Γιακούμπ Ματσιεγιέβσκι

Εργασία 3

Πρόβλημα 1

1. Το πάζλ Kakuro μπορεί εύκολα να μοντελοποιηθεί ως ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών, λόγω του διακριτού πλήθους τιμών που μποορούν να πάρουν τα πεδία του παζλ και των εξαρτήσεων που αναπτύσσονται μέταξύ τους. Τα μόνο μεταβλητά στοιχεία του προβλήματος είναι τα άδεια πεδία, τα όποια πρέπει να γεμίσουμε με αριθμούς απ' το 1 εώς το 9. Προκείμενου, η μοντελοποίηση μας να είναι ακριβής εισάγουμε ειδικό συμβόλισμο.

Ορίζουμε το σύνολο P που περιέχει το σύνολο των ζεύγων, που εκφράζουν τις συντεταγμένες των κενών πεδίων που πρέπει να συμπληρώσουμε. Ακολουθώντας την υλοποίηση του κώδικα που παρατίθεται με την εργασία, προσθέτουμε ένα σύνολο περιορισμών C, οι όποιοι προσδιορίζονται από ένα σύνολο σημείων/πεδίων που υπάγονται στους ίδιους και έναν αριθμό που αποτελεί το όριο του αθροίσματος των προκείμενων σημείων. Έτσι έχουμε $C = [(I, n)]$, όπου $I \subset C$ και $n \in N$.

Λαμβάνουμε ώς μεταβλητές το σύνολο των προς συμπλήρωση πεδίων του παζλ. Έτσι έχουμε $X_{i,j}, \forall (i, j) \in P$, που εκφράζει το κενό κουτάκι της θέσης (i, j) του πάζλ. Το πεδίο κάθε μιας τέτοιας μεταβλητής είναι προκαθορισμένο απ' τους κανόνες του παιχνιδιού και αποτελεί το σύνολο των ακεραίων στο διάστημα $[1, 9]$.

Με αυτόν τον τρόπο είναι πολύ πιο εύκολος ο επακριβής ορισμός των περιορισμών του προβλήματος:

$C_1 = allDif[\forall x_i \in I]$, $\forall I \in C$, δηλαδή θέλουμε για όλα τα πεδία που υπάγονται στην ίδια ομάδα περιορισμού I αυτά να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

$C_2 = ((\sum_i x_i < n, \forall x_i \in I, \forall I \in C, \exists |D(x_i)| = 10) \vee (\sum_i x_i = n, \nexists |D(x_i)| = 10))$, δηλαδή θέλουμε τα πεδία που υπάγονται στον ίδιο περιορισμό I να αθροίζουν στον δοθέντα περιορισμό n σε περίπτωση που έχουν λάβει όλα κάποια τιμή, διαφορετικά το άθροισμά τους να είναι μικρότερο απλά της δοθείσας τιμής.

2. Θέλοντας, να αναδείξουμε την ισχύ των διδαχθέντων αλγορίθμους επιλέγουμε τους θεωρητικά πιο ισχύρους, δηλαδή τον MAC και τον FC με ευρετικό μηχανισμό MRV. Σκόπος μας είναι να μελετήσουμε την αποτελεσματικότητα των δύο προσεγγίσεων, δηλαδή της διατήρησης της συνέπειας των ακμών καθώς και της αφαίρεσης μη συμβατών τιμών απ' τις γειτονικές μεταβλητές. Αυτή η επιλογή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί αναμένουμε να αναδείξει τις διατάξεις προβλημάτων, στις όποιες υπερισχύουν οι δύο τεχνικές. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος MAC επιδιώκει την συνέπεια των πεδίων γειτονικών μεταβλητών, καθώς και των αντίστοιχων γειτόνων τους, όποτε αναμένουμε γρήγορο περιορισμό πεδίου αναζήτησης στο δέντρο σε περίπτωση που έχουμε διάταξη με μεγάλο αριθμό γειτονικών ομάδων περιορισμών. Αντίστοιχα, ο αλγόριθμος FC αφαιρεί δυναμικά ασυνεπείς τιμές από γειτονικούς κόμβους (γρήγορη

συμπλήρωση πεδίων μικρών απομονώμενων ομάδων), ένω ο ευρετικός μηχανισμός της πιο περιορισμένης μεταβλητής, θα μειώσει γρήγορα τους δυνατούς συνδιασμούς για μεγάλυτερες ομάδες πεδίων.

Για την αποτελεσματική διακπέραιωση του πειράματος σύγκρισης της αποτελεσματικότητας των αλγορίθμων FC-MRV και MAC, χρησιμοποιήθηκαν τα πηγαία αρχεία csp (άρχειο που περιέχει την βασική κλάση δυαδικών περιορισμών, καθώς και παραδείγματα υποκλάσεων για γνωστά προβλήματα), utils (περιέχει βοηθητικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στον κώδικα των συναρτήσεων που μοντελοποιούν τους αλγορίθμους υπαναχώρησης) και search. Ορίστηκε επιπλέον η κλάση Kakuro, η όποια κληρονομεί απ' την βασική κλάση δυαδικών προβλημάτων CSP. Η νεοπαραχθείσα κλάση περιέχει ένα ευρή φάσμα νέων συναρτήσεων, των όποιων η βασική αρμοδιότητα είναι η παραγωγή μέσω του πεδίου self.board (περιέχει τον αρχικό πίνακα Κάκουρο) και η ανάκτηση πληροφορίας από μια νέα λίστα λιστών (self.groups), που περιέχουν πληροφορίες για τις μεταβλητές και τους περιορισμούς των ομάδων περιορισμών που εμφανίζονται στο πάζλ. Η πρόσπελαση της προκείμενης λίστας βοηθάει στον να αποφανθούμε άμεσα για θέματα όπως οι κοινοί γείτονες δύο μεταβλητών, μια πληροφορία απαραίτητα για τον συνάρτηση $kakuro_constraint$, που έπισης μοντελοποιήθηκε. Η συγκεκριμένη συνάρτηση, ενημερώμενη άμεσα απ' το πεδίο groups, γνωρίζει τον περιορισμό στον όποιο υπάγονται οι δύο δωθείσες σαν παράμετροι μεταβλητές, αν ανήκουν στην ίδια ομάδα και αν ίσχυουν τα παραπάνω, ενημερώνει αν η προτεινόμενη ανάθεση τιμών στις δύο μεταβλητές ικανοποιεί τους περιορισμούς C_1 και C_2.

Ο νεοπαραχθέν κώδικας περιέχεται στα αρχεία *kakuro.py* και $kakuro_main.py$. Το πρώτο περιέχει τον ορισμό της κλάσης του Kakuro, ένω το δεύτερο περιέχει την main, η όποια παράγει ένα αντικείμενο κλάσης Kakuro και επιτρέπει στον χρήστη να επιλέξει τον αλγόριθμο, καθώς και το επίπεδο δυσκολίας (4 συνολικά) του πάζλ που θα επιλυθεί. ΠΡΟΣΟΧΉ, ο αλγόριθμος MAC ενδέχεται να αργήσει στην επίλυση του δυσκολότερου πάζλ.

3. Για την κατάλληλη διαβάθμιση του επιπέδου δυσκολίας, στο όποιο θα εκτεθούν οι δύο αλγόριθμοι, ορίζονται 4 διαφορετικά πάζλ kakuro1, kakuro2, kakuro3, kakuro4, τα όποια διαδοχικά αυξάνονται σε μέγεθος και πλήθος περιορισμών, με τα δύο τελευταία να παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον στα πλαίσια ανάλυσης αποτελεσματικών αλγορίθμων, αφού τα πρώτα δύο εκτελούνται ακαριαία. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η προσπάθεια ορισμού της αποτελεσματικότητας ενός αλγοριθμού επίλυσης προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών είναι μια δύσκολη διαδικασία, αλλά υπάρχουν δύο βασικές μετρικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αυτό. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι ένας προφανής παράγοντας, αφού δείχνει την πρακτικότητα του εκάστοτε αλγορίθμου, ενώ το πλήθος των διαφορετικών αναθέσεων αποτελεί μια υποτυπώδη μορφή δείκτη νοημοσύνης του αλγορίθμου, αφού λιγότερες αναθέσεις σημαίνουν λιγότερες υπαναχωρήσεις, κάτι που μεταφράζεται σε καλή "λήψη αποφάσεων" του αλγορίθμου.

Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας των χρόνων εκτέλεσης και του πλήθους των αναθέσεων για τους δύο αλγορίθμους και για τα τέσσερα διαφορετικά παζλ. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι ορισμένα τμήματα του κώδικα που υλοποιεί τους δύο αλγορίθμους χρησιμοποιούν τυχαιοκρατικά εργαλεία (συνάρτηση rand) για την λήψη αποφάσεων, επομένως οι χρόνοι εκτέλεσης μπορεί να διαφέρουν από εκτέλεση σε εκτέλεση. Η αναπάρασταση των τελικών αποτελεσμάτων, επικυρώνει την ορθή επίλυση του πάζλ. Έχουμε:

Table 1: FC + MRV

Puzzle	**Assignments**	**Times**
1	14	0.0047
2	21	0.0079
3	206158	35.8095
4	1230	0.4516

Table 2: MAC

Puzzle	**Assignments**	**Times**
1	12	0.0066
2	8	0.0152
3	7099	7.2516
4	893864	470.0352

Πράγματι, τα αποτελέσματα, τόσο απ' την σκοπιά του χρόνου εκτέλεσης όσο και του πλήθους των αναθέσεων, επικυρώνουν τις προβλέψεις που κάναμε πιο πάνω. Πράγματι, ο αλγόριθμος FC παρουσιάζει υψηλή αποτελεσματικότητα στον μεγαλύτερο πίνακα Kakuro, ο όποιος περιέχει συντριπτικά μεγαλύτερο πλήθος ομάδων περιορισμών, οι όποιες όμως είναι σχετικά απομονωμένες. Ο αλγόριθμος, δυναμικά επιλέγει στοιχεία απ' τις μεγαλύτερες ομάδες (συμμετέχουν στο μεγαλύτερο πλήθος περιορισμών), τις όποιες και συμπληρώνει. Στο τρίτο παζλ εκτίθενται οι αδυναμίες του προκείμενου αλγορίθμου, αφού βάση της MRV, μεταβένει σε πολλούς κακούς ελέγχους. Αντίθετα, ο MAC, αν και χρειάστηκε 5 λεπτά για το τέταρτο πάζλ, φαίνεται να χειρίζεται πολύ αποτελεσματικά διατάξεις σαν την τρίτη, την όποια ολοκλήρωσε μόλις σε 7 δευτερόλεπτα. Ο λόγος, για τον όποιο γίνεται αυτό έχει περιγραφεί στις προβλέψεις.

Πρόβλημα 2

1. Αρχικά ορίζουμε τους χρονικούς περιορισμούς του δοθέντος κειμένου, κωδικοποιώντας τους σαν ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών. Έχουμε:

Εργασία 3

$S = 9$, όπου S η ώρα έναρξης της εκδήλωσης

$E = 11$, όπου E η ώρα ολοκλήρωσης της εκδήλωσης

$ST = [0.75, ..., 1.5]$, όπου ST οι ώρες που απαιτούνται για την διάσπαση του χρηματοκιβωτίου

$TRT = [0.083, ..., 0.16]$, όπου TRT η ώρα που απαιτείται για μετάβαση στο δωμάτιο

$TAT = [0.33, ..., 0.5]$, όπου TAT η ώρα που απαιτείται για μετάβαση στο χρηματοκιβώτιο

$B_1 = S$, όπου B_1 η στιγμή έναρξης της πρώτης ομιλίας

$B_i = B_{i-1} + 0.5, i \in [2, 4]$, όπου B_i η στιγμή έναρξη της i-όστης ομιλίας

$AT_i = E - B_{i+1}, i \in [1, 3]$ και $AT_4 = 0$, όπου AT_i ο διαθέσιμος χρόνος του i-οστού υπόπτου

$HT_i = AT_i >= (ST + 2 * TAT) = [FALSE, TRUE]$, μια λογική μεταβλητή που λαμβάνει την λογική τιμή της έκφρασης $AT_i >= (ST + 2 * TAT)$, δηλαδή εκφράζει το αν ο i-όστος ύποπτος είχε επαρκή χρόνο, για να κλέψει το χρηματοκιβώτιο.

$CR = [1, 4]$, όπου CR είναι ο αριθμός του ατόμου που έκλεψε το χρύσο μήλο και μπορεί να είναι ένας αριθμός απ' το ένα εώς το τέσσερα.

$C_1(CR, HT_i) = (HT_i = TRUE \iff CR = i)$, ένας περιορισμός που επιτρέπει στην μεταβλητή CR, δηλαδή τον δείκτη του κλέφτη να λάβει την τιμή i αν και μόνο αν η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής HT_i είναι αληθής, δηλαδή ο i-οστός ύποπτος είχε στην διάθεσή του αρκετό χρόνο, ώστε να κλέψει το χρύσο μήλο.

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος στον κόσμο του αστυνόμου Σιέσπη είναι διακριτός και συγκεκριμένα ότι το πεδίο τιμών των μεταβλητών ST, TRT, TAT είναι διακριτό, δηλαδή τα σύνολα αυτά περιέχουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς που ορίζονται απ' τα άκρα των διαστημάτων αυτών με βήμα 0.016, που αντιστοιχεί στο $\frac{1}{60}$ της ώρας, δηλαδή ένα λεπτό.

2. Ο αστύνομος Σιέσπης άμεσα αντιλαμβάνεται ότι η επίλυση της υπόθεσης έγκειται στην απόδοση τιμών στις μεταβλητές του προηγούμενου υποερώτηματος και συγκεκριμένα σε αυτές, των όποιων τα πεδία δεν είναι μονοσύνολα. Παρατηρεί την ύπαρξη ενός βασικού περιορισμού, σύμφωνα με τον όποιο μπορεί να προσδιορίσει τον κλέφτη, δηλαδή να βρει σύνεπη τιμή του πεδίου της μεταβλητής C, προσδιορίζοντας ποιά απ΄τις μεταβλητές HT_i μπορεί να λάβει την τιμή $TRUE$. Το αντίστοιχο πρόβλημα ανάγεται στην έυρεση μιας μεταβλητής AT_i, για την όποια υπάρχει ανάθεση τιμής (κατάλληλο στοιχείο στο πεδίο τιμών της), η όποια είναι μεγαλύτερη από έναν συνδιασμό τιμών των πεδίων των μεταβλητών ST και TAT στα πλαίσια του τύπου $ST + 2 * TAT$.

Ο αστυνόμος Σιέσπης θα μπορούσε να εξετάσει εξαντλητικά όλους τους δυνατούς συνδιασμούς τιμών των μεταβλητών ST και TAT, αν ήθελε να προσδιορίσει επακριβώς το πόσο διέρκησε η διαδικασία της κλοπής, αλλά γρήγορα αντιλαμβάνεται ότι πρέπει άμεσα να προσδιορίσει τον ύποπτο. Όποτε περιορίζεται στον προσδιορισμό χρονικού διαστήματος AT_i, που θα επαρκούσε για την κλοπή. Παρατηρεί ότι $AT_i < (ST + 2 * TAT)$, $i = 2, 3$, αφού $\max_i AT_i = AT_2 = E - B_3 = E - S - 1 = 1 < \min(ST + 2 * TAT) = 0.75 + 2 * 0.33 = 1.44$. Επομένως, ο δεύτερος και ο τρίτος υπόπτος δεν είχαν στην διάθεσή τους αρκετό χρόνο, για να κλέψουν το χρύσο μήλο. Άμεσα γίνεται φανερό ότι το $AT_1 = E - B_2 = E - B_1 - 0.5 = 11 - 9 - 0.5 = 1.5$ αποτελεί μεταβλητή με τιμή για την όποια μπορεί να βρεθεί κατάλληλος συνδιασμός τιμών των πεδίων ST και TAT, δηλαδή επαρκής χρόνος για την διακπεραίωση των τριών βημάτων της κλοπής.

Επομένως, μόνο για $i = 1$ ικανοποιείται ο ο περιορισμός $C_1(CR, HT_i)$ που επενεργεί στις μεταβλητές HT_i, C και υποχρεώνει την δεύτερη να λάβει την τιμή i, δηλαδή 1. Επομένως, ο πρώτος ύποπτος (κύριος Γιάννης) έκλεψε το χρυσό μήλο, αφού ήταν ο μόνος που είχε τον απαιτούμενο για την κλοπή χρόνο.

3. Στο προηγούμενο ερώτημα ο αστυνόμος Σιέσπης εστίασε στην μεταβλητή C, διαμέσω της ανάλυσης του πεδίου της μεταβλητής HT_i, δηλαδή επιδίωξε απόδοση τιμής στην μεταβλητή, που συμμετέχει στον μεγαλύτερο πλήθος περιορισμών, δηλαδή τον μοναδικό περιορισμό C_1. Μια τέτοια στρατηγική μπορεί να μεταφραστεί στην χρήση του ευρετικού μηχανισμού βαθμού, κατά τον όποιο προτεραιότητα επιλογής έχουν οι μεταβλητές που συμμετέχουν στον μεγαλύτερο αριθμό περιορισμών.

Ως μέθοδο διάδοσης περιορισμών θα μπορούσε να είχε χρησιμοποίησει το FC (Forward Checking), σύμφωνα με το όποιο θα προσπαθούσε να αφαιρέσει απ' τα πεδία όλων των υπόλοιπων μεταβλητών τιμές που είναι ασυνεπείς με την τιμή 1 της μεταβλητής CR. Θα παρατηρούσε ότι το πεδίο της μεταβλητής HT_1 θα περιοριζόταν στο μονοσύλο $TRUE$, λόγω του περιορισμού C_1. Στην συνέχεια, θα επέλεγε την δεύτερη μεταβλητή που συμμετέχει στον μοναδικό περιορισμό, δηλαδή την HT_1, στην όποια θα απέδιδε την μοναδική εναπομείνουσα τιμή του πεδίου της, δηλαδή το $TRUE$.

Ακολουθώντας το βήμα του αλγορίθμου FC θα αφαιρούσε απ' το πεδίο τιμών των μεταβλητών ST και TAT όλες τις τιμές, για τις όποιες η τιμή $TRUE$ της HT_1 δεν είναι συνεπής. Η εκτέλεση του αλγορίθμου θα συνέχιζε με οποιαδήποτε απόδοση συνδιασμού εναπομείναντων τιμών στις μεταβλητές ST, TRT και TAT, η όποια εγγυημένα ικανοποιεί τον περιορισμό της έκφρασης που προσδιορίζει την τιμή της HT_1, αφού οι ασυνεπείς τιμές έχουν αφαιρεθεί στο προηγούμενο βήμα και γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα επιδέχεται λύσης. Αντίστοιχα, οι μεταβλητές HT_2, HT_3, HT_4 θα λάμβαναν την λογική τιμή $FALSE$ λόγω της μη ικανοποιησιμότητας των εκφράσεων που τις αποτιμούν. Έτσι θα ολοκληρώνοταν ο αλγόριθμος FC με την χρήση της ευρετικής μεθόδου των βαθμών, αποδίδοντας τιμές στο σύνολο των μεταβλητών του προβλήματος με το CR να λαμβάνει την τιμή 1.

Πρόβλημα 3

1. Το πρόβλημα της ανάθεσης ενεργείων ομάδων εργασίων σε διαφορετικές μηχανές μπορεί να μοντελοποιηθεί με μερικές γενικές μεταβλητές και μια ομάδα περιορισμών. Συγκεκριμένα ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές:

$S_{i,j}$, η όποια αναφέρεται στην χρονική στιγμή έναρξης της i-οστής ενέργειας της j-οστής εργασίας με $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, όπου m και n σταθερές της εκφώνησης που αναφέρονται στο συνολικό πλήθος των ενεργείων και των εργασιών αντίστοιχα. Γνώριζουμε ότι η στιγμή έναρξης οποιασδήποτε ενέργειας φράσσεται από μια γενική προθεσμία D, άρα το πεδίο της μεταβλητής $S_{i,j}$ είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών στο διάστημα $[0, D]$, υποθέτοντας ότι το πεδίο του χρόνου στον κόσμο του προβλήματος είναι διακριτό.

$D_{i,j}$, η όποια αναφέρεται στην χρονική διάρκεια της i-οστής ενέργειας της j-οστής εργασίας. Το πεδίο κάθε τέτοιας μεταβλητής είναι ένα μονοσύνολο που περιέχει την διάρκεια της συγκεκριμένης ενέργειας d_i, όπως αυτή ορίζεται απ' τον κόσμο του προβλήματος, $D_{i,j} = d_i$.

$M_{i,j}$, η όποια αναφέρεται στον αριθμό της μηχανής που επελέχθει για την διακπεραίωση της i-οστής ενέργειας της j-οστής εργασίας. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των μηχανών ανέρχεται σε m, επομένως το πεδίο της μεταβλητής $M_{i,j}$ είναι το διάστημα των ακεραίων $[1, m]$.

Παρακάτω, περιγράφονται οι περιορισμοί που επενεργούν πάνω στις μεταβλητές του προβλήματος:

$C_1(S_{i,j}|D_{i,j}) = (S_{i,j} + D_{i,j} \leq D)$, δηλαδή το άθροισμα της στιγμής έναρξης μιας ενέργειας και της διάρκειας της, πρέπει να είναι μικρότερο απ' την γενική προθεσμία D. Κάθε ενέργεια πρέπει να ξεκινάει σε χρονική στιγμή που εξασφαλίζει τον τερματισμό της πριν το τέλος της προθεσμίας.

$C_2(S_{i,j}|S_{i-1,j}|D_{i-1,j}) = (S_{i-1,j} + D_{i-1,j} \leq S_{i,j})$, δηλαδή ο χρόνος έναρξης της $(i-1)$-οστής ενέργειας της j-όστης εργασίας συν τον χρόνο εκτέλεσής της πρέπει να είναι μικρότεροι ή ίσοι του χρόνου έναρξης της επόμενης ενέργειας. Ο περιορισμός αυτός μεταφράζεται στο γεγονός ότι οι ενέργειες μιας εργασίας πρέπει να εκτελούνται διαδοχικά, δηλαδή χρειάζεται η ολοκλήρωση μιας ενέργειας για την έναρξη της επόμενης.

$C_3(M_{i,j}|Mk,w|Si,j|Si,j-1|Di-1,j|Sk,w) = (M_{i,j} = M_{k,w} \Rightarrow ((S_{i,j} > S_{k,w}) \vee (S_{k,w} > S_{i,j} + D_{i,j}))$, όπου $i \neq k$. Σύμφωνα με τον παραπάνω περιορισμό, σε περίπτωση που δύο διαφορετικές ενέργειες χρονοπρογραμματίζονται να εκτελεστούν στο ίδιο μήχανη, η χρονική στιγμή έναρξης της μίας δεν μπορεί να βρίσκεται μέσα στο χρονικό διάστημα που εκτελείται η άλλη. Με άλλα λόγια η πρώτη διεργασία πρέπει να ξεκινάει πρίν απ' την δεύτερη ή η δεύτερη να ξεκινάει μετά τον τερματισμό της πρώτης.

2. Η έκφωνηση του προβλήματος θέτει τον περιορισμό, οι ενέργειες μιάς εργασίας να εκτελούνται διαδοχικά, δηλαδή η έναρξη της επόμενης να ακολουθεί μετά τον τερματισμό της προηγούμενης. Αυτό, σημαίνει ότι η διαδοχική εκτέλεση των ενεργείων μιας εργασίας χωρίς χρονικά κενά μεταξύ των διαδοχικών εκτελέσεων καθιστά ελάχιστο τον χρόνο εκτέλεσης της προκείμενης εργασίας. Η κατανομή των ενεργείων μιας εργασίας σε διαφορετικά μηχανήματα δεν επιφέρει κάποιο κέρδος, αφού η στιγμή έναρξης τους εξαρτάται απ' την στιγμή τερματισμού των προηγούμενων ενεργείων. Επομένως, η διαδοχική εκτέλεση ενεργείων κοινής εργασίας σε μια μοναδική μηχανή επαρκεί για να εξασφαλίστει η πλήρη εκμετάλλευση του χρόνου που προηγείται. Προφανές, καθίσταται ότι με τους δοθέντες περιορισμούς η δέσμευση πλήθους μηχανών μεγαλύτερου απ' αυτόν των εργασίων, θα αποτελούσε σπατάλη πόρων, αφού η κατανομή του συνόλου των ενεργείων μιας εργασίας σε μεμονομένη μηχανή αποτελεί βέλτιστη επιλογή. Σε μια διάταξη, όπου το πλήθος των μηχανών είναι μεγαλύτερο ή ίσο με αυτό των εργασίων, ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού καθίσταται συνεπές, άπαξ και ο συνολικός χρόνος που δεσμεύουν οι ενέργειες μιας εργασίας είναι μικρότερος/ίσος της προθεσμίας. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, καθίσταται εύκολος ο προσδιορισμός τιμών διαρκείας και προθεσμίας για τον ορισμό συνεπούς και ασυνεπούς παραδείγματος. Συγκεκριμένα:

Συνεπές παράδειγμα: Οι εργασίες ανέρχονται σε $n = 3$, ένω το πλήθος των διαθέσιμων μηχανών είναι $m = 4$, δηλαδή μεγαλύτερο απ' αυτό των εργασίων. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, προκείμενου να ορίσουμε ένα συνεπές παράδειγμα, αρκεί να αποδώσουμε τιμές διαρκείας στις διαδοχικές ενέργειες κάθε εργασίας, που να αθροίζουν σε αριθμό μικρότερο του D. Έτσι, όριζω κάθε ένεργεια και των 3 εργασίων να διαρκεί 1 μονάδα χρόνου και το D να είναι ίσο με 4. Έτσι μπορώ να αναθέσω κάθε εργασία σε μια συγκεκριμένη μηχανή, η όποια θα την ολοκλήρωσει σε 4 μονάδες χρόνου, ένω η προθεσμία είναι ίση με τον ίδιο αριθμό. Παράλληλα, η τέταρτη μηχανή που έχω στην διάθεση μου θα παραμείνει άεργη. Έτσι, το προκείμενο πρόβλημα θα επιλυθεί, λαμβάνοντας υπόψη όλους του περιορισμούς που ορίστηκαν στο προηγούμενο υποερώτημα.

Ασυνεπές παράδειγμα: Αρκεί να διατηρήσω τις ίδιες τιμές διαρκείας για τις ενέργειες των εργασίων και να μειώσω την προθεσμία σε $D = 3$. Κατά αυτόν τον τρόπο, κάθε μία απ' τις 3 χρησιμοποιούμενες μηχανές θα έχει προλάβει να εκτελέσει 3 ενέργειες της εκάστοτε εργασίας που ανέλαβε. Κατά συνέπεια, ακολούθοντας τον βέλτιστο χρονοπρογραμματισμό που ορίστηκε παραπάνω, η τελευταία ενέργεια κάθε εργασία θα έχει χρόνο τερματισμού μεγαλύτερο της προθεσμίας. Συγκεκριμένα, δεν θα υπάρχει τιμή στο πεδίο των $S_{4,j}$ για $\forall j \in [1, 3]$, που να είναι συνεπής με τον περιορισμό C_1.

3. Το δοθέν πρόβλημα απότελει χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος χρονοπρογραμματισμού. Μάλιστα, στην προκείμενη διάταξη, σε περίπτωση που υπάρχει σχετική ταύτιση στην διάρκεια των ίδιων κατά σειρά ενεργείων των εργασίων που πρέπει να εκτελεστούν, ενδέχεται να υπάρξουν πάνω από μια λύσεις του προβλήματος. Αυτό όφειλεται στο γεγονός ότι ορισμένες απ' τις δυνατές λύσεις θα μπορούν να διαφέρουν μονάχα ως προς την εναλλαγή μηχανών για την εκτέλεση των ίδιων ενεργείων. Επίσης, ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού μπορεί να χωρίστει σε στάδια αυξανόμενης δυσκολίας, τα όποια ορίζονται ως η προσθήκη μιας νέας ενέργειας στο χρονοπρόγραμμα. Η αύξηση της δυσκολίας έγκειται στην μείωση του διαθέσιμου χρόνου και πόρων καθώς αυτοί δεσμεύονται απ' τις ολοένα και αυξανόμενες σε πλήθος ενέργειες. Έτσι θέλουμε να επιλέξουμε έναν αλγόριθμο, ο όποιος θα επιλέγει ενέργειες, οι όποιες αποκλείουν το ελάχιστο πλήθος μέλλουσων ενεργείων, μειώνοντας την πίθανοτητα μελλοντικής σύγκρουσης.

Ιδανική επιλογή φαίνεται να αποτελεί ο αλγόριθμος FC, ο όποιος για κάθε άναθεση τιμής στην στιγμή έναρξης και την επιλογή μηχανής που θα εκτελέσει την εξεταζόμενη ενέργεια, θα διαγράφει απ' το πεδίο τιμών των υπολοίπων ενεργείων που αποφασίστηκε να εκτελέστουν απ' το ίδιο μηχάνημα όλες τις δυνατές στιγμές έναρξης που θα συγκρούονται με τον διάστημα εκτέλεσης της τρέχουσας ενέργειας, βάση του τρίτου περιορισμού. Παράλληλα, με την αύξηση του πλήθους των αναθέσεων, ταχύτατα θα υπάρξει περιορισμός των στιγμών έναρξης διαδοχικών ενεργείων σε μικρά διαστήματα, αφού το διάστημα τιμών μεταξύ της στιγμής έναρξης της αμέσως επόμενης ενέργειας και των επακόλουθων, θα αφαιρούνται απ' το πεδίο στιγμής έναρξης των προηγούμενων ενεργείων της ίδιας εργασίας.

Πρόβλημα 4

Ακολουθεί επιμέρους ανάλυση των 4 λογικών προτάσεων ξεχωριστά, με αποτέλεσμα την απλοποίηση και τον τελικό χαρακτηρισμό τους. Με αυτόν τον τρόπο θα απαντηθούν τα δοθέντα ερωτήματα.

1. Ακολουθεί η μετατροπή της πρώτης πρότασης σε μορφή CNF, με σκόπο την εφαρμογή της μεθόδου της ανάλυσης πάνω στις διαζευκτικές προτάσεις. Έχουμε:

$$((A \land B \land C) \Rightarrow D) \iff (A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D)))$$

$$((A \land B \land C) \Rightarrow D) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D)))) \land ((A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))) \Rightarrow ((A \land B \land C) \Rightarrow D))$$

$$(\neg(\neg(A \land B \land C) \lor D) \lor (\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor D)) \land (\neg(\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor D) \lor (\neg(A \land B \land C) \lor D))$$

$$((A \land B \land C \land \neg D) \lor (\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor D)) \land ((A \land B \land C \land \neg D) \lor (\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor D))$$

Παρατηρούμε ότι:

$$((A \land B \land C \land \neg D) \lor (\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor D)) =$$

$$((A \land B \land C \land \neg D) \lor \neg(A \land B \land C \land \neg D)) = TRUE$$

Επομένως η δωθείσα πρόταση μπορεί να γραφτεί ως $TRUE \land TRUE = TRUE$. Επομένως, είναι έγκυρη (ταυτολογία), δηλαδή είναι ικανοποιήσιμη για όλα τα δυνατά μοντέλα τιμών των A, B, C, D.

2. Ακολουθεί η μετατροπή της πρώτης πρότασης σε μορφή CNF, με σκόπο την εφαρμογή της μεθόδου της ανάλυσης πάνω στις διαζευκτικές προτάσεις. Έχουμε:

$$A \land (A \Rightarrow B) \land (A \Rightarrow \neg B)$$

$$(A \land \neg A) \lor (B \land \neg B)$$

$$FALSE \lor FALSE$$

$$FALSE$$

Επομένως, η συγκεκριμένη πρόταση είναι μη ικανοποιήσιμη, δηλαδή μεταφράζεται σε λογική άρνηση για οποιόδηποτε μοντέλο απόδοση τιμών στις λογικές μεταβλητές A, B. Προφανώς, δεν είναι έγκυρη, αποτελεί το ”αντίθετο” μιας ταυτολογίας.

Εργασία 3

3. Μια απλή δοκιμή ανάθεσης τιμών αληθείας στις μεταβλητές A, B, C, μας κάνει εμφανές το μοτίβο της αλληλοεξάρτησης των λογικών προτάσεων που συνδέονται με σύζευξεις. Παρατηρούμε, ότι μια απόδοση τιμής σε μια μεταβλητή, θα προκάλεσει την απόδοση αρνητικής τιμής σε άλλη υποπρόταση λόγω της εμφάνισης της με τον τελεστή της άρνησης. Για να εξοικονομήσουμε χρόνο, θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω παρατήρηση γενικεύεται και για τους 8 διαφορετικούς συνδιασμούς τιμών των A, B, C με έναν απλό πίνακα αληθείας. Έχουμε:

A B C	A $\vee B$	$\neg A \vee C$	$\neg B$	$\neg C$	Τομή
0 0 0	0	1	1	1	0
0 0 1	0	1	1	0	0
0 1 0	1	1	0	1	0
0 1 1	1	1	0	0	0
1 0 0	1	0	1	1	0
1 0 1	1	1	1	0	0
1 1 0	1	0	0	1	0
1 1 1	1	1	0	0	0

Πράγματι, οποιαδήποτε απόδοση τιμών στην λογικές μεταβλητές A, B, C, καθιστά την δοθείσα πρόταση αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει μοντέλο που να ικανοποιεί την προκείμενη πρόταση, δηλαδή αυτή είναι μη ικανοποιήσιμη. Συνεπώς, δεν αληθεύει για κάθε δυνατό μοντέλο, δηλαδή δεν είναι έγκυρη, δεν αποτελεί ταυτολογία.

4. Παρατηρούμε ότι η δοθείσα πρόταση βρίσκεται ήδη σε μορφή CFN, όποτε θα εφαρμόσουμε την μέθοδο της ανάλυσης πάνω στις διαζευκτικές πρότασεις, προκειμένου να αποφανθούμε σχετικά με την ικανοποιησιμότητα της προκείμενης πρότασης. Έχουμε διαδοχικά:

$$A \vee B | \neg A \vee C | B \vee C$$

$$B | C | B \vee C$$

$$B \vee C$$

Η διαζευκτική προτάση δεν επιδέχεται άλλες απλοποιήσεις και δεν έχουμε φθάσει σε κάποια αντίφαση. Επομένως, η αρχική πρόταση είναι ικανοποιήσιμη. Τώρα, προκείμενου να προσδιορίσουμε αν είναι έγκυρη, δηλαδή αποτελεί ταυτολογία, θα ελέγξουμε αν η αντίθετη της πρόταση είναι μη ικανοποιήσιμη. Θα προσπαθήσουμε να φέρουμε την αντίθετη πρόταση σε μορφή CFN:

$$\neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C))$$

$$\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee C) \vee \neg(B \vee C)$$

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$$

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C \wedge (A \vee \neg B)$$

$$(\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B)$$

Εφάρμοζουμε τώρα την μέθοδο της ανάλυσης, προκειμένου να αποφανθούμε σχετικά με την ικανοποιησιμότητα της αντίθετης της αρχικής πρότασης. Έχουμε:

$$\neg A \vee \neg C | \neg B \vee \neg C | A \vee \neg B$$

$$\neg A | \neg B | A \vee \neg B$$

$$\neg B | \neg B$$

$$\neg B$$

Επομένως, η αντίθετη πρόταση της αρχικής είναι ικανοποιήσιμη. Βάση της αρχής της αντιθετοαντιστροφής, η πρότυπη πρόταση δεν είναι έγκυρη, δηλαδή δεν αποτελεί ταυτολογία. Υπάρχουν, όμως μέθοδοι που την ικανοποιούν όπως αναφέρθηκε πιο πάνω.

ΜΟΡΦΉ HORN:
Στο μάθημα έχουμε διδαχθεί για τις προτάσεις Horn και η ταύτιση της έννοιας αυτής με την μορφή Horn δεν έχει επικυρωθεί. Επομένω,ς θα υποθέσω ότι το ερώτημα έγκειται στο να προσδιορίσουμε αν μια πρόταση είναι μεταφέρσιμη σε πρότυπη μορφή μιας προτάσεις Horn, που απαρτίζεται από συζεύξεις φράσεων Horn.

1. Εξετάζουμε την μορφή της δοθείσας πρότασης στο τελικό στάδιο της απλοποίησης που έχει προηγηθεί. Παρατηρούμε ότι οι δύο ταυτόσιμες φράσεις που συνδέονται με διάζευξη δεν βρίσκονται σε μορφή Horn, αφού περιέχουν αλληλουχία συζεύξεων και διαζεύξεων που δεν επιδέχονται άλλη απλοποίηση (δεν μπορούν να μεταφραστούν σε κατάλληλες συνεπαγωγές). Επομένως, η προκείμενη πρόταση δεν βρίσκεται σε μορφή Horn.

2. Η μετάβλητη A αποτελώντας ένα θετικό λεκτικό εξ ορισμού αποτελεί έκφραση Horn. Η απλή συνεπαγωγή ($A \Rightarrow B$ αποτελεί και αυτή εγκυκλοπαιδικό παράδειγμα φράσης Horn. Τέλος, η συνεπαγωγή ($A \Rightarrow \neg B$ είναι ισοδύναμη / μεταφράζεται σε ($\neg A \vee \neg B$, δηλαδή μια φράση Horn. Επομένως, όλες οι συζευγμένες φράσεις είναι τύπου Horn, άρα και η αρχική πρόταση είναι πρόταση Horn.

3. Τα αρνητικά λεκτικά $\neg B$ και $\neg C$ αποτελούν εξ ορισμού φράσεις Horn. Η φράση $(A \vee B)$ περιέχει δύο θετικά λεκτικά, συνεπώς δεν αποτελεί φράση Horn. Κατά συνέπεια, η προκείμενη πρόταση δεν αποτελεί πρόταση Horn.

4. Όμοια η φράση $(A \vee B)$ περιέχει δύο θετικά λεκτικά, συνεπώς δεν αποτελεί φράση Horn. Κατά συνέπεια, η προκείμενη πρόταση δεν αποτελεί πρόταση Horn.

Πρόβλημα 5

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η $P_1 = (A \wedge (B \iff C))$ καλύπτει λογικά την $P_2 = (A \wedge B) \iff (A \wedge C)$ αρκεί να δείξουμε ότι η $P_1 \wedge \neg P_2$ είναι μη ικανοποιήσιμη. Εφαρμόζω στην προκείμενη πρόταση απλοποίησεις, προκείμενου να την μεταφέρω σε CNF μορφή και να εφαρμόσω την μέθοδο της ανάλυσης. Έχουμε:

$$A \wedge (B \iff C) \wedge \neg((A \wedge B) \iff (A \wedge C))$$

$$A \wedge ((B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \wedge \neg(((A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge C)) \wedge ((A \wedge C) \Rightarrow (A \wedge B)))$$

$$A \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge \neg((\neg(A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \wedge (\neg(A \wedge C) \vee (A \wedge B)))$$

$$A \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge \neg(((\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge C)) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee (A \wedge B)))$$

$$A \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge ((\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg(A \wedge C)) \vee (\neg(\neg A \vee \neg C) \wedge \neg(A \wedge B)))$$

$$A \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge (((A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \vee ((A \wedge C) \wedge (\neg A \vee \neg B)))$$

Σε αυτό το τμήμα εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στην τέταρτη, πιο σύνθετη διαζευκτική πρόταση. Λαμβάνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$A \wedge ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge (A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee C))$$

$$A \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee C)$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε την μέθοδο της ανάλυσης στα μέλη των υποπροτάσεων:

$$A | \neg B \vee C | \neg C \vee B | A | \neg B \vee \neg C | B \vee C$$

$$A | \neg B \vee C | \neg C \vee B | \neg B \vee \neg C | B \vee C$$

$$A | \neg B | B | \neg B \vee \neg C | B \vee C$$

Στην προσπάθεια μας να απλοποιήσουμε συγκρίνοντας τα λεκτικά B και $\neg B$ παρατηρούμε ότι είναι αντίθετα μεταξύ τους, δηλαδή οδηγηθήκαμε σε αντίφαση. Επομένως, η πρόταση $P_1 \wedge \neg P_2$ δεν είναι ικανοποίησιμη. Αυτό μεταφράζεται στο γεγονός ότι η πρόταση $P_1 = (A \wedge (B \iff C))$ καλύπτει λογικά την $P_2 = (A \wedge B) \iff (A \wedge C)$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 6

1. Το (A) είναι καλά ορισμένη πρόταση της προτασιακής λογικής. Συγκεκριμένα είναι ένα ComplexSentence της μορφής (Sentence), όπου Sentence είναι ένα Symbol A.

2. Υποθέτουμε ότι τα σύμβολα " $\Rightarrow$ " και " $\rightarrow$ " ταυτίζονται ως προς την πλήρη σημασιολογία τους, δηλαδή είναι ταυτόσιμα. Στην προκείμενη περίπτωση η πρόταση $(A \rightarrow B)$ είναι μια καλά ορισμένη πρόταση της προτασιακής λογικής. Συγκεκριμένα είναι ένα ComplexSentence της μορφής (Sentence), όπου το Sentence είναι ένα ComplexSentence της μορφής Sentence BinaryConnective Sentence, όπου το πρώτο Sentence είναι το Symbol A, το δεύτερο Sentence είναι το Symbol B και το BinaryConnective είναι ο τελεστής συνεπαγωγής " $\rightarrow$ ".

3. Σύμφωνα με τις διαφάνειες του μαθήματος το σύμβολο $\equiv$ δεν ορίζεται στα πλαίσια της προτασιακής λογικής, συνεπώς η πρόταση $A \equiv B$ δεν είναι καλά ορισμένη.

4. Σύμφωνα με τις διαφάνειες του μαθήματος το σύμβολο $\models$ δεν ορίζεται στα πλαίσια της προτασιακής λογικής, συνεπώς η πρόταση $A \models B$ δεν είναι καλά ορισμένη.

5. Υποθέτουμε ότι το σύμβολο 1 δεν ταυτίζεται με την λογική σταθερά $True$, που εκφράζει το αληθές. Επομένως, το σύμβολο 1 δεν έχει κάποια σημασιολογία στα πλαίσια της προτασιακής λογικής, με αποτέλεσμα η πρόταση $(A \wedge 1)$ να μην είναι καλά ορισμένη.