

POMA Note

Jacob Xie

January 1, 2023

1 The Real and Complex Number Systems

Ordered Sets

Definition 1.7. Suppose S is an ordered set, $E \subset S$, and E is bounded above. Suppose there exists an $\alpha \in S$ with the following properties:

- (i) α is an upper bound of E .
- (ii) If $\gamma < \alpha$ then γ is not an upper bound of E .

Then α is called the *least upper bound of E* or the *supremum of E* , and we write

$$\alpha = \sup E$$

The *greatest lower bound*, or *infimum*, of a set E which is bounded below is defined in the same manner: The statement

$$\alpha = \inf E$$

means that α is a lower bound of E and that no β with $\beta > \alpha$ is a lower bound of E .

Note S 是有序集合的情况下, E 又是属于 S 的, 并且 E 拥有上界。那么只会存在一个 α 是 E 的最小上界。同理如果是 E 拥有下界, 只会存在一个 α 是 E 的最大下界。发音: Supremum [su:'pri:məm]; Infimum ['ɪnfɪməm]。

Definition 1.10. An ordered set S is said to have the *least-upper-bound property* if the following is true: If $E \subset S$, E is not empty, and E is bounded above, then $\sup E$ exists in S .

Note S 中存在 $E \subset S$, 且 E 具有最小上界, 那么 S 就具有最小上界性, 反之亦然。

Theorem 1.11. Suppose S is an ordered set with the least-upper-bound property, $B \subset S$, B is not empty, and B is bounded below. Let L be the set of all lower bounds of B . Then $\alpha = \sup L$ exists in S , and $\alpha = \inf B$. In particular, $\inf B$ exists in S .

Proof.

因为 B 是有下界的, 且 L 不为空。由于 L 包含了所有的 y ($y \in S$) 且满足不等式 $y \leq x$ ($x \in B$), 那么所有的 $x \in B$ 都是 L 的上界。因此 L 是有上界的。关于 S 的假设意为在 S 中有一个 L 的最小上界, 被称为 α 。

如果 $\gamma < \alpha$ 那么 (根据定义 1.8) γ 并不是 L 的一个上界, 因此 $\gamma \notin B$ 。对于所有的 $x \in B$ 都有 $\alpha \leq x$ 。因此 $\alpha \in L$ 。

如果 $\alpha < \beta$ 那么 $\beta \notin L$, 因为 α 是 L 的一个上界。

我们展示过了 $\alpha \in L$ 但是 $\beta \notin L$ 而 $\beta > \alpha$ 的情况。也就是说, α 是 B 的一个下界, 但是当 $\beta > \alpha$ 时 β 却不是。这就意味着 $\alpha = \inf B$ 。 \square

Fields

Definition 1.12. A field is a set F with two operations, called *addition* and *multiplication*, which satisfy the following so-called "field axioms" (A), (M), and (D):

(A) Axioms for addition

- (A1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their sum $x + y$ is in F .
- (A2) Addition is commutative: $x + y = y + x$ for all $x, y \in F$.
- (A3) Addition is associative: $(x + y) + z = x + (y + z)$ for all $x, y, z \in F$.
- (A4) F contains an element 0 such that $0 + x = x$ for every $x \in F$.
- (A5) To every $x \in F$ corresponds an element $-x \in F$ such that $x + (-x) = 0$.

(M) Axioms for multiplication

- (M1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their product xy is in F .
- (M2) Multiplication is commutative: $xy = yx$ for all $x, y \in F$.
- (M3) Multiplication is associative: $(xy)z = x(yz)$ for all $x, y, z \in F$.
- (M4) F contains an element $1 \neq 0$ such that $1x = x$ for every $x \in F$.
- (M5) If $x \in F$ and $x \neq 0$ then there exists an element $\frac{1}{x} \in F$ such that $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$.

(D) The distributive law

$$x(y + z) = xy + xz \text{ holds for all } x, y, z \in F.$$

Note 域的定义： 维基百科。

Definition 1.17. An *ordered field* is a field F which is also an ordered set, such that:

1. $x + y < x + z$ if $x, y, z \in F$ and $y < z$,
2. $xy > 0$ if $x \in F, y \in F, x > 0$, and $y > 0$.

如果 $x > 0$, 我们称 x 为 *positive*; 如果 $x < 0$, x 则为 *negative*。

The Real Field

Theorem 1.19. *There exists an ordered field R which has the least-upper-bound property. Moreover, R contains Q as a subfield.*

第二个声明意味着 $Q \subset R$ 以及加法与乘法在 R 上的运算，当应用于 Q 的成员时，与有理数的通常操作重合；同样的，正有理数成员是 R 的正元素。

R 的成员被称为 *real numbers*，即实数。

Theorem 1.20.

(a) *If $x \in R$, $y \in R$, and $x > 0$, then there is a positive integer n such that $nx > y$.*

(b) *If $x \in R$, $y \in R$, and $x < y$, then there exists a $p \in Q$ such that $x < p < y$.*

对于 (a) 部分通常认为是 R 具有 *archimedean property*，即阿基米德性质，详见维基百科。
(b) 部分则表明 Q 是在 R 中 *dense*，即具有稠密性：在任意两个实数之间有一个有理数。

Proof.

(a) 令 A 作为所有 nx 的集合，其中 n 为所有的正整数。如果 (a) 是错误的，那么 y 则会是 A 的一个上界。但是接着 A 会在 R 中拥有一个最小上界，即 $\alpha = \sup A$ 。由于 $x > 0$ ， $\alpha - x < \alpha$ ，以及 $\alpha - x$ 不是 A 的上界，因此 $\alpha - x < mx$ 对于某些正整数 m 成立。但是这样就会有 $\alpha < (m+1)x \in A$ ，这是不可能的，因为 α 是 A 的上界。

(b) 因为 $x < y$ ， $y - x > 0$ 以及由 (a) 所知一个正整数 n 满足

$$n(y - x) > 1$$

再次应用 (a)，获取正整数 m_1 与 m_2 满足 $m_1 > nx$ ， $m_2 > -nx$ ，那么

$$-m_2 < nx < m_1$$

因此会有一个整数 m ($-m_2 \leq m \leq m_1$) 满足

$$m - 1 \leq nx \leq m$$

如果我们结合这些不等式，则会得到

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

因为 $n > 0$ ，它遵循

$$x < \frac{m}{n} < y$$

通过 $p = \frac{m}{n}$ 证明了 (b)。

□

Note (b) 的第一步将 $y - x$ 作为整体, 将 (a) $nx > y$ 中的 x 替换为 $y - x$, y 替换为 1。同理对于整数 m_1 与 m_2 而言, 可分别将 nx 与 $-nx$ 视为不等式右侧的 y , 而不等式左侧的 x 视为 1, 那么就有了 $m_1 \cdot 1 > nx$ 与 $m_2 \cdot 1 > -nx$ 。对于整数 m 的 $-m_2 \leq m \leq m_1$ 最坏的情况可将 $-m_2$ 与 m_1 视为相邻的整数, 比如说 1 和 2, 那么当 m 取值为 2 时视为 $2 - 1 \leq nx < 2$, 满足 $m - 1 \leq nx < m$ 。最后根据有理数的定义 $p = m/n$ $m, n \in \mathbb{Q}$ 可以得出 x 与 y 之间一定存在一个有理数。

Theorem 1.21. For every real $x > 0$ and every integer $n > 0$ there is one and only one positive real y such that $y^n = x$.

这个 y 数可以被写作 $\sqrt[n]{x}$ 或是 $x^{\frac{1}{n}}$ 。

Proof.

对于至多存在一个 y 的论证很简单, 因为 $0 < y_1 < y_2$ 意味着 $y_1^n < y_2^n$ 。

令 E 为所有满足 $t^n < x$ 的正实数 t 的集合。

如果 $t = x/(1+x)$ 那么 $0 \leq t < 1$, 那么 $t^n \leq t < x$ 。因此 $t \in E$, 且 E 不为空。

如果 $t > 1+x$ 那么 $t^n \geq t > x$, 所以 $t \notin E$ 。因此 $1+x$ 是 E 的一个上界。

所以根据 Theorem 1.19 得出, 存在一个

$$y = \sup E$$

而证明 $y^n = x$ 我们需要展示不等式 $y^n < x$ 与 $y^n > x$ 皆会导致矛盾。

当 $0 < a < b$ 时, 等式 $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$ 得出不等式

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

假设 $y^n < x$ 。选择 h 使得 $0 < h < 1$ 且

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

令 $a = y$, $b = y + h$, 那么就有

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

因此 $(y+h)^n < x$, 且 $y+h \in E$ 。因为 $y+h > y$, 这与 y 是 E 的一个上界相矛盾。

假设 $y^n > x$ 。令

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$$

那么 $0 < k < y$ 。如果 $t \geq y - k$, 我们得出以下结论:

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \leq kny^{n-1} = y^n - x$$

因此 $t^n > x$, 且 $t \notin E$ 。它遵循 $y-k$ 是 E 的一个上界。

但是因为 $y-k < y$, 其与 y 是 E 的最小上界的事实相矛盾。

因此 $y^n = x$, 证明完成。 □

Note 至多存在一个 y 换个角度也就是说但凡有第二个 y 使得 $y_1^n = y_2^n$, 那么 $y_1 = y_2$ 。
等式

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

左侧可以视为

$$(b - a)(b^{n-1} + b^{n-1}\frac{a}{b} + \cdots + b^{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}})$$

提取 b^{n-1} 后得

$$(b - a)b^{n-1}(1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}})$$

由于有 $0 < a < b$ 这么一个前提, 可以将第三项变为

$$1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

因此可得不等式

$$b^n - a^n < (b - a)nb^{n-1}$$

至于在证明 $y^n < x$ 不成立时, 选择 h 的 $h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ 分母为什么是 $n(y+1)^{n-1}$, 是因为这是为了之后处理不等式而特意设置的消除项 (这里利用了函数 $f(x) = x^n$ 是连续的事实, 也就是说分母一定也是实数, 那么就可以将 h 视为小于某实数); 同样的在证明 $y^n > x$ 时的 k 也是如此。

Corollary. *If a and b are positive real numbers and n is a positive integer, then*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$$

Proof.

令 $\alpha = a^{1/n}$, $\beta = b^{1/n}$, 那么有

$$ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n$$

而乘法是符合交换律的, 因此

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}$$

□

The Extended Real Number System

Definition 1.23. The extended real number system consists of the real field \mathbb{R} and two symbols, $+\infty$ and $-\infty$. We preserve the original order in \mathbb{R} , and define

$$-\infty < x < +\infty$$

for every $x \in \mathbb{R}$.

可以清楚的知道 $+\infty$ 是所有衍生的实数系统子集的一个上界, 且每个非空子集都有一个最小上界。如果 E 是一个实数的非空集合, 且没有上界在 \mathbb{R} 中, 那么 $\sup E = +\infty$ 在衍生实数系统中。

下界同理。

衍生实数系统并不形成一个域, 但它形成了一下惯例:

(a) 如果 x 是实数则

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

(b) 如果 $x > 0$ 则 $x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$

(c) 如果 $x < 0$ 则 $x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$

The Complex Field

Definition 1.24. A *complex number* is an ordered pair (a, b) of real numbers. "Ordered" means that (a, b) and (b, a) are regarded as distinct if $a \neq b$.

令 $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ 为两个复数。当且仅当 $a = c$ 以及 $b = d$ 时有 $x = y$ 。(注意该定义并非是完全不必要的; 考虑有理数的等式, 表现为整数的商。) 我们定义:

$$x + y = (a + c, b + d)$$

$$xy = (ac - bd, ad + bc)$$

Note 作为补充, 对于任意两个复数 $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ 的四则运算:

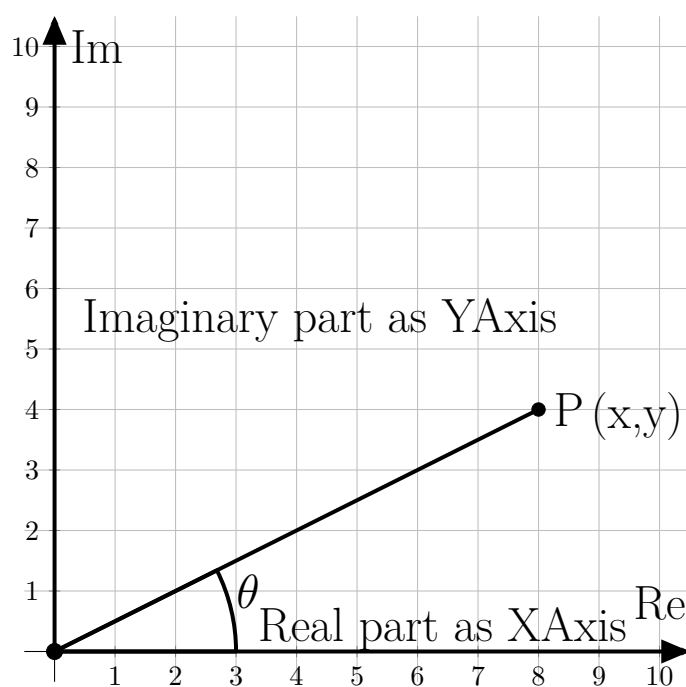
$$(1) \quad x + y = (a + c) + i(b + d)$$

$$(2) \quad x - y = (a - c) + i(b - d)$$

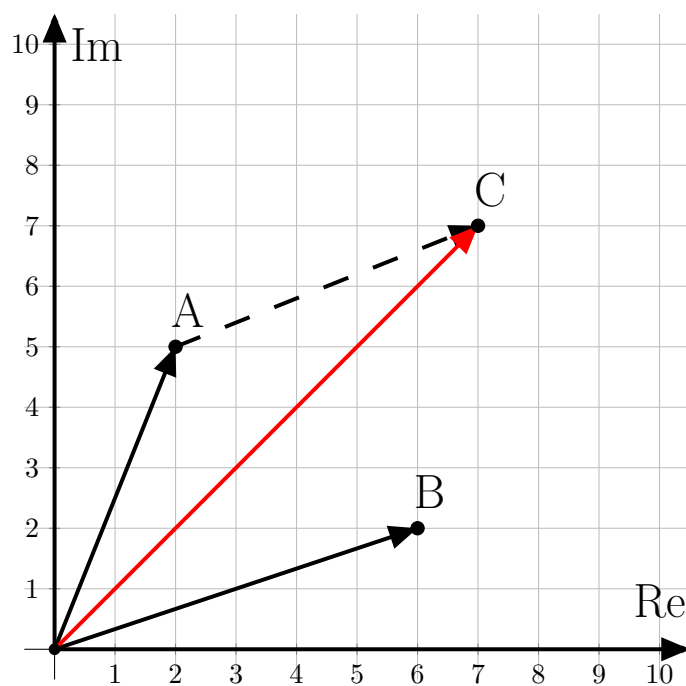
$$(3) \quad xy = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

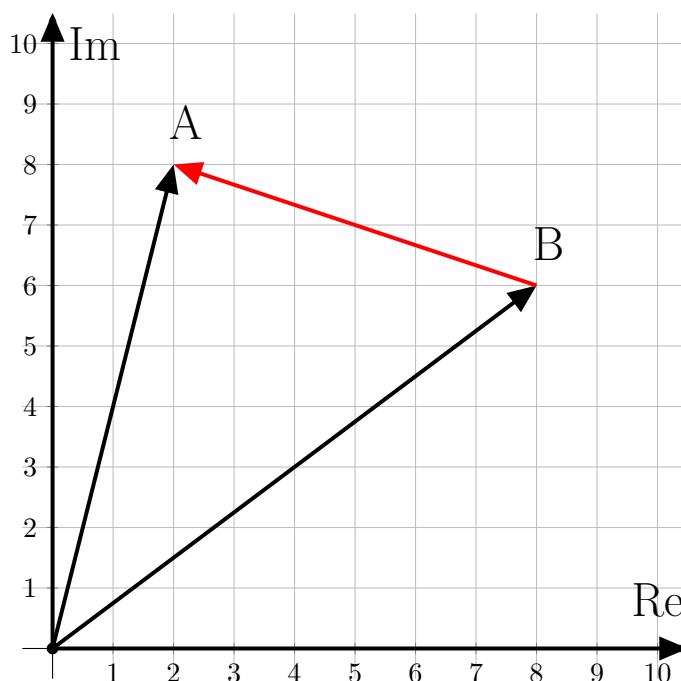
$$(4) \quad \frac{x}{y} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Note 对于任意一个复数 $z = a + ib$, 可以用复平面上的一个点来表示, 也可以用极坐标来表示:



那么复数加法和减法可以通过向量来理解：





Theorem 1.25. *These definitions of addition and multiplication turn the set of all complex numbers into a field, with $(0, 0)$ and $(1, 0)$ in the role of 0 and 1.*

Proof.

我们简单的验证一下域的公理 (Definition 1.12) , 使用 \mathbb{R} 的域结构。令 $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$ 。

(A1) 很清楚。

$$(A2) \quad x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$$

$$\begin{aligned} (A3) \quad (x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

$$(A4) \quad x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x$$

$$(A5) \quad \text{令 } -x = (-a, -b), \text{ 那么 } x + (-x) = (0, 0) = 0$$

(M1) 很清楚。

$$(M2) \quad xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, ad + bc) = yx$$

$$(M3) \quad \begin{aligned} (xy)z &= (ac - db, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bef, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= x(yz) \end{aligned}$$

$$(M4) \quad 1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x$$

(M5) 如果 $x \neq 0$ 那么 $(a, b) \neq (0, 0)$, 也就是说 a 和 b 至少有一个实数不等于 0。因此 $a^2 + b^2 > 0$, 根据 Proposition 1.18(d), 我们可以定义

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

那么

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1$$

$$(D) \quad \begin{aligned} x(y + z) &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= xy + yz \end{aligned}$$

□

Theorem 1.26. *For any real numbers a and b we have*

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

Definition 1.27. $i = (0, 1)$

Theorem 1.28. $i^2 = -1$

Proof.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

□

Theorem 1.29. *If a and b are real, then $(a, b) = a + bi$*

Proof.

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

□

Definition 1.30. If a, b are real and $z = a + bi$, then the complex number $\bar{z} = a - bi$ is called the *conjugate* of z . The numbers a and b are the *real part* and the *imaginary part* of z , respectively. We shall occasionally write

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

Theorem 1.31. *If z and w are complex, then*

$$(a) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$(b) \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$(c) \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$(d) \quad z\bar{z} \text{ is real and positive (except when } z = 0)$$

Definition 1.32. If z is a complex number, its absolute value $|z|$ is the non-negative square root of $z\bar{z}$; that is, $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.

$|z|$ 的存在 (以及唯一性) 遵循 Theorem 1.12 以及 Theorem 1.31 (d)。

注意当 x 为实数时, 那么 $\bar{x} = x$, 因此 $|x| = \sqrt{x^2}$ 。所以如果 $x \geq 0$ 时 $|x| = x$, 如果 $x < 0$ 时 $|x| = -x$ 。

Theorem 1.33. *Let z and w be complex numbers. Then*

$$(a) \quad |z| > 0 \text{ unless } z = 0, |0| = 0$$

$$(b) \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$(c) \quad |zw| = |z||w|$$

$$(d) \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|$$

$$(e) \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

Proof.

(a) 与 (b) 不足为道。令 $z = a + bi$, $w = c + di$, 其 a, b, c, d 皆为实数。那么

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 |w|^2$$

即 $|zw|^2 = (|z||w|)^2$ 。(c) 遵循 Theorem 1.21 所声明的唯一性。

证明 (d), 有 $a^2 \leq a^2 + b^2$, 因此

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

证明 (e), 有 $\bar{z}w$ 与 $z\bar{w}$ 是共轭的, 因此 $\bar{z}w + z\bar{w} = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$ 。因此

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

两边开根号后即可得 (e)。 □

Notation 1.34. If x_1, \dots, x_n are complex numbers, we write

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j$$

我们用一个重要的不等式来结束本节, 它通常被称为 *Schwarz inequality*。

Theorem 1.35. If a_1, \dots, a_n and b_1, \dots, b_n are complex numbers, then

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2$$

Proof.

令 $A = \sum |a_j|^2$, $B = \sum |b_j|^2$, $C = \sum a_j \bar{b}_j$, 本证明中 j 取值 $1, \dots, n$ 。如果 $B = 0$, 那么就有 $b_1 = \dots = b_n = 0$, 那么结论很清楚。因此假设 $B > 0$ 。根据 Theorem 1.31 有

$$\begin{aligned} \sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum (Ba_j - Cb_j)(B\bar{a}_j - \overline{Cb_j}) \\ &= B^2 \sum |a_j|^2 - B\overline{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \bar{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2) \end{aligned}$$

因为在首次求和的每个项都是非负的, 可以知道

$$B(AB - |C|^2) \geq 0$$

又因为 $B > 0$, 它遵循 $AB - |C|^2 \geq 0$ 。它便是预期的不等式。 □

Euclidean Spaces

WIP

2 Basic Topology

3 Numerical Sequences and Series

4 Continuity

5 Differentiation

6 The Riemann-Stieltjes Integral

7 Sequences and Series of Functions

8 Some Special Functions

9 Functions of Several Variables

10 Integration of Differential Forms

11 The Lebesgue Theory