



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

## «Оптимальное управление»

Задание №2. Нелинейная задача на отрезке

*Студент 315 группы*

Я. А. Григорьев

*Руководитель практикума*

к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Аналитика</b>	<b>7</b>
3.1	$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ (неотрицательное $u_1$ ) . . . . .	9
3.1.1	Аномальный случай . . . . .	9
3.1.2	Нормальный случай . . . . .	12
3.2	$\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$ (любое $u_1$ ) . . . . .	23
3.2.1	Аномальный случай . . . . .	23
3.2.2	Нормальный случай . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Примеры работы программы</b>	<b>33</b>
4.1	Пример №1 . . . . .	33
4.2	Пример №2 . . . . .	41
4.3	Пример №3 . . . . .	45
4.4	Пример №4 . . . . .	53
4.5	Пример №5 . . . . .	61
	<b>Список литературы</b>	<b>65</b>

# 1 Постановка задачи

Рассматривается система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 + u_2 x_2 \end{cases}, t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$ . На возможные значения управляющих параметров  $u_1, u_2$  наложены следующие ограничения

1. либо  $u \in \mathcal{P}_1 \equiv \{u_1 \geq 0, u_2 \in [k_1, k_2], k_1 < 0, k_2 > 0\}$ ,
2. либо  $u \in \mathcal{P}_2 \equiv \{u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in [k_1, k_2], k_1 < 0, k_2 > 0\}$ .

Задан начальный момент времени  $t_0 = 0$  и начальная позиция

$$x(0) : x_1(0) = 0, x_2(0) = 0. \quad (2)$$

Необходимо за счёт выбора программного управления  $u$  перевести систему из заданной начальной позиции в такую позицию в момент времени  $T$ , в которой

$$|x_1(T) - L| \leq \varepsilon, |x_2(T) - S| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

На множестве всех реализаций программных управлений, переводящих материальную точку в указанное множество, необходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int_0^T (\alpha u_1 + u_1^2(t)) dt \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \alpha > 0. \quad (4)$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам  $T, k_1, k_2, L, S, \varepsilon, \alpha$  определяет, разрешима ли задача оптимального управления (при одном из указанных двух ограничений на управления). Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряжённых переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.
2. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчёте, должны быть доказаны. В отчёте должны быть приведены примеры оптимальных траекторий для всех возможных качественно различных «режимов».

**Замечание.** Алгоритм построения оптимальной траектории не должен содержать перебор по векторам сопряжённых переменных  $\psi(t)$  в какой-либо фиксированный момент времени.

## 2 Теория

Обозначим подынтыгральную функцию в оптимизируемом функционале через

$$f^0(x, u) \equiv \alpha u_1(t) + u_1^2(t).$$

Как известно из [1], решение задач подобного типа необходимо начинать с расширения фазового пространства переменных путём добавления новой переменной  $x_0$ , которой соответствует дифференциальное уравнение  $\dot{x}_0 = f^0(x, u)$ . Получаем *расширенную систему дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 &= \alpha u_1 + u_1^2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 + u_2 x_2 \end{cases}, t \in [0, T], \quad (5)$$

или, если кратко,  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x, u)$ , где  $\tilde{x} \equiv (x_0, x_1, x_2)$ ,  $\tilde{f} \equiv (f^0, f^1, f^2)$ ,  $f^1 \equiv x_2 + u_2$ ,  $f^2 \equiv u_1 + u_2 x_2$ .

Введём сопряжённые переменные  $\tilde{\psi} \equiv (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$  и составим так называемую *функцию Гамильтона–Понтрягина*:

$$\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) \equiv \langle \tilde{\psi}, \tilde{f}(\tilde{x}, u) \rangle = \psi_0(\alpha u_1 + u_1^2) + \psi_1(x_2 + u_2) + \psi_2(u_1 + u_2 x_2). \quad (6)$$

Обозначим через  $\mathcal{P}$  один из двух вышевведённых классов управления (то есть  $\mathcal{P}_1$  или  $\mathcal{P}_2$ ), а через  $\mathcal{X}_0$  и  $\mathcal{X}_1$  точку (2) и множество (3) соответственно. Введём ещё одну вспомогательную функцию:

$$\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}) \equiv \sup_{u \in \mathcal{P}} \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u).$$

Пусть  $\mathcal{X}$  — гладкое многообразие, которое задано через систему уравнений:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(x) = 0, \dots, \varphi_m(x) = 0\}.$$

Очевидно, в таком случае размерность многообразия равна  $(n - m)$ . Пусть также

$$\text{rg} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = m,$$

где  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  — матрица Якоби для системы функций  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  по переменным  $x_1, \dots, x_n$ . Обозначим

$$\mathcal{T}_{x'} \mathcal{X} \equiv \ker \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x') \right).$$

Тогда при данных обозначениях, согласно [1], справедлива следующая теорема, называемая *принципом максимума Понтрягина для задачи на фиксированном отрезке*:

**Теорема 1.** Пусть  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  — оптимальная пара для задачи (5) из  $\mathcal{X}_0$  в  $\mathcal{X}_1$  с ограничением на управление  $\mathcal{P}$  и минимизацией функционала (4). Тогда существует функция  $\tilde{\psi}^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  (называемая *сопряжённой функцией*), такая что:

1.  $\tilde{\psi}^* \not\equiv 0$  (условие нетривиальности);
2.  $\dot{\tilde{\psi}}^*(t) = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\substack{\tilde{\psi}=\tilde{\psi}^*(t) \\ \tilde{x}=\tilde{x}^*(t) \\ u=u^*(t)}} \quad (\text{сопряжённая система, далее будем обозначать через } (CC));$
3.  $\tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) = \sup_{n.s.t. \ u \in \mathcal{P}} \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u) = \tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \quad (\text{условие максимума, } (УМ));$

4.  $\psi_0^*(\cdot) \equiv \text{const} \leq 0$ ,  
 $\mathcal{M}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \equiv \text{const} = 0$ ;
5.  $\psi^*(0) \perp \mathcal{T}_{x^*(0)}\mathcal{X}_0$ ,  $\psi^*(T) \perp \mathcal{T}_{x^*(T)}\mathcal{X}_1$  (условия трансверсальности, (УТ)).

Эту теорему оставим без доказательства в силу его трудоёмкости.

В нашем случае множество  $\mathcal{X}_0$  состоит из одной точки, а касательная плоскость к точке состоит только из нуля, поэтому первое условие трансверсальности в (УТ) вырождается. Отметим, что второе условие (УТ) эквивалентно тому, что вектор  $-\psi(T)$  является внешней нормалью ко множеству  $\mathcal{X}_1$  (в нашем случае это множество является квадратом, построить внешние нормали к которому не составляет труда, что и будет сделано в следующем разделе).

Докажем один вспомогательный факт.

**Утверждение 1.** Пусть сопряжённая функция  $\tilde{\psi}(\cdot) = (\psi_0(\cdot), \psi_1(\cdot), \dots, \psi_n(\cdot))$  удовлетворяет условию нетривиальности и (СС) в теореме 1. Тогда  $\tilde{\psi}(t) \neq 0$  для всех  $t \in [0, T]$ .

*Доказательство.* Для любого  $i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq n$ , согласно (СС), имеем:

$$\dot{\tilde{\psi}}_i(t) = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x_i} \Big|_{\substack{\tilde{\psi}=\tilde{\psi}^*(t) \\ \tilde{x}=\tilde{x}^*(t) \\ u=u^*(t)}} = -\psi_0^* \frac{\partial f^0(\tilde{x}^*(t), u^*(t))}{\partial x_i} - \psi_1^* \frac{\partial f^1(\tilde{x}^*(t), u^*(t))}{\partial x_i} - \dots - \psi_n^* \frac{\partial f^n(\tilde{x}^*(t), u^*(t))}{\partial x_i},$$

или, в векторном виде,

$$\dot{\tilde{\psi}}^*(t) = - \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{\psi}^*(t).$$

Это система линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $\tilde{\psi}^*(\cdot)$ , у которой, согласно [2], существует единственное решение. Тогда если существует точка  $t \in [0, T]$  такая, что  $\tilde{\psi}(t) = 0$ , то  $\tilde{\psi} \equiv 0$  на всём отрезке  $[0, T]$  (в силу вышеупомянутой единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений), что противоречит условию нетривиальности из теоремы 1.  $\square$

Из доказанного утверждения 1 следует, что сопряжённая функция не обращается в нуль ни в одной точке  $t \in [0, T]$ . Очевидно, что условие максимума (УМ) из теоремы 1 эквивалентно следующему условию:

$$u^*(t) \in \underset{\text{п.в.}t}{\text{Arg max}}_{u \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(\tilde{\psi}^*(t), \tilde{x}^*(t), u). \quad (7)$$

При такой формулировке условия нам будет проще подбирать претендентов на оптимальное управление. Выпишем (СС) в явном виде:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x_0} = 0 \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x_2} = -\psi_1 - \psi_2 u_2 \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим

$$\psi_2(0) = \psi_2^0.$$

Из первых двух уравнений в (8) (а для  $\psi_0$  также из пункта 4 теоремы 1) следует, что

$$\psi_0(t) = \psi_0(0) = \text{const} \equiv \psi_0,$$

$$\psi_1(t) = \psi_1(0) = \text{const} \equiv \psi_1.$$

Из того же пункта 4 теоремы 1 следует, что  $\psi_0 \leq 0$ . Обратим внимание, что без ограничения общности (в силу инвариантности решения (СС) относительно умножения на положительную константу) можно считать, что вектор  $\tilde{\psi}$  нормирован следующим образом:

- если  $\psi_0 < 0$ , то берём  $\psi_0 = -1$  (назовём этот случай *нормальным*);
- если  $\psi_0 = 0$  (назовём этот случай *анормальным*), то:
  - если  $\psi_1 \neq 0$ , то берём  $\psi_1 := \text{sgn}(\psi_1)$ ;
  - если  $\psi_1 = 0$ , то берём  $\psi_2^0 := \text{sgn}(\psi_2^0)$ .

Приступим непосредственно к решению задачи.

### 3 Аналитика

Очевидно, необходимо рассмотреть следующие случаи:

1.  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ :

- (a)  $\psi_0 = 0$  (анормальный случай);
- (b)  $\psi_0 = -1$  (нормальный случай);

2.  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$ :

- (a)  $\psi_0 = 0$  (анормальный случай);
- (b)  $\psi_0 = -1$  (нормальный случай);

Запишем сначала условия на сопряжённые переменные, которые следуют из условий трансверсальности (УТ) теоремы 1:

$$\psi_1 : \begin{cases} \geq 0, & x_1(T) = L - \varepsilon, \\ = 0, & x_1(T) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \\ \leq 0, & x_1(T) = L + \varepsilon; \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi_2(T) : \begin{cases} \geq 0, & x_2(T) = S - \varepsilon, \\ = 0, & x_2(T) \in (S - \varepsilon, S + \varepsilon), \\ \leq 0, & x_2(T) = S + \varepsilon; \end{cases} \quad (10)$$

Условиям (9)–(10) эквивалентны следующие условия на траекторию:

$$x_1(T) = \begin{cases} L - \varepsilon, & \psi_1 > 0, \\ [L - \varepsilon, L + \varepsilon], & \psi_1 = 0, \\ L + \varepsilon, & \psi_1 < 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$x_2(T) = \begin{cases} S - \varepsilon, & \psi_2(T) > 0, \\ [S - \varepsilon, S + \varepsilon], & \psi_2(T) = 0, \\ S + \varepsilon, & \psi_2(T) < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Изучив функцию Гамильтона–Понтрягина (6), мы можем прийти к следующим выводам:

1. Чтобы найти  $u_1^*$ , нам необходимо максимизировать слагаемое

$$\alpha\psi_0 u_1 + \psi_0 u_1^2 + \psi_2 u_1. \quad (13)$$

2. Чтобы найти  $u_2^*$ , нам необходимо максимизировать слагаемое

$$(\psi_1 + \psi_2 x_2) u_2. \quad (14)$$

Обратим внимание, что слагаемое (14) не зависит от  $\psi_0$ , поэтому во всех четырёх случаях  $u_2^*$  будет одинаковым (так как для  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$  и для  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$  условия на  $u_2$  совпадают), и мы можем сразу его посчитать:

$$u_2^* = \begin{cases} k_2, & \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ [k_1, k_2], & \psi_1 + \psi_2 x_2 = 0, \\ k_1, & \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $u_2 \in [k_1, k_2]$ ,  $k_1 < 0$ ,  $k_2 > 0$ .

**Замечание 1.** Обратим внимание, что если при некотором условии на  $\psi_1, \psi_2$  и  $x_2$  мы получили, что максимум функции Гамильтона–Понтрягина достигается на бесконечном управлении  $u_1$  (то есть при  $u_1^* = \pm\infty$ ), то этот случай рассматривать не нужно, так как мы минимизируем функционал (4), в который входит управление  $u_1$  (то есть при подстановке в этот функционал бесконечного управления мы получим бесконечность). Это сделать можно, так как для этого функционала мы в дальнейшем найдём конечные решения по  $u_1$ , при подстановке которых будем получать конечные значения функционала (при тех же значениях входных параметров). Тем самым будет показано, что бесконечные управления  $u_1$  решениями не являются.

Прежде чем перейти к частным случаям, докажем необходимую для решения теорему.

**Теорема 2.** Пусть имеется линейная неоднородная задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + f(t), \\ x(t_0) &= x^0. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда её решением является функция  $x(t)$ , определяемая следующей формулой Коши:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} x^0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t A(s)ds} f(\tau) d\tau, \quad (17)$$

где  $e^A \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$  — так называемая матричная экспонента.

*Доказательство.* Будем искать решение в виде  $x(t) = F(t)y(t)$ , где  $F(t)$  — некоторая матрица. Дифференцируя это выражение и подставляя его в (16), получим:

$$\dot{x}(t) = \dot{F}(t)y(t) + F(t)\dot{y}(t) = A(t)F(t)y(t) + f(t),$$

$$\dot{y}(t) = F^{-1}(t)(A(t)F(t) - \dot{F}(t))y(t) + F^{-1}(t)f(t).$$

Выбирая  $F(t) = X(t, t_0)$ , где  $X(t, t_0)$  — так называемая фундаментальная матрица, которая удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial X(t, \tau)}{\partial t} &= A(t)X(t, \tau), \\ X(\tau, \tau) &= E, \end{cases} \quad (18)$$

мы сводим систему (16) к системе

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= X^{-1}(t, t_0)f(t) \\ y(t_0) &= x^0. \end{cases}$$

Таким образом (согласно [2]), мы можем выписать в явном виде ответ:

$$\begin{aligned} y(t) &= x^0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)d\tau, \\ x(t) &= X(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t, t_0)X^{-1}(\tau, t_0)f(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$



Отметим, что  $X(\tau, t_0)$  отображает  $x^0$  в  $x(\tau)$ , а  $X(t, \tau)$  отображает  $x(\tau)$  в  $x(t)$ . В таком случае  $x(t) = X(t, \tau)X(\tau, t_0)x^0$ . Но в силу единственности решения верно, что  $x(t) = X(t, t_0)x^0$ . Из этих двух равенств получаем:

$$X(t, \tau)X(\tau, t_0) = X(t, t_0).$$

Это соотношение называется *полугрупповым свойством* фундаментальной матрицы. В частности при  $t = t_0$  получаем, что  $X(t_0, \tau)X(\tau, t_0) = E$ . Полугрупповое свойство позволяет записать соотношение (19) в виде

$$x(t) = X(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)f(\tau)d\tau. \quad (20)$$

Осталось доказать, что

$$X(t, \tau) = e^{\int_{\tau}^t A(s)ds},$$

но это напрямую следует из задачи Коши (18) (см. [2]). Подставляя данное равенство в формулу (20), получим формулу (17).  $\square$

Перейдём к рассмотрению частных случаев нашей задачи.

### 3.1 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ (неотрицательное $u_1$ )

#### 3.1.1 Анормальный случай

В этом случае из условия (7) получаем, что

$$u_1^* = \begin{cases} +\infty, & \psi_2 > 0, \\ [0, +\infty), & \psi_2 = 0, \\ 0, & \psi_2 < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь мы максимизировали слагаемое  $\psi_2 u_1$  (полученное подстановкой  $\psi_0 = 0$  в ранее выписанное слагаемое (13)). В данном случае (см. замечание 1) необходимо, чтобы  $\psi_2$  был всюду неположителен (в противном случае получим бесконечное управление  $u_1$ ). Покажем, что случай, при котором  $\psi_2 = 0$  на некотором  $t \in [t_1, t_2] \subset [0, T]$ , невозможен. Предположим от противного, что он возможен. Тогда при подстановке в (СС) получим, что  $0 = -\psi_1 - 0 \cdot u_2$  на  $t \in [t_1, t_2]$ , то есть  $\psi_1 = 0$ . В итоге получаем, что  $\psi_0 = 0$ , так как имеем анормальный режим,  $\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0$  на  $t \in [t_1, t_2]$  по только что доказанному, но тогда вектор  $\tilde{\psi} = 0$  на  $t \in [t_1, t_2]$ , что противоречит условию нетривиальности из теоремы 1 (см. утверждение 1). Тем самым получаем, что  $\psi_2 < 0$  для почти всех  $t \in [0, T]$ . Дальнейшие равенства и неравенства рассматриваем с точностью до «почти всюду». Итак,  $u_1^* = 0$  на  $t \in [0, T]$ . Тогда исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= u_2 x_2 \end{cases}, t \in [0, T]. \quad (22)$$

Согласно теореме 2, получаем, что

$$x_2(t) = e^{\int_0^t u_2(s)ds} \cdot x_2(0) = 0$$

всюду на  $t \in [0, T]$ . Из условия трансверсальности 12 получаем, что  $0 = x_2(T) = S - \varepsilon$ , то есть  $S = \varepsilon$ . В противном случае данный сценарий решения не имеет. Уравнение для  $x_1(t)$  принимает вид

$$\dot{x}_1(t) = u_2(t),$$

решение которого, согласно той же теореме 2, вычисляется по формуле

$$x_1(t) = \int_0^t u_2(\tau) d\tau.$$

Обратим внимание, что так как  $x_2 \equiv 0$ , то условия (15) на  $u_2^*$  примут следующий вид:

$$u_2^* = \begin{cases} k_2, & \psi_1 > 0, \\ [k_1, k_2], & \psi_1 = 0, \\ k_1, & \psi_1 < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Переберём возможные случаи по  $\psi_1$  (учитывая введённую ранее нормировку).

1.  $\psi_1 = 1$ . В этом случае имеем  $u_2 = k_2$  и  $x_1(t) = k_2 t$ . Проверим условие трансверсальности (11). Чтобы оно выполнялось, нам необходимо, чтобы  $k_2 T = x_1(T) = L + \varepsilon$ . Таким образом, при таком сценарии  $u^* \equiv (0, k_2)^T$  будет претендентом на оптимальное управление, если и только если выполнены следующие условия на параметры задачи:

$$S = \varepsilon,$$

$$k_2 T = L + \varepsilon.$$

Обратим внимание, что  $\psi_2^0$  можно задавать произвольным отрицательным числом (так как функция  $\psi_2(\cdot)$  в данном случае ни на что не влияет). Возьмём  $\psi_2^0 = -1$ . Тогда из (СС) (с учётом теоремы 2) следует, что

$$\psi_2(t) = -e^{k_2 t} - \int_0^t e^{k_2(t-s)} ds = -e^{k_2 t} - \frac{e^{k_2 t} - 1}{k_2}.$$

Эта функция всегда отрицательна, что нам и требуется.

2.  $\psi_1 = -1$ . В этом случае, аналогично, имеем  $u_2 = k_1$  и  $x_1(t) = k_1 t$ . Чтобы выполнялось условие трансверсальности (11), необходимо, чтобы  $k_1 T = x_1(T) = L - \varepsilon$ . Тем самым, в этом случае  $u^* \equiv (0, k_1)^T$  будет претендентом на оптимальное управление, если и только если выполнены следующие условия на параметры задачи:

$$S = \varepsilon,$$

$$k_1 T = L - \varepsilon.$$

В данном случае выберем

$$\psi_2^0 = \frac{2e^{-k_1 T} - 1}{k_1} < 0.$$

Из (СС) и теоремы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= \frac{2e^{-k_1 T} - 1}{k_1} e^{k_1 t} + \int_0^t e^{k_1(t-s)} ds = \frac{2e^{-k_1 T} - 1}{k_1} e^{k_1 t} + \frac{e^{k_1 t} - 1}{k_1} = \\ &= e^{k_1 t} \left( \frac{2e^{-k_1 T} - 1}{k_1} + \frac{1}{k_1} \right) - \frac{1}{k_1} = \frac{2e^{k_1(t-T)} - 1}{k_1}. \end{aligned}$$

Эта функция всюду на  $t \in [0, T]$  отрицательна, так как она монотонно возрастает, а

$$\psi_2(T) = \frac{2 - 1}{k_1} = \frac{1}{k_1} < 0.$$

3.  $\psi_1 = 0$ . Согласно введённой нормировке,  $\psi_2^0 = -1$ . Из (СС) получаем, что

$$\psi_2(t) = -e^{\int_0^t u_2(s) ds},$$

откуда следует, что  $\psi_2 < 0$  всюду на  $t \in [0, T]$  (что нас устраивает).

Очевидно, что данный сценарий возможен только в том случае, когда

$$T \geq \max \left( \frac{L + \varepsilon}{k_1}, \frac{L - \varepsilon}{k_2} \right).$$

Так как нам нужно найти лишь одно оптимальное управление (а в данном сценарии их будет континуум), то возьмём самое простое:

$$u_2 \equiv \begin{cases} k_1, & L - \varepsilon \leq k_1 T \leq L + \varepsilon; \\ \frac{L}{T}, & \begin{cases} k_1 T < L - \varepsilon, \\ k_2 T > L + \varepsilon; \end{cases} \\ k_2, & L - \varepsilon \leq k_2 T \leq L + \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$x_1(T) = u_2 T = \begin{cases} k_1 T, & L - \varepsilon \leq k_1 T \leq L + \varepsilon; \\ L, & \begin{cases} k_1 T < L - \varepsilon, \\ k_2 T > L + \varepsilon; \end{cases} \\ k_2 T, & L - \varepsilon \leq k_2 T \leq L + \varepsilon. \end{cases}$$

Видно, что во всех случаях  $L - \varepsilon \leq x_1(T) \leq L + \varepsilon$ . Осталось показать, что  $\frac{L}{T} \in [k_1, k_2]$  (то есть  $L \in [k_1 T, k_2 T]$ ) при справедливости системы

$$\begin{cases} k_1 T < L - \varepsilon, \\ k_2 T > L + \varepsilon. \end{cases}$$

Но из этой системы следует, что

$$L \in (k_1 T + \varepsilon, k_2 T - \varepsilon) \subset [k_1 T, k_2 T],$$

что и требовалось доказать. Отметим, что этот случай может и не реализоваться при слишком больших  $\varepsilon$ . Обратим внимание, что всё вышеперечисленное в этом пункте справедливо только при выполнении условия  $S = \varepsilon$ . Обратим внимание, что этот случай включает в себя два предыдущих (с точки зрения поведения траектории системы).

Итак, мы получили все условия того, чтобы в аномальном случае существовал претендент на оптимальное управление. Функционал в данном случае будет равняться нулю. Тем самым, аномальный случай полностью рассмотрен. Как мы выясним в дальнейшем, аномальный случай полностью замещается нормальным (в смысле поведения траекторий), в котором будут более слабые условия на параметры задачи.

### 3.1.2 Нормальный случай

В этом случае  $\psi_0 = -1$ , и слагаемое (13) приобретает вид  $-\alpha u_1 - u_1^2 + \psi_2 u_1$  — это парабола, ветви которой направлены вниз, а значит, её максимум достигается в её вершине

$$u_1^v = -\frac{\psi_2 - \alpha}{-2} = \frac{\psi_2 - \alpha}{2}.$$

Если она больше нуля, то максимум будет достигаться именно в ней, в противном случае точкой максимума будет являться нуль. Получаем, что

$$u_1^* = \begin{cases} 0, & \psi_2 \leq \alpha, \\ \frac{\psi_2 - \alpha}{2}, & \psi_2 > \alpha. \end{cases} \quad (24)$$

Выясним, при каких условиях возникает особый режим (то есть ситуация, при которой оптимальное управление не определяется однозначно), в котором мы остаёмся на протяжении отрезка положительной длины. В нашем случае особый режим возникает только в ситуации, когда  $\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0$ , то есть когда

$$x_2 = -\frac{\psi_1}{\psi_2}. \quad (25)$$

Аналогично аномальному случаю доказывается, что  $\psi_2$  может равняться нулю на некотором отрезке только в случае, когда  $\psi_1 = 0$ . Поэтому для  $\psi_1 \neq 0$  формула (25) почти всюду определена корректно, и  $x_2$  в этом случае не может равняться нулю. Остаться в особом режиме мы можем только в том случае, если производная выписанного выражения тоже равна нулю. Вычислим, когда это происходит (учитывая, что  $\psi_1 \equiv \text{const}$ ):

$$\frac{d}{dt}(\psi_1 + \psi_2 x_2) = \dot{\psi}_2 x_2 + \psi_2 \dot{x}_2 = (-\psi_1 - \psi_2 u_2) x_2 + \psi_2 (u_1 + u_2 \psi_2) = -\psi_1 x_2 + \psi_2 u_1 = 0,$$

тогда (учитывая, что условие возникновения особого режима выполнено и  $x_2 \neq 0$ )

$$\psi_1 = \frac{\psi_2 u_1}{x_2} = \left\{ x_2 = -\frac{\psi_1}{\psi_2} \right\} = -\frac{(\psi_2)^2 u_1}{\psi_1},$$

следовательно, получаем, что

$$(\psi_1)^2 = -(\psi_2)^2 u_1. \quad (26)$$

Принимая во внимание неотрицательность  $u_1$ , делаем вывод, что оставаться в особом режиме мы можем только в том случае, когда  $u_1 \equiv 0$  (то есть когда  $\psi_2 \leq \alpha$ ), а  $\psi_1 = 0$ . Обратим внимание, что в случае  $\psi_1 = 0$  из формулы (25) получаем, что  $x_2 = 0$ , поэтому особый режим может возникать и продолжаться и при невыполнении условия  $\psi_2 \leq \alpha$ . Во всех остальных случаях если мы и попадаем в особый режим, то в тот же момент мы из него и выходим (с возможным переключением оптимального управления, то есть сменой его значения).

Рассмотрим возможные значения постоянной переменной  $\psi_1$ .

1.  $\psi_1 = 0$ . Как мы выяснили, в этом случае нахождение в особом режиме на протяжении отрезка положительной длины возможно. Из (СС) следует, что функция  $\psi_2(t)$  в любой момент времени  $t \in [0, T]$ , согласно теореме 2, выражается формулой

$$\psi_2(t) = e^{-\int_0^t u_2(s) ds} \psi_2^0. \quad (27)$$

Рассмотрим теперь возможные значения  $\psi_2^0$ .

- (a)  $\psi_2^0 = 0$ . Из формулы (27) следует, что  $\psi_2 \equiv 0$  всюду на  $t \in [0, T]$ . Тогда, очевидно,  $u_1 \equiv 0$  всюду на  $t \in [0, T]$  в силу того, что  $\alpha > 0$ . Следовательно, аналогично аномальному случаю, получаем, что  $x_2 \equiv 0$  на  $t \in [0, T]$ . Обратим внимание, что в этом случае условия трансверсальности (11)–(12) никакой полезной информации не несут (и никаких дополнительных ограничений на параметры не налагают). Очевидно, что этот случай имеет решение только при выполнении условия  $|S| \leq \varepsilon$ . По управлению  $u_2$  возникает особый режим (из которого мы не выходим на протяжении всего отрезка  $[0, T]$ ), который, аналогично аномальному случаю, разрешается следующим образом:

$$u_2 \equiv \begin{cases} k_1, & L - \varepsilon \leq k_1 T \leq L + \varepsilon; \\ \frac{L}{T}, & \begin{cases} k_1 T < L - \varepsilon, \\ k_2 T > L + \varepsilon; \end{cases} \\ k_2, & L - \varepsilon \leq k_2 T \leq L + \varepsilon. \end{cases}$$

Условия на возможность такого сценария те же:

$$T \geq \max \left( \frac{L + \varepsilon}{k_1}, \frac{L - \varepsilon}{k_2} \right).$$

Доказательство того, что  $u_2$  определена корректно, аналогично тому, которое приводилось в пункте, посвящённом аномальному случаю. Таким образом, мы получаем, что данный подслучай полностью покрывает собой аномальный случай. Итак, случай  $\psi_2^0 = 0$  полностью рассмотрен.

- (b)  $\psi_2^0 < 0$ . Из формулы (27) получаем, что  $\psi_2(t) < 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . Таким образом, опять получаем, что  $u_1 \equiv 0$  и  $x_2 \equiv 0$ . В этом случае однозначно определяется  $x_2(T) = S + \varepsilon$ . Так как в случае  $\psi_2^0 = 0$  все условия были такими же, а управление  $u_2$  выбиралось любым из отрезка  $[k_1, k_2]$  (точнее говоря, любой функцией, принимающей значения в этом отрезке), то получаем, что этот случай полностью покрывается предыдущим и самостоятельного интереса не представляет.
- (c)  $\psi_2^0 > 0$ . Из формулы (27) получаем, что  $\psi_2(t) > 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . Тогда переключение управления  $u_2$  возможно только в том случае, когда  $x_2 = 0$ , а из условий трансверсальности (12) следует, что  $x_2(T) = S - \varepsilon$ . Общая формула для  $x_2(t)$  имеет вид

$$x_2(t) = \int_0^t e^{\int_\tau^t u_2(s) ds} u_1(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Из формулы (28) следует, что  $x_2 \geq 0$ , причём  $x_2(t) = 0$  только для тех  $t \in [0, \tau]$ , при которых  $u_1(t) = 0$  (в силу неотрицательности  $u_1$ ), то есть при которых  $\psi_2(t) \leq \alpha$ . В связи с этим резонно рассмотреть два случая по  $\psi_2$ .

- i.  $\psi_2(t) > \alpha$  для  $t \in (0, \tau)$  (при этом  $\psi_2^0 \geq \alpha$ ,  $\psi_2(\tau) = \alpha$ ). Тогда

$$u_1(t) = \frac{\psi_2(t) - \alpha}{2} > 0, \quad (29)$$

и из формулы (28) получаем, что  $x_2(t) > 0$  для всех  $t \in (0, T]$ . Тем самым, видно, что

$$\psi_1 + \psi_2(t)x_2(t) = \psi_2(t)x_2(t) > 0$$

на  $t \in (0, T]$  и  $u_2 \equiv k_2$  на всём отрезке  $t \in [0, T]$ . Тогда из формулы (27) получаем, что

$$\psi_2(t) = e^{-k_2 t} \psi_2^0. \quad (30)$$

Эта функция убывает по  $t$ , поэтому для  $t > \tau$   $\psi_2(t) < \alpha$ , а  $u_1(t) = 0$ .

Если  $\tau \geq T$ , то переключения по  $u_1$  не произойдет, и формула (29) справедлива для всех  $t \in [0, T]$ . Тогда из формулы (30) получаем, что

$$u_1(t) = \frac{e^{-k_2 t} \psi_2^0 - \alpha}{2},$$

а для  $x_2(t)$  справедлива следующая формула:

$$x_2(t) = \int_0^t e^{k_2(t-\tau)} \frac{e^{-k_2 \tau} \psi_2^0 - \alpha}{2} d\tau = \frac{\psi_2^0}{4k_2} (e^{k_2 t} - e^{-k_2 t}) - \frac{\alpha}{2k_2} (e^{k_2 t} - 1).$$

Из условия  $x_2(T) = S - \varepsilon$  следует, что

$$\psi_2^0 = \frac{2e^{k_2 T}}{e^{2k_2 T} - 1} (\alpha (1 - e^{k_2 T}) - 2k_2 (S - \varepsilon)).$$

Тогда

$$x_2(t) = \frac{e^{k_2 T} (\alpha (1 - e^{k_2 T}) - 2k_2 (S - \varepsilon))}{2k_2 (e^{2k_2 T} - 1)} (e^{k_2 t} - e^{-k_2 t}) - \frac{\alpha}{2k_2} (e^{k_2 t} - 1).$$

Формулу для  $x_1(t)$  выписывать не будем в силу её громоздкости. В программе она задаётся через символьное выражение

$$x_1(t) = \int_0^t (x_2(\tau) + k_2) d\tau.$$

Далее необходимо проверить, что  $|L - x_1(T)| \leq \varepsilon$  и  $\psi_2^0 \geq \alpha$ . Если это так, то пару  $(u_1(t), u_2(t))$  включаем в список претендентов на оптимальное управление.

Пусть теперь  $\tau < T$ . Имеем

$$\psi_2^0 = \alpha e^{k_2 \tau}.$$

Очевидно, что формула для  $x_2$  при  $t \geq \tau$  примет вид (то есть в этом случае  $x_2$  не зависит от  $t$ ):

$$x_2(t) = \frac{\alpha}{4k_2} (e^{2k_2 \tau} - 2e^{k_2 \tau} + 1) = \frac{\alpha}{4k_2} (e^{k_2 \tau} - 1)^2.$$

Очевидно,  $\tau$  надо выбирать таким, чтобы выполнялось условие

$$x_2(T) = x_2(\tau) = \frac{\alpha}{4k_2} (e^{k_2 \tau} - 1)^2 = S - \varepsilon,$$

но тогда

$$\tau = \frac{\ln \left( 1 + 2\sqrt{\frac{(S - \varepsilon)k_2}{\alpha}} \right)}{k_2}.$$

Здесь обязательно  $S - \varepsilon > 0$ .

Формулу для  $x_1(t)$  опять приводить не будем (аналитическое выражение найдено). В программе требуется лишь проверить условие  $|L - x_1(T)| \leq \varepsilon$ .

- ii.  $\psi_2(t) \leq \alpha$  для всех  $t \in [0, \tau]$ . Случай  $\tau \geq T$ , по существу, разобран ранее (он аналогичен случаю, когда  $\psi_2^0 < 0$ ). Поэтому далее считаем, что  $\tau < T$ . Покажем, что такой случай невозможен. Очевидно, что для  $t \in [0, \tau]$   $u_1(t) = 0$ , но тогда  $x_2(t) = 0$  и по управлению  $u_2$  возникает особый режим. Из формулы (27) следует, что

$$\int_0^t u_2(s) ds < 0,$$

и  $\psi_2(t) > \alpha$  для  $t \in (\tau, \tau + \delta)$ . Но как только  $\psi_2(t) > \alpha$ , то  $u_2 = k_2$ , и  $\psi_2$  начинает сразу же убывать, что противоречит тому, что  $\psi_2(t) > \alpha$  на интервале ненулевой длины. Поэтому если  $\psi_2^0 \geq \alpha$ , то  $\psi_2(t) \geq \alpha$  для всех  $t \in [0, T]$ , что противоречит нашему предположению о том, что  $\tau < T$ .

Ситуация  $\psi_2^0 > 0$  изучена.

Итак, случай  $\psi_1 = 0$  полностью рассмотрен. Обратим внимание, что при  $\psi_1 \neq 0$  мы можем разрешить условие  $\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0$  относительно  $\psi_2$  или  $x_2$ :

$$\psi_2 = -\frac{\psi_1}{x_2}.$$

При фиксированном  $\psi_1 \neq 0$  данное уравнение задаёт гиперболу. Заметим, что в этом случае нахождение в особом режиме на протяжении отрезка положительной длины невозможно. Прежде чем рассмотреть оставшиеся случаи по  $\psi_1$ , изучим следующие четыре системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= \frac{\psi_2 - \alpha}{2} + k_2 x_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - \psi_2 k_2; \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= k_2 x_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - \psi_2 k_2; \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= \frac{\psi_2 - \alpha}{2} + k_1 x_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - \psi_2 k_1; \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= k_1 x_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - \psi_2 k_1; \end{cases} \quad (34)$$

- Система (31):

$$\dot{x}_2 \geq 0 \iff x_2 \geq \frac{\alpha - \psi_2}{2k_2},$$

$$\dot{\psi}_2 \geq 0 \iff \psi_2 \leq -\frac{\psi_1}{k_2}.$$

- Система (32):

$$\dot{x}_2 \geq 0 \iff x_2 \geq 0,$$

$$\dot{\psi}_2 \geq 0 \iff \psi_2 \leq -\frac{\psi_1}{k_2}.$$

- Система (33):

$$\dot{x}_2 \geq 0 \iff x_2 \leq \frac{\alpha - \psi_2}{2k_1},$$

$$\dot{\psi}_2 \geq 0 \iff \psi_2 \geq -\frac{\psi_1}{k_1}.$$

- Система (34):

$$\dot{x}_2 \geq 0 \iff x_2 \leq 0,$$

$$\dot{\psi}_2 \geq 0 \iff \psi_2 \geq -\frac{\psi_1}{k_1}.$$

Будем строить так называемые вектограммы (то есть картины убывания и возрастания функций  $x_2(t)$  и  $\psi_2(t)$ ) на плоскости  $Ox_2\psi_2$ ). Заметим, что система (31) соответствует случаю, когда

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ \psi_2 - \alpha > 0; \end{cases} \quad (35)$$

система (32) — когда

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \\ \psi_2 - \alpha < 0; \end{cases} \quad (36)$$

система (33) — когда

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0, \\ \psi_2 - \alpha > 0; \end{cases} \quad (37)$$

а система (34) — когда

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 x_2 < 0, \\ \psi_2 - \alpha < 0. \end{cases} \quad (38)$$

Выпишем формулу для  $\psi_2(t)$ :

$$\psi_2(t) = e^{-\int_0^t u_2(s) ds} \psi_2^0 - \psi_1 \int_0^t e^{-\int_\tau^t u_2(s) ds} d\tau. \quad (39)$$

Покажем, что прямая

$$x_2 = \frac{\alpha - \psi_2}{2k_2}$$

в действительности не влияет на знак производных  $x_2$  и  $\psi_2$ . Мы исходим из того, что  $x_2(t)$  всегда неотрицательно (это следует из формулы (28), которая справедлива и в этом случае, и неотрицательности  $u_1$ ). Отметим, что эта прямая при неотрицательных  $x_2$  проходит под прямой  $\psi_2 \equiv \alpha$ . Тогда всюду на множестве (35) производная  $x_2$  будет положительна, а на множестве (36) она будет положительна в силу положительности  $x_2$  (и то, пересекает ли данная прямая гиперболу, не повлияет на знак производной  $x_2$  в этой области). В связи с этим рассматривать отдельно случаи пересечения и непересечения данной прямой и гиперболы не нужно.

Рассмотрим оставшиеся случаи по  $\psi_1$ .



2.  $\psi_1 < 0$ .

В данном случае можно сказать, что прямая

$$\psi_2 \equiv -\frac{\psi_1}{k_1}$$

влияет на движение траектории только в начальный отрезок времени, и то только в том случае, когда  $\psi_2^0 < 0$ . При этом если

$$\psi_2^0 \leq -\frac{\psi_1}{k_1},$$

то  $\psi_2(t)$  будет только убывать (это следует из условия на производную  $\psi_2$  в случае (38)), при этом  $u_1$  есть тождественный нуль, и мы не сдвинемся из  $x_2 = 0$ , а данный случай уже был разобран ранее. Поэтому далее предполагаем, что

$$\psi_2^0 > -\frac{\psi_1}{k_1}.$$

Прямая

$$\psi_2 \equiv -\frac{\psi_1}{k_2},$$

как мы убедимся, может влиять только на максимальное количество переключений.

Построим вектограммы для двух случаев:

$$-\frac{\psi_1}{k_2} \leq \alpha,$$

и

$$-\frac{\psi_1}{k_2} > \alpha.$$

Они изображены на рисунках 1 и 2. Из них видно, что в первом случае переключений может быть не больше трех, а во втором случае — не больше двух (причём известно, с чего на что переключаемся). Более того, так как

$$\psi_2(T) > 0,$$

то из условий трансверсальности (11)–(12) (при том, что  $\psi_1 < 0$ ) однозначно определяется конечная точка:

$$x(T) = (x_1(T), x_2(T)) = (L + \varepsilon, S - \varepsilon).$$

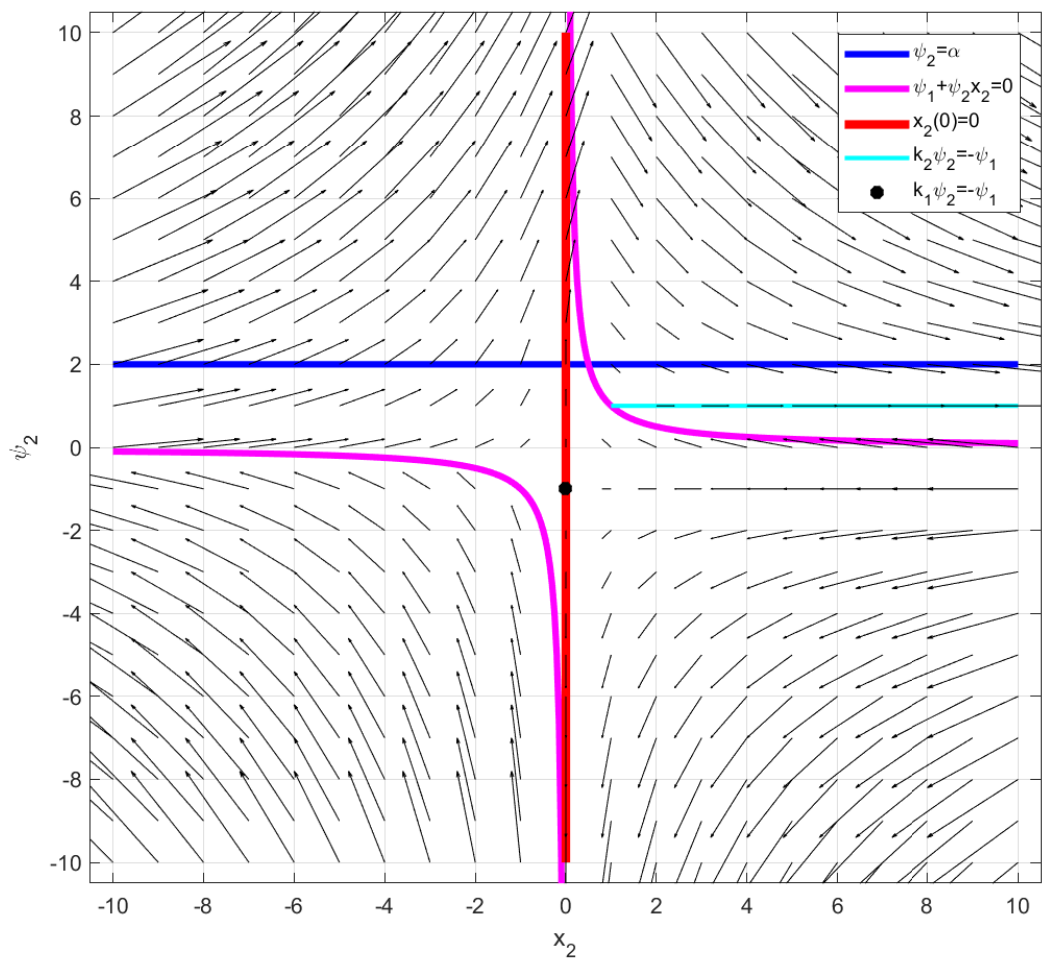


Рис. 1: Вектограмма для случая  $\psi_1 < 0$ ,  $-\frac{\psi_1}{k_2} \leq \alpha$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ .

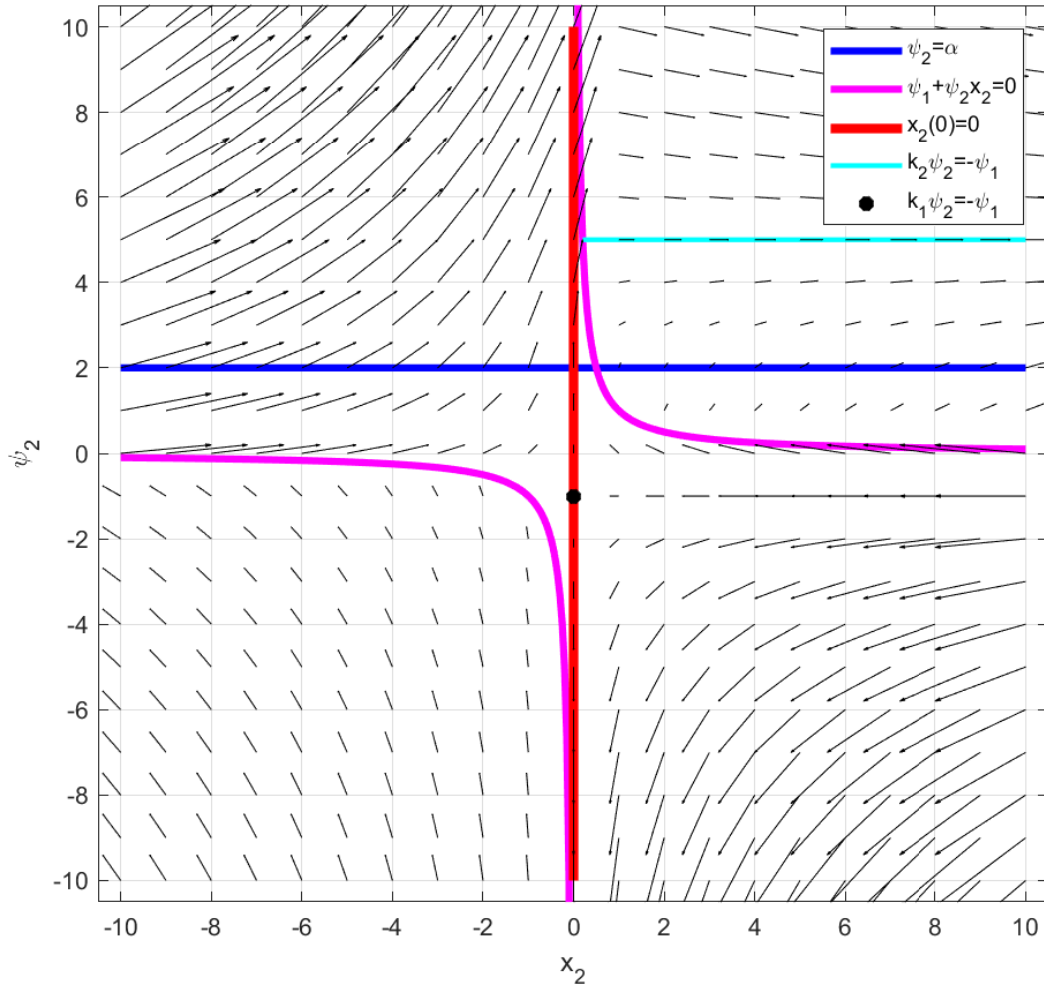


Рис. 2: Вектограмма для случая  $\psi_1 < 0$ ,  $-\frac{\psi_1}{k_2} > \alpha$   $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ .

Рассмотрим два качественно разных случая по  $\psi_2^0$ :

- (а)  $\psi_2^0 < \alpha$ . В силу непрерывности получаем, что  $\psi_2(t) < \alpha$  для всех  $t \in [0, \tau_1)$ . Очевидно, что на этом полуинтервале  $\psi_2(t)$  возрастает (в силу сделанного ранее предположения), так как на этом интервале  $u_2 = k_1$ , а

$$\psi_2(\tau_1) = \alpha.$$

Тогда из формулы (39) следует, что

$$e^{-k_1\tau_1}\psi_2^0 + \frac{\psi_1}{k_1}(e^{-k_1\tau_1} - 1) = \alpha. \quad (40)$$

В этот момент происходит первое переключение управления  $u_1$ . При этом для всех  $t \in [0, \tau_1]$   $x_2(t) = 0$ ,  $x_1(t) = k_1 t$ . Случай  $\tau_1 \geq T$  нас не интересует, так как, по существу, он был уже (неоднократно) разобран ранее. Так как в точке  $\tau_1$  производная  $\psi_2$  должна быть положительна, то получаем, что

$$\alpha \geq -\frac{\psi_1}{k_1}.$$

Тем самым получаем, что при таком сценарии вектограмма, изображённая на рисунке 2, нам не подходит.

Сразу после момента  $t = \tau_1$  мы переходим в область (37), и из вектограмм, изображённых на рисунках 1 и 2, следует, что следующее переключение (если оно происходит), момент наступления которого обозначим через  $\tau_2$ , возникает по управлению  $u_2$ , причем с  $u_2 = k_1$  на  $u_2 = k_2$ .

Для  $t \in (\tau_1, \tau_2)$  справедливы следующие формулы:

$$\psi_2(t) = e^{-k_1(t-\tau_1)}\alpha + \frac{\psi_1}{k_1}(e^{-k_1(t-\tau_1)} - 1); \quad (41)$$

$$x_2(t) = -\frac{e^{-k_1(t-\tau_1)}(e^{k_1(t-\tau_1)} - 1)^2(\psi_1 + \alpha k_1)}{4k_1^2}. \quad (42)$$

Формулу для  $x_1(t)$  выписывать не будем в силу её громоздкости (она найдена аналитически). Второе условие переключения найдём из условия

$$\psi_1 + \psi_2(\tau_2)x_2(\tau_2) = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно  $\psi_1$ , которое мы должны выразить через моменты переключений  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Аналитическое решение этого уравнения найдено, то есть получены два корня, каждый из которых впоследствии в программе проверяется на адекватность (то есть выясняется, удовлетворяет ли найденный корень условию  $\psi_1 < 0$  для каких-либо положительных  $\tau_1$ ) для конкретных значений входных параметров. Затем подходящие корни подставляются в условие (40), и решается уравнение относительно  $\psi_2^0$  (оно линейное, имеет один корень).

Обратим внимание, что возможен случай, когда  $\tau_2 \geq T$ . В этом случае получаем два условия:

$$x_1(T) = L + \varepsilon,$$

$$x_2(T) = S - \varepsilon.$$

Из формулы (42) получаем, что

$$\psi_1 = -\frac{4k_1^2 e^{k_1(T-\tau_1)} \left( S - \varepsilon + \alpha e^{k_1(T-\tau_1)} (e^{k_1(T-\tau_1)} - 1)^2 \right)}{(e^{k_1(T-\tau_1)} - 1)^2}.$$

Формулу для  $\psi_2^0$  не приводим в силу её громоздкости. Далее можно однозначно определить  $\tau_1$  из условия  $x_1(T) = L + \varepsilon$  (безусловно, численно, потому что аналитически данное уравнение неразрешимо). Таким образом, случай  $\tau_2 \geq T$  полностью разобран. Пусть теперь  $\tau_2 < T$ . Мы уже выразили  $\psi_1$  и  $\psi_2^0$  через моменты переключений  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Все следующие моменты переключения (в данном случае их будет не больше одного) тоже будут выражаться через  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Здесь лишь схематично опишем, как их (в данном случае его) искать. Оставшееся возможное переключение — по управлению  $u_1$  (обозначим момент его наступления через  $\tau_3$ ), то есть обратно с

$$u_1 = \frac{\psi_2 - \alpha}{2}$$

на  $u_1 \equiv 0$ . Из формулы (41) находим значение  $\psi_2(\tau_2)$ , тогда можем выписать формулу для  $\psi_2(t)$  для всех  $t \in (\tau_2, \tau_3)$ . То же самое можем проделать для функций  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  (причём именно в такой последовательности). Делается это все численно, чтобы не иметь дело со слишком громоздкими формулами. Снова возможен случай, когда  $\tau_3 \geq T$ , в этом случае производятся аналогичные действия, что и ранее (в случае  $\tau_2 \geq T$ ). В противном случае из условия  $\psi_2(\tau_3) = \alpha$  момент  $\tau_3$  однозначно выражается через  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Далее выписываются формулы для  $x_2(t)$  (которое больше не зависит от  $\psi_2(t)$ ) и  $x_1(t)$  при  $t > \tau_3$ , и проверяются те же два условия:

$$x_1(T) = L + \varepsilon,$$

$$x_2(T) = S - \varepsilon.$$

Из этих условий численно выражаются  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , а через них и всё остальное. Этот подход имеет место в теории, на практике чаще всего делают перебор по первым двум временам переключений ( $\tau_1$  и  $\tau_2$ ). Так как по ним однозначно определяются начальные условия сопряжённых переменных, то мы можем исходную задачу решить напрямую. Далее выбирается сценарий с наименьшим значением функционала. Именно так и происходит в написанной программе. Итак, случай  $\psi_2^0$  полностью рассмотрен.

- (b)  $\psi_2^0 \geq \alpha$ . В этом случае, исходя из вектограмм, изображённых на рисунках 1 и 2, возможно не более двух переключений. Схема рассмотрения этого случая полностью совпадает с предыдущим с точностью до переименования  $\tau_2$  в  $\tau_1$ , а  $\tau_3$  в  $\tau_2$  и выражения всех остальных меняющихся параметров через  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Единственное отличие: в данном случае возможна ситуация, когда

$$\alpha < -\frac{\psi_1}{k_1},$$

в которой возможно максимум одно переключение. Также в этом случае возможны ситуации, когда  $\tau_1 \geq T$  или  $\tau_2 \geq T$ , они в программе рассматриваются отдельно. Итак, данный случай тоже рассмотрен.

Остался последний случай по  $\psi_1$ .

3.  $\psi_1 > 0$ . В этом случае прямая

$$\psi_2 = -\frac{\psi_1}{k_1}$$

ни на что существенно не влияет (в силу неотрицательности  $x_2(t)$ ), а подслучай

$$\psi_2^0 \leq \alpha$$

интереса не представляет (так как в этой ситуации, в силу убывания  $\psi_2(t)$  до прямой

$$\psi_2 = -\frac{\psi_1}{k_2},$$

управление  $u_1 \equiv 0$ , и траектория не сдвинется с прямой  $x_2 = 0$ , а эта ситуация была уже неоднократно рассмотрена ранее). Поэтому пусть  $\psi_2^0 > \alpha$ .

Построим вектограмму для рассматриваемого случая.

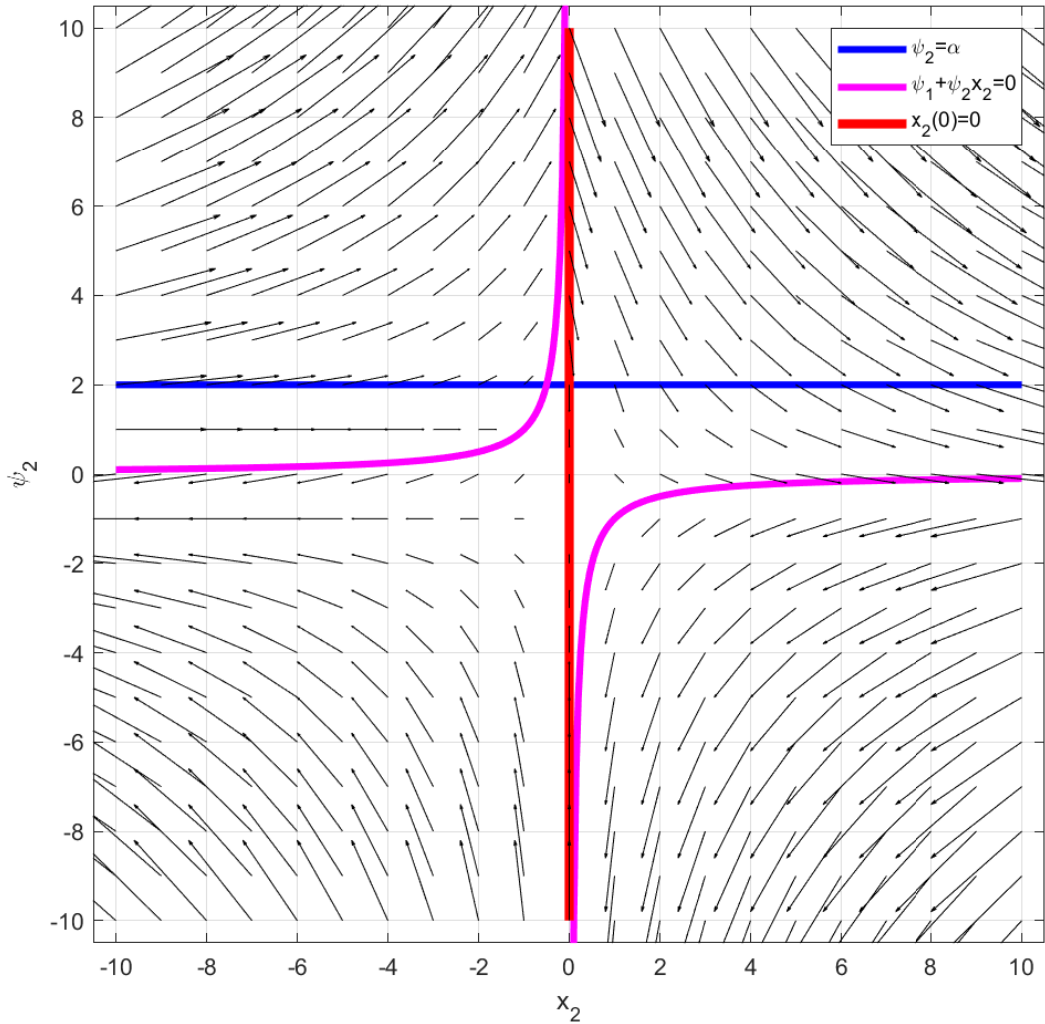


Рис. 3: Вектограмма для случая  $\psi_1 > 0$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ .

Как мы видим, в этом случае возможно не более двух переключений. Первое — по управлению  $u_1$  с

$$u_1 = \frac{\psi_2^0 - \alpha}{2}$$

на  $u_1 \equiv 0$ , второе — по управлению  $u_2$  с  $u_2 \equiv k_2$  на  $u_2 \equiv k_1$ . Обозначив эти моменты за  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно, мы можем, аналогично случаю  $\psi_1 < 0$ , выразить параметры  $\psi_1$  и  $\psi_2^0$  через это моменты переключений  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Возможны случаи, когда  $\tau_1 \geq T$  или  $\tau_2 \geq T$ , они в программе обрабатываются отдельно. Единственное разительное отличие данного случая от случая  $\psi_1 < 0$  заключается в том, что  $\psi_2(T)$  в нашей ситуации не обязательно положительно. Поэтому в программе рассчитывается фактическое значение  $\psi_2(T)$  и исходя из него строится условие на конечную точку траектории  $x_2(T)$  (учитывая условие трансверсальности (12)).  $x_1(T)$  же в нашей ситуации определено однозначно: из условия трансверсальности (11) следует, что  $x_1(T) = L - \varepsilon$ . Остальные действия аналогичны случаю  $\psi_1 < 0$  (во многом, они проще, чем в предыдущем случае, так как переключений может быть не более двух).

Отметим, что нам нужен перебор по моментам переключений только в том случае, когда условия трансверсальности не однозначно определяют конечную точку. Значение функционала вычисляется численно по известным моментам переключений и функции  $u_1(t)$  (методом Симпсона).

Итак, наша задача при  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$  полностью решена.

## 3.2 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$ (любое $u_1$ )

### 3.2.1 Анормальный случай

В этом случае из условия (7) получаем, что

$$u_1^* = \begin{cases} +\infty, & \psi_2 > 0, \\ (-\infty, +\infty), & \psi_2 = 0, \\ -\infty, & \psi_2 < 0. \end{cases} \quad (43)$$

Здесь мы опять максимизировали слагаемое  $\psi_2 u_1$  (полученное подстановкой  $\psi_0 = 0$  в слагаемое (13)). Докажем, что этот случай решения не имеет. Предположим от противного, что решение существует. Тогда в силу конечности управления (см. замечание 1) получаем, что  $\psi_2 \equiv 0$  всюду на  $t \in [0, T]$ . Подставляя это в (СС), получим, что  $0 = -\psi_1 - 0 \cdot u_2$ , то есть  $\psi_1 = 0$ . В итоге получаем, что  $\psi_0 = 0$ , так как имеем анормальный режим,  $\psi_1 \equiv \psi_2 \equiv 0$  по только что доказанному, но тогда вектор  $\tilde{\psi} = 0$ , что противоречит условию нетривиальности из теоремы 1 (см. утверждение 1). Тем самым, данный случай решения не имеет.

### 3.2.2 Нормальный случай

В данном случае мы опять получаем параболу  $-\alpha u_1 - u_1^2 + \psi_2 u_1$ , но теперь точкой максимума всегда будет являться вершина

$$u_1^v = \frac{\psi_2 - \alpha}{2},$$

так как теперь никаких ограничений на значения  $u_1$  у нас нет.

Итак, справедливо равенство

$$u_1^* = \frac{\psi_2 - \alpha}{2}, \quad (44)$$

которое мы можем подставить в систему (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\psi_2 - \alpha}{2} + u_2 x_2 \end{cases}, t \in [0, T], \quad (45)$$

и теперь будем решать задачу оптимального управления относительно  $u_2$ .

Рассмотрим сначала возможность особого режима на протяжении отрезка положительной длины. Аналогично случаю  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$  получаем, что при  $\psi_1 = 0$  особый режим возможен (его мы рассмотрим отдельно). Если же  $\psi_1 \neq 0$ , то получаем формулу (26), и учитывая формулу (44), в итоге имеем:

$$-\psi_1^2 = \frac{\psi_2 - \alpha}{2} \psi_2^2,$$

или

$$\psi_2^3 - \alpha \psi_2^2 + 2\psi_1^2 = 0. \quad (46)$$

Данное кубическое (относительно  $\psi_2$ ) уравнение имеет по меньшей мере один корень, но сразу можно сделать вывод (в силу непрерывности  $\psi_2$ ), что в особом режиме  $\psi_2 \equiv \text{const} := \psi_2^*$ . Отсюда из формулы (25) следует, что и  $x_2 \equiv \text{const}$ . Также из формулы (44) следует, что  $u_1 \equiv \text{const}$ . Тем самым, получаем, что на плоскости  $Ox_2\psi_2$  во время нахождения системы в особом режиме мы будем оставаться в одной точке. Тогда можем выписать условия на равенство нулю производных:

$$\dot{x}_2 = \frac{\psi_2 - \alpha}{2} + u_2 x_2 = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 - \psi_2 u_2 = 0.$$

Из этого следует, что и

$$u_2 \equiv \text{const} = -\frac{\psi_1}{\psi_2^*}.$$

Очевидно, что мы будем находиться в особом режиме до тех пор, пока  $u_2$  не изменится, причём это может произойти в любой момент (это не противоречит принципу максимума). Поэтому для решения этой задачи мы будем вынуждены для каждого найденного переключения (обозначим для наглядности этот момент через  $\tau$ ) обрабатывать случай, когда мы можем попасть в особый режим, а именно:

- численно рассчитываем значение  $\psi_2(\tau) := \psi_2^*$ ;
- проверяем, удовлетворяет ли найденное значение  $\psi_2^*$  кубическому уравнению (46): если удовлетворяет, то особый режим возможен, иначе выходим из обработки данного переключения;
- проверяем выполнение условия

$$k_1 \leq -\frac{\psi_1}{\psi_2^*} \leq k_2$$

(если условие не выполняется, то выходим из обработки данного переключения);

- строим разбиение отрезка  $[\tau, T]$  и перебираем все возможные моменты выхода из особого режима (при этом меняем управление  $u_2$  либо на  $k_1$ , либо на  $u_2$  в зависимости от того, куда траектория может двигаться дальше).



Отметим, что условие того, что  $\psi_2^*$  удовлетворяет кубическому уравнению (46) не является условием общего положения, поэтому в программе такой случай невозможен (тем не менее, и данный случай обрабатывается корректно).

Как и в первой задаче, рассмотрим возможные случаи по сопряжённой переменной  $\psi_1$ .

1.  $\psi_1 = 0$ . Отметим, что в этом случае особый режим вполне возможен, причём либо в случае  $x_2 = 0$ , либо в случае  $\psi_2 = 0$ . Формула для  $\psi_2(t)$  в данном случае совпадает с формулой (27), поэтому знак  $\psi_2(t)$  определяется знаком  $\psi_2^0$ . Рассмотрим различные варианты по  $\psi_2^0$ .

- (а)  $\psi_2^0 = 0$ . Получаем, что  $\psi_2 \equiv 0$  на  $t \in [0, T]$ . Тем самым, имеем особый режим на всём отрезке  $[0, T]$ . В этой ситуации

$$u_1 \equiv -\frac{\alpha}{2},$$

тогда  $x_2(t)$  вычисляется по формуле

$$x_2(t) = -\frac{\alpha}{2} \int_0^t e^{\int_0^s u_2(s) ds} d\tau,$$

а  $x_1(t)$  — по формуле

$$x_1(t) = \int_0^t (x_2(p) + u_2(p)) dp = \int_0^t \left( -\frac{\alpha}{2} \int_0^p e^{\int_0^s u_2(s) ds} d\tau + u_2(p) \right) dp.$$

Здесь  $u_2(t)$  — любое из отрезка  $[k_1, k_2]$ . Так как мы уже знаем значение функционала

$$J = \int_0^T \left( \alpha \left( -\frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{4} \right) dt = -\frac{\alpha^2}{4} \cdot T < 0,$$

то нам достаточно подобрать такое  $u_2$ , которое переводит материальную точку в целевое множество  $\mathcal{X}_1$ .

Покажем, что, выбрав константное  $u_2$ , мы сможем достичь практически тех же самых результатов (в смысле перевода траектории в целевое множество), что и в случае произвольной функции  $u_2(t)$ , область значения которой (нестрого) вложена в отрезок  $[k_1, k_2]$ . Посчитаем, чему равны  $x_1(T)$  и  $x_2(T)$  при подстановке  $u_2 \equiv k \in [k_1, k_2]$ ,  $k \neq 0$ :

$$x_1(T) = \int_0^T \left( -\frac{\alpha}{2} \int_0^p e^{k(p-\tau)} d\tau + k \right) dp = kT + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{kT - e^{kT} + 1}{k^2} \xrightarrow{k \rightarrow 0} -\frac{\alpha}{2} \cdot T^2$$

$$x_2(T) = -\frac{\alpha}{2} \int_0^T e^{k(T-\tau)} d\tau = -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^{kT} - 1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow 0} -\frac{\alpha}{2} \cdot T.$$

Обозначим первую функцию через  $f(k)$ , а вторую — через  $g(k)$ . Обратим внимание, что функция  $g(k)$  убывает по переменной  $k$ . Исследуем функцию  $f(k)$  на монотонность. Её производная имеет вид:

$$f'(k) = T + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^{kT} - kT e^{kT} - 1}{k^2} \xrightarrow{k \rightarrow 0} T - \frac{\alpha}{4} \cdot T^2.$$

Как мы видим, она не является знакоопределённой (то есть ситуация может меняться в зависимости от значений входных параметров), поэтому придётся вычислять максимальные и минимальные значения функции  $f(k)$  численно.

Принимая во внимание тот факт, что при  $k = 0$  мы получим те же значения  $f(k)$  и  $g(k)$ , что и при переходе к пределу  $k \rightarrow 0$  в выписанных выражениях при  $k \neq 0$ , получаем, что  $f(k)$  и  $g(k)$  всюду на  $k \in [k_1, k_2]$  непрерывны. По критерию непрерывности функции получаем, что они достигают всех своих промежуточных значений. Тогда без особой потери качества решения можем считать, что  $u_2 \equiv k \in [k_1, k_2]$  на  $t \in [0, T]$ . Обозначим

$$F := \{k \in [k_1, k_2] : L - \varepsilon \leq f(k) \leq L + \varepsilon\}.$$

В силу непрерывности  $f(k)$ , множество  $F$  состоит из объединения отрезков. В программе оно строится путём перебора отрезка  $[k_1, k_2]$ .

Так как в выражениях для  $x_1(T)$  и  $x_2(T)$  фигурирует одна и та же переменная  $k$  (которая обязана иметь одно и то же значение в обоих выражениях), то за  $u_2(t) \equiv k$  можно взять любое  $k$ , удовлетворяющее следующему условию (в силу непрерывности функций  $f(k)$ ,  $g(k)$  и монотонности функции  $g(k)$ ):

$$k \in F \cap \{g^{-1}(S + \varepsilon) \leq k \leq g^{-1}(S - \varepsilon)\}.$$

Обратим внимание, что функцию  $g^{-1}(\cdot)$  не удаётся вычислить аналитически. Более того, так как образ функции  $g(k)$  может и не содержать точки  $S - \varepsilon$  и  $S + \varepsilon$ , то обратная функция не будет определена в этих точках. В этом случае, аналогично множеству  $F$ , построим множество  $G$  и будем его аналогично обрабатывать. Итак, случай  $\psi_2^0 = 0$  разобран.

- (b)  $\psi_2^0 < 0$ . Из формулы (27) получаем, что  $\psi_2(t) < 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . Из этого, во-первых, следует, что  $x_2(T) = S + \varepsilon$  (из условия трансверсальности (12)), а во-вторых, из формулы (28) вытекает, что  $x_2(t) < 0$  для всех  $t \in (0, T]$ , и поэтому особого режима не возникает, так как  $\psi_2(t)x_2(t) > 0$  всюду на  $t \in (0, T]$  и однозначно определяется управление  $u_2 \equiv k_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= e^{-k_2 t} \psi_2^0, \\ x_2(t) &= \int_0^t e^{k_2(t-\tau)} \cdot \frac{\psi_2(\tau) - \alpha}{2} d\tau = \frac{\psi_2^0 (e^{k_2 T} - e^{-k_2 T})}{4k_2} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^{k_2 T} - 1}{k_2}. \end{aligned}$$

Из условия  $x_2(T) = S + \varepsilon$  вытекает, что

$$\psi_2^0 = \frac{2e^{k_2 T} (2k_2(S + \varepsilon) + \alpha (e^{k_2 T} - 1))}{e^{2k_2 T} - 1}.$$

Тогда, окончательно,

$$x_2(t) = \frac{e^{k_2 T} (e^{k_2 t} - e^{-k_2 t}) (2k_2(S + \varepsilon) + \alpha (e^{k_2 T} - 1))}{2k_2 (e^{2k_2 T} - 1)} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^{k_2 t} - 1}{2k_2}.$$

Выражение для  $x_1(t)$  выписывать не будем в силу его громоздкости. В программе проверяется, что  $|L - x_1(T)| \leq \varepsilon$ .

- (c)  $\psi_2^0 > 0$ . В этом случае, очевидно,  $\psi_2(t) > 0$  для любого  $t \in [0, T]$ , поэтому из условий трансверсальности (12) следует, что  $x_2(T) = S - \varepsilon$ . Рассмотрим три существенно различных случая расположения  $\psi_2^0$  относительно  $\alpha$ .

- i.  $\psi_2^0 > \alpha$ . Этот случай полностью соответствует случаю  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2^0 > \alpha$  в задаче  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ , поэтому повторно его описывать не будем. Обратим внимание, что здесь уже возможна ситуация со многими переключениями по  $u_2$  (это связано с тем, что при пересечении траекторией прямой  $\psi_2 = \alpha$  наступит момент, когда  $x_1(t)$  начнёт убывать, и тогда она может пересечь нуль, тем самым «переключив» управление  $u_2$ ).
- ii.  $\psi_2^0 < \alpha$ . Этот случай соответствует предыдущему с точностью до замены  $k_1$  на  $k_2$  и слова «возрастает» на слово «убывает».
- iii.  $\psi_2^0 = \alpha$ . Покажем, что в этом случае  $\psi_2(t) = \alpha$  для почти всех  $t \in [0, T]$ . Предположим противное (для определённости будем двигаться по возрастанию): найдутся такие  $\tau$  и  $\delta$ , что  $\psi_2(\tau) = \alpha$ ,  $\psi_2(t) > \alpha$  для  $t \in (\tau, \tau + \delta)$ , причём для этих же  $t$   $\dot{\psi}_2(t) > 0$ . Но как только  $\psi_2$  становится положительным, то  $x_2$  тоже становится положительным, тогда управление  $u_2 = k_2$ , но  $\dot{\psi}_2(t) = -\psi_2 k_2 < 0$ , что противоречит нашему предположению. Аналогично можно показать, что мы не сможем двигаться по убыванию (в этом случае  $u_2 = k_1$  и  $\dot{\psi}_2(t) > 0$ ). Тем самым, получаем, что  $u_1 = 0$  почти всюду на  $t \in [0, T]$ , но тогда и  $x_2(t) \equiv 0$  на  $t \in [0, T]$ . Этот случай полностью аналогичен случаю, когда  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2^0 = 0$  в задаче  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ . Единственное отличие заключается в том, что условие трансверсальности однозначно определяет конечную точку  $x_2(T)$ . В программе проведены соответствующие очевидные корректировки.

Итак, случай  $\psi_2^0 > 0$  полностью рассмотрен.

Ситуация  $\psi_1 = 0$  полностью изучена.

Как и в первой задаче, при  $\psi_1 \neq 0$  уравнение  $\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0$  задаёт гиперболу на плоскости  $Ox_2\psi_2$ . Рассмотрим следующие две системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= \frac{\psi_2 - \alpha}{2} + k_2 x_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - \psi_2 k_2; \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= \frac{\psi_2 - \alpha}{2} + k_1 x_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - \psi_2 k_1; \end{cases} \quad (48)$$

- Система (47):

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 \geq 0 &\iff x_2 \geq \frac{\alpha - \psi_2}{2k_2}, \\ \dot{\psi}_2 \geq 0 &\iff \psi_2 \leq -\frac{\psi_1}{k_2}. \end{aligned}$$

- Система (48):

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 \geq 0 &\iff x_2 \leq \frac{\alpha - \psi_2}{2k_1}, \\ \dot{\psi}_2 \geq 0 &\iff \psi_2 \geq -\frac{\psi_1}{k_1}. \end{aligned}$$

Как и раньше, будем строить вектограммы. Заметим, что система (47) соответствует случаю, когда

$$\psi_1 + \psi_2 x_2 > 0, \quad (49)$$

а система (48) — когда

$$\psi_1 + \psi_2 x_2 < 0. \quad (50)$$

В связи с выписанными выше условиями на неотрицательность производных  $x_2$  и  $\psi_2$ , получаем, что на картину переключений существенно влияют следующие четыре прямые:

$$x_2 = \frac{\alpha - \psi_2}{2k_2}, \quad (51)$$

$$x_2 = \frac{\alpha - \psi_2}{2k_1}, \quad (52)$$

$$\psi_2 = -\frac{\psi_1}{k_2}, \quad (53)$$

$$\psi_2 = -\frac{\psi_1}{k_1}. \quad (54)$$

Итак, приступим к рассмотрению оставшихся случаев по  $\psi_1$ .

2.  $\psi_1 < 0$ . Построим вектограмму для случая, когда прямая (51) пересекает гиперболу

$$\psi_1 + \psi_2 x_2 = 0$$

в двух местах (это наиболее сложный случай).

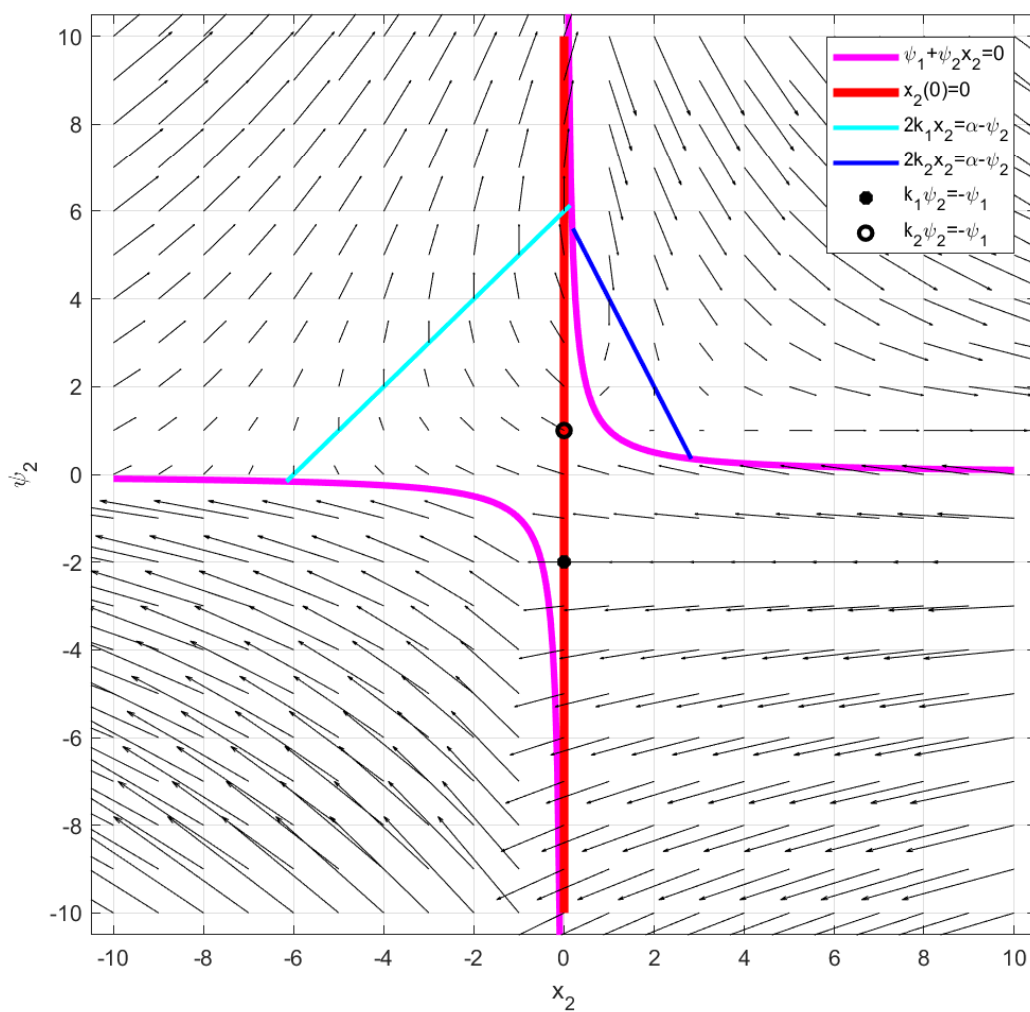


Рис. 4: Вектограмма для случая  $\psi_1 < 0$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

Как мы видим из рисунка 4, в данной ситуации возможен так называемый цикл (то есть замкнутая траектория без самопересечений), который при этом проходит через кривую переключения. Таким образом, мы не сможем заранее понять, сколько переключений совершит траектория. Но это и не нужно, так как по первым двум переключениям однозначно строится траектория системы.

Отметим, что цикл возможен только в вышеописанной ситуации пересечения прямой и гиперболы, что равносильно разрешимости уравнения

$$\psi_2^2 - \alpha\psi_2 - 2\psi_1k_1 = 0,$$

которое имеет корни тогда и только тогда, когда дискриминант

$$D = \alpha^2 + 8\psi_1k_1 \geq 0.$$

Если данное условие не выполняется, то в данном случае возможно не более одного переключения (то есть если мы и попадаем в область (49), то мы из неё выбраться не можем).

Данные ситуации обрабатываются абсолютно аналогично тем, которые были в задаче  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ . Рассмотрим последний вариант значения  $\psi_1$ .

3.  $\psi_1 > 0$ . Построим векторграмму для случая, когда уже прямая (51) пересекает гиперболу

$$\psi_1 + \psi_2x_2 = 0$$

в двух местах (здесь также появляется цикл).

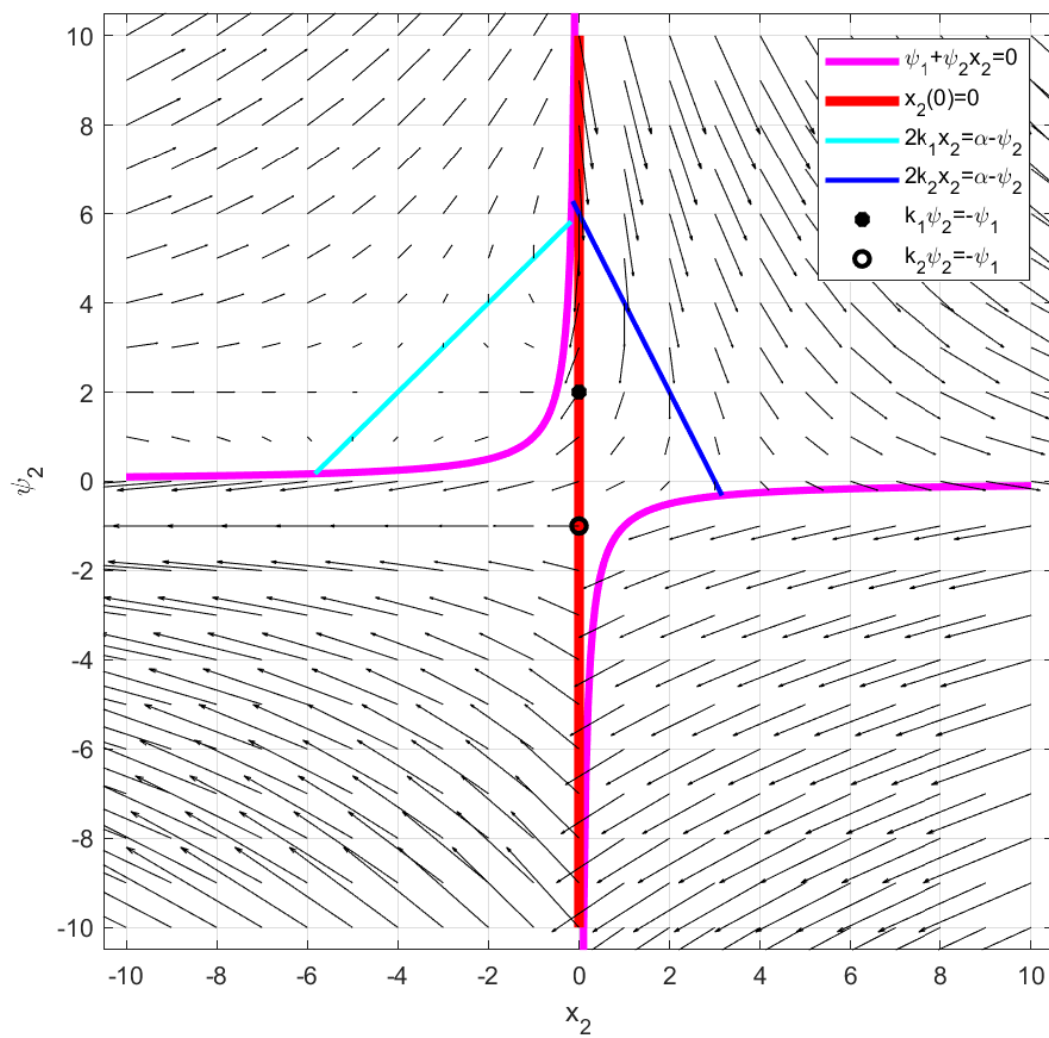


Рис. 5: Вектограмма для случая  $\psi_1 > 0$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

В данной ситуации возможны бесконечное число переключений (цикл), два переключения (либо оба раза пересекается левая ветвь гиперболы, либо оба раза правая) или меньше (закончим движение раньше). Отметим, что если нет вышеупомянутого пересечения прямой и гиперболы, то есть если не выполняется условие

$$D = \alpha^2 + 8\psi_1 k_2 \geq 0,$$

то цикл пропадает, а также пропадает возможность пересекать левую гиперболу два раза.

Обратим внимание, что, в отличие от первой задачи, здесь необходимо учитывать возможность особого режима в любой точке переключения (но при численном решении такой ситуации возникать не будет, потому что, как уже было сказано, условие того, что  $\psi_2(\tau)$  удовлетворяет кубическому уравнению, не есть условие общего положения, так как сколь угодно мало изменив это самое значение  $\psi_2(\tau)$ , мы получим, что оно уже не удовлетворяет этому условию).

Итак, задача  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$  также полностью решена.



## 4 Примеры работы программы

### 4.1 Пример №1

Пусть  $k_1 = -15$ ,  $k_2 = 10$ ,  $\alpha = 8$ ,  $T = 1$ ,  $S = 2$ ,  $L = -10$ ,  $\varepsilon = 4$ . За величину, контролирующую точность вычислений, возьмём  $\delta = 10^{-1}$ . Нетрудно проверить, что выписанные значения параметров позволяют решить первую задачу с оптимальным значением функционала  $J = 0$ . А для вторых ограничений на управление получаем отрицательное значение функционала. Договоримся здесь и далее обозначать через  $J_1$  и  $J_2$  оптимальное значение функционала при первом и втором ограничении на управление соответственно.

Результаты работы программы:

$$J_1 = 0,$$

$$J_2 = -16.$$

Далее представлены графики траектории, управления и сопряжённых переменных.

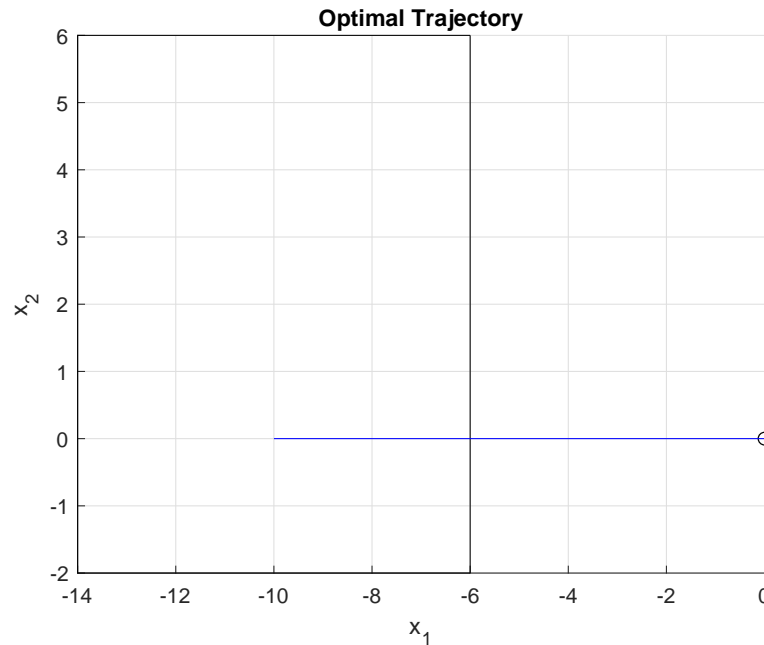


Рис. 6: Оптимальная траектория для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

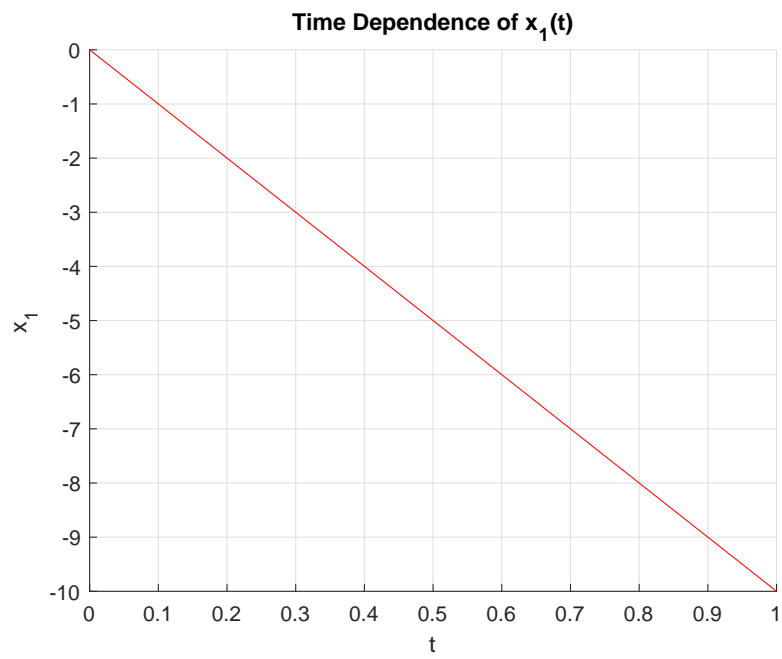


Рис. 7: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

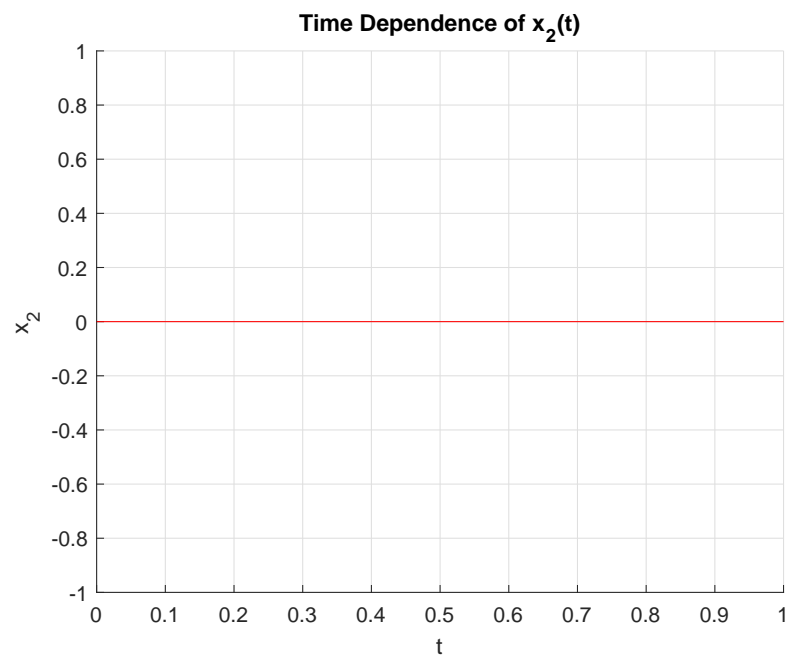


Рис. 8: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

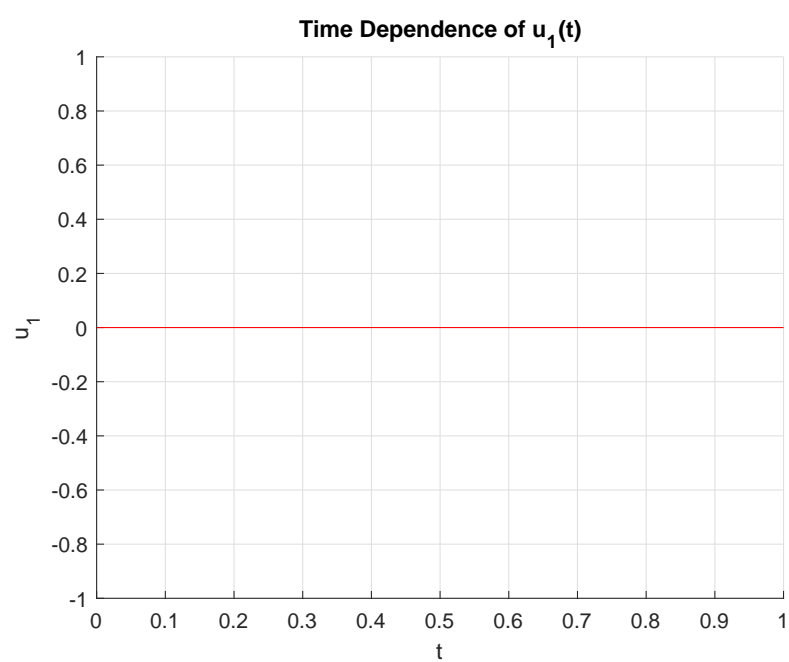


Рис. 9: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

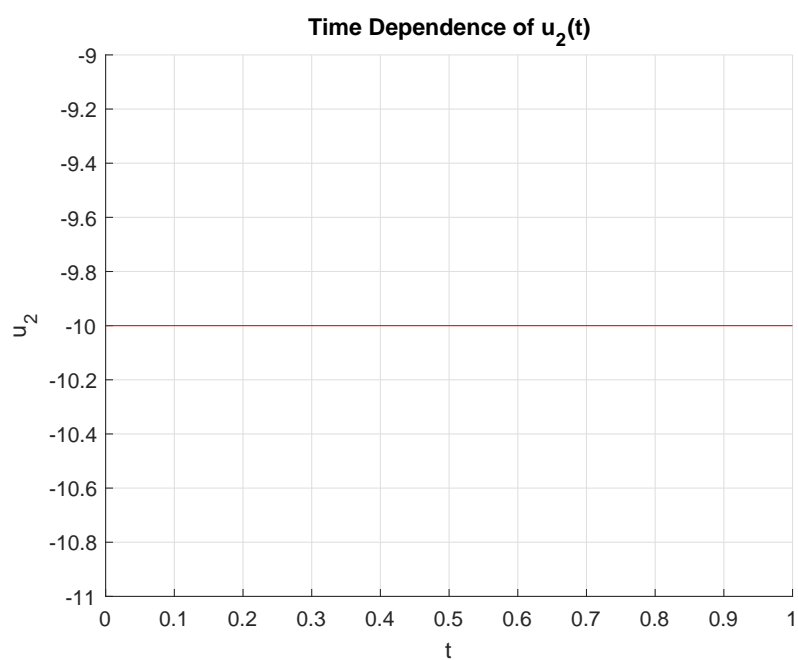


Рис. 10: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

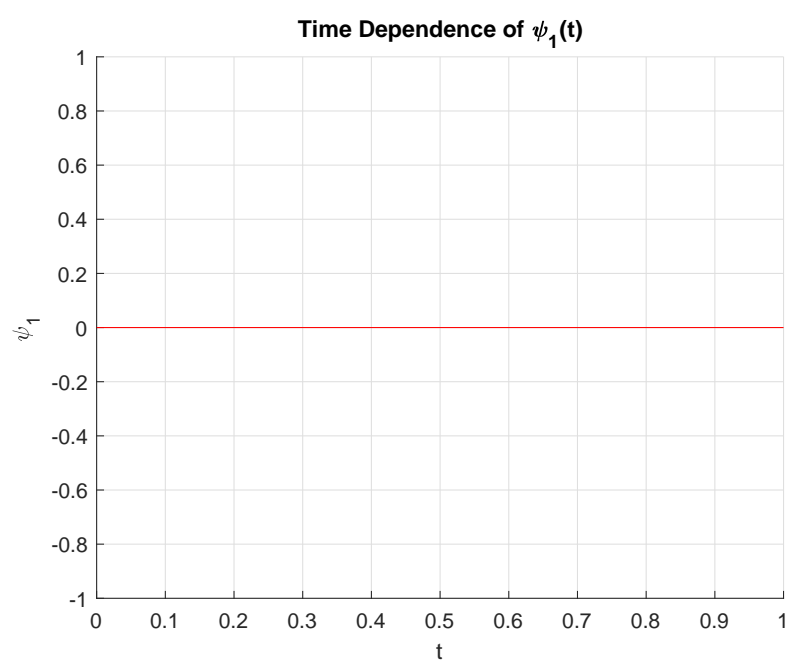


Рис. 11: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

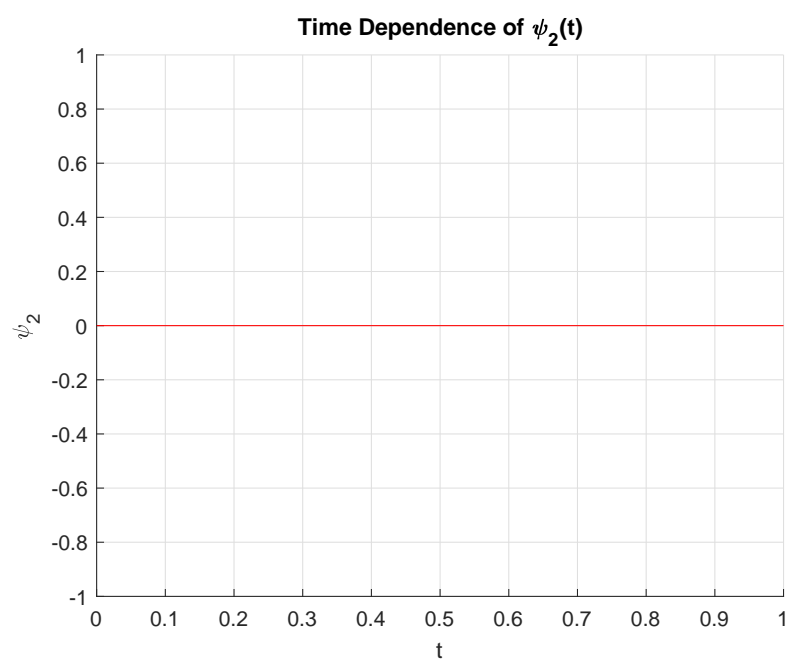


Рис. 12: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

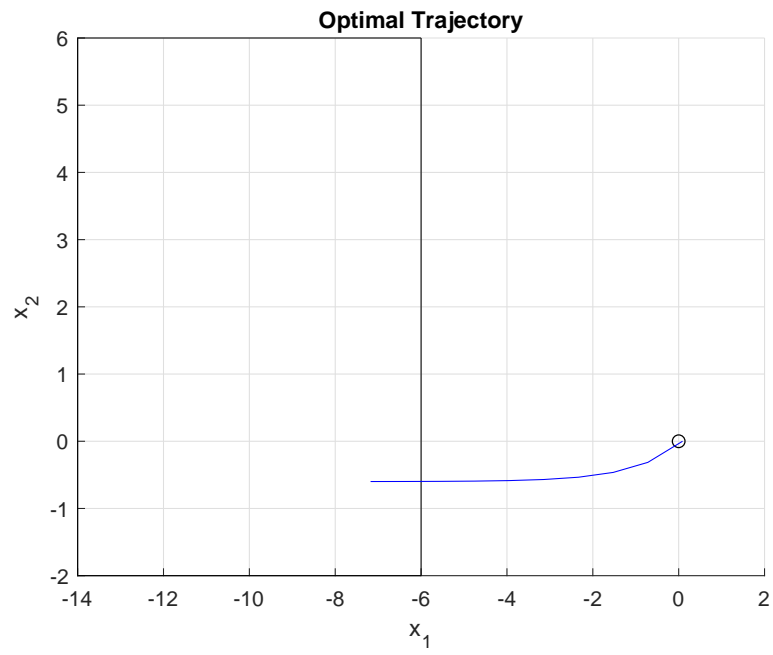


Рис. 13: Оптимальная траектория для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

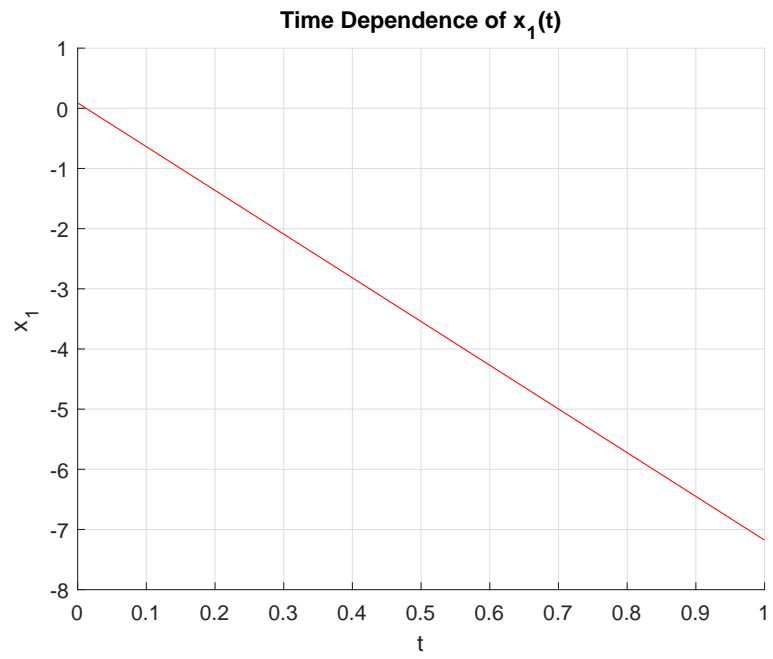


Рис. 14: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

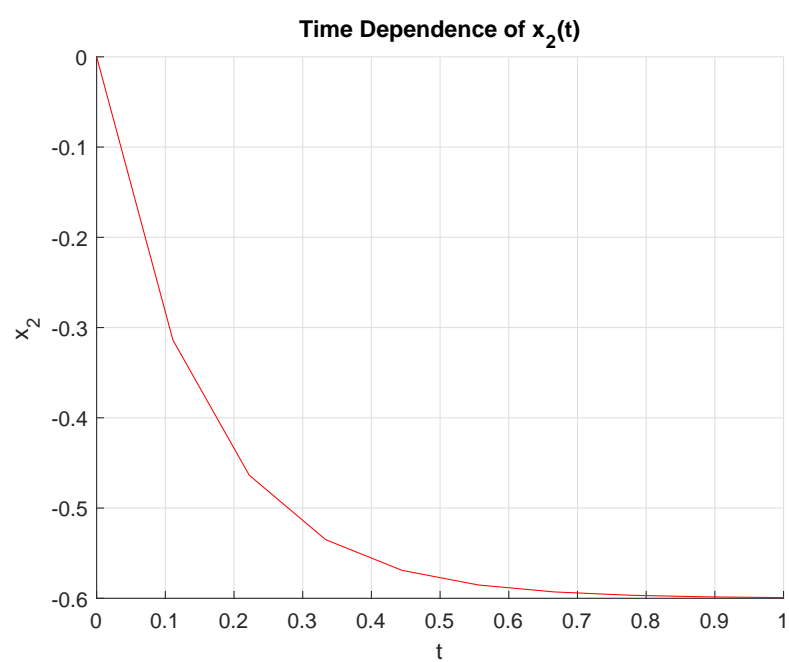


Рис. 15: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

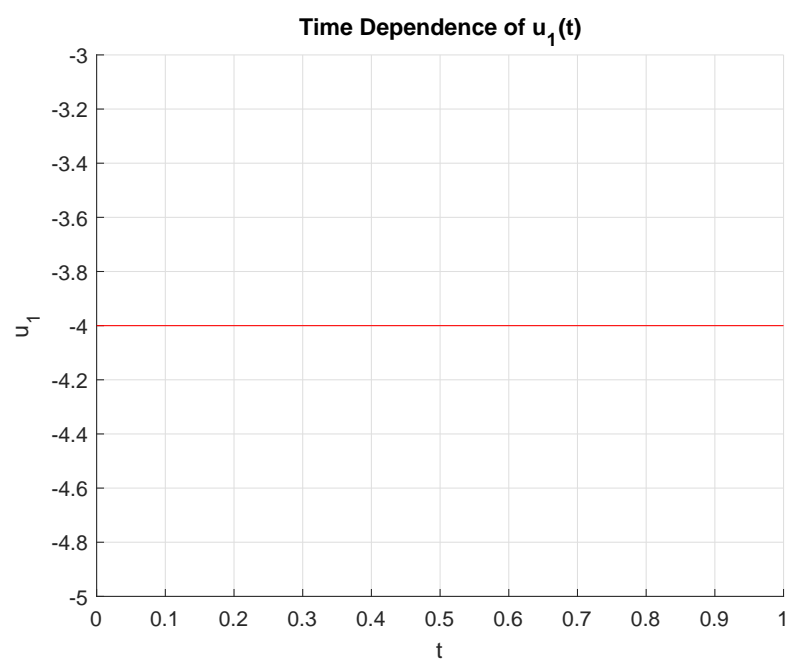


Рис. 16: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

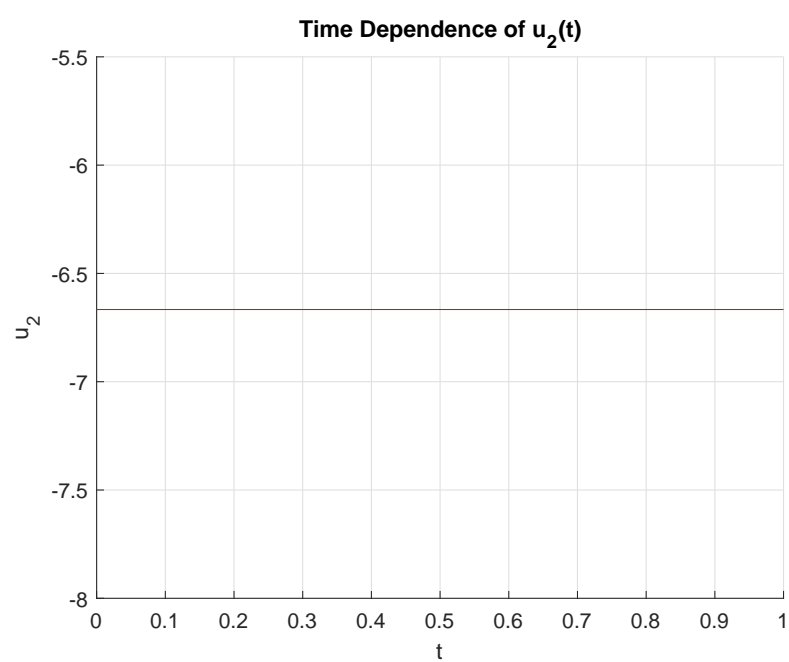


Рис. 17: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

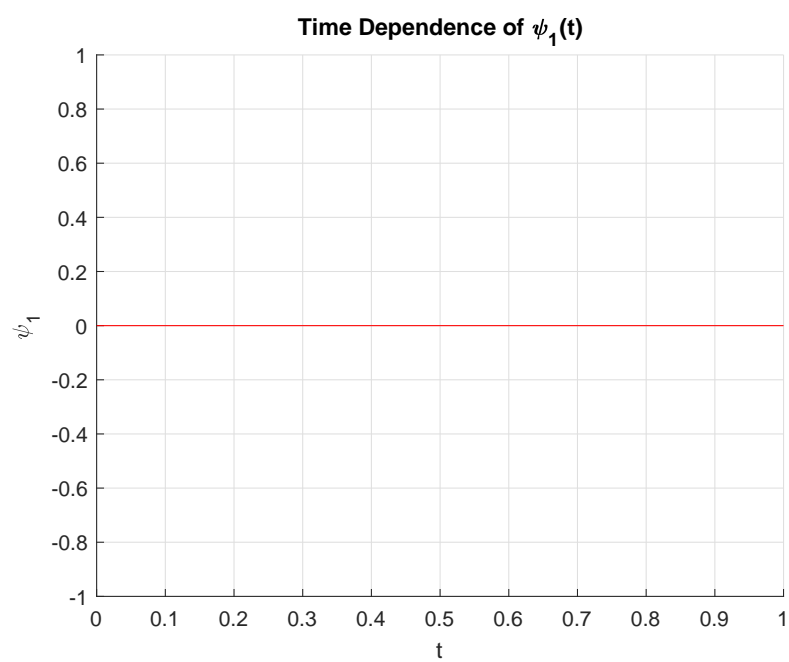


Рис. 18: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

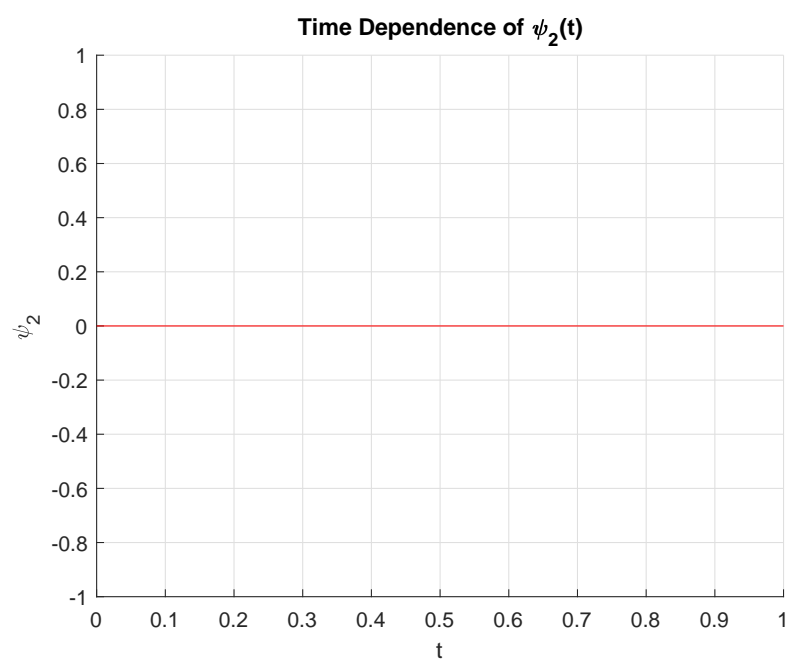


Рис. 19: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №1 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$



## 4.2 Пример №2

Пусть  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $\alpha = 8$ ,  $T = 1$ ,  $S = 5$ ,  $L = 0$ ,  $\varepsilon = 4$ . За величину, контролирующую точность вычислений, возьмём  $\delta = 10^{-1}$ . В данном случае оптимальные значения функционалов в обоих случаях совпадают. И в примере №1, и в примере №2 переключений не было.

Результаты работы программы:

$$J_1 = J_2 = 8.4903.$$

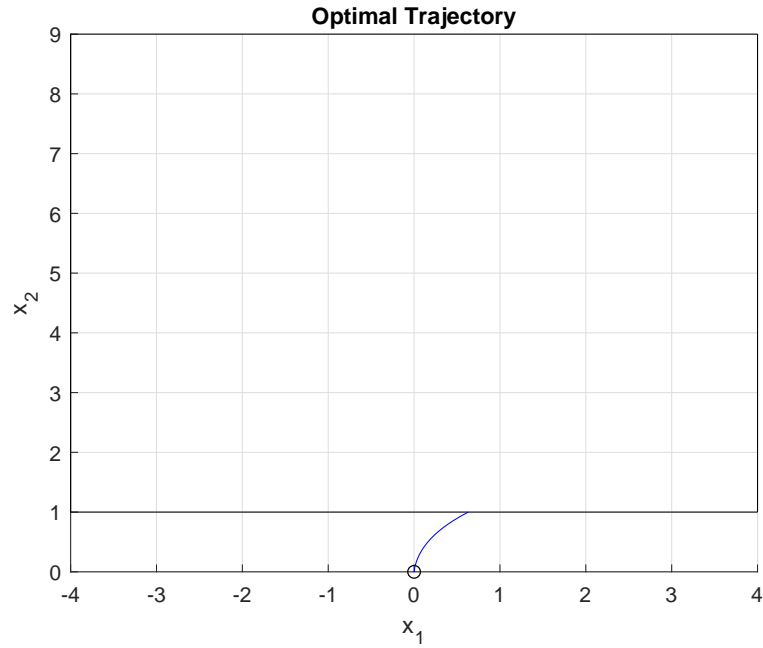


Рис. 20: Оптимальная траектория для примера №2 в обоих случаях

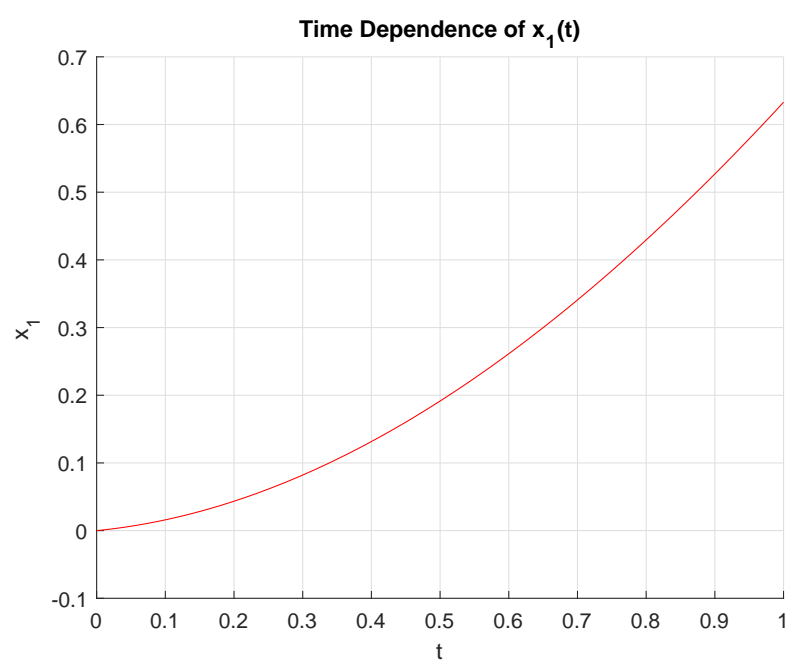


Рис. 21: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №2 в обоих случаях

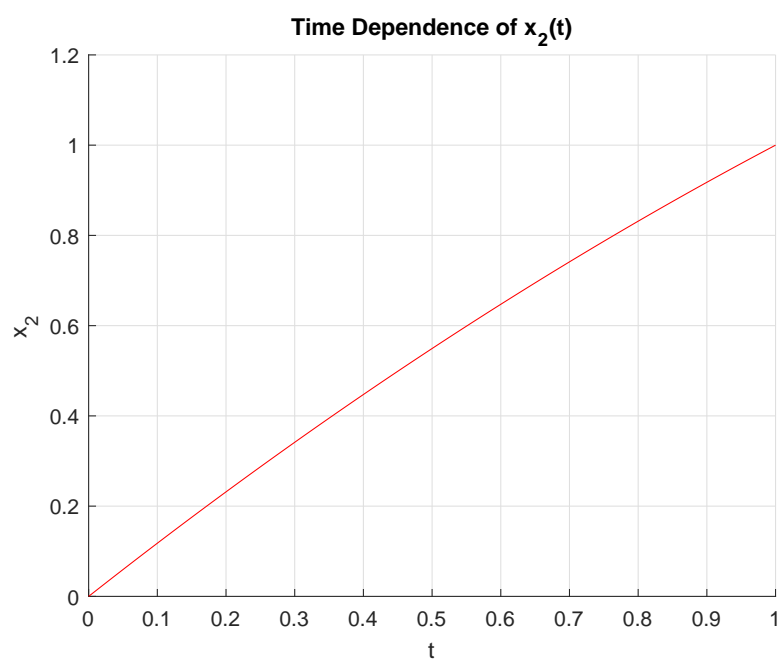


Рис. 22: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №2 в обоих случаях

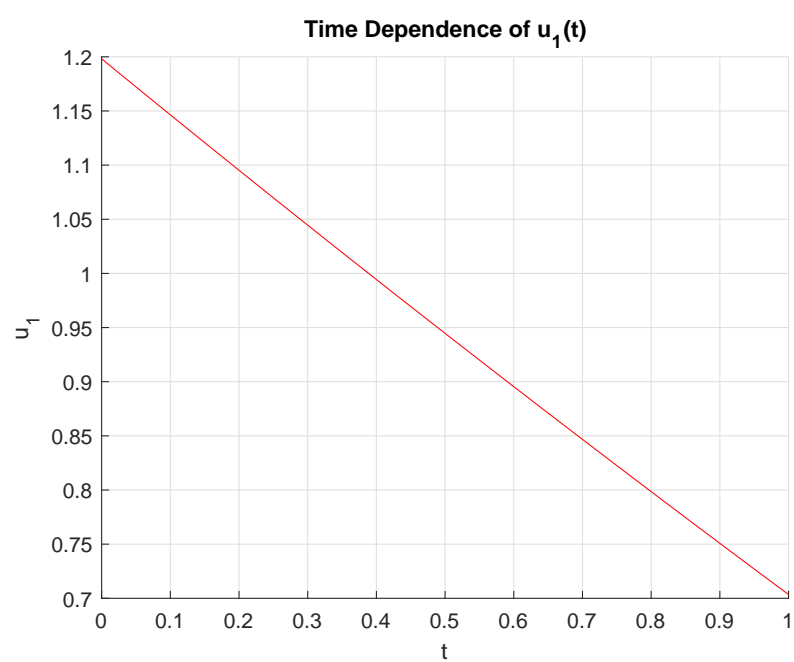


Рис. 23: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №2 в обоих случаях

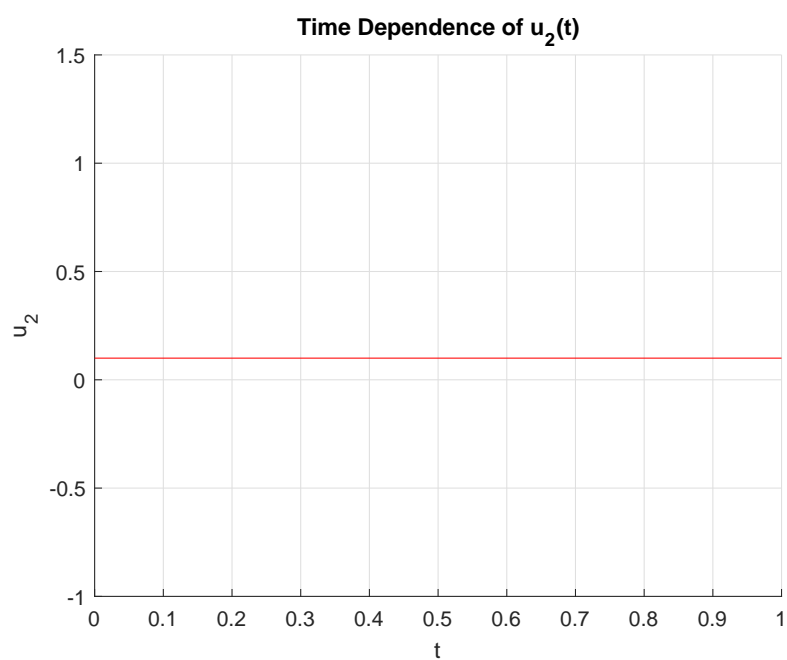


Рис. 24: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №2 в обоих случаях

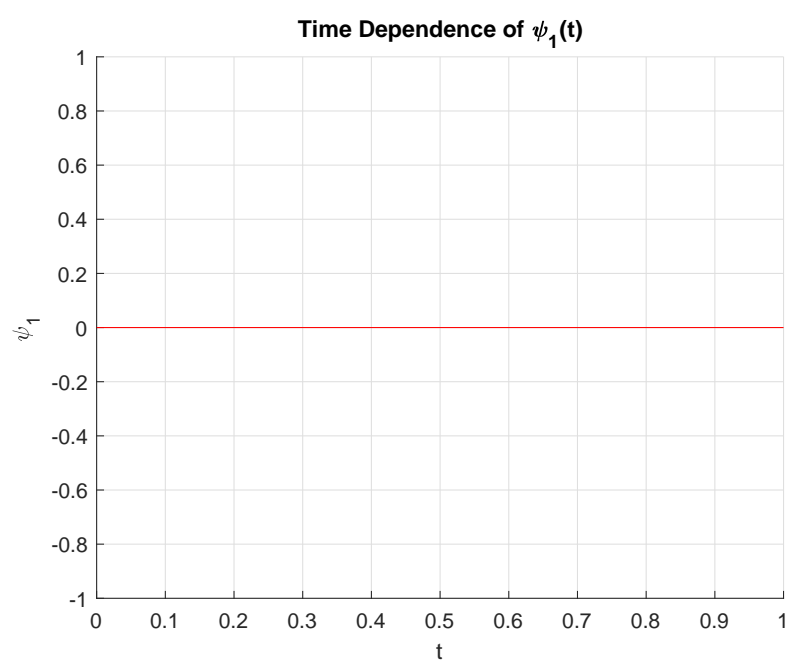


Рис. 25: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №2 в обоих случаях

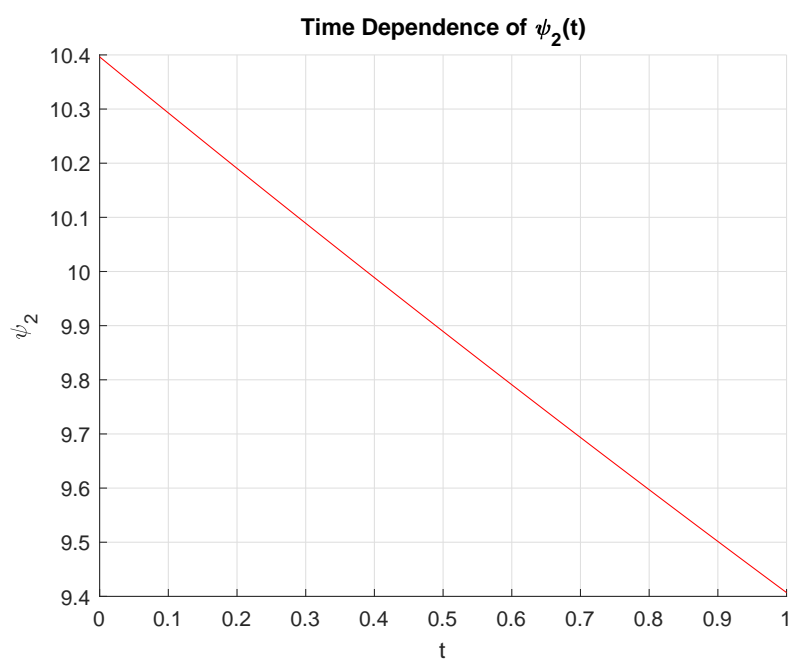


Рис. 26: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №2 в обоих случаях

### 4.3 Пример №3

Пусть  $k_1 = -15$ ,  $k_2 = 1$ ,  $\alpha = 8$ ,  $T = 1$ ,  $S = 5$ ,  $L = 1.58$ ,  $\varepsilon = 4$ . За величину, контролирующую точность вычислений, возьмём  $\delta = 10^{-1}$ . В первом случае получаем одно переключение, во втором обходимся без переключений.

Результаты работы программы:

$$J_1 = 3.9314,$$

$$J_2 = 3.4038.$$

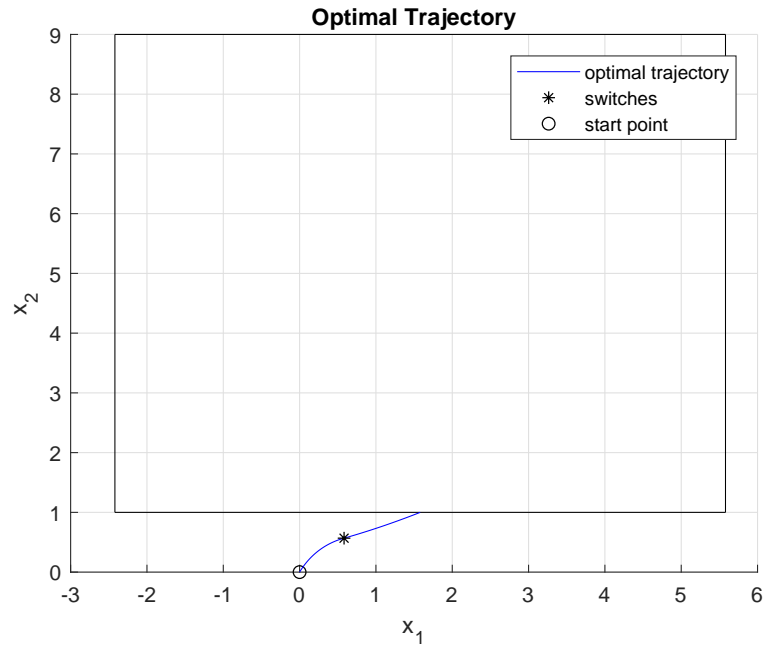


Рис. 27: Оптимальная траектория для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

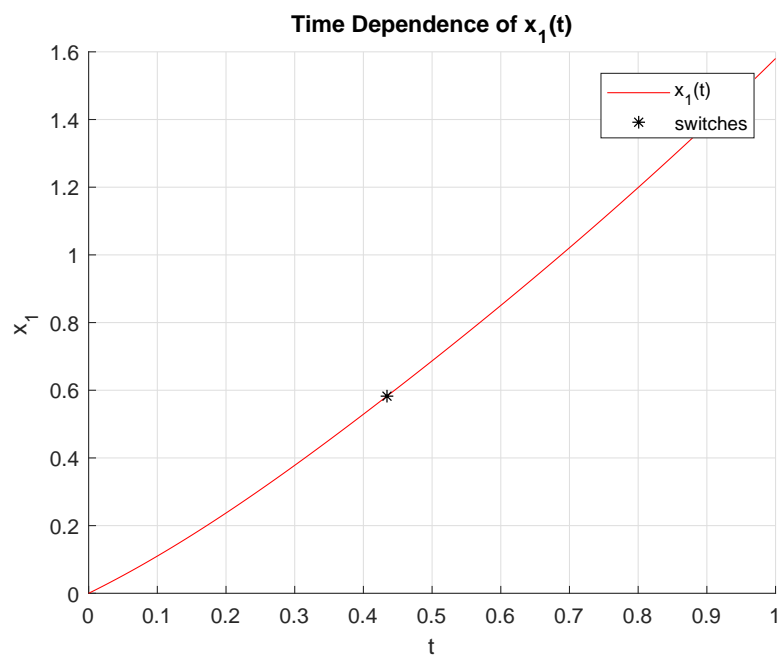


Рис. 28: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

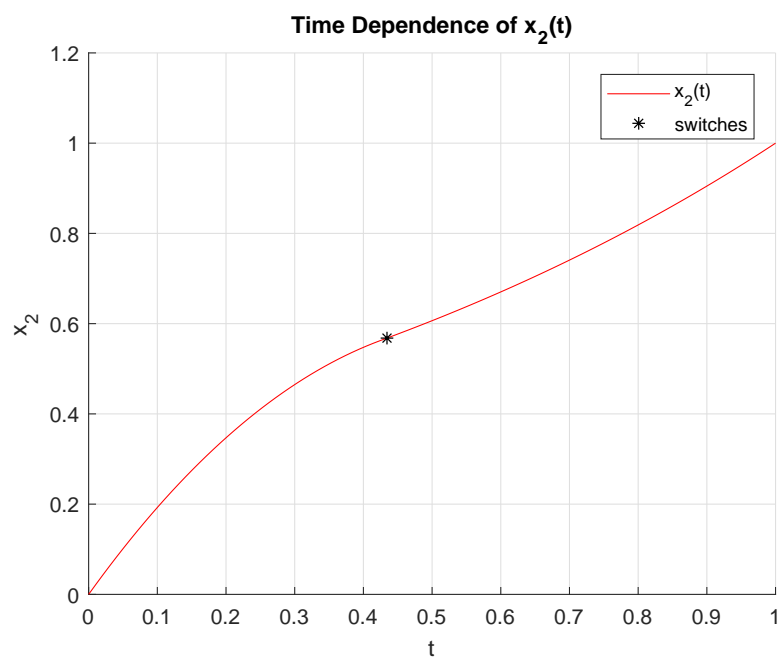


Рис. 29: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

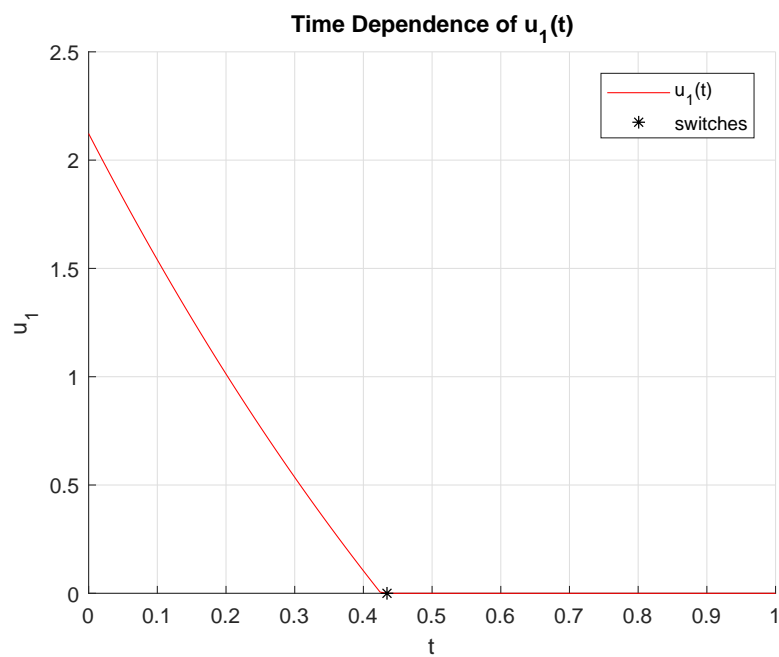


Рис. 30: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

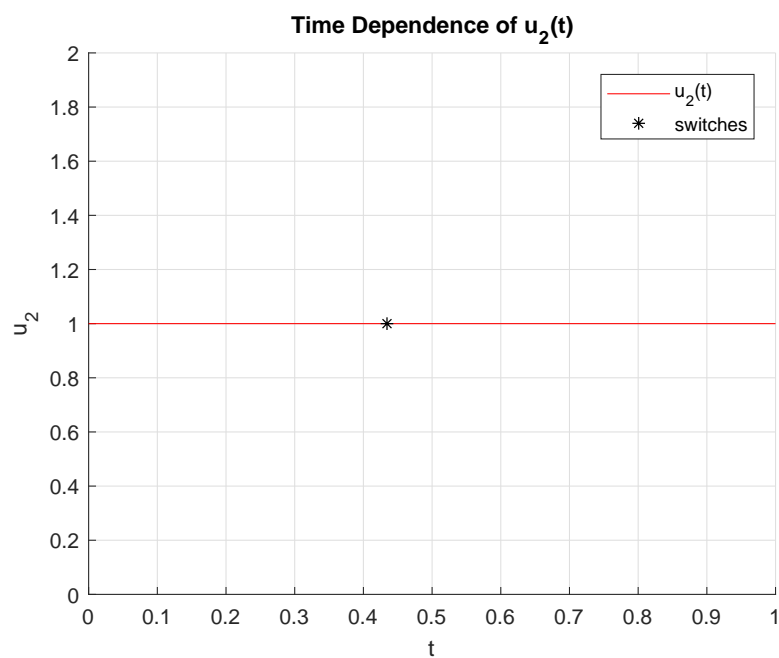


Рис. 31: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

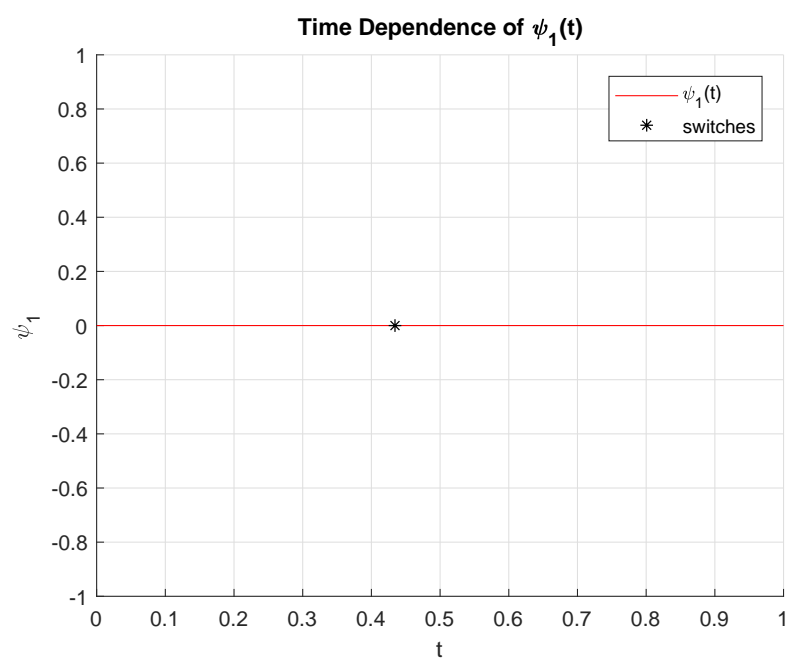


Рис. 32: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

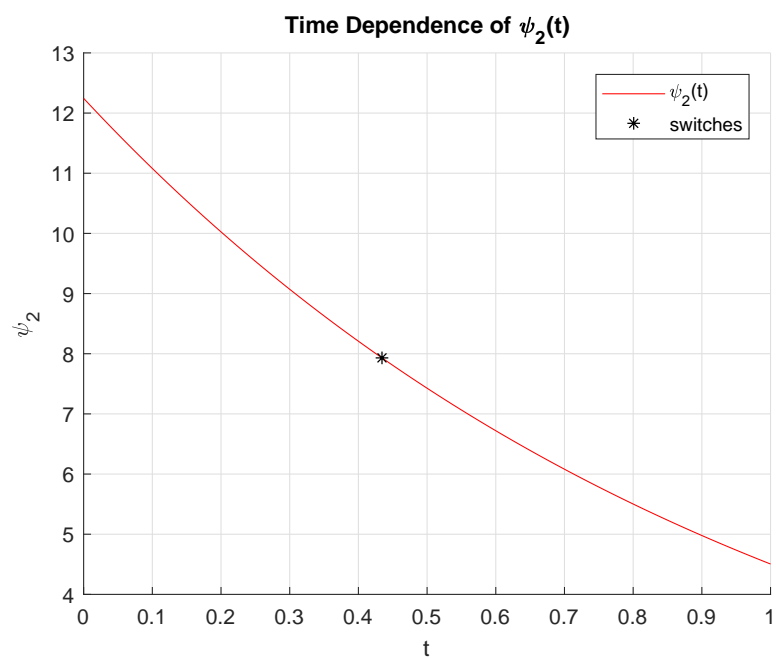


Рис. 33: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$



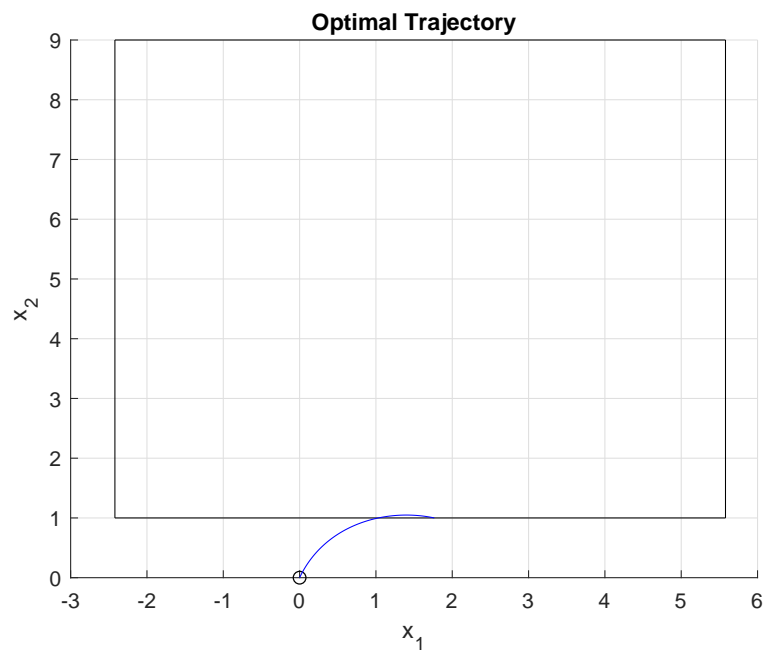


Рис. 34: Оптимальная траектория для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

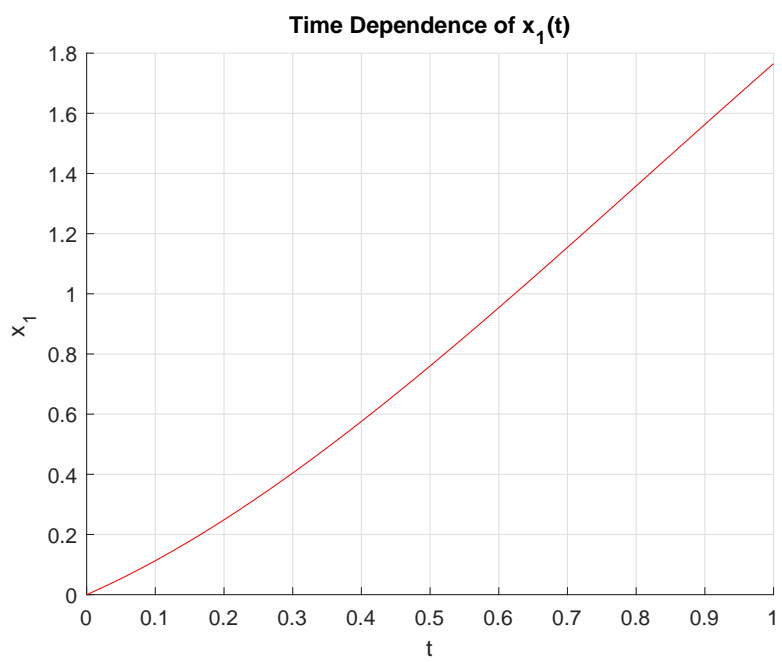


Рис. 35: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

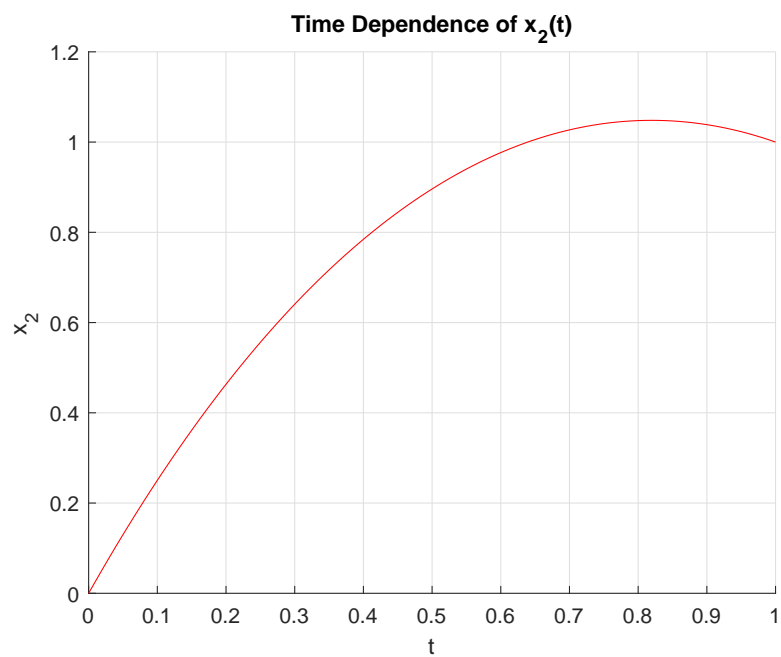


Рис. 36: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

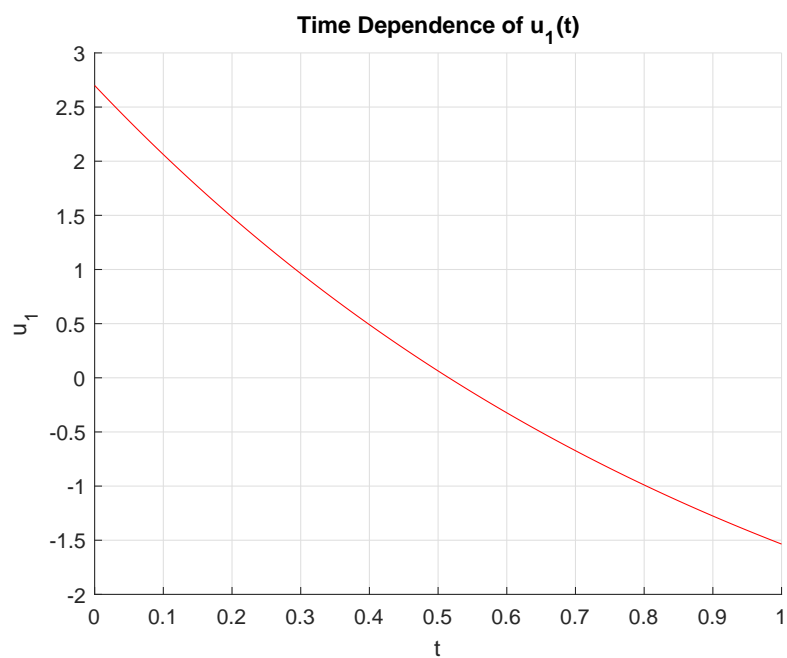


Рис. 37: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

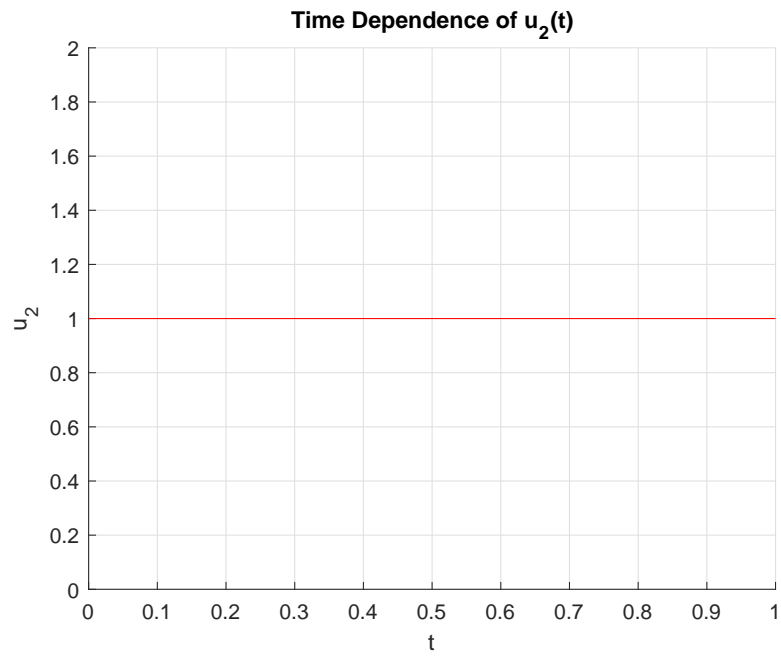


Рис. 38: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

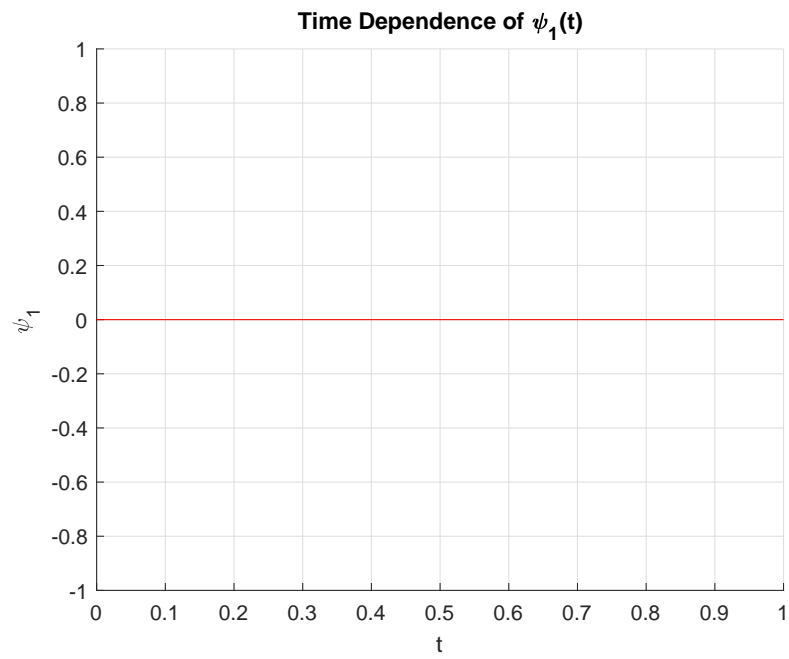


Рис. 39: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

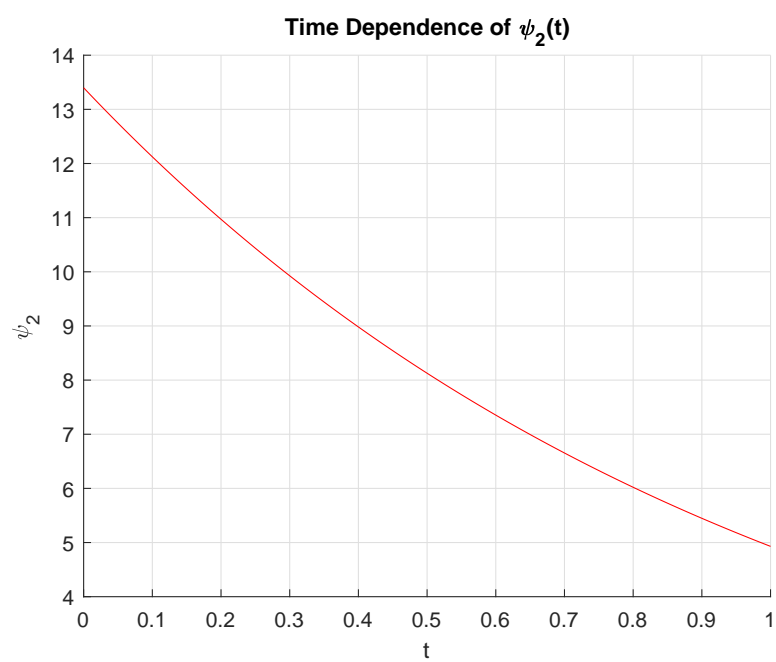


Рис. 40: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №3 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

#### 4.4 Пример №4

Пусть  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $T = 1$ ,  $S = 0.1849$ ,  $L = 6.898$ ,  $\varepsilon = 3$ . За величину, контролирующую точность вычислений, возьмём  $\delta = 10^{-2}$ . В первом случае получаем два переключения, во втором опять обходимся без переключений.

Результаты работы программы:

$$J_1 = 106.2012,$$

$$J_2 = 32.891.$$

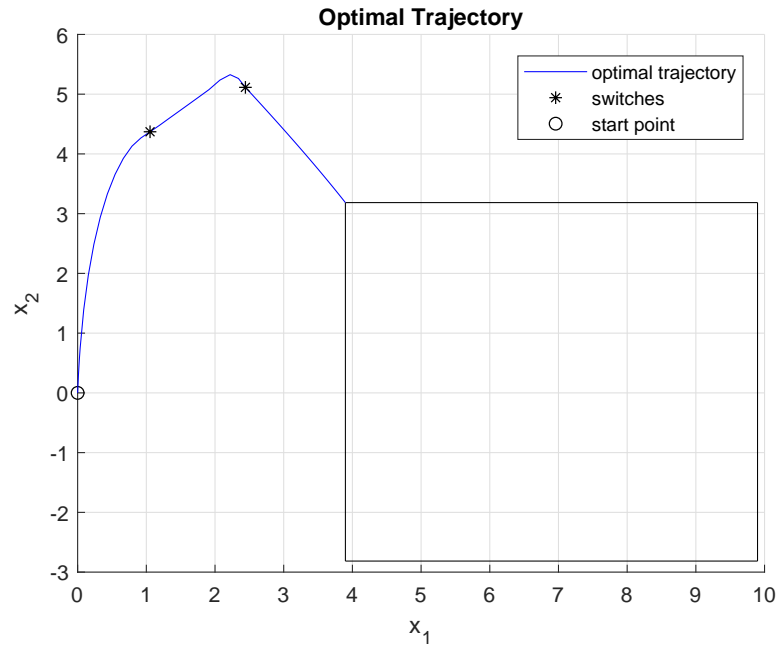


Рис. 41: Оптимальная траектория для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

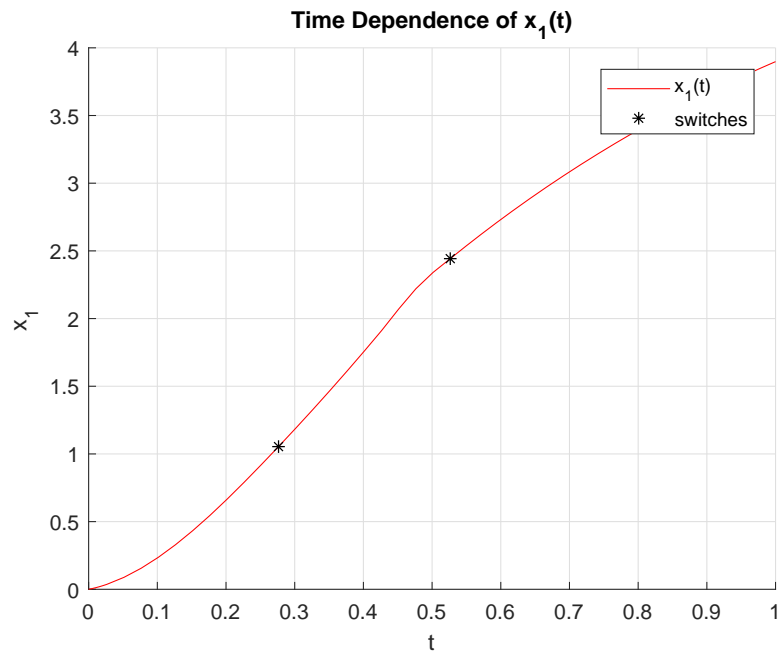


Рис. 42: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

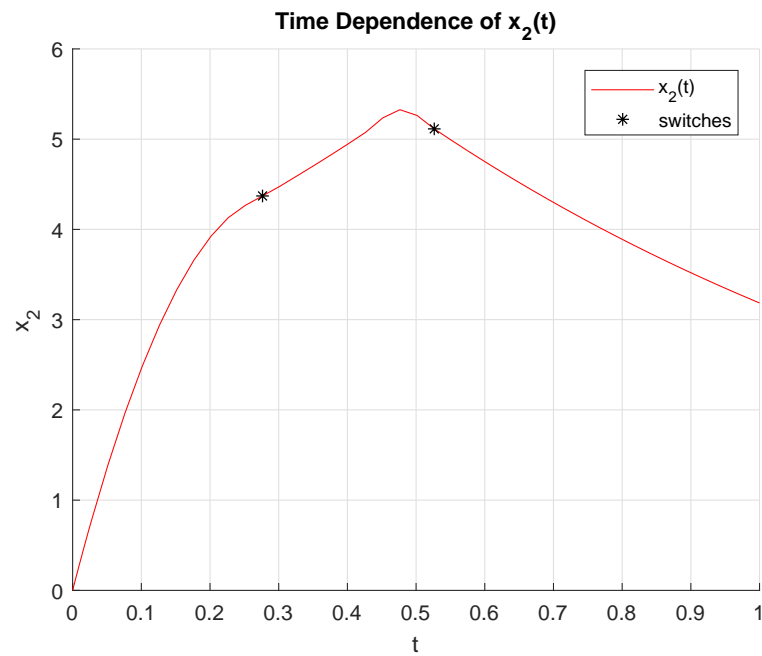


Рис. 43: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

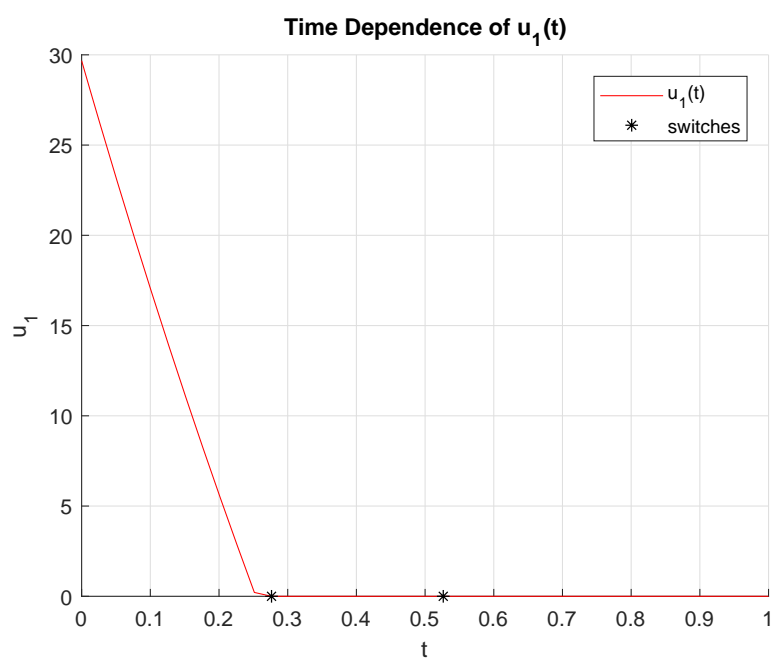


Рис. 44: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

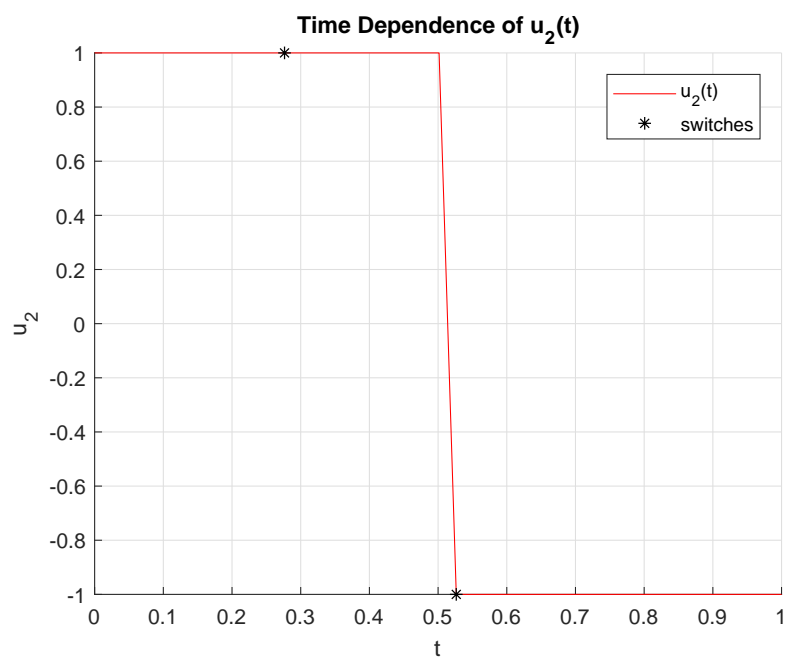


Рис. 45: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

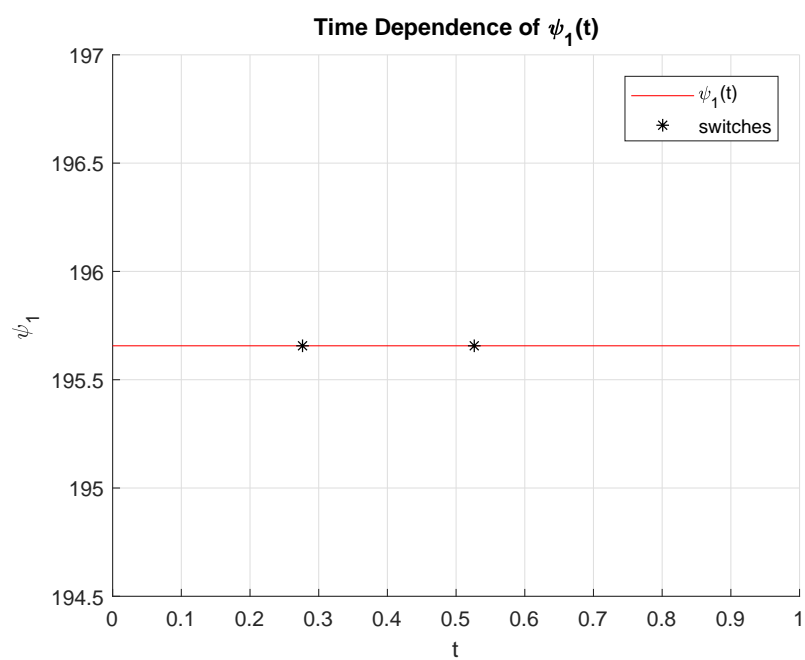


Рис. 46: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$

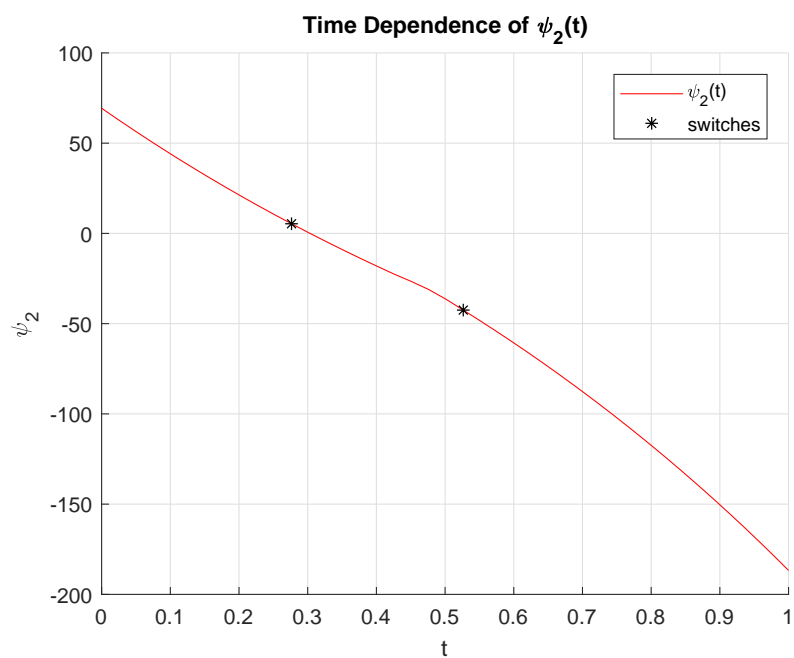


Рис. 47: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$



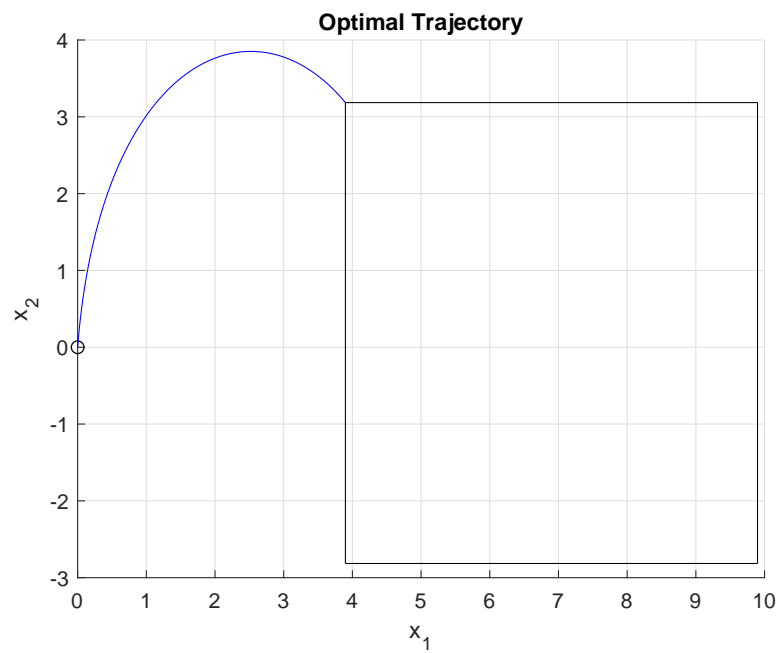


Рис. 48: Оптимальная траектория для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

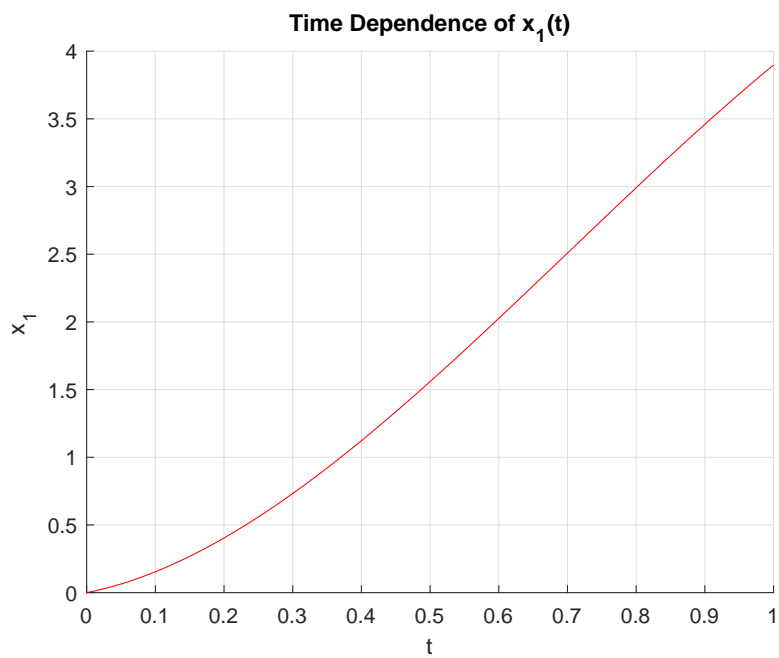


Рис. 49: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

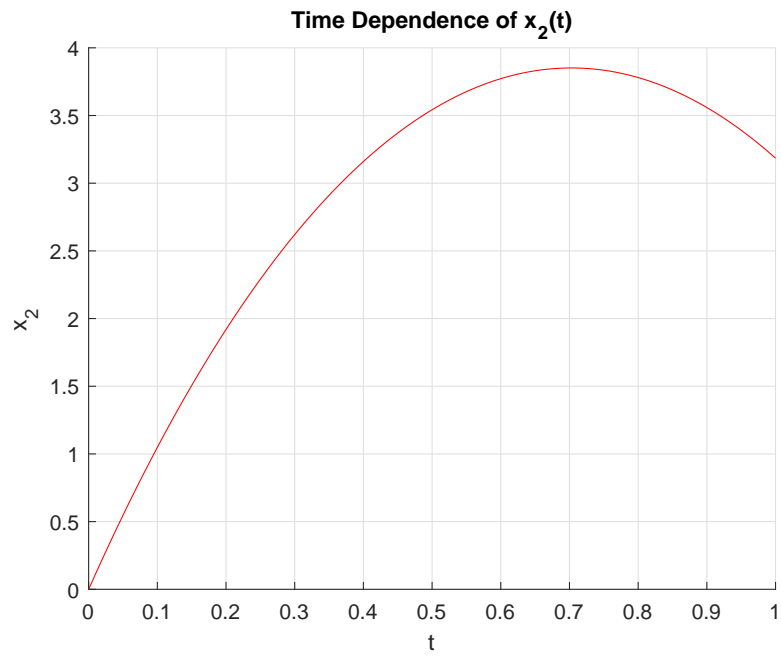


Рис. 50: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

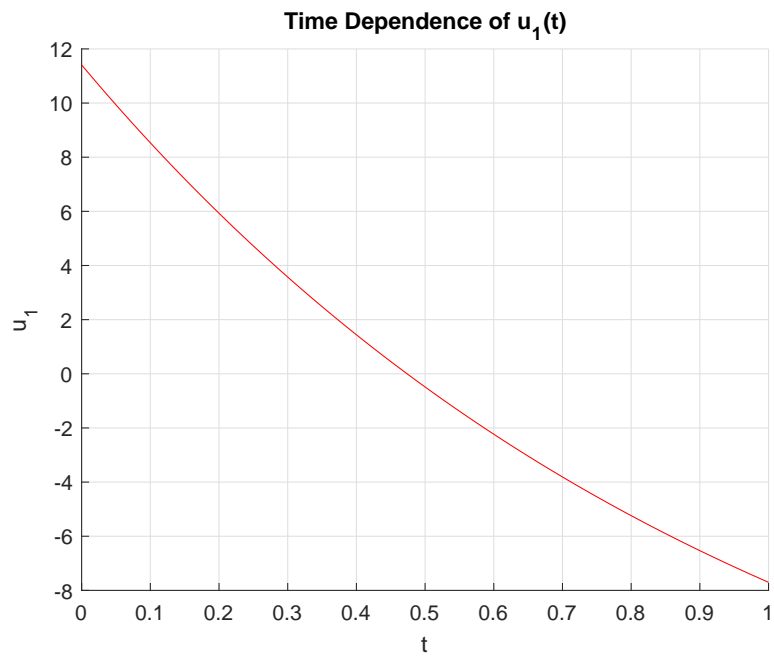


Рис. 51: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

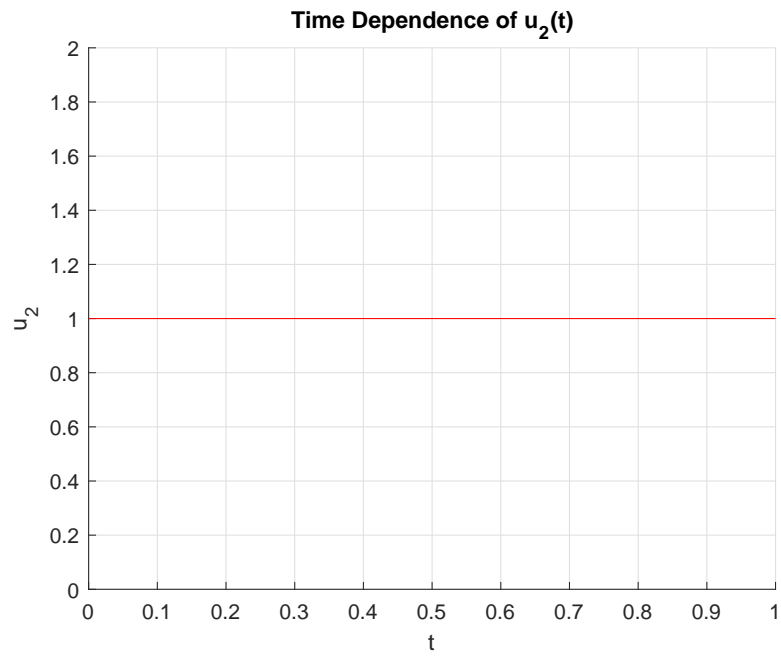


Рис. 52: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

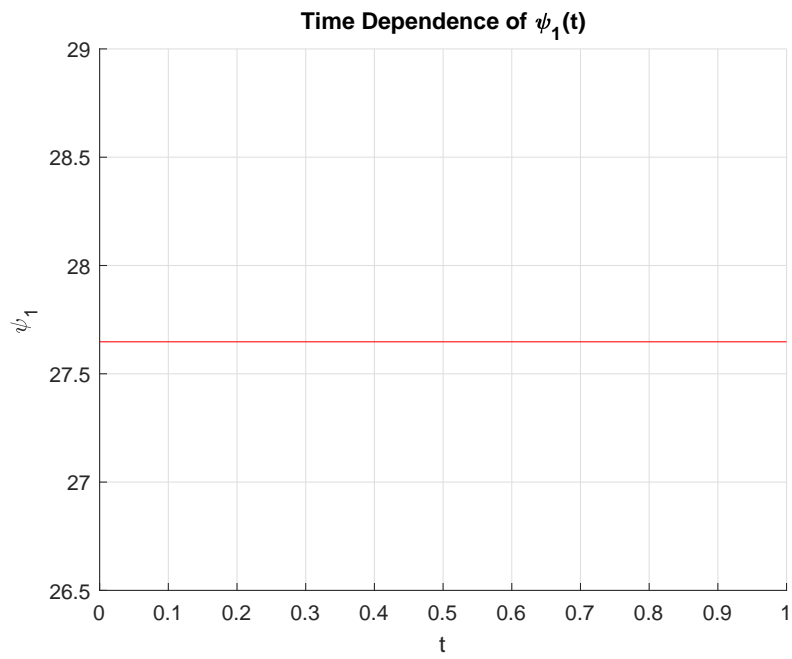


Рис. 53: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

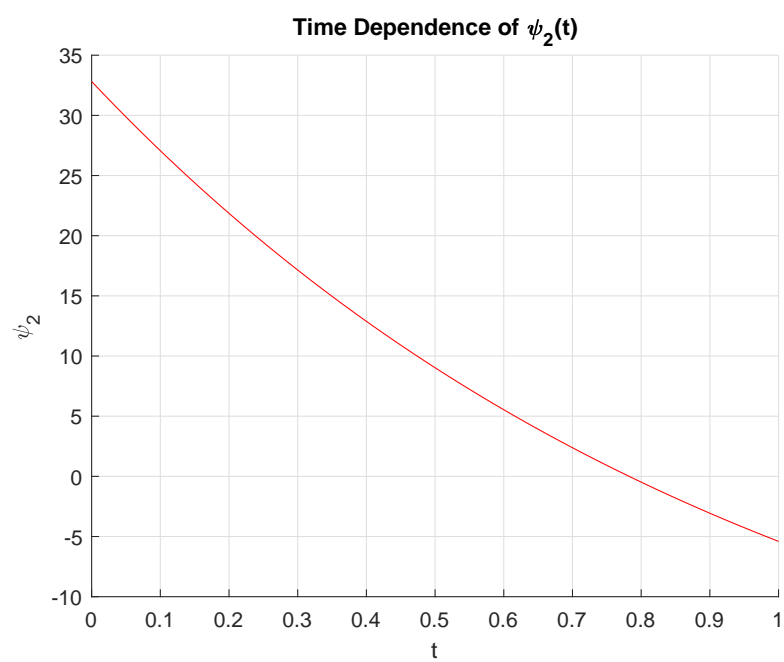


Рис. 54: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №4 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

Мы привели уже достаточно примеров для первого ограничения (рассмотрены примеры без переключений, а также с одним и двумя). Поэтому приведём ещё один пример, но только для второго ограничения.

## 4.5 Пример №5

Пусть  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $T = 1$ ,  $S = 3.4865$ ,  $L = 0.3001$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . За величину, контролирующую точность вычислений, возьмём  $\delta = 10^{-2}$ . Возникает одно переключение.

Результаты работы программы:

$$J_2 = 2.6152.$$

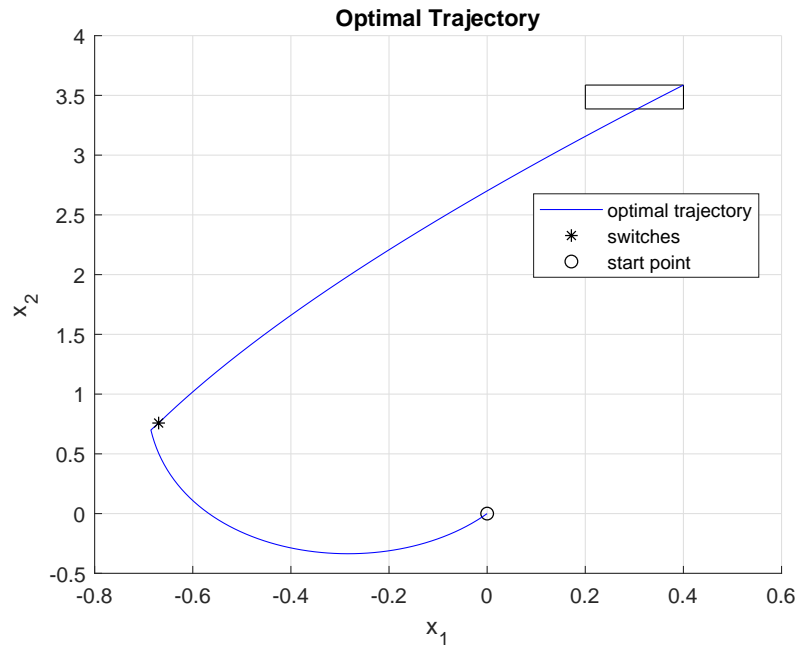


Рис. 55: Оптимальная траектория для примера №5 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

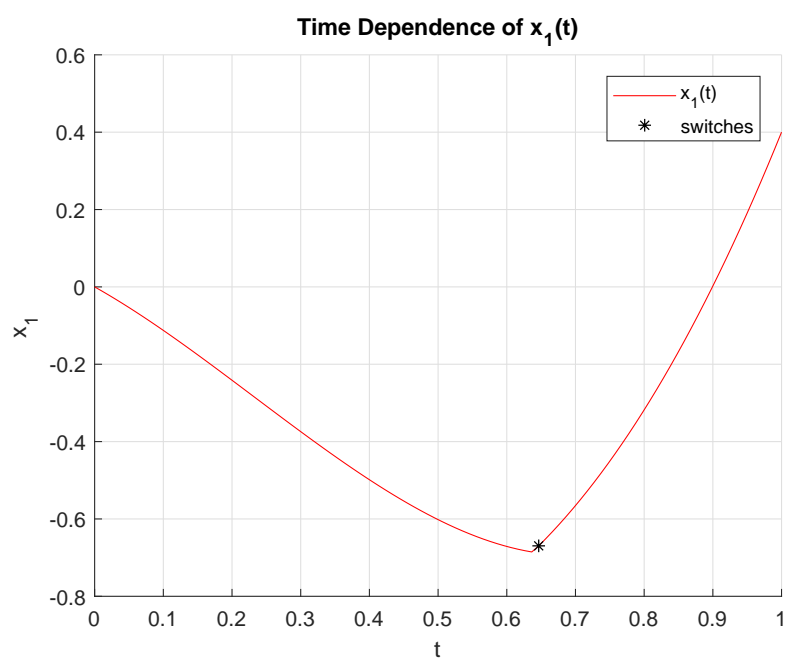


Рис. 56: Зависимость  $x_1(t)$  от времени для примера №5 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

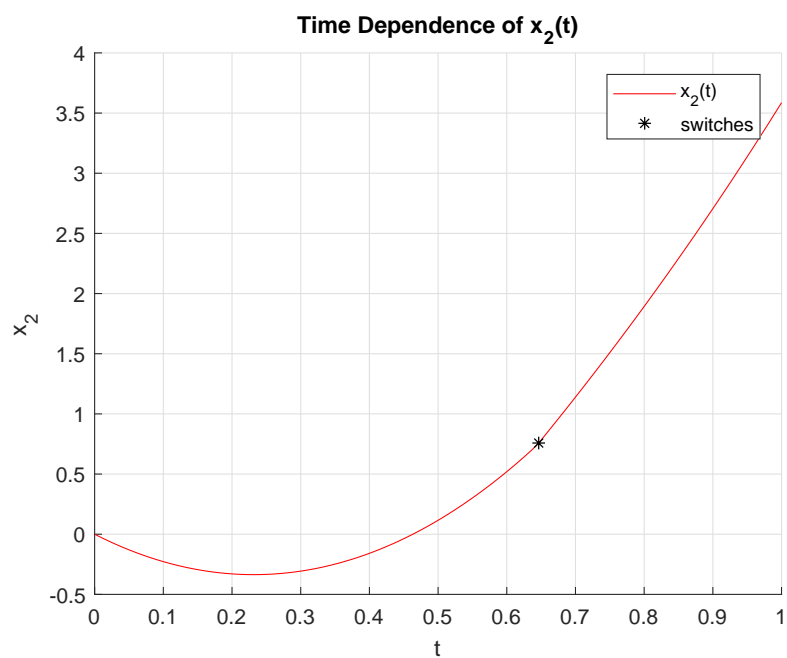


Рис. 57: Зависимость  $x_2(t)$  от времени для примера №5 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

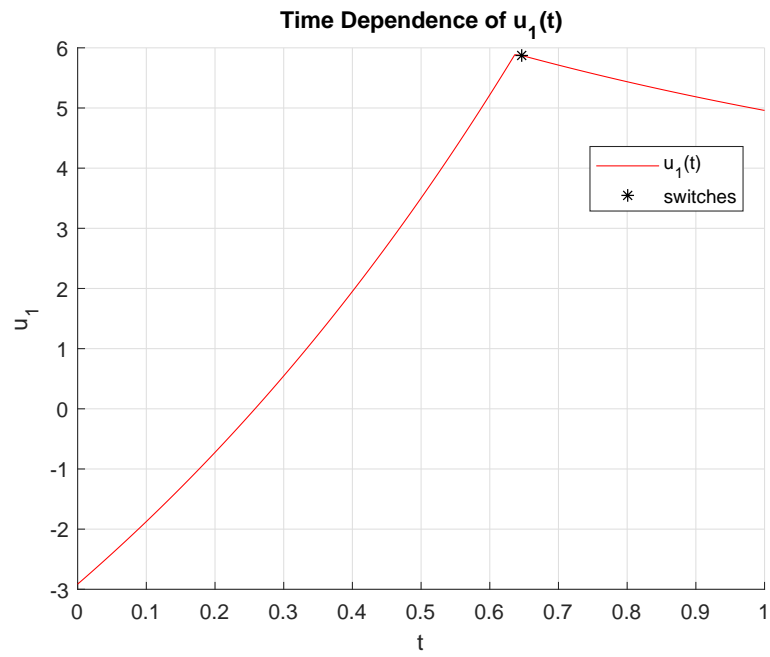


Рис. 58: Зависимость  $u_1(t)$  от времени для примера №5 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

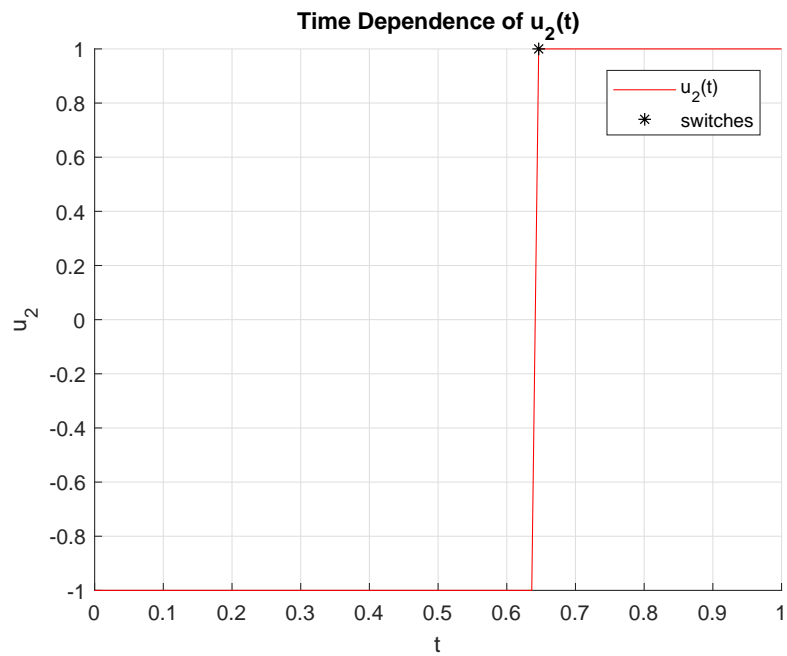


Рис. 59: Зависимость  $u_2(t)$  от времени для примера №5 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

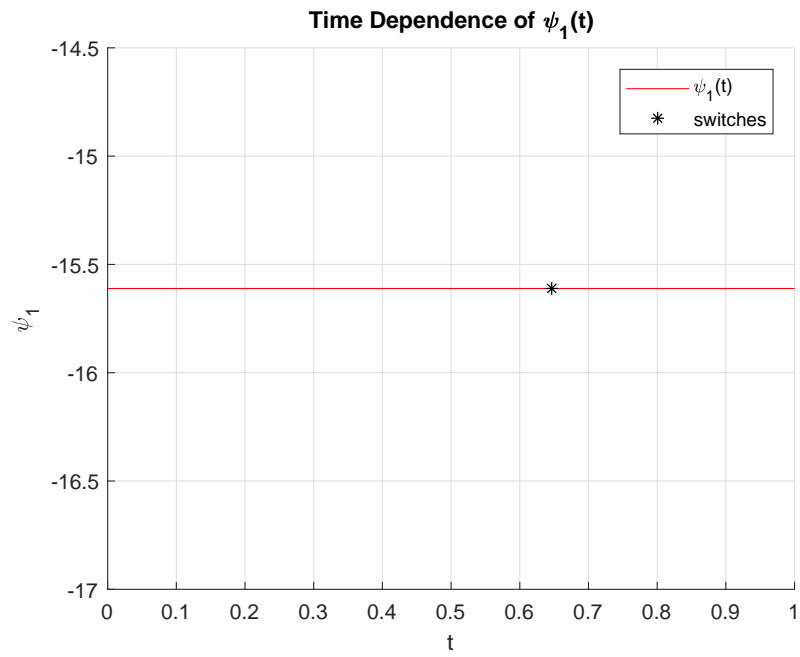


Рис. 60: Зависимость  $\psi_1(t)$  от времени для примера №5 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$

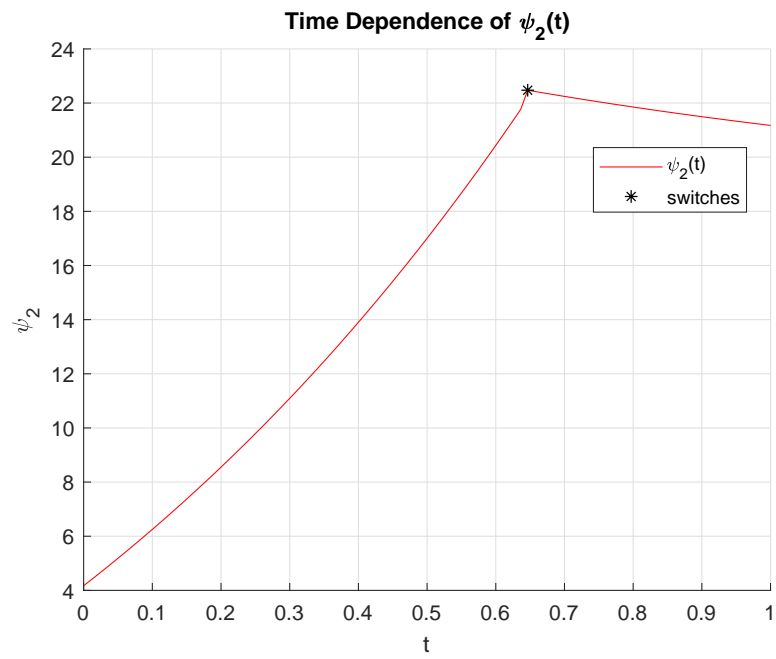


Рис. 61: Зависимость  $\psi_2(t)$  от времени для примера №5 в случае  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$



## Список литературы

- [1] Рублёв И. В. *Лекции по курсу «Оптимальное управление»*, 2017–2018 гг.
- [2] Понтрягин Л. С. *«Обыкновенные дифференциальные уравнения»*, 1974 год.