Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Григорьев Яков Андреевич

Исследование анормальных задач

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
А. В. Арутюнов

Москва, 2019

Содержание

1 Введение

Данная работа посвящена исследованию анормальных задач на примере квадратичных отображений. Квадратичные отображения, представляя и самостоятельный интерес, имеют важные приложения. К примеру, квадратичные отображения представляют собой классический пример гладкого отображения, рассматриваемого в окрестности анормальной точки, что применимо в теории экстремумов, нелинейного анализа и теории управления. К исследованию свойств квадратичных отображений приводят также некоторые задачи механики. Перейдём к конкретным рассмотрениям.

2 Определения и постановка задачи

2.1 Квадратичные отображения

Пусть даны натуральные n и k, а также евклидовы пространства X и Y, причём $\dim X = n$, $\dim Y = k$.

Определение. *Отображение $Q[\cdot,\cdot] : X \times X \to Y$ называется билинейным, если отображения $Q[\cdot, x]$ и $Q[x, \cdot]$ являются линейными для всех $x \in X$. Билинейное отображение Q называется симметричным, если $Q[x_1, x_2] = Q[x_2, x_1]$ для всех $x_1, x_2 \in X$.*

Далее предполагаем, что все рассматриваемые билинейные отображения являются симметричными.

Определение. *Отображение, которое каждому $x \in X$ ставит в соответствие вектор $Q[x, x]$ для некоторого билинейного отображения Q, называется квадратичным отображением. Обозначение: $Q(x)$.*

Между квадратичными отображениями и соответствующими им билинейными отображениями существует взаимооднозначное соответствие. Поэтому будем обозначать их одной и той же буквой Q и использовать для билинейных отображений квадратные скобки, а для квадратичных — круглые.

Обратим внимание, что пространство квадратичных отображений является конечномерным, так как каждое квадратичное отображение Q может быть представлено в виде k симметричных матриц $A_1, \dots, A_k$ размера $n \times n$, i-я компонента отображения выражается в виде

$$Q_i(x) = \langle A_i x, x \rangle \,,$$

а i-я компонента соответствующего ему билинейного отображения — в виде

$$Q_i[x, y] = \langle A_i x, y \rangle \,.$$

Поэтому размерность пространства квадратичных отображений равна

$$\frac{kn(n+1)}{2}.$$

Определение. *Квадратичное отображение $Q : X \to Y$ называется сюръективным, если $Q(X) = Y$.*

Определение. *Квадратичное отображение $Q : X \to Y$ называется устойчиво сюръективным, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого квадратичного отображения Δ : $\|\Delta\| < \varepsilon$ следует, что квадратичное отображение $Q + \Delta$ является сюръективным.*

Как мы выяснили ранее, пространство квадратичных отображений является конечномерным, поэтому норма, фигурирующая в определении устойчивой сюръективности, может быть любой (они все эквивалентны). Но для определённости будем считать, что

$$\|\Delta\| = \sup\{|\Delta(x)| : |x| \leqslant 1\}.$$

И введём еще два понятия, активно используемые в теории квадратичных отображений.

Определение. *Вектор $x \in X$, $x \neq 0$, называется нетривиальным нулём квадратичного отображения $Q : X \to Y$, если $Q(x) = 0$. Если при этом выполнено $Q[x, X] = Y$, то вектор x называется регулярным нулём квадратичного отображения Q.*

2.2 Анормальные задачи

Перейдём к рассмотрению анормальных задач. Пусть X — векторное пространство, k — натуральное число. Рассмотрим задачу минимизации с ограничениями:

$$f_0(x) \to \min, \quad F(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь $F : X \to Y = \mathbb{R}^k$ — заданное отображение, а минимум заданной функции $f_0 : X \to \mathbb{R}$ ищется на допустимом множестве $M = \{x \in X : F(x) = 0\}$. Предположим, что $X = \mathbb{R}^n$ для некоторого натурального n, а f_0 и F дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, являющейся локальным минимумом задачи (1). Тогда в точке x_0 выполнен принцип Лагранжа. Для его формулировки введём в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \lambda^0 f_0(x) + \langle y^*, F(x)\rangle\,; \quad \lambda = \left(\lambda^0, y^*\right), \quad \lambda^0 \in \mathbb{R}, \quad y^* \in Y^* = Y,$$

где $(k+1)$-мерный вектор λ и его компоненты называются множителями Лагранжа.

Теорема (принцип Лагранжа). *Пусть x_0 является точкой локального минимума задачи (1). Тогда существует такой множитель Лагранжа λ, что*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \quad \lambda^0 \geqslant 0, \quad \lambda \neq 0. \tag{2}$$

Рассмотрим два случая. Пусть вначале точка x_0 является нормальной, т.е. $\operatorname{im} F'(x_0) = Y$. Тогда в силу (2) $\lambda^0 > 0$ и, следовательно, учитывая положительную однородность соотношений (2) по переменной λ, можем считать, что

$\lambda^0 = 1$. При этом существует единственный множитель Лагранжа, имеющий вид $\lambda = (1, y^*)$, причём для него выполняются классические необходимые условия второго порядка

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x] \geqslant 0 \quad \forall x \in X : F'(x_0)x = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим второй случай: точка x_0 анормальна, т.е. $\operatorname{im} F'(x_0) \neq Y$. Тогда в ней принцип Лагранжа (2) выполняется при $\lambda^0 = 0$ и произвольном $y^* \neq 0$, принадлежащем ядру сопряжённого оператора $\ker F'(x_0)^*$, которое является ненулевым, поскольку $\operatorname{im} F'(x_0) \neq Y$. Таким образом, в любом анормальной точке принцип Лагранжа автоматически выполняется независимо от минимизируемого функционала f_0 и является лишь прямым следствием определения анормальности. Поэтому принцип Лагранжа бесполезен при исследовании анормальной точки на экстремум. Что же касается классических необходимых условий второго порядка (3), то в анормальной точке минимума они могут нарушаться. Вот простой двумерный пример, подтверждающий это:

$$X = \mathbb{R}^2, \quad f_0(x) = -|x|^2 \to \min,$$

$$F_1(x) = x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad F_2(x) = x_1 x_2 = 0,$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. В этой задаче ограничением удовлетворяет единственная точка $x_0 = 0$, которая является точкой минимума. Однако в ней условия (3) не выполняются ни при каком удовлетворяющем (2) множителе Лагранжа λ. Итак, в анормальной точке принцип Лагранжа не является информативным, а классические необходимые условия второго порядка могут нарушаться. Поэтому возникает проблема нахождения содержательных необходимых условий минимума в задаче (1) без априорных предположений нормальности исследуемой точки. Такие задачи и называются анормальными.

2.3 Связь анормальности и квадратичных отображений

Как же связаны анормальные задачи и квадратичные отображения? Типичный пример экстремальной задачи, в которой экстремум всегда достигается в анормальной точке, даёт следующая классическая алгебраическая проблема. Даны $(k+1)$ симметричных $(n \times n)$-матриц A_i, $i = 0, \dots, k$, определяющих на $X = \mathbb{R}^n$ квадратичные формы $Q_i : Q_i(x) = \langle A_i x, x \rangle$. Требуется получить условия, при которых

$$Q_0(x) \geqslant 0 \quad \forall x : Q_1(x) = Q_2(x) = \dots = Q_k(x) = 0. \tag{4}$$

Здесь n, k — заданные натуральные числа. Эта задача представляет интерес как сама по себе, так и в применении к прикладным проблемам (см., например, [3]). Очевидно, что (4) равносильно тому, что в задаче минимизации

$$Q_0(x) \to \min, \quad Q_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \tag{5}$$

точка $x_0 = 0$ является минимумом. Однако эта точка автоматически анормальна (так как $F'(0) = 0$ и $\operatorname{im} F'(0) = 0 \neq Y = \mathbb{R}^k$).

Следовательно, можно отметить, что исследование квадратичных отображений содержит наиболее типичные проблемы, присущие анормальным задачам (см. [2]). Поэтому перейдём к рассмотрению квадратичных отображений и их свойств.

2.4 Постановка задачи

Задачей настоящей работы являлось ответить на некоторые открытые вопросы, связанные с теорией квадратичных отображений. Эти вопросы сформулированы в следующих двух разделах.

3 Основные полученные результаты

Сформулируем полученные результаты в виде трёх теорем, доказательства которых представлены в соответствующем разделе.

Теорема 1. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *— сюръективное квадратичное отображение. Тогда у него нет нетривиальных нулей.*

Теорема 2. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *— квадратичное отображение с вещественными коэффициентами. Тогда его образ* $Q\left(\mathbb{C}^n\right)$ *является выпуклым конусом.*

Теорема 3. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ *— квадратичное отображение, причём* $k \geqslant 2$. *Тогда его образ* $Q\left(\mathbb{C}^n\right)$ *является конусом, но не обязан быть выпуклым. Соответствующий пример даёт квадратичное отображение* $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, *определённое формулой*

$$Q(z) = (z_1^2 - z_2^2, z_1 z_2 + z_2^2).$$

4 Существующие результаты

Рассмотрим наиболее интересные и важные вопросы, связанные с квадратичными отображениями, в вещественном и комплексном случае.

4.1 Вещественные квадратичные отображения

Здесь $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$ для некоторых натуральных n и k, причём $n \geqslant k$ (чтобы имело смысл говорить о сюръективности).

1. Что можно сказать про множество $Q(\mathbb{R}^n)$? Оно является конусом (если $Q(x) = y \in Q(\mathbb{R}^n)$, то $Q\left(\sqrt{\lambda}x\right) = \lambda y \in Q(\mathbb{R}^n)$ для всех $\lambda > 0$). Но является ли этот конус выпуклым? В случае $k = 1$ ответ очевиден (в этом случае конус всегда является выпуклым). В случае $k = 2$ на этот вопрос в случае даёт следующая

   Теорема 4. *Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ — квадратичное отображение. Тогда его образ $Q(\mathbb{R}^n)$ является выпуклым конусом.*

   Её доказательство можно найти, например, в [3]. А в случае $k \geqslant 3$ существует

   Контрпример. *Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — квадратичное отображение, причём $k \geqslant 3$. Тогда его образ $Q(\mathbb{R}^n)$ является конусом, но не обязан быть выпуклым. Соответствующий пример даёт квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определённое формулой*

   $$Q(x) \equiv (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

   Доказательство. Пусть

   $$x = (x_1, x_2, x_3) = (0, -3, 1) \in \mathbb{R}^3,$$

   $$y = (y_1, y_2, y_3) = (2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

   Тогда

   $$a \equiv Q(x) = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3) = (0, 0, -3),$$

   $$b \equiv Q(y) = (y_1y_2, y_1y_3, y_2y_3) = (2, 2, 1).$$

   Пусть

   $$c = (a + b)/2 = (1, 1, -1).$$

Покажем, что не существует такого $z \in \mathbb{R}^3$, что $Q(z) = c$. Предположим от противного, что такое $z = (z_1, z_2, z_3)$ существует. Тогда получаем следующую систему:

$$\begin{cases} z_1 z_2 &= 1, \\ z_1 z_3 &= 1, \\ z_2 z_3 &= -1. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем, что $z_2/z_3 = 1$. Тогда, умножив полученное равенство на третье уравнение системы, получим, что $z_2^2 = -1$, что не имеет решения на вещественной прямой. Таким образом, не найдётся такого $z \in \mathbb{R}^3$, что $Q(z) = c$, то есть образ данного квадратического отображения не является выпуклым, что и требовалось доказать. $\square$

Тем самым, получаем, что данный вопрос является полностью изученным и имеет исчерпывающий ответ.

2. Всегда ли сюръективное квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ является устойчиво сюръективным? Ответ на этот вопрос, к сожалению, известен не для всех значений n и k (доказательства см. в [1]):

   - $n \geqslant 1, k = 1; n \geqslant 2, k = 2; n = k = 3 \Longrightarrow$ всегда;
   - $n = 5, k = 4; n \geqslant k > 4 \Longrightarrow$ не всегда (есть контрпримеры);
   - $n > 4, k = 3; n = k = 4 \Longrightarrow$ вопрос остаётся открытым.

   Здесь уместно привести теорему о достаточном условии устойчивой сюръективности.

   Теорема 5. *Пусть у квадратичного отображения* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *существует регулярный нуль. Тогда оно является устойчиво сюръективным.*

   Обратим внимание, что существование регулярного нуля возможно только в случае, когда $n > k$.

   Также для отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^3$ справедливы следующие утверждения.

   Теорема 6. *Пусть* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ *— сюръективное квадратичное отображение, не имеющее нетривиальных нулей. Тогда оно является устойчиво сюръективным.*

   Теорема 7. *Пусть* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ *— сюръективное квадратичное отображение, причём* $n \geqslant 5$. *Тогда оно имеет нетривиальный нуль.*

Доказательства всех этих теорем можно найти в [1].

3. Является ли условие устойчивой сюръективности квадратичного отображения условием общего положения среди всех сюръективных квадратичных отображений? А именно:

   (a) Пусть квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ является сюръективным, но не является устойчиво сюръективным. Можно ли его возмутить сколь угодно малым образом так, чтобы новое отображение стало устойчиво сюръективным? Иначе, необходимо выяснить, справедливо ли следующее

   Утверждение. *Пусть* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *— сюръективное квадратичное отображение, которое не является устойчиво сюръективным. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует квадратичное отображение* Δ *такое, что* $\|\Delta\| \leqslant \varepsilon$ *и* $Q + \Delta$ *является устойчиво сюръективным.*

   Данная часть вопроса пока остаётся открытой.

   (b) Пусть квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ является устойчиво сюръективным. Будет ли достаточно мало возмущенное отображение также устойчиво сюръективным? На этот вопрос ответ очевиден: да, будет.

4. Пусть k фиксировано. Введём функцию $N(k)$, которая равна минимальному n, при котором у отображения $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ гарантированно существует нетривиальный нуль. Что можно сказать о её значениях, о поведении на бесконечности? Из [1] известно, что $N(2) = 3$, $N(3) = 5$, а также известна оценка $N(k) < k^2$.

5. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — сюръективное квадратичное отображение. Может ли у него существовать нетривиальный нуль? Данный вопрос является полностью решённым (см. [1]):

   - $n \leqslant 3 \Longrightarrow$ нет, не может;
   - $n \geqslant 4 \Longrightarrow$ да, может (существуют примеры).

6. Рассматривается сюръективное квадратичное отображение $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, у которого есть нетривиальные нули. Из ответа на предыдущий вопрос следует, что $n \geqslant 4$. Можно ли такое отображение возмутить малым образом

так, чтобы полученное квадратичное отображение не имело нетривиальных нулей? Можно ли это отображение оставить при таком возмущении сюръективным?

Данные вопросы пока являются полностью открытыми.

4.2 Комплексные квадратичные отображения

Здесь $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^k$ для некоторых натуральных n и k, причём $n \geqslant k$ и матрицы $A_i, i = 1, \ldots, k$, составляющие отображение $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ (то есть такие, что $Q_i(x) = \langle A_i x, x\rangle\,,\ i = 1, \ldots, k$), являются вещественными матрицами.

Комплексные квадратичные отображения с вещественными коэффициентами представляют собой самостоятельный математический интерес, так как один из методов исследования квадратичных отображений включает в себя использование алгебраической геометрии, наиболее значимые результаты которой получены именно в комплексном случае.

Для комплексных квадратичных отображений имеют место те же вопросы, что и перечисленные выше для вещественных отображений, но большинство из них являются полностью открытыми, поэтому сформулируем лишь те, для которых получены конкретные результаты.

1. Что можно сказать про множество $Q\left(\mathbb{C}^n\right)$? Оно является конусом, но всегда ли выпуклым? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дают теоремы 2 и 3, сформулированные выше.

2. Пусть $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — сюръективное квадратичное отображение. Может ли у него существовать нетривиальный нуль? Данный вопрос также является полностью решённым (см. [1], а также теорему 1, сформулированную выше).

    - $n \leqslant 2 \Longrightarrow$ нет, не может;
    - $n \geqslant 3 \Longrightarrow$ да, может (существуют примеры).

    Пример для $k = 3$ был впервые предложен П. С. Колесниковым. Предложенное им отображение имеет следующий вид:

    $$Q(z) = (z_1 z_3 + z_2^2, z_2 z_3 + z_1^2, z_1^2 + z_2^2), \quad z = (z_1, z_2, z_3).$$

    В [1] доказывается, что оно сюръективно, при этом вектор $(0, 0, 1)$ является его нетривиальным нулём.

5 Доказательства основных результатов

5.1 Доказательство теоремы 1 и некоторые примеры

Общий вид квадратичного отображения из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2$:

$$Q(z_1, z_2) = \left(a_1 z_1^2 + b_1 z_1 z_2 + c_1 z_2^2, a_2 z_1^2 + b_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2\right),$$

причём для сюръективности необходимо, чтобы выполнялись условия $|a_1| + |b_1| + |c_1| > 0$, $|a_2| + |b_2| + |c_2| > 0$ (назовём это необходимыми условиями сюръективности). В дальнейших рассуждениях предполагается, что отображение Q имеет в точности такой вид.

Утверждение 1. *Пусть $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — сюръективное квадратичное отображение, имеющее нетривиальный нуль (если такое существует). Тогда*

1. $|a_1| + |a_2| > 0$;
2. $|c_1| + |c_2| > 0$;
3. $|b_1| + |b_2| > 0$.

Доказательство. Докажем по пунктам.

1. Предположим противное: пусть $a_1 = a_2 = 0$. Тогда отображение Q приобретает вид:
$$Q(z) = \left(b_1 z_1 z_2 + c_1 z_2^2, b_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2\right)$$
Заметим, что у данного отображения есть нетривиальный нуль $\hat{z} = (1, 0)$. Докажем, что отображение Q не является сюръективным. Для этого будем в каждом рассматриваемом случае выписывать уравнение $Q(z) = y$ относительно z для некоторой правой части y и доказывать, что уравнение решений не имеет (что и будет говорить, что отображение не является сюръективным, далее это упоминать не будем). Рассмотрим два случая: $c_1 = 0$ и $c_1 \neq 0$.
    (a) Пусть $c_1 = 0$. Тогда по необходимому условию сюръективности $b_1 \neq 0$. Докажем, что $b_2 \neq 0$. Пусть $b_2 = 0$. Тогда по необходимому условию сюръективности $c_2 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $Q(z) = (1, 0)$. Ему эквивалентна система:
$$\begin{cases} b_1 z_1 z_2 &= 1, \\ c_2 z_2^2 &= 0. \end{cases}$$

Тогда из второго уравнения системы вытекает, что $z_2 = 0$, но это противоречит первому уравнению (получаем, что $0 = 1$). Итак, $b_2 \neq 0$. Докажем, что $c_2 \neq 0$. Предположим, что $c_2 = 0$. Тогда получим, что $Q(z) = (b_1 z_1 z_2, b_2 z_1 z_2)$ для ненулевых b_1 и b_2. Отображение Q не является сюръективным, так как уравнение $Q(z) = (0, 1)$ не имеет решений относительно z. Итак, $c_2 \neq 0$. Рассмотрим следующее уравнение: $Q(z) = (b_1, b_2)$. Оно эквивалентно системе:

$$\begin{cases} b_1 z_1 z_2 & = & b_1, \\ b_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2 & = & b_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы вытекает, что $z_1 z_2 = 1$ (так как $b_1 \neq 0$), но тогда подставляя данное выражение во второе уравнение, получим, что $c_2 z_2^2 = 0$, то есть $z_2 = 0$ (так как $c_2 \neq 0$), что противоречит полученному результату $z_1 z_2 = 1$. Итак, мы доказали, что случай $c_1 = 0$ невозможен.

(b) Пусть $c_1 \neq 0$. Покажем, что $b_1 \neq 0$. Предположим, что $b_1 = 0$. Рассмотрим уравнение $Q(z) = (0, 1)$. То есть

$$\begin{cases} c_1 z_2^2 & = & 0, \\ b_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2 & = & 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $z_2 = 0$, но подставляя это во второе уравнение, получим $0 = 1$. Тем самым, $b_1 \neq 0$. По аналогичной причине получаем, что $b_2 \neq 0$ (здесь $Q(z) = (1, 0)$ не имеет решения). Рассмотрим уравнение $Q(z) = (b_1, b_2)$:

$$\begin{cases} b_1 z_1 z_2 + c_1 z_2^2 & = & b_1, \\ b_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2 & = & b_2 \end{cases}$$

Заметим, что $z_2 \neq 0$ (иначе получили бы, что $0 = b_1 \neq 0$). Умножив левую часть первого уравнения системы на правую часть второго и правую часть первого уравнения на левую часть второго, получим:

$$b_2(b_1 z_1 z_2 + c_1 z_2^2) = b_1(b_2 z_1 z_2 + c_2 z_2^2).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим следующее уравнение:

$$(b_2 c_1 - b_1 c_2) z_2^2 = 0.$$

Так как $z_2 \neq 0$, то получаем, что $b_2c_1 = b_1c_2$, или

$$c_2 = \frac{b_2}{b_1}c_1 \neq 0.$$

Но тогда получаем, что

$$q_2(z) \equiv b_2z_1z_2 + c_2z_2^2 = \frac{b_2}{b_1}b_1z_1z_2 + \frac{b_2}{b_1}c_1z_2^2 = \frac{b_2}{b_1}(b_1z_1z_2 + c_1z_2^2) \equiv \frac{b_2}{b_1}q_1(z).$$

Тогда

$$Q(z) = \left(q_1(z), \frac{b_2}{b_1}q_1(z)\right).$$

Данное отображение не является сюръективным, так как уравнение $Q(z) = (0, 1)$ не разрешимо относительно z. Итак, первый пункт доказан.

2. Этот пункт доказывается аналогично предыдущему пункту с точностью до замены «a» на «c» (и наоборот).

3. Предположим, что $b_1 = b_2 = 0$. Тогда отображение Q приобретает вид:

$$Q(z) = (a_1z_1^2 + c_1z_2^2, a_2z_1^2 + c_2z_2^2).$$

В условии утверждения сказано, что у отображения Q есть нетривиальный нуль $\hat{z}$. Выясним, когда это возможно. Итак,

$$\begin{cases} a_1\hat{z}_1^2 + c_1\hat{z}_2^2 &= 0, \\ a_2\hat{z}_1^2 + c_2\hat{z}_2^2 &= 0. \end{cases} \tag{6}$$

Предположим, что $a_1 = 0$. Тогда в силу необходимого условия сюръективности $c_1 \neq 0$, следовательно, из первого уравнения системы (6) получаем, что $\hat{z}_2 = 0$. Но тогда из второго уравнения вытекает, что $a_2\hat{z}_1^2 = 0$, то есть либо $a_2 = 0$, либо $\hat{z}_1 = 0$, но $\hat{z}_1 \neq 0$ в силу нетривиальности $\hat{z}$, а $a_2 \neq 0$ в силу доказанного первого пункта утверждения.

Аналогично доказывается, что $a_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Более того, из этого вытекает, что $\hat{z}_1 \neq 0$ и $\hat{z}_2 \neq 0$ (в противном случае из равенства нулю одного из них вытекало бы равенство нулю второго из них, что противоречит нетривиальности $\hat{z}$). Домножим первое уравнение системы (6) на a_2, второе — на a_1 и вычтем второе уравнение из первого:

$$(c_1a_2 - c_2a_1)z_2^2 = 0$$

Так как $\hat{z}_2 \neq 0$, то получаем, что

$$c_1 a_2 - c_2 a_1 = 0,$$

или

$$c_2 = \frac{a_2}{a_1} c_1$$

Но тогда

$$q_2(z) \equiv a_2 z_1^2 + c_2 z_2^2 = \frac{a_2}{a_1} a_1 z_1^2 + \frac{a_2}{a_1} c_1 z_2^2 = \frac{a_2}{a_1}(a_1 z_1^2 + c_1 z_2^2) \equiv \frac{a_2}{a_1} q_1(z),$$

то есть

$$Q(z) = \left(q_1(z), \frac{a_2}{a_1} q_1(z) \right),$$

из чего следует, что отображение Q не является сюръективным в силу того, что уравнение $Q(z) = (0, 1)$ не разрешимо относительно z.

Утверждение доказано. ☐

Утверждение 2. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *— сюръективное квадратичное отображение, имеющее нетривиальный нуль (если такое существует). Тогда*

1. $b_1^2 - 4a_1 c_1 \neq 0$;
2. $b_2^2 - 4a_2 c_2 \neq 0$;

Доказательство. Докажем по пунктам.

1. Рассмотрим два случая: $a_1 = 0$ и $a_1 \neq 0$.

   (a) Пусть $a_1 = 0$. Из предыдущего утверждения следует, что $a_2 \neq 0$. При этом получаем, что $b_1^2 - 4a_1 c_1 = b_1^2$. Тем самым, надо доказать, что $b_1 \neq 0$. Предположим, что $b_1 = 0$. Тогда из необходимого условия сюръективности вытекает, что $c_1 \neq 0$. Рассмотрим нетривиальный нуль $\hat{z}$ отображения Q. Он удовлетворяет системе тождеств

   $$\begin{cases} c_1 \hat{z}_2^2 &= 0, \\ a_2 \hat{z}_1^2 + b_2 \hat{z}_1 \hat{z}_2 + c_2 \hat{z}_2^2 &= 0. \end{cases}$$

   Из первого тождества системы следует, что $\hat{z}_2 = 0$. Подставляя это во второе тождество, получаем, что $a_2 \hat{z}_1^2 = 0$, то есть $\hat{z}_1 = 0$ (так как $a_2 \neq 0$), что противоречит нетривиальности $\hat{z}$. Итак, получили, что $b_1^2 = b_1^2 - 4a_1 c_1 \neq 0$.

(b) Пусть $a_1 \neq 0$. Предположим от противного, что $b_1^2 - 4a_1c_1 = 0$. Рассмотрим уравнение $Q(z) = (0, 1)$. Из сюръективности Q следует, что данное уравнение разрешимо относительно z. Распишем это уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} a_1z_1^2 + b_1z_1z_2 + c_1z_2^2 & = & 0, \\ a_2z_1^2 + b_2z_1z_2 + c_2z_2^2 & = & 1. \end{cases} \tag{7}$$

Предположим, что $z_2 = 0$. Тогда из первого уравнения системы (7) получаем, что $a_1z_1^2 = 0$, причём $a_1 \neq 0$, то есть $z_1 = 0$. Но подставляя $z_1 = z_2 = 0$ во второе уравнение системы (7), получаем $0 = 1$. Следовательно, $z_2 \neq 0$. Тогда разделим первое уравнение системы (7) на z_2^2:

$$a_1\frac{z_1^2}{z_2^2} + b_1\frac{z_1}{z_2} + c_1 = 0.$$

В силу того, что дискриминант данного квадратного относительно z_1/z_2 уравнения равен нулю, то получаем, что оно имеет единственный корень $z_1/z_2 = b_1/2a_1$, то есть

$$2a_1z_1 = b_1z_2, \tag{8}$$

причём точки (z_1, z_2), удовлетворяющие условию (8), с точностью до мультипликативной константы совпадают с нетривиальным нулём $\hat{z}$ отображения Q, более того, они все являются нетривиальными нулями этого отображения. Но тогда при подстановке этих точек во второе уравнение системы (7) левая часть этого уравнения обнуляется, и получаем $0 = 1$. Следовательно, в случае $a_1 \neq 0$ также выполняется условие $b_1^2 - 4a_1c_1 \neq 0$.

2. Данный пункт доказывается аналогично предыдущему с точностью до замены «1» на «2» (и наоборот).

Утверждение доказано. □

Введём некоторые обозначения.

$$U = b_1b_2 - 2(a_1c_2 + a_2c_1),$$

$$L_1 = b_1^2 - 4a_1c_1, \quad L_2 = b_2^2 - 4a_2c_2,$$

$$D = U^2 - L_1L_2 = 4\left(a_1^2c_2^2 - 2a_1a_2c_1c_2 + a_2^2c_1^2 - a_1b_1b_2c_2 + a_1b_2^2c_1 + a_2b_1^2c_2 - a_2b_1b_2c_1\right),$$

$$
\begin{aligned}
U^+ &= U + \sqrt{D}, & U^- &= U - \sqrt{D},\\
A_1^+ &= U^+ a_1 - L_1 a_2, & A_1^- &= U^- a_1 - L_1 a_2,\\
A_2^+ &= L_2 a_1 - U^+ a_2, & A_2^- &= L_2 a_1 - U^- a_2,\\
B_1^+ &= U^+ b_1 - L_1 b_2, & B_1^- &= U^- b_1 - L_1 b_2,\\
B_2^+ &= L_2 b_1 - U^+ b_2, & B_2^- &= L_2 b_1 - U^- b_2,\\
C_1^+ &= U^+ c_1 - L_1 c_2, & C_1^- &= U^- c_1 - L_1 c_2,\\
C_2^+ &= L_2 c_1 - U^+ c_2, & C_2^- &= L_2 c_1 - U^- c_2,
\end{aligned}
$$

Утверждение 3. *Для введённых выше обозначений справедливо:*

1. $\left(B_1^+\right)^2 - 4A_1^+C_1^+ = 0,$
2. $\left(B_1^-\right)^2 - 4A_1^-C_1^- = 0,$
3. $\left(B_2^+\right)^2 - 4A_2^+C_2^+ = 0,$
4. $\left(B_2^-\right)^2 - 4A_2^-C_2^- = 0.$

Доказательство. Докажем по пунктам.

1. Докажем сначала, что $(U^+)^2 - 2U^+U + L_1L_2 = 0$. Итак,

   $$\left(U^+\right)^2 - 2U^+U + L_1L_2 = \left(U + \sqrt{D}\right)^2 - 2\left(U + \sqrt{D}\right)U + L_1L_2 =$$

   $$= U^2 + 2U\sqrt{D} + D - 2U^2 - 2U\sqrt{D} + L_1L_2 = -U^2 + L_1L_2 + D = 0.$$

   Тогда

   $$\left(B_1^+\right)^2 - 4A_1^+C_1^+ = \left(U^+b_1 - L_1b_2\right)^2 - 4\left(U^+a_1 - L_1a_2\right)\left(U^+c_1 - L_1c_2\right) =$$

   $$= \left(U^+\right)^2(b_1^2 - 4a_1c_1) - 2U^+L_1b_1b_2 + L_1^2(b_2^2 - 4a_2c_2) - 4U^+L_1(a_1c_2 + a_2c_1) =$$
   $$= L_1\left(\left(U^+\right)^2 - 2U^+U + L_1L_2\right) = 0.$$

2. Аналогично, легко проверить, что $(U^-)^2 - 2U^-U + L_1L_2 = 0$:

   $$\left(U^-\right)^2 - 2U^-U + L_1L_2 = \left(U - \sqrt{D}\right)^2 - 2\left(U - \sqrt{D}\right)U + L_1L_2 =$$

   $$= U^2 - 2U\sqrt{D} + D - 2U^2 + 2U\sqrt{D} + L_1L_2 = -U^2 + L_1L_2 + D = 0.$$

   И тогда, аналогично предыдущему пункту,

   $$\left(B_1^-\right)^2 - 4A_1^-C_1^- = L_1\left(\left(U^-\right)^2 - 2U^-U + L_1L_2\right) = 0.$$

3. Имеем:

$$\left(B_2^+\right)^2 - 4A_2^+C_2^+ = \left(L_2b_1 - U^+b_2\right)^2 - 4\left(L_2a_1 - U^+a_2\right)\left(L_2a_1 - U^+a_2\right) =$$

$$= L_2^2\left(b_1^2 - 4a_1c_1\right) - 2L_2U^+b_1b_2 + \left(U^+\right)^2\left(b_2^2 - 4a_2c_2\right) + 4L_2U^+(a_1c_2 + a_2c_1) =$$

$$= L_2\left(\left(U^+\right)^2 - 2U^+U + L_1L_2\right) = 0.$$

4. Аналогично предыдущему,

$$\left(B_2^-\right)^2 - 4A_2^-C_2^- = L_2\left(\left(U^-\right)^2 - 2U^-U + L_1L_2\right) = 0.$$

Утверждение доказано. □

Следствие. *Для введённых выше обозначений, для любых $i \in \{1,2\}$ и для любых $s \in \{+,-\}$ справедливо:*

1. *Если $B_i^s \neq 0$, то $A_i^s \neq 0$ и $C_i^s \neq 0$.*

2. *Если $B_i^s = 0$, то хотя бы одно из чисел A_i^s, C_i^s равно нулю.*

Введём множества $I_A(Q)$ и $I_C(Q)$: для $i^* \in \{1,2\}$ и для $s^* \in \{+,-\}$

$$(i^*, s^*) \in I_A(Q) \Longleftrightarrow A_{i^*}^{s^*} \neq 0,$$

$$(i^*, s^*) \in I_C(Q) \Longleftrightarrow C_{i^*}^{s^*} \neq 0.$$

Утверждение 4. *Пусть $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — сюръективное квадратичное отображение, имеющее нетривиальный нуль (если такое существует), причём $D \neq 0$. Тогда множество*

$$I_A(Q) \cap I_C(Q)$$

не пусто.

Доказательство. Из утверждения 1 известно, что либо $b_1 \neq 0$, либо $b_2 \neq 0$ (либо оба, но это не играет роли).

1. Пусть $b_1 \neq 0$. Тогда

$$B_1^+ - B_1^- = U^+b_1 - L_1b_2 - \left(U^-b_1 - L_1b_2\right) =$$

$$= b_1\left(U^+ - U^-\right) = b_1\left(U + \sqrt{D} - U + \sqrt{D}\right) = 2b_1\sqrt{D} \neq 0,$$

   то есть $B_1^+ \neq B_1^-$, следовательно, одновременно нулю они равняться не могут, то есть найдётся такое $s^* \in \{+,-\}$, что $B_1^{s^*} \neq 0$, но тогда по следствию из утверждения 3 вытекает, что $A_1^{s^*} \neq 0$ и $C_1^{s^*} \neq 0$, то есть $(1, s^*) \in I_A(Q) \cap I_C(Q)$.

2. Пусть $b_2 \neq 0$. Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что найдётся такое $s^* \in \{+,-\}$, что $(2,s^*) \in I_A(Q) \cap I_C(Q)$.

Утвеждение доказано. ☐

Для любого $i \in \{1,2\}$ через $\overline{i}$ обозначим элемент одноточечного множества $\{1,2\}\backslash\{i\}$. Аналогично, для любого $s \in \{+,-\}$ через $\overline{s}$ обозначим элемент одноточечного множества $\{+,-\}\backslash\{s\}$.

Утверждение 5. *Пусть $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — сюръективное квадратичное отображение, имеющее нетривиальный нуль (если такое существует), причём $D = 0$. Тогда множество*

$$I_A(Q) \cap I_C(Q)$$

не пусто.

Доказательство. Заметим, что в случае $D = 0$ для любого $i \in \{1,2\}$

$$A_i^+ = A_i^- \equiv A_i,$$

$$B_i^+ = B_i^- \equiv B_i,$$

$$C_i^+ = C_i^- \equiv C_i.$$

Пусть найдётся такое $i^* \in \{1,2\}$, что $B_{i^*} \neq 0$. Тогда в силу следствия из утверждения 3 для любого $s \in \{+,-\}$ элемент $(i^*,s) \in I_A(Q) \cap I_C(Q)$. Теперь предположим, что $B_1 = B_2 = 0$. Докажем, что это невозможно. Покажем сначала, что для любых $i \in \{1,2\}$ невозможна ситуация, когда $A_i = C_i = 0$. Предположим от противного, что это так для некоторого $i^* \in \{1,2\}$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{lcl} A_{i^*} &=& 0, \\ B_{i^*} &=& 0, \\ C_{i^*} &=& 0; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} Ua_{i^*} &=& L_{i^*}a_{\overline{i^*}}, \\ Ub_{i^*} &=& L_{i^*}b_{\overline{i^*}}, \\ Uc_{i^*} &=& L_{i^*}c_{\overline{i^*}}. \end{array}\right.$$

Из утверждения 2 известно, что $L_1 \neq 0$ и $L_2 \neq 0$, значит, во-первых, $U \neq 0$ (из необходимого условия сюръективности), а во-вторых,

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{\overline{i^*}} &=& \dfrac{U}{L_{i^*}}a_{i^*}, \\ b_{\overline{i^*}} &=& \dfrac{U}{L_{i^*}}b_{i^*}, \\ c_{\overline{i^*}} &=& \dfrac{U}{L_{i^*}}c_{i^*}. \end{array}\right.$$

Тогда

$$q_{\overline{i^*}}(z) \equiv a_{\overline{i^*}}z_1^2 + b_{\overline{i^*}}z_1z_2 + c_{\overline{i^*}}z_2^2 = \frac{U}{L_{i^*}}\left(a_{i^*}z_1^2 + b_{i^*}z_1z_2 + c_{i^*}z_2^2\right) \equiv \frac{U}{L_{i^*}}q_{i^*}(z).$$

Тем самым, отображение Q состоит из линейно зависимых составляющих q_{i^*} и $q_{\overline{i^*}}$, поэтому хотя бы одно из уравнений $Q(z) = (1, 0)$ и $Q(z) = (0, 1)$ не имеет решений относительно z (то есть отображение Q не является сюръективным). Получаем, что для каждого $i \in \{1, 2\}$ хотя бы одно из чисел A_i, C_i отлично от нуля. Случай $A_i \neq 0$ и $C_i \neq 0$ невозможен в силу следствия из утверждения 3. Тогда для любого $i \in \{1, 2\}$ одно из чисел A_i, C_i равно нулю, а одно не равно нулю. Покажем, что и это невозможно. Пусть, ради определённости, для некоторого $i^* \in \{1, 2\}$ $A_{i^*} = 0$, $C_{i^*} \neq 0$. Имеем следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_{i^*} & = & 0, \\ B_1 & = & 0, \\ B_2 & = & 0, \\ C_{i^*} & \neq & 0, \\ D & = & 0. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} Ua_{i^*} & = & L_{i^*}a_{\overline{i^*}}, \\ Ub_1 & = & L_1b_2, \\ Ub_2 & = & L_2b_1, \\ Uc_{i^*} & \neq & L_{i^*}c_{\overline{i^*}}, \\ D & = & 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

Заметим, что из второго и третьего тождества системы 9 следует, что $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ (от противного: пусть одно из них равно нулю, тогда в силу того, что $L_i \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$, получаем, что второе тоже равно нулю, что невозможно в силу утверждения 1). Из них же следует следующее тождество:

$$\frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{L_1}{L_2} \iff \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{b_1^2 - 4a_1c_1}{b_2^2 - 4a_2c_2}.$$

Тогда

$$b_1^2b_2^2 - 4a_2b_1^2c_2 = b_1^2b_2^2 - 4a_1b_2^2c_1 \iff a_2b_1^2c_2 = a_1b_2^2c_1. \tag{10}$$

Вернёмся к тождеству $Ub_{i^*} = L_{i^*}b_{\overline{i^*}}$. Оно эквивалентно тому, что

$$b_{i^*}\left(b_{i^*}b_{\overline{i^*}} - 2\left(a_1c_2 + a_2c_1\right)\right) = b_{\overline{i^*}}\left(b_{i^*}^2 - 4a_{i^*}c_{i^*}\right) \iff$$

$$\iff 2a_{i^*}b_{\overline{i^*}}c_{i^*} = b_{i^*}\left(a_1c_2 + a_2c_1\right). \tag{11}$$

Преобразуем выражение для D и приравняем его к нулю:

$$D = 4\left(a_1^2c_2^2 - 2a_1a_2c_1c_2 + a_2^2c_1^2 - a_1b_1b_2c_2 + a_1b_2^2c_1 + a_2b_1^2c_2 - a_2b_1b_2c_1\right) =$$

$$= 4\left(\left(a_1c_2 - a_2c_1\right)^2 - b_1b_2\left(a_1c_2 + a_2c_1\right) + a_1b_2^2c_1 + a_2b_1^2c_2\right) = \{\text{формула (11)}\} =$$

$$= 4\left(\left(a_1c_2 - a_2c_1\right)^2 - 2a_{i^*}b^2_{\overline{i^*}}c_{i^*} + a_{i^*}b^2_{\overline{i^*}}c_{i^*} + a_{\overline{i^*}}b^2_{i^*}c_{\overline{i^*}}\right) = \{\text{формула (10)}\} =$$

$$= 4\left(a_1c_2 - a_2c_1\right)^2 = 0.$$

Получаем, что

$$a_1c_2 = a_2c_1. \tag{12}$$

Вспомним, что у нас есть условие $Ua_{i^*} = L_{i^*}a_{\overline{i^*}}$. Оно эквивалентно тому, что

$$a_{i^*}\left(b_1b_2 - 2\left(a_{i^*}c_{\overline{i^*}} + a_{\overline{i^*}}c_{i^*}\right)\right) = a_{\overline{i^*}}\left(b^2_{i^*} - 4a_{i^*}c_{i^*}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b_1b_2a_{i^*} - 2a^2_{i^*}c_{\overline{i^*}} + 2a_{i^*}a_{\overline{i^*}}c_{i^*} - b^2_{i^*}a_{\overline{i^*}} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2a_{i^*}\left(a_1c_2 - a_2c_1\right) = b_{i^*}\left(a_1b_2 - a_2b_1\right).$$

Ранее было выяснено, что $b_{i^*} \neq 0$, но по формуле (12) $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, поэтому получаем, что

$$a_1b_2 = a_2b_1. \tag{13}$$

Из формулы (13) следует, что $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$ (равенство одного нулю влечёт за собой равенство другого, что невозможно в силу утверждения 1). Также из формул (12) и (13) путём перекрёстного умножения следует, что

$$b_1c_2 = b_2c_1. \tag{14}$$

Рассмотрим последнее условие системы (9): $Uc_{i^*} \neq L_{i^*}c_{\overline{i^*}}$. Оно эквивалетно тому, что

$$c_{i^*}\left(b_1b_2 - 2\left(a_{i^*}c_{\overline{i^*}} + a_{\overline{i^*}}c_{i^*}\right)\right) \neq c_{\overline{i^*}}\left(b^2_{i^*} - 4a_{i^*}c_{i^*}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b_1b_2c_{i^*} + 2a_{i^*}c_{\overline{i^*}}c_{i^*} - 2a_{\overline{i^*}}c^2_{i^*} - b^2_{i^*}c_{\overline{i^*}} \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2c_{i^*}\left(a_1c_2 - a_2c_1\right) \neq b_{i^*}\left(b_1c_2 - b_2c_1\right).$$

Но из формул (12) и (14) следует, что обе части выписанного неравенства равны нулю, чего не может быть. Следовательно, случай $A_{i^*} = 0$, $C_{i^*} \neq 0$ невозможен. Аналогично доказывается, что случай $A_{i^*} \neq 0$, $C_{i^*} = 0$ тоже невозможен (получаем формулы (12) и (14), из которых выводится формула (13), которая противоречит условию $A_{i^*} \neq 0$).

Таким образом, доказано, что случай $B_1 = B_2 = 0$ невозможен, и утверждение доказано.

□

Из утверждений 4 и 5 следует

Утверждение 6. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *— сюръективное квадратичное отображение, имеющее нетривиальный нуль (если такое существует). Тогда множество* $I_A(Q) \cap I_C(Q)$ *не пусто.*

Следствие. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *— сюръективное квадратичное отображение, причём множество* $I_A(Q) \cap I_C(Q)$ *является пустым. Тогда отображение* Q *не имеет нетривиальных нулей.*

Перейдём к достаточному условию отсутствия нетривиальных нулей у сюръективного квадратичного отображения из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2$. Далее мы покажем, что оно не является необходимым и впоследствии улучшим результат этого утверждения.

Утверждение 7. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *— сюръективное квадратичное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\left[\begin{array}{l} \exists\,(i^*, s^*) \in I_A(Q) : \\ \left[\begin{array}{rcl} a_{i^*}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{i^*}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{i^*} & = & 0, \\ \left(a_{i^*}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{i^*}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{i^*}\right)U^{s^*} & \neq & \left(a_{\overline{i^*}}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{\overline{i^*}}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{\overline{i^*}}\right)L_{i^*}; \end{array}\right. \\ \\ \exists\,(i^*, s^*) \in I_C(Q) : \\ \left[\begin{array}{rcl} a_{i^*} - b_{i^*}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{C_{i^*}^{s^*}} + c_{i^*}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(C_{i^*}^{s^*}\right)^2} & = & 0, \\ \left(a_{i^*} - b_{i^*}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{2C_{i^*}^{s^*}} + c_{i^*}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(C_{i^*}^{s^*}\right)^2}\right)U^{s^*} & \neq & \left(a_{\overline{i^*}} - b_{\overline{i^*}}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{2C_{i^*}^{s^*}} + c_{\overline{i^*}}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(C_{i^*}^{s^*}\right)^2}\right)L_{i^*}. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{15}$$

Тогда у него нет нетривиальных нулей.

Доказательство. Предположим, что у отображения Q есть нетривиальный нуль $\hat{z}$. Докажем, что оно не является сюръективным. Пусть верно первое условие из совокупности (15) (для второго доказательство аналогично). Рассмотрим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{i^*}z_1^2 + b_{i^*}z_1z_2 + c_{i^*}z_2^2 & = & L_{i^*}, \\ a_{\overline{i^*}}z_1^2 + b_{\overline{i^*}}z_1z_2 + c_{\overline{i^*}}z_2^2 & = & U^{s^*}. \end{array}\right. \tag{16}$$

Очевидно, этой системе соответствует либо уравнение $Q(z) = (L_1, U^{s^*})$, либо уравнение $Q(z) = (U^{s^*}, L_2)$. Тем самым, если мы покажем, что эта система не имеет решений относительно z, то отображение Q не является сюръективным.

Левую часть первого уравнения системы (16) домножим на правую часть второго, а правую часть первого на левую часть второго. Получим следующее уравнение:

$$U^{s^*}\left(a_{i^*}z_1^2 + b_{i^*}z_1z_2 + c_{i^*}z_2^2\right) = L_{i^*}\left(a_{\overline{i^*}}z_1^2 + b_{\overline{i^*}}z_1z_2 + c_{\overline{i^*}}z_2^2\right).$$

Приводя подобные слагаемые, получим следующее уравнение:

$$A_{i^*}^{s^*}z_1^2 + B_{i^*}^{s^*}z_1z_2 + C_{i^*}^{s^*}z_2^2 = 0.$$

Как было доказано в утверждении 3, $\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2 - 4A_{i^*}^{s^*}C_{i^*}^{s^*} = 0$. Тогда получаем, что

$$2A_{i^*}^{s^*}z_1 + B_{i^*}^{s^*}z_2 = 0.$$

В силу того, что $A_{i^*}^{s^*} \neq 0$ (так как $(i^*, s^*) \in I_A(Q)$), то можно записать, что

$$z_1 = -\frac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}}z_2.$$

Подставляя полученный результат в систему (16), получим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(a_{i^*}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{i^*}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{i^*}\right)z_2^2 & = & L_{i^*}, \\ \left(a_{\overline{i^*}}\dfrac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{\overline{i^*}}\dfrac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{\overline{i^*}}\right)z_2^2 & = & U^{s^*}. \end{array}\right. \tag{17}$$

Из этой системы получаем некоторые следствия.

1. В силу того, что $L_{i^*} \neq 0$ (это известно из утверждения 2), то
$$a_{i^*}\frac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{i^*}\frac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{i^*} \neq 0.$$

2. По той же причине $z_2 \neq 0$.

3. Путём перекрёстного умножения из системы (17) в силу того, что $z_2 \neq 0$, получим тождество
$$\left(a_{i^*}\frac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{i^*}\frac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{i^*}\right)U^{s^*} = \left(a_{\overline{i^*}}\frac{\left(B_{i^*}^{s^*}\right)^2}{4\left(A_{i^*}^{s^*}\right)^2} - b_{\overline{i^*}}\frac{B_{i^*}^{s^*}}{2A_{i^*}^{s^*}} + c_{\overline{i^*}}\right)L_{i^*}.$$

Как мы видим, полученные условия на коэффициенты отображения Q противоречат условиям теоремы, следовательно, система (16) решений относительно z не имеет, что говорит о том, что отображение Q не является сюръективным. Утверждение доказано. □

Согласно утверждениям 1–2, следствию из утверждения 6 и утверждению 7, можно предложить следующий алгоритм проверки того, имеет ли сюръективное отображение $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ нетривиальный нуль:

1. Если $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 0$ или $c_1 = c_2 = 0$, то отображение не имеет нетривиальных нулей.
2. Если $b_1^2 - 4a_1c_1 = 0$ или $b_2^2 - 4a_2c_2 = 0$, то отображение не имеет нетривиальных нулей.
3. Находим множества $I_A(Q)$ и $I_C(Q)$.
4. Если хотя бы одно из множеств $I_A(Q)$ и $I_C(Q)$ пусто (или пусто их пересечение), то отображение не имеет нетривиальных нулей.
5. Если их пересечение не пусто, то проверяем условие утверждения 7. Если оно выполнено, то отображение нетривиальных нулей не имеет. Ситуация, когда это условия не выполняются, возможна, это будет продемонстрировано в одном из следующих примеров. В этом случае данный алгоритм не может дать однозначного ответа.

Пример 1. *Рассмотрим отображение $Q(z) = (z_1^2, z_2^2)$. Очевидно, оно является сюръективным без нетривиальных нулей. Предположим, что мы знаем только о его сюръективности. Рассмотрим это отображение с точки зрения алгоритма.*

1. $b_1 = b_2 = 0$ — *уже из этого можно сделать вывод, что у отображения нет нетривиальных нулей.*
2. $L_1 = L_2 = 0$ — *из этого опять можно сделать вывод, что у отображения нет нетривиальных нулей.*
3. *Посчитаем множества $I_A(Q)$ и $I_C(Q)$.*

$$U = 0 - 2 \times 1 = -2, \quad D = U^2 - L_1L_2 = 4,$$

$$U^+ = 0, \quad U^- = -4,$$

$$A_1^+ = 0, \quad A_1^- = -4, \quad A_2^+ = 0, \quad A_2^- = 0,$$

$$B_1^+ = 0, \quad B_1^- = 0, \quad B_2^+ = 0, \quad B_2^- = 0,$$

$$C_1^+ = 0, \quad C_1^- = 0, \quad C_2^+ = 0, \quad C_2^- = 4.$$

Итак,

$$I_A(Q) = \{(1,-)\}\,, \quad I_C(Q) = \{(2,-)\}\,.$$

4. *Их пересечение пусто — опять можно сделать вывод, что отображение не имеет нетривиальных нулей.*

5. *Проверим условия утверждения 7.*

$$a_1 \frac{\left(B_1^-\right)^2}{4\left(A_1^-\right)^2} - b_1 \frac{B_1^-}{2A_1^-} + c_1 = 0 \,-$$

   — это верное тождество. Опять можно сделать вывод, что отображение не имеет нетривиальных нулей.

Пример 2. *Рассмотрим отображение $Q(z) = (z_1^2 - z_2^2, z_1 z_2)$. Опять нетрудно проверить, что оно является сюръективным без нетривиальных нулей. Предположим, что мы знаем только о его сюръективности. Проверим его на алгоритме.*

1. $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$, $|c_1| + |c_2| > 0$ *— противоречия с утверждением 1 нет.*

2. $L_1 = 4 \neq 0$, $L_2 = 1 \neq 0$ *— противоречия с утверждением 2 нет.*

3. *Найдём множества $I_A(Q)$ и $I_C(Q)$.*

$$U = 0, \quad D = U^2 - L_1 L_2 = -4,$$

$$U^+ = 2i, \quad U^- = -2i,$$

$$A_1^+ = 2i, \quad A_1^- = -2i, \quad A_2^+ = 1, \quad A_2^- = 1,$$

$$B_1^+ = -4, \quad B_1^- = -4, \quad B_2^+ = -2i, \quad B_2^- = 2i,$$

$$C_1^+ = -2i, \quad C_1^- = 2i, \quad C_2^+ = -1, \quad C_2^- = -1.$$

   Итак,

$$I_A(Q) = I_C(Q) = \{1, 2\} \times \{+, -\}.$$

4. *Множество $I_A(Q) = I_C(Q) = I_A(Q) \cap I_C(Q)$ не пусто — противоречия со следствием из утверждения 6 нет.*

5. *Проверим условия утверждения 7.*

- $(i,s)=(1,+)$:

$$a_1\frac{\left(B_1^+\right)^2}{4\left(A_1^+\right)^2}-b_1\frac{B_1^+}{2A_1^+}+c_1=\frac{16}{4\times(-4)}-1=-2\neq 0;$$

$$\left(a_1\frac{\left(B_1^+\right)^2}{4\left(A_1^+\right)^2}-b_1\frac{B_1^+}{2A_1^+}+c_1\right)U^+=\left(a_2\frac{\left(B_1^+\right)^2}{4\left(A_1^+\right)^2}-b_2\frac{B_1^+}{2A_1^+}+c_2\right)L_1,$$

так как

$$\left(a_1\frac{\left(B_1^+\right)^2}{4\left(A_1^+\right)^2}-b_1\frac{B_1^+}{2A_1^+}+c_1\right)U^+=-2\times 2i=-4i,$$

$$\left(a_2\frac{\left(B_1^+\right)^2}{4\left(A_1^+\right)^2}-b_2\frac{B_1^+}{2A_1^+}+c_2\right)L_1=-1\times\frac{-4}{2\times 2i}\times 4=-4i.$$

- $(i,s)=(1,-)$:

$$a_1\frac{\left(B_1^-\right)^2}{4\left(A_1^-\right)^2}-b_1\frac{B_1^-}{2A_1^-}+c_1=\frac{16}{4\times(-4)}-1=-2\neq 0;$$

$$\left(a_1\frac{\left(B_1^-\right)^2}{4\left(A_1^-\right)^2}-b_1\frac{B_1^-}{2A_1^-}+c_1\right)U^-=\left(a_2\frac{\left(B_1^-\right)^2}{4\left(A_1^-\right)^2}-b_2\frac{B_1^-}{2A_1^-}+c_2\right)L_1,$$

так как

$$\left(a_1\frac{\left(B_1^-\right)^2}{4\left(A_1^-\right)^2}-b_1\frac{B_1^-}{2A_1^-}+c_1\right)U^-=-2\times(-2i)=4i,$$

$$\left(a_2\frac{\left(B_1^-\right)^2}{4\left(A_1^-\right)^2}-b_2\frac{B_1^-}{2A_1^-}+c_2\right)L_1=-1\times\frac{-4}{2\times(-2i)}\times 4=4i.$$

- $(i,s)=(2,+)$:

$$a_2\frac{\left(B_2^+\right)^2}{4\left(A_2^+\right)^2}-b_2\frac{B_2^+}{2A_2^+}+c_2=-1\times\frac{-2i}{2}=i\neq 0;$$

$$\left(a_2\frac{\left(B_2^+\right)^2}{4\left(A_2^+\right)^2}-b_2\frac{B_2^+}{2A_2^+}+c_2\right)U^+=\left(a_1\frac{\left(B_2^+\right)^2}{4\left(A_2^+\right)^2}-b_1\frac{B_2^+}{2A_2^+}+c_1\right)L_2,$$

так как

$$\left(a_2\frac{\left(B_2^+\right)^2}{4\left(A_2^+\right)^2}-b_2\frac{B_2^+}{2A_2^+}+c_2\right)U^+=i\times 2i=-2,$$

$$\left(a_1\frac{\left(B_2^+\right)^2}{4\left(A_2^+\right)^2}-b_1\frac{B_2^+}{2A_2^+}+c_1\right)L_2=1\times\frac{-4}{4\times 1}-1=-2.$$

- $(i,s)=(2,-)$:

$$a_2\frac{\left(B_2^-\right)^2}{4\left(A_2^-\right)^2}-b_2\frac{B_2^-}{2A_2^-}+c_2=-1\times\frac{2i}{2}=-i\neq 0;$$

$$\left(a_2\frac{\left(B_2^-\right)^2}{4\left(A_2^-\right)^2}-b_2\frac{B_2^-}{2A_2^-}+c_2\right)U^-=\left(a_1\frac{\left(B_2^-\right)^2}{4\left(A_2^-\right)^2}-b_1\frac{B_2^-}{2A_2^-}+c_1\right)L_2,$$

так как

$$\left(a_2\frac{\left(B_2^-\right)^2}{4\left(A_2^-\right)^2}-b_2\frac{B_2^-}{2A_2^-}+c_2\right)U^-=-i\times(-2i)=-2,$$

$$\left(a_1\frac{\left(B_2^-\right)^2}{4\left(A_2^-\right)^2}-b_1\frac{B_2^-}{2A_2^-}+c_1\right)L_2=1\times\frac{-4}{4\times 1}-1=-2.$$

Аналогичным образом можно убедиться в том, что второе условие в совокупности (15) для отображения Q также не выполняется. При этом, как мы выяснили, у отображения Q нет нетривиальных нулей. Следовательно, утверждения 1,3,7, а также следствие из утверждения 6 не являются необходимыми условиями (ни по отдельности, ни в совокупности) для отсутствия у сюръективного квадратичного отображения из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2$ нетривиальных нулей (но являются достаточными и в совокупности, и по отдельности).

Пример 3. *Рассмотрим отображение $Q(z)=(z_1^2-z_2^2,z_1z_2+z_2^2)$. Нетрудно проверить, что у него есть нетривиальный нуль $\hat{z}=(1,-1)$. Покажем, что оно не является сюръективным. Рассмотрим уравнение $Q(z)=(-2,1)$:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1^2-z_2^2 & = & -2, \\ z_1z_2+z_2^2 & = & 1. \end{array}\right. \tag{18}$$

Путём перекрёстного умножения получим, что

$$z_1^2-z_2^2=-2\left(z_1z_2+z_2^2\right),$$

то есть

$$(z_1+z_2)^2=0.$$

Тогда $z_1=-z_2$, что противоречит с первым уравнением системы (18). Тем самым, отображение Q не является сюръективным.

Покажем, что это можно было получить тот же результат, используя алгоритм, зная, что у отображения Q есть нетривиальный нуль. Предположим от противного, что отображение Q является сюръективным. Проверим алгоритм.

1. $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$, $|c_1| + |c_2| > 0$ — *противоречия с утверждением 1 нет.*

2. $L_1 = 4 \neq 0$, $L_2 = 1 \neq 0$ — *противоречия с утверждением 2 нет.*

3. *Найдём множества* $I_A(Q)$ *и* $I_C(Q)$.

$$U = -2, \quad D = U^2 - L_1 L_2 = 0,$$

$$U^+ = U^- = U = -2, \quad A_1 = -2, \quad A_2 = 1$$

$$B_1 = -4, \quad B_2 = 2, \quad C_1 = -2, \quad C_2 = 1.$$

Итак,

$$I_A(Q) = I_C(Q) = \{1, 2\} \times \{+, -\}.$$

4. *Множество* $I_A(Q) = I_C(Q) = I_A(Q) \cap I_C(Q)$ *не пусто — противоречия со следствием из утверждения 6 нет.*

5. *Проверим условия утверждения 7.*

$$a_1 \frac{(B_1)^2}{4\,(A_1)^2} - b_1 \frac{B_1}{2A_1} + c_1 = 1 \times 1 - 1 = 0 \; -$$

— это верное тождество. Опять можно сделать вывод, что отображение Q не имеет нетривиальных нулей. Но мы знаем, что у него есть нетривиальный нуль. Отсюда следует, что исходное предположение о сюръективности Q неверное, то есть отображение не является сюръективным.

Перейдём к доказательству более сильного утверждения (по сравнению с утверждением 7). А именно, покажем, что у любого сюръективного квадратичного отображения из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2$ нет нетривиальных нулей. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 8. *Пусть* $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *— сюръективное квадратичное отображение, имеющее нетривиальный нуль (если такое существует). Тогда*

1. $|a_1| + |c_1| > 0$;

2. $|a_2| + |c_2| > 0$;

Доказательство. Докажем по пунктам.

1. Предположим, что $a_1 = c_1 = 0$. Из утверждения 1 следует, что $a_2 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Из необходимого условия сюръективности следует, что $b_1 \neq 0$. Рассмотрим нетривиальный нуль $\hat{z}$ отображения Q. Он удовлетворяет следующей системе:
$$\begin{cases} b_1\hat{z}_1\hat{z}_2 & = & 0 \\ a_2\hat{z}_1^2 + b_2\hat{z}_1\hat{z}_2 + c_2\hat{z}_2^2 & = & 0 \end{cases}$$
Из первого тождества следует, что либо $\hat{z}_1 = 0$, либо $\hat{z}_2 = 0$, но тогда, подставляя во второе, получим $\hat{z}_2 = 0$ или $\hat{z}_1 = 0$ соответственно (так как $a_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$), что противоречит нетривиальности $\hat{z}$.

2. Этот пункт доказывается аналогично предыдущему с точностью до замены «1» на «2» и наоборот.

Утверждение доказано. □

Перейдём, наконец, к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 1. Пусть, от противного, у отображения Q имеется нетривиальный нуль $\hat{z}$. Обозначим $q_i(z) = a_iz_1^2 + b_iz_1z_2 + c_iz_2^2$, $i \in \{1, 2\}$. Исходя из утверждений 1 и 8, возможны три случая:

1. $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$;
2. $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $c_2 \neq 0$;
3. $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$.

Докажем во всех трёх случаях.

1. Пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. В силу основной теоремы алгебры у q_i, $i \in \{1, 2\}$, существует два корня относительно z_1/z_2. Следовательно, можно записать, что
$$q_1(z) = a_1\left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(z_1 - x_1z_2\right),$$
$$q_2(z) = a_2\left(z_1 - \beta z_2\right)\left(z_1 - x_2z_2\right).$$
В силу наличия нетривиального нуля $\hat{z}$ у q_1 и q_2 есть общий корень (пусть это будет $\alpha = \beta$, то есть $\hat{z} = (z_0, \alpha z_0)$ является нетривиальным корнем отображения Q). Из утверждения 2 следует, что $x_1 \neq \alpha$, $x_2 \neq \alpha$. Из линейной независимости q_1 и q_2 следует, что $x_1 \neq x_2$ (если q_1 и q_2 линейно зависимы, то отображение Q, очевидно, не является сюръективным).

Рассмотрим уравнение $Q(z) = \left(a_1\left(\alpha - x_1\right), a_2\left(\alpha - x_2\right)\right)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1\left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(z_1 - x_1 z_2\right) & = & a_1\left(\alpha - x_1\right), \\ a_2\left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(z_1 - x_2 z_2\right) & = & a_2\left(\alpha - x_2\right). \end{array}\right. \tag{19}$$

Путём перекрёстного умножения получим следующее уравнение:

$$\left(\alpha - x_2\right)\left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(z_1 - x_1 z_2\right) = \left(\alpha - x_1\right)\left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(z_1 - x_2 z_2\right).$$

Из первого уравнения системы (19) и из того, что $a_1\left(\alpha - x_1\right) \neq 0$, получаем, что $z_1 - \alpha z_2 \neq 0$, поэтому на эту скобку можно сократить:

$$\left(\alpha - x_2\right)\left(z_1 - x_1 z_2\right) = \left(\alpha - x_1\right)\left(z_1 - x_2 z_2\right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим, что

$$-z_1 x_2 - \alpha x_1 z_2 - \alpha x_2 z_2 - x_1 z_1 = 0 \Longleftrightarrow \left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(x_1 - x_2\right) = 0.$$

Но последнее равенство невозможно, так как мы выяснили, что $z_1 - \alpha z_2 \neq 0$ и $x_1 \neq x_2$. Следовательно, система (19) не разрешима относительно z, и отображение Q не является сюръективным.

2. Пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $c_2 \neq 0$. В силу основной теоремы алгебры у q_1 существует два корня относительно z_1/z_2. Следовательно,

$$q_1(z) = a_1\left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(z_1 - x z_2\right).$$

Покажем, что $b_2 \neq 0$. Пусть, от противного, $b_2 = 0$. Тогда $q_2(z) = c_2 z_2^2$ и $\hat{z}_2 = 0$. Но подставляя это в выражение $q_1(\hat{z}) = 0$, получим $a_1 \hat{z}_1^2 = 0$, то есть $\hat{z}_1 = 0$, что противоречит нетривиальности $\hat{z}$. Получаем, что $b_2 \neq 0$. Попутно мы доказали, что $\hat{z}_2 \neq 0$. Тогда, в силу наличия нетривиального нуля $\hat{z} = (z_0, \alpha z_0)$, выражение для $q_2(z)$ можно записать следующим образом:

$$q_2(z) = b_2(z_1 - \alpha z_2) z_2.$$

Рассмотрим уравнение $Q(z) = \left(a_1\left(\alpha - x\right), b_2\right)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1\left(z_1 - \alpha z_2\right)\left(z_1 - x z_2\right) & = & a_1\left(\alpha - x\right), \\ b_2\left(z_1 - \alpha z_2\right) z_2 & = & b_2. \end{array}\right. \tag{20}$$

Путём перекрёстного умножения получим следующее уравнение:

$$(z_1 - \alpha z_2)(z_1 - x z_2) = (\alpha - x)(z_1 - \alpha z_2) z_2$$

Из второго уравнения системы (20) и из того, что $b_2 \neq 0$, получаем, что $z_1 - \alpha z_2 \neq 0$, поэтому на эту скобку можно сократить:

$$z_1 - x z_2 = \alpha z_2 - x z_2 \Longleftrightarrow z_1 - \alpha z_2 = 0,$$

что противоречит только что полученному условию $z_1 - \alpha z_2 \neq 0$. Тем самым, система (20) не разрешима относительно z, и отображение Q не является сюръективным.

3. Пусть $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$. Этот пункт доказывается аналогично предыдущему с точностью до замены «1» на «2» и наоборот.

Итак, во всех случаях мы получили, что отображение Q не является сюръективным, следовательно, исходное предположение о наличии у него нетривиального нуля является неверным, то есть нетривиальных нулей у отображения Q нет. Теорема доказана. ☐

5.2 Доказательство теорем 2 и 3

Доказательство теоремы 2. Выпишем общий вид квадратичного отображения $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ с вещественными коэффициентами:

$$Q(z) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \leqslant l}}^{n} a_{kl} z_k z_l = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \leqslant l}}^{n} a_{kl} (x_k + i y_k)(x_l + i y_l) =$$

$$= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \leqslant l}}^{n} a_{kl} (x_k x_l - y_k y_l) + i \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \leqslant l}}^{n} a_{kl} (x_k y_l + y_k x_l) \equiv q_1(x, y) + i q_2(x, y),$$

где $a_{kl} \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Докажем, что образом данного отображения является выпуклый конус. То, что образом является конус, очевидно. Докажем его выпуклость. А именно, пусть $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \in Q(\mathbb{C}^n)$. Тогда надо показать, что $t\alpha^{(1)} + (1-t)\alpha^{(2)} \in Q(\mathbb{C}^n)$ для всех $t \in [0, 1]$.

Зафиксируем произвольное $t \in [0, 1]$. Так как $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \in Q(\mathbb{C}^n)$, то найдутся $z^{(1)} = x^{(1)} + i y^{(1)}$, $z^{(2)} = x^{(2)} + i y^{(2)}$ такие, что

$$Q\left(z^{(1)}\right) = q_1\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) + i q_2\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = \alpha^{(1)},$$

$$Q\left(z^{(2)}\right) = q_1\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) + iq_2\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) = \alpha^{(2)}.$$

Рассмотрим отображение $\hat{Q}(x,y) = (q_1(x,y), q_2(x,y))$. Оно является вещественным квадратичным отображением из $\mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^2$, следовательно, для него справедлива теорема 4, то есть образ отображения $\hat{Q}$ является выпуклым. Рассмотрим две точки:

$$\left(\operatorname{Re}\alpha^{(1)}, \operatorname{Im}\alpha^{(1)}\right) \text{ и } \left(\operatorname{Re}\alpha^{(2)}, \operatorname{Im}\alpha^{(2)}\right).$$

Они обе лежат в $\hat{Q}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$, так как

$$\hat{Q}\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = \left(\operatorname{Re}\alpha^{(1)}, \operatorname{Im}\alpha^{(1)}\right),$$

$$\hat{Q}\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) = \left(\operatorname{Re}\alpha^{(2)}, \operatorname{Im}\alpha^{(2)}\right).$$

В силу выпуклости $\hat{Q}(\mathbb{R}^{2n})$ для фиксированного t существует $\left(x^{(3)}, y^{(3)}\right)$ такое, что

$$\hat{Q}\left(x^{(3)}, y^{(3)}\right) = t\left(\operatorname{Re}\alpha^{(1)}, \operatorname{Im}\alpha^{(1)}\right) + (1-t)\left(\operatorname{Re}\alpha^{(2)}, \operatorname{Im}\alpha^{(2)}\right).$$

Но тогда для $z^{(3)} = x^{(3)} + iy^{(3)}$ получим, что

$$Q(z^{(3)}) = q_1(x^{(3)}, y^{(3)}) + iq_2(x^{(3)}, y^{(3)}) =$$

$$= t\operatorname{Re}\alpha^{(1)} + (1-t)\operatorname{Re}\alpha^{(2)} + i\left(t\operatorname{Im}\alpha^{(1)} + (1-t)\operatorname{Im}\alpha^{(2)}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(t\alpha^{(1)} + (1-t)\alpha^{(2)}\right) + i\operatorname{Im}\left(t\alpha^{(1)} + (1-t)\alpha^{(2)}\right) = t\alpha^{(1)} + (1-t)\alpha^{(2)},$$

то есть $t\alpha^{(1)} + (1-t)\alpha^{(2)} \in Q\left(\mathbb{C}^n\right)$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3. Пусть $z^{(1)} = \left(i\sqrt{3}, 0\right)$, $z^{(2)} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Обозначим

$$a \equiv Q(z^{(1)}) = (-3, 0) \in Q\left(\mathbb{C}^n\right),$$

$$b \equiv Q(z^{(2)}) = (0, 3) \in Q\left(\mathbb{C}^n\right).$$

Предположим, что $Q\left(\mathbb{C}^n\right)$ является выпуклым. Тогда, в частности, точка

$$c \equiv \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b = (-2, 1)$$

должна лежать в $Q\left(\mathbb{C}^n\right)$. Покажем, что это не так. Рассмотрим уравнение $Q(z) = c$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1^2 - z_2^2 &=& -2, \\ z_1 z_2 + z_2^2 &=& 1. \end{array}\right. \tag{21}$$

Путём перекрёстного умножения получим следующее уравнение:

$$z_1^2 - z_2^2 = -2\left(z_1 z_2 + z_2^2\right).$$

Приводя подобные слагаемые, получим

$$\left(z_1 + z_2\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -z_2.$$

Но полученный результат противоречит первому уравнению системы (21). Тогда эта система неразрешима относительно z, то есть $c \notin Q\left(\mathbb{C}^n\right)$, что противоречит выпуклости этого множества.

$\square$

6 Заключение

В данной работе были рассмотрены основные вопросы, связанные с вещественными и комплексными квадратичными отображениями, их связь с анормальными задачами, а также были доказаны некоторые теоремы, связанные с комплексными квадратичными отображениями.

Список литературы

[1] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, ”Свойства сюръективных вещественных квадратичных отображений”, *Матем. сборник*, **207**:9 (2016), 3-34.

[2] А. В. Арутюнов, ”Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа”, *УМН*, **67**:3(405) (2012), 3-62.

[3] Lloyd L. Dines, ”On the Mapping of Quadratic Forms”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**:6 (1941), 494-498.

[4] B. T. Polyak, ”Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization”, *J. Optim. Theory Appl.*, **99**:3 (1998), 553-583.

[5] A. Tret’yakov, H. Żołądek, ”A remark about homogeneous polynomial maps”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **19** (2002), 257-273.