



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Оптимальное управление»

Задание №3. Построение множества достижимости

Студент 315 группы

Я. А. Григорьев

Руководитель практикума

к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Теория	4
3	Описание алгоритма	6
4	Примеры работы программы	8
	Список литературы	12

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x + 3x \sin(x^2) - 2x^2 \cos(x) = u, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение:

$$u \in [-\alpha, \alpha].$$

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geq t_0$.

1. Необходимо написать в среде MatLab функцию `reachset(alpha,t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0$, $t \geq t_0$ рассчитывает приближённо множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции — два массива X , Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).
2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha,t1,t2,N,filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha,t)`, строит множества достижимости для моментов времени

$$\tau_i = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)i}{N}, i = 0, 1, \dots, N.$$

Здесь $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, N — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранён в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множества достижимости от величины параметра α . Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчёте, должны быть доказаны.

2 Теория

Будем считать управление u кусочно-непрерывным.

После нормализации уравнение (1) превращается в следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 - 3x_1 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1) + u. \end{cases} \quad (2)$$

В силу того, что $t_0 = 0$ и $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$, далее не будем использовать обозначения t_0 , $x(t_0)$ и $\dot{x}(t_0)$, заменив их на их фактические значения.

Определение. Множеством достижимости в момент $t \geq 0$ для системы (2) назовём множество

$$X[t] := X(t, 0, 0, 0) = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \exists u(\cdot) : |u(\tau)| \leq \alpha \forall \tau \in [0, t] : (x_1, x_2)^T = (x_1(t, 0, 0, 0), x_2(t, 0, 0, 0))^T \Big|_{u(\cdot)} \right\}.$$

Тем самым, множество достижимости — это множество всех точек плоскости, куда мы можем попасть за время t при подстановке всех допустимых управлений u .

Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle = \psi_1 x_2 + \psi_2 (x_2 - 2x_1 - 3x_1 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1) + u) \quad (3)$$

Введём функцию

$$\mathcal{M}(\psi, x) = \sup_{u \in [-\alpha, \alpha]} \mathcal{H}(\psi, x, u).$$

Сформулируем принцип максимума для задачи достижимости (см. [1]).

Теорема 1. Пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — оптимальная по быстрдействию пара для задачи (2) при $t_1 = t_1^*$ (здесь $t \in [0, t_1^*]$). Тогда существует функция $\psi^*(\cdot) : [0, t_1^*] \rightarrow \mathbb{R}^2$ такая, что

1. $\psi^* \not\equiv 0$ (из этого следует, что $\psi^*(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, t_1^*]$) — условие нетривиальности.

2. $\dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Big|_{\substack{\psi=\psi^*(t) \\ x=x^*(t) \\ u=u^*(t)}} - \text{сопряжённая система.}$

3. $u^*(t) \in \text{Arg max}_{u \in [-\alpha, \alpha]} \mathcal{H}(\psi^*(t), x^*(t), u)$ для почти всех $t \in [0, t_1^*]$ — условие максимума.

4. $\mathcal{M}(\psi^*(t), x^*(t)) \equiv \text{const} \geq 0$.

Доказательство этой теоремы проводить не будем в силу его громоздкости. Сформулируем ещё одну важную теорему, называемую *теоремой о нулях* ψ_2 и x_2 .

Теорема 2. Пусть $\tau_1 < \tau_2$ и

1. $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) = 0$;

2. $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow \psi_2(\tau_2) = 0$.

3. $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) \neq 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists t' \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(t') = 0$.

4. $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ при $t \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) \neq 0 \Rightarrow \psi_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists t'' \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(t'') = 0$.

Доказательство этой теоремы можно прочитать в [1].

Обратим внимание, что функция $\psi_2(\cdot)$ имеет не более чем конечное число нулей на отрезке $[0, t_1^*]$, так как в противном случае из нулей можно было бы составить последовательность, которая сошлась бы к точке t^* , в которой $\psi_2(t^*) = 0$, но тогда $\dot{\psi}_2(t^*) = \psi_1(t^*) = 0$, что противоречит условию нетривиальности в теореме 1.

3 Описание алгоритма

Выпишем сопряжённую систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = \psi_2 (3 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \sin(x_1) + 6x_1^2 \cos(x_1^2) - 4x_1 \cos(x_1) + 2), \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -\psi_1 - \psi_2. \end{cases} \quad (4)$$

Из принципа максимума, очевидно, следует, что

$$u^*(t) = \begin{cases} \alpha, & \psi_2(t) > 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2(t) = 0, \\ -\alpha, & \psi_2(t) < 0. \end{cases}$$

Обратим внимание, что особого режима не возникает, так как в противном случае получаем нулевой вектор ψ , что противоречит условию нетривиальности в теореме 1.

Рассмотрим две вспомогательные системы:

$$\begin{aligned} S_+ : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 2x_1 - 3x_1 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1) + \alpha; \end{cases} \\ S_- : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 2x_1 - 3x_1 \sin(x_1^2) + 2x_1^2 \cos(x_1) - \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Они получены путём подстановок $u \equiv \alpha$ и $u \equiv -\alpha$ в систему (2) соответственно.

В начальный отрезок времени траектория движется либо с $u = \alpha$, либо с $u = -\alpha$, то есть справедлива одна из систем S_+ и S_- . Переключения возникают при $\psi_2 = 0$.

Программа работает по следующему алгоритму:

- Решаем систему S_+ из нулевой точки до момента t_+ , в котором $x_2(t_+) = 0$.
- Строим разбиение отрезка $[0, t_+]$. Обозначим точку этого разбиения через t_+^i .
- Решаем систему S_- , присоединив к ней сопряжённую систему (4), с начальными условиями $(x_1(t_+^i), x_2(t_+^i), 1, 0)$ (в силу инвариантности решения системы (4) относительно умножения на положительную константу и в силу того, что $\psi_1(t_+) > 0$, можно брать $\psi_1(t_+) = 1$) до момента $\psi_2(\hat{t}_+^i)$ (из теоремы 2 следует, что такой момент найдётся).
- Далее решаем систему S_+ и присоединённую к ней сопряжённую систему (4) с начальными условиями $(x_1(\hat{t}_+^i), x_2(\hat{t}_+^i), -1, 0)$ до следующего переключения. И так далее: повторяем последние два пункта до момента t , заданного пользователем.
- Аналогичные действия проводим для системы S_- .
- Соединяем концы полученных траекторий.
- Удаляем самопересечения. Для этого достаточно пройти по точкам полученной ломаной и удалить те промежутки, на концах которых замечено пересечение отрезков. Обратим внимание, что в нашей задаче данный пункт является необязательным, так как самопересечения исчезают благодаря следующему этапу улучшения аппроксимации множества достижимости.

- Улучшаем аппроксимацию. Исследуются отрезки полученной ломаной. Если расстояние между каким-то соседними точками больше некоторого изначально заданного значения, то производится дополнительное подразбиение отрезка $[t_i, t_{i+1}]$, где t_i и t_{i+1} — моменты первого переключения для этих точек. Для этого подразбиения рассчитываются новые траектории, концы которых мы включаем в новую аппроксимацию. И так происходит до тех пор, пока каждая сторона многоугольника не станет меньше или равна этого заданного значения. Обратим внимание, что при таком подходе неподвижные точки будут автоматически обходить траекторией, так как, очевидно, они не входят во множество достижимости в силу того, что производная в окрестности таких точек близка к нулю, и мы в самую точку попасть никак не сможем. Точнее говоря, наличие неподвижных точек внутри множества достижимости возможно, но только в той его части, для которой справедлива система с противоположным значением управления.

В программе также есть возможность строить точки переключений. Для этого при построении кривых необходимо запоминать точки x_1 и x_2 в моменты переключений.

4 Примеры работы программы

Ниже приведены результаты работы программы для разных значений параметров α и t .

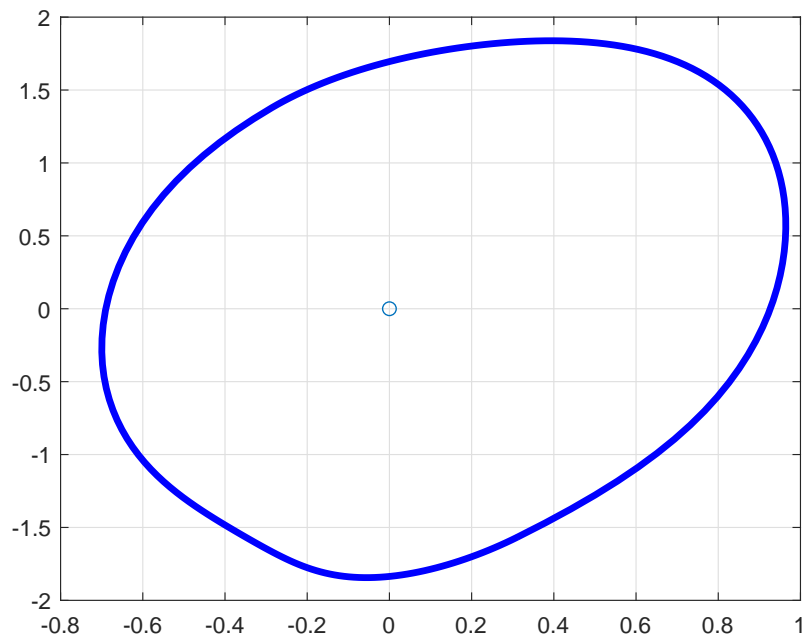


Рис. 1: Множество достижимости при $\alpha = 0.1$, $t = 5$

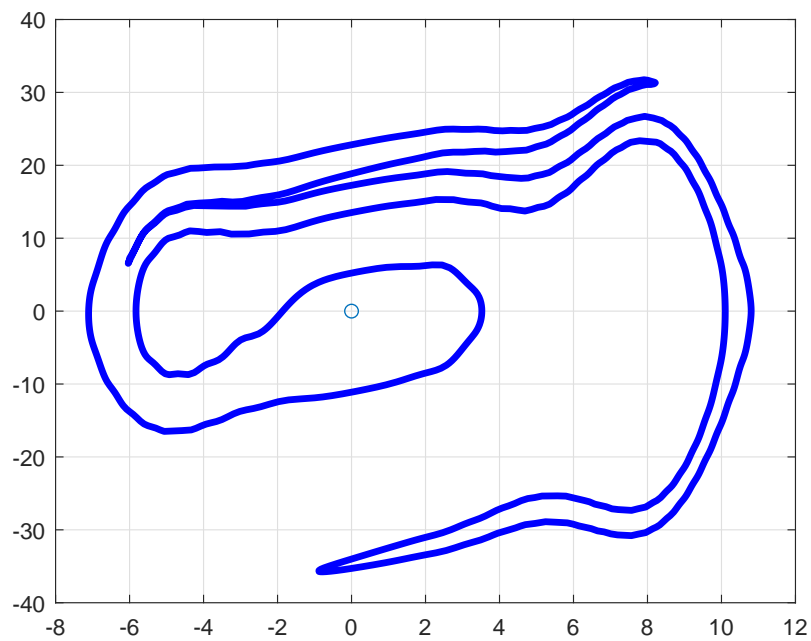


Рис. 2: Множество достижимости при $\alpha = 0.1$, $t = 9$

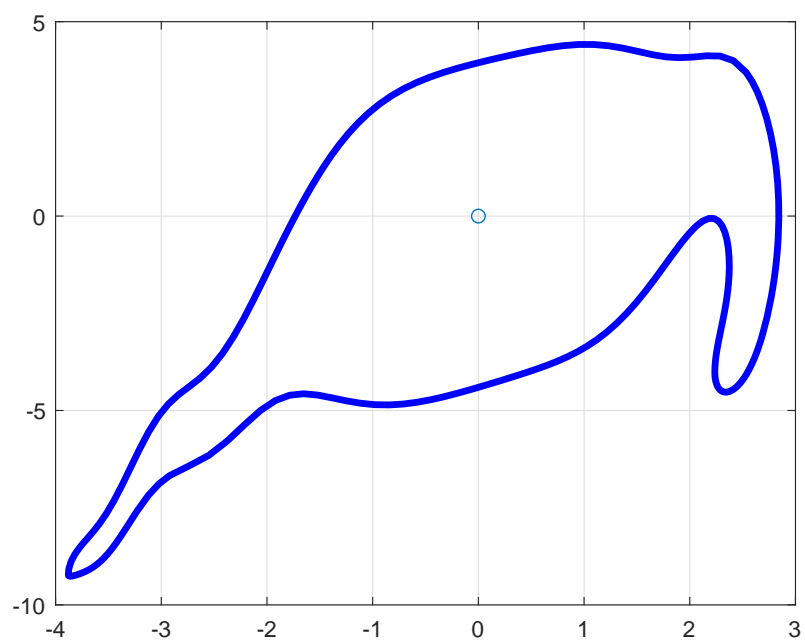


Рис. 3: Множество достижимости при $\alpha = 1, t = 3$

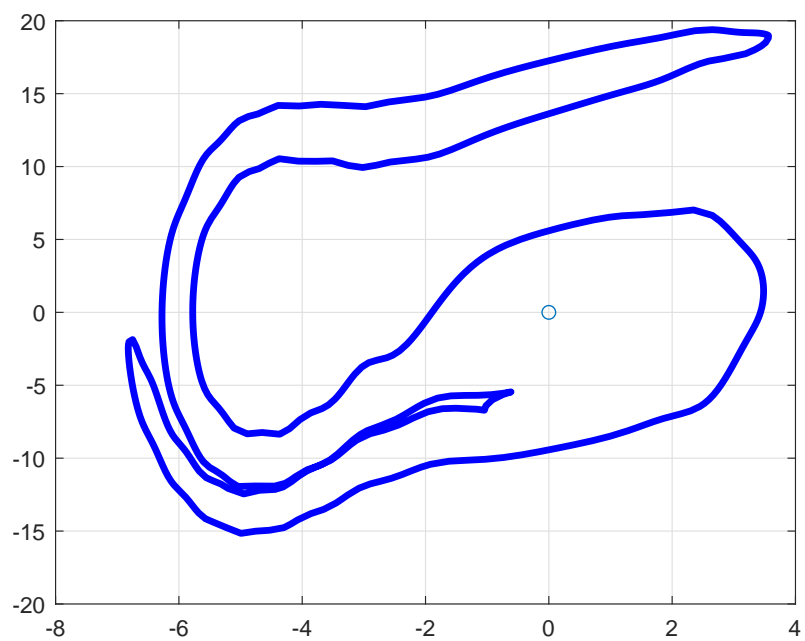


Рис. 4: Множество достижимости при $\alpha = 1, t = 4$

Из вышеприведённых примеров следует, что чем параметры α и t больше, тем траектория становится более замысловатой.

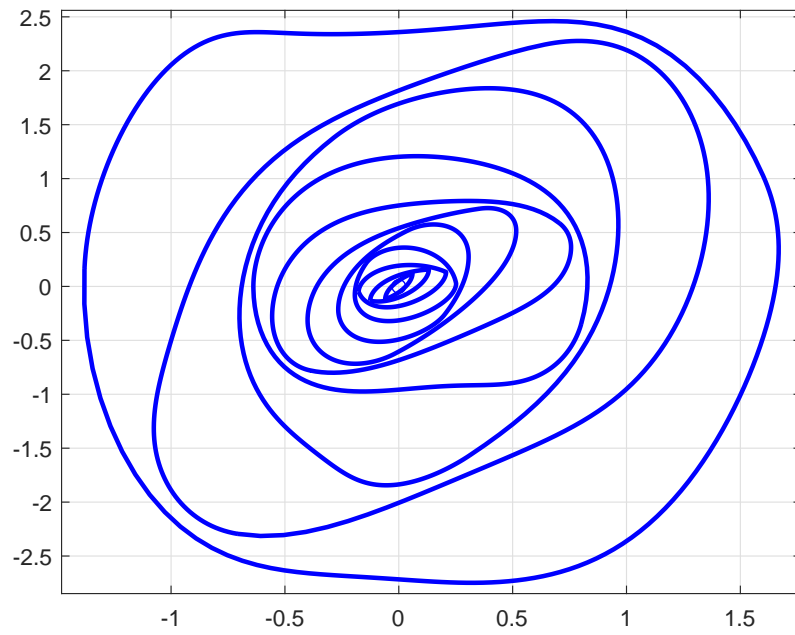


Рис. 5: Эволюция множества достижимости при $\alpha = 0.1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 6$, $N = 10$

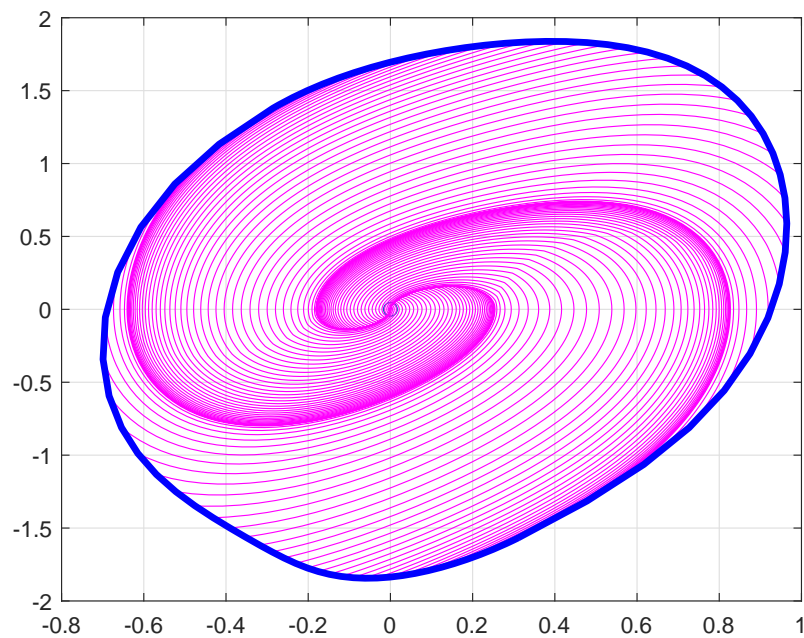


Рис. 6: Множество достижимости при $\alpha = 0.1$, $t = 5$ и оптимальные по быстродействию траектории системы

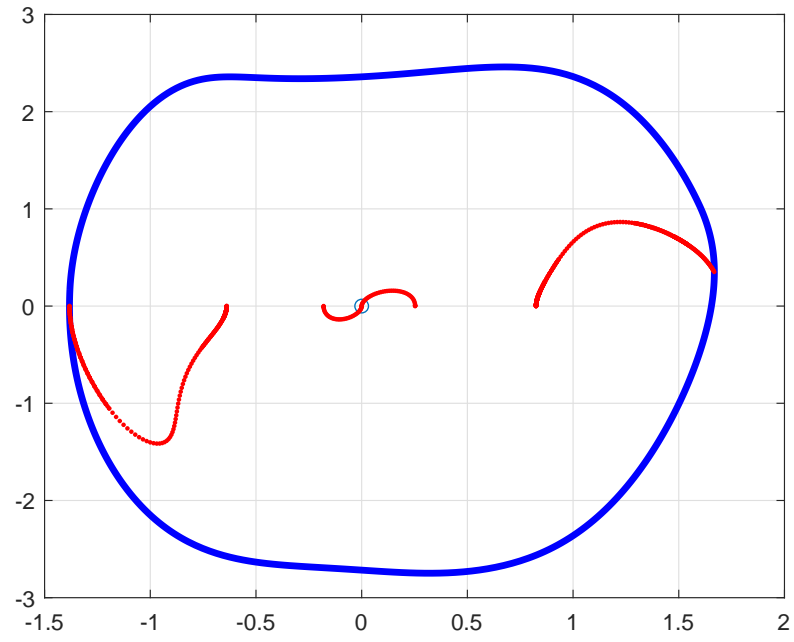


Рис. 7: Множество достижимости при $\alpha = 0.1$, $t = 6$ и точки переключения системы

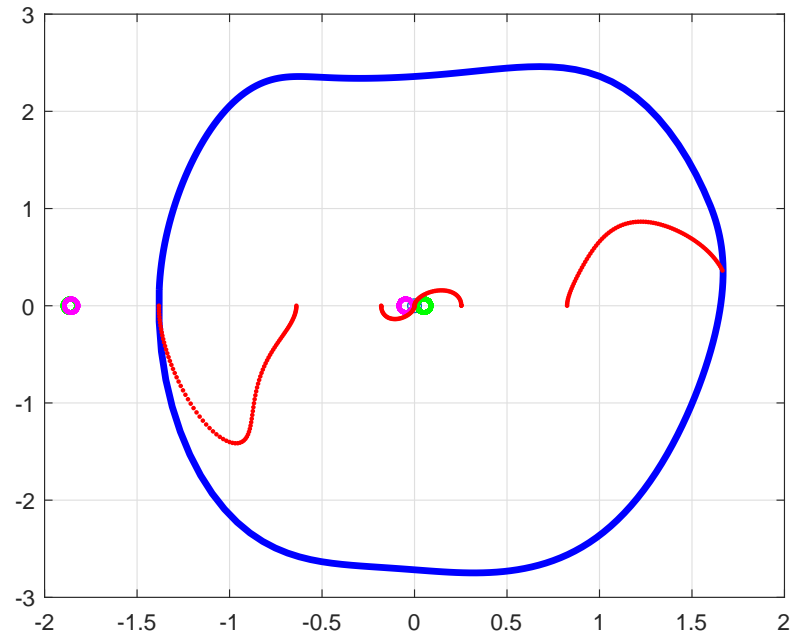


Рис. 8: Множество достижимости при $\alpha = 0.1$, $t = 6$ и точки переключения системы, а также неподвижные точки. Здесь видно, что неподвижные точки либо лежат вне множества достижимости, либо в полумножестве, соответствующем противоположному значению управления.

Список литературы

- [1] Рублёв И. В. *Лекции по курсу «Оптимальное управление»*, 2017–2018 гг.