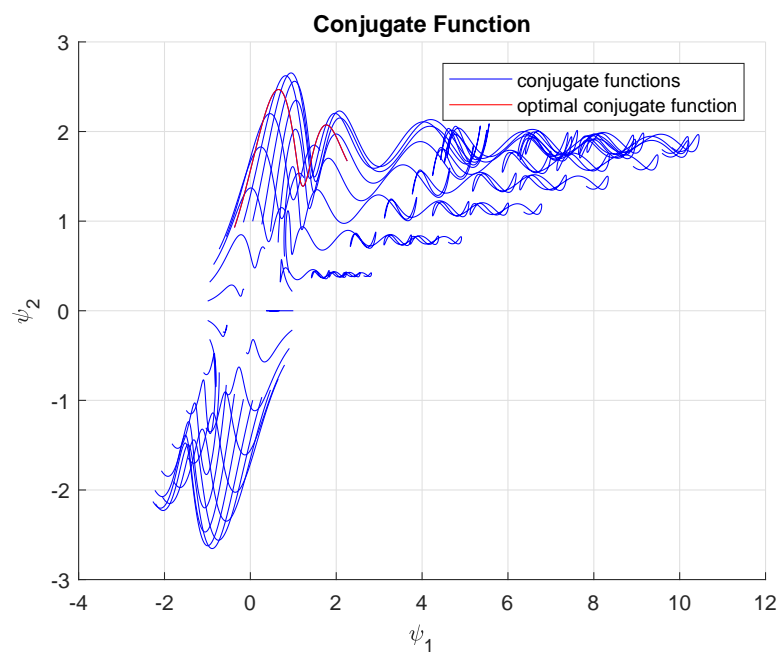


Рис. 21: Сопряжённая функция в системе (17)

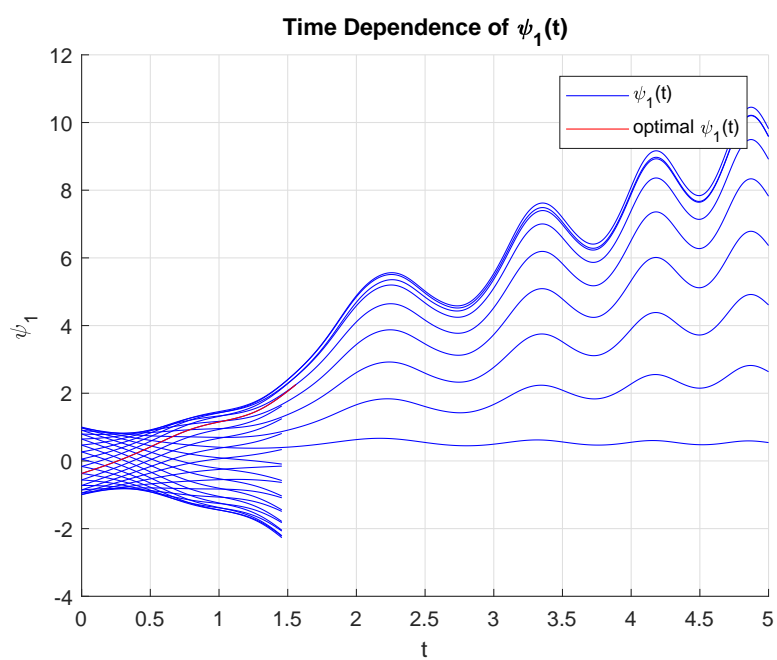


Рис. 22: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени в системе (17)

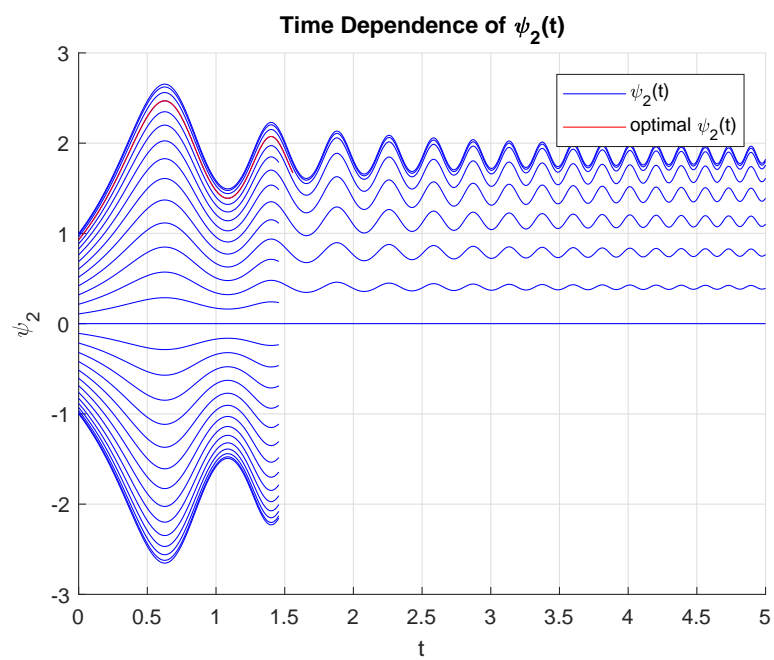


Рис. 23: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени в системе (17)

#### 4.2.2 Система №4 (пример разрывности времени по целевому множеству)

Решим систему:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 \sin(t) & 0 \\ 0 & 0.2 \cos(t) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}, a = b = 1, c = 2, r = 0.5, d = -3. \quad (18)$$

для  $k = 0.87$  и  $k = 0.88$ . Покажем, что при таком малом изменении множества  $\mathcal{X}_1$  получается существенный разрыв оптимального времени  $t_1^*$ .

Результат работы:

1.  $k=0.87$ . После второго приближения оптимальное время 12.0412, условие трансверсальности выполнено на 99.999%.
2.  $k=0.88$ . После второго приближения оптимальное время 7.961, условие трансверсальности выполнено на 99.996%.

Из рисунков (24) и (25) видно, почему происходит разрыв времени. В первом случае все траектории вынуждены совершить «виток», прежде чем достигнуть целевого множества, а во втором появляются траектории, которые успевают сделать это до «витка».

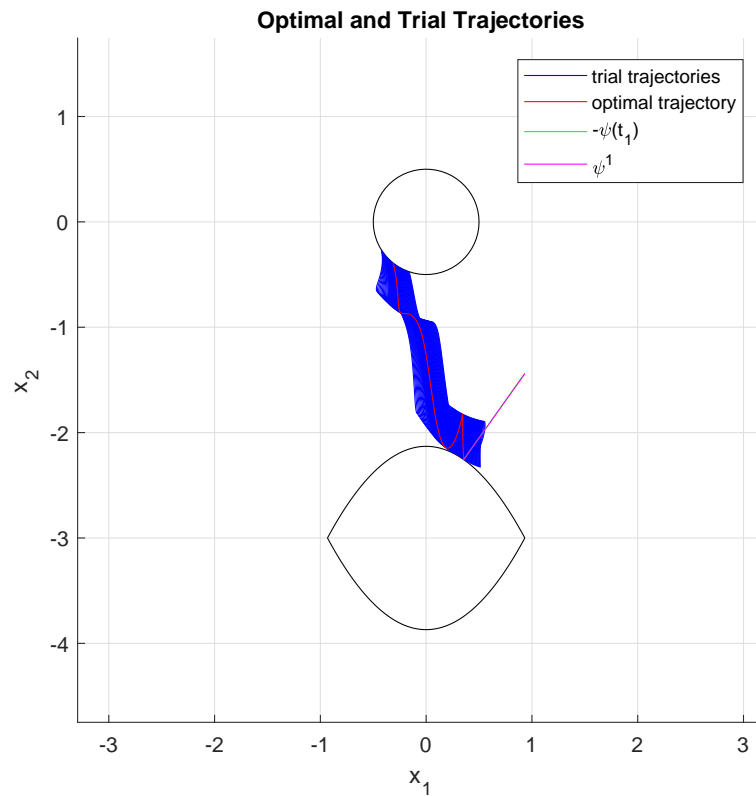


Рис. 24: Фазовые траектории системы (18) после второго уточнения для  $k = 0.87$

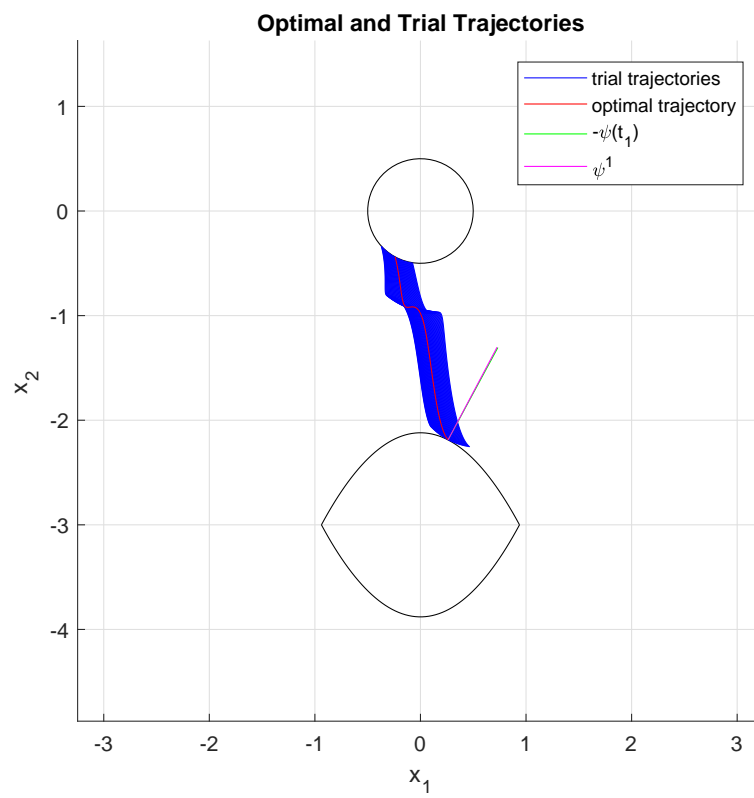


Рис. 25: Фазовые траектории системы (18) после второго уточнения для  $k = 0.88$

## Список литературы

- [1] Рублёв И. В. *Лекции по курсу «Оптимальное управление»*, 2017–2018 гг.