Estimación de curvatura para coloración de sistemas dinámicos en el plano complejo

Jacobo Hernández Varela

30 de noviembre de 2019

Conceptos Fundamentales

Conceptos Fundamentales

Órbitas e Iteraciones

Órbitas e Iteraciones

- La n-ésima composición de f es denotado por $f^n(z)$. Esto es,
$$f^n(z) = f(f(\ldots f(z)\ldots))$$
donde f es aplicado a z n veces.
- Aplicar la función a la previa composición es llamado iteración.

Órbitas e Iteraciones

Definición*(Orbita)*

Dada una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, la orbita de un punto* $z \in \mathbb{C}$ *es el conjunto*

$$O(z) = \left\{z, f(z), f^2(z), ...\right\}$$

Órbitas e Iteraciones

- Cuando calculamos fractales en la computadora, nos interesa una representación finita de las orbitas. Esto es logrado limitando el maximo numero de elementos que contiene la orbita.
- Definamos dos contantes M y N_{max} como el *valor de rescate* y *el máximo numero de iteraciones* respectivamente.

Órbitas e Iteraciones

Definición *(Orbita truncada)*

Sean

$$O(z) = \left\{z, f(z), f^2(z), \ldots\right\}$$

una orbita, y M y N_{max} constantes dadas. Sea $\overline{N}$ el entero no negativo mas pequeño tal que $\left|f^{\overline{N}}(z)\right| > M$, y definimos $N = \text{mín}\left\{\overline{N}, N_{max}\right\}$.

La orbita truncada $O_T(z)$ es el conjunto

$$O_T(z) = \left\{z, f(z), f^2(z), \ldots, f^N(z)\right\}$$

Conceptos Fundamentales

Fractales

Fractales

- Consideremos una función

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & z^p + c \end{array}$$

  donde la contante $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ y la semilla $c' in \mathbb{C}$.
- La función $f(z)$ define *un sistema dinámico*

$$z_k = z_{k-1}^p + c$$

- Dependiendo del valor de c y el valor inicial z_0 las iteraciones se comportan de manera diferente.

Conceptos Fundamentales

Funciones de coloreado y paleta

Funciones de coloreado y paleta

- Una *imagen* es representada por una matriz de $m \times n$ por puntos discretos llamados *pixeles*.
- Cada pixel en la matriz es asociado a un color *RGB*.
- Para calcular el color de cada pixel en una imagen fractal, la órbita truncada $O_T(z)$ se calcula primero. Luego, la función de color es evaluada

Funciones de coloreado y paleta

Definición*(Función de Coloreado)*

Una función de coloreado es una función

$$u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

que mapea a la órbita truncada a los reales.

Funciones de coloreado y paleta

Definición *(Función paleta)*

Una función paleta $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *mapea el indice del color I al espacio de color RGB. Su dominio es* $[0, 1]$ *y el rango* $[0, 1]^3$.

Calculando Imagenes Fractales

Calculando Imagenes Fractales

1. Sea z_0 la posición correspondiente del pixel en el plano complejo.
2. Calcula la órbita truncada iterando la formula $z_n = f(z_{n-1})$ empezando en z_0 hasta que
   - $|z_n| > M$, o
   - $n = N_{max}$
3. Usando las funciones de color e indice de color, mapea el resultado de la orbita truncada al valor del indice de color.
4. Determina el color RGB del pixel usando la paleta de colores.

Si $|z_n| > M$, el pixel es un punto exterior. En otro caso, si $n = N_{max}$, el punto es un punto interior.

Estimación de Curvatura

Estimación de Curvatura

- La estimación promedio de curvatura fue utilizado originalmente por Damien M. Jones para Ultra Fractal en 1999.
- El coloreado es basicamente aproximar la curvatura de una curva con putos discretos.
- En este caso, la curvatura esta definida por los puntos de la órbita truncada $O_T(z_0)$.
- La aproximación usada es

$$t(Z_n) = \left| \operatorname{arctan}\left(\frac{z_n - z_{n-1}}{z_{n-1} - z_{n-2}}\right) \right|$$