# Исследование анормальных задач

студент 4 курса Я. А. Григорьев
научный руководитель — д.ф.-м.н., проф. А. В. Арутюнов

Кафедра системного анализа

3 июня 2019 г.

# Ключевые определения

Пусть даны евклидовы пространства $X$ и $Y$, причём $\dim X = n$, $\dim Y = k$ для некоторых натуральных $n$ и $k$.

**Определение**

Отображение $Q[\cdot,\cdot] : X \times X \to Y$ называется *билинейным*, если оно является линейным по каждому аргументу. Билинейное отображение называется *симметричным*, если $Q[x_1, x_2] = Q[x_2, x_1]$ для всех $x_1, x_2 \in X$.

**Определение**

Пусть $Q[\cdot,\cdot]$ — билинейное отображение. Тогда отображение $Q : X \to Y$, определяемое как $Q(x) := Q[x, x]$, называется *квадратичным отображением из $X$ в $Y$*. Оно называется *сюръективным*, если $Q(X) = Y$.

# Ключевые определения

Пусть даны евклидовы пространства $X$ и $Y$, причём $\dim X = n$, $\dim Y = k$ для некоторых натуральных $n$ и $k$.

**Определение**

Квадратичное отображение $Q : X \to Y$ называется *устойчиво сюръективным*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого квадратичного отображения $\Delta : \|\Delta\| < \varepsilon$ следует, что квадратичное отображение $Q + \Delta$ является сюръективным.

**Определение**

Вектор $x \in X$, $x \neq 0$, называется нетривиальным нулём квадратичного отображения $Q : X \to Y$, если $Q(x) = 0$. Если при этом выполнено $Q[x, X] = Y$, то вектор $x$ называется регулярным нулём отображения $Q$.

Пусть дано векторное пространство $X$.
Рассмотрим задачу минимизации с ограничениями:

$$f_0(x) \to \min, \quad F(x) = 0.$$

Здесь $F : X \to Y = \mathbb{R}^k$ — заданное отображение.

**Определение**

Точка $x_0 \in X$ называется *анормальной*, если $\mathrm{im}\, F'(x_0) \neq Y$.

Исследование квадратичных отображений содержит наиболее типичные проблемы, присущие анормальным задачам. Поэтому далее рассматриваются вопросы, касающиеся квадратичных отображений.

# Вещественные квадратичные отображения

Здесь рассматриваются квадратичные отображения $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ для некоторых натуральных $n$ и $k$, $n \geqslant k$.

- Всегда ли множество $Q(\mathbb{R}^n)$ является выпуклым конусом?
- Всегда ли сюръективное вещественное квадратичное отображение является устойчиво сюръективным?
- $N(k)$ — ?
- Существует ли нетривиальный нуль у сюръективного квадратичного отображения $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

# Комплексные квадратичные отображения

Здесь рассматриваются квадратичные отображения $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ с вещественными коэффициентами для некоторых натуральных $n$ и $k$, $n \geqslant k$.

- Всегда ли множество $Q(\mathbb{C}^n)$ является выпуклым конусом?
- Всегда ли сюръективное комплексное квадратичное отображение является устойчиво сюръективным?
- $N(k)$ — ?
- Существует ли нетривиальный нуль у сюръективного квадратичного отображения $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$?

# Основные результаты

**Теорема**

Пусть $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — сюръективное квадратичное отображение. Тогда у него нет нетривиальных нулей.

**Теорема**

Пусть $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — квадратичное отображение с вещественными коэффициентами. Тогда его образ $Q(\mathbb{C}^n)$ является выпуклым конусом.

**Контрпример**

Пусть $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ — квадратичное отображение, причём $k \geqslant 2$. Тогда его образ $Q(\mathbb{C}^n)$ является конусом, но не обязан быть выпуклым. Соответствующий пример даёт квадратичное отображение $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, определённое формулой

$$Q(z) = (z_1^2 - z_2^2, z_1 z_2 + z_2^2).$$

# Список литературы


1. А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, "Свойства сюръективных вещественных квадратичных отображений", *Матем. сборник*, **207**:9 (2016), 3-34.
2. А. В. Арутюнов, "Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа", *УМН*, **67**:3(405) (2012), 3-62.
3. Lloyd L. Dines, "On the Mapping of Quadratic Forms", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**:6 (1941), 494-498.
4. B. T. Polyak, "Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization", *J. Optim. Theory Appl.*, **99**:3 (1998), 553-583.
5. A. Tret'yakov, H. Żołądek, "A remark about homogeneous polynomial maps", *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **19** (2002), 257-273.