POMA Note

Jacob Xie

January 1, 2023

1 The Real and Complex Number Systems

Ordered Sets

Definition 1.7. Suppose S is an ordered set, $E \subset S$, and E is bounded above. Suppose there exists an $\alpha \in S$ with the following properties:

(i) α is an upper bound of E.

(ii) If $\gamma < \alpha$ the γ is not an upper bound of E.

Then α is called the *least upper bound of E* or the *supremum of E*, and we write

$$\alpha = \sup E$$

The *greatest lower bound*, or *infimum*, of a set E which is bounded below is defined in the same manner: The statement

$$\alpha = \inf E$$

means that α is a lower bound of E and that no β with $\beta > \alpha$ is a lower bound of E.

Note S 是有序集合的情况下，E 又是属于 S 的，并且 E 拥有上界。那么只会存在一个 α 是 E 的最小上界。同理如果是 E 拥有下界，只会存在一个 α 是 E 的最大下界。发音：Supremum [su:ˈpri:məm]；Infimum [ˈɪnfaɪməm]。

Definition 1.10. An ordered set S is said to have the *least-upper-bound property* if the following is true: If $E \subset S$, E is not empty, and E is bounded above, then $\sup E$ exists in S.

Note S 中存在 $E \subset S$，且 E 具有最小上界，那么 S 就具有最小上界性，反之亦然。

Theorem 1.11. *Suppose S is an ordered set with the least-upper-bound property, $B \subset S$, B is not empty, and B is bounded below. Let L be the set of all lower bounds of B. Then $\alpha = \sup L$ exists in S, and $\alpha = \inf B$. In particular, $\inf B$ exists in S.*

Proof.

因为 B 是有下界的，且 L 不为空。由于 L 包含了所有的 y（$y \in S$）且满足不等式 $y \leq x$（$x \in B$），那么所有的 $x \in B$ 都是 L 的上界。因此 L 是有上界的。关于 S 的假设意为在 S 中有一个 L 的最小上界，被称为 α。

如果 $\gamma < \alpha$ 那么（根据定义 1.8）γ 并不是 L 的一个上界，因此 $\gamma \notin B$。对于所有的 $x \in B$ 都有 $\alpha \leq x$。因此 $\alpha \in L$。

如果 $\alpha < \beta$ 那么 $\beta \notin L$，因为 α 是 L 的一个上界。

我们展示过了 $\alpha \in L$ 但是 $\beta \notin L$ 而 $\beta > \alpha$ 的情况。也就是说，α 是 B 的一个下界，但是当 $\beta > \alpha$ 时 β 却不是。这就意味着 $\alpha = \inf B$。 □

Fields

Definition 1.12. A field is a set F with two operations, called *addition* and *multiplication*, which satisfy the following so-called ”field axioms” (A), (M), and (D):

(A) Axioms for addition

(A1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their sum $x + y$ is in F.

(A2) Addition is commutative: $x + y = y + x$ for all $x, y \in F$.

(A3) Addition is associative: $(x + y) + z = x + (y + z)$ for all $x, y, z \in F$.

(A4) F contains an element 0 such that $0 + x = x$ for every $x \in F$.

(A5) To every $x \in F$ corresponds an element $-x \in F$ such that $x + (-x) = 0$.

(M) Axioms for multiplication

(M1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their product xy is in F.

(M2) Multiplication is commutative: $xy = yx$ for all $x, y \in F$.

(M3) Multiplication is associative: $(xy)z = x(yz)$ for all $x, y, z \in F$.

(M4) F contains an element $1 \neq 0$ such that $1x = x$ for every $x \in F$.

(M5) If $x \in F$ and $x \neq 0$ then there exists an element $\frac{1}{x} \in F$ such that $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$.

(D) The distributive law

$x(y + z) = xy + xz$ holds for all $x, y, z \in F$.

Note 域的定义：维基百科。

Definition 1.17. An *ordered field* is a field F which is also an ordered set, such that:

1. $x + y < x + z$ if $x, y, z \in F$ and $y < z$,
2. $xy > 0$ if $x \in F$, $y \in F$, $x > 0$, and $y > 0$.

如果 $x > 0$，我们称 x 为 *positive*；如果 $x < 0$，x 则为 *negative*。

The Real Field

Theorem 1.19. *There exists an ordered field R which has the least-upper-bound property. Moreover, R contains Q as a subfield.*

第二个声明意味着 $Q \subset R$ 以及加法与乘法在 R 上的运算，当应用于 Q 的成员时，与有理数的通常操作重合；同样的，正有理数成员是 R 的正元素。

R 的成员被称为 *real numbers*，即实数。

Theorem 1.20.

(a) *If $x \in R$, $y \in R$, and $x > 0$, then there is a positive integer n such that $nx > y$.*

(b) *If $x \in R$, $y \in R$, and $x < y$, then there exists a $p \in Q$ such that $x < p < y$.*

对于 (a) 部分通常认为是 R 具有 *archimedean property*，即阿基米德性质，详见维基百科。(b) 部分则表明 Q 是在 R 中 *dense*，即具有稠密性：在任意两个实数之间有一个有理数。

Proof.

(a) 令 A 作为所有 nx 的集合，其中 n 为所有的正整数。如果 (a) 是错误的，那么 y 则会是 A 的一个上界。但是接着 A 会在 R 中拥有一个最小上界，即 $\alpha = \sup A$。由于 $x > 0$，$\alpha - x < \alpha$，以及 $\alpha - x$ 不是 A 的上界，因此 $\alpha - x < mx$ 对于某些正整数 m 成立。但是这样就会有 $\alpha < (m+1)x \in A$，这是不可能的，因为 α 是 A 的上界。

(b) 因为 $x < y$，$y - x > 0$ 以及由 (a) 所知一个正整数 n 满足

$$n(y-x) > 1$$

再次应用 (a)，获取正整数 m_1 与 m_2 满足 $m_1 > nx$，$m_2 > -nx$，那么

$$-m_2 < nx < m_1$$

因此会有一个整数 m（$-m_2 \leq m \leq m_1$）满足

$$m - 1 \leq nx \leq m$$

如果我们结合这些不等式，则会得到

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

因为 $n > 0$，它遵循

$$x < \frac{m}{n} < y$$

通过 $p = \frac{m}{n}$ 证明了 (b)。

□

Note (b) 的第一步将 $y-x$ 作为整体，将 (a) $nx > y$ 中的 x 替换为 $y-x$，y 替换为 1。同理对于整数 m_1 与 m_2 而言，可分别将 nx 与 $-nx$ 视为不等式右侧的 y，而不等式左侧的 x 视为 1，那么就有了 $m_1 \cdot 1 > nx$ 与 $m_2 \cdot 1 > -nx$。对于整数 m 的 $-m_2 \leq m \leq m_1$ 最坏的情况可将 $-m_2$ 与 m_1 视为相邻的整数，比如说 1 和 2，那么当 m 取值为 2 时视为 $2-1 \leq nx < 2$，满足 $m-1 \leq nx < m$。最后根据有理数的定义 $p = m/n\ m, n \in Q$ 可以得出 x 与 y 之间一定存在一个有理数。

Theorem 1.21. *For every real $x > 0$ and every integer $n > 0$ there is one and only one positive real y such that $y^n = x$.*

这个 y 数可以被写作 $\sqrt[n]{x}$ 或是 $x^{\frac{1}{n}}$。

Proof.

对于至多存在一个 y 的论证很简单，因为 $0 < y_1 < y_2$ 意味着 $y_1^n < y_2^n$。

令 E 为所有满足 $t^n < x$ 的正实数 t 的集合。

如果 $t = x/(1+x)$ 那么 $0 \leq t < 1$，那么 $t^n \leq t < x$。因此 $t \in E$，且 E 不为空。

如果 $t > 1+x$ 那么 $t^n \geq t > x$，所以 $t \notin E$。因此 $1+x$ 是 E 的一个上界。

所以根据 Theorem 1.19 得出，存在一个

$$y = \sup E$$

而证明 $y^n = x$ 我们需要展示不等式 $y^n < x$ 与 $y^n > x$ 皆会导致矛盾。

当 $0 < a < b$ 时，等式 $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$ 得出不等式

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

假设 $y^n < x$。选择 h 使得 $0 < h < 1$ 且

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

令 $a = y$，$b = y + h$，那么就有

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

因此 $(y+h)^n < x$，且 $y + h \in E$。因为 $y + h > y$，这与 y 是 E 的一个上界相矛盾。

假设 $y^n > x$。令

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$$

那么 $0 < k < y$。如果 $t \geq y - k$，我们得出以下结论：

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \leq kny^{n-1} = y^n - x$$

因此 $t^n > x$，且 $t \notin E$。它遵循 $y - k$ 是 E 的一个上界。

但是因为 $y - k < y$，其与 y 是 E 的最小上界的事实相矛盾。

因此 $y^n = x$，证明完成。 □

Note 至多存在一个 y 换个角度也就是说但凡有第二个 y 使得 $y_1^n = y_2^n$，那么 $y_1 = y_2$。
等式

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

左侧可以视为

$$(b-a)(b^{n-1} + b^{n-1}\frac{a}{b} + \cdots + b^{n-1}\frac{a}{b^{n-1}})$$

提取 b^{n-1} 后得

$$(b-a)b^{n-1}(1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}})$$

由于有 $0 < a < b$ 这么一个前提，可以将第三项变为

$$1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

因此可得不等式

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

至于在证明 $y^n < x$ 不成立时，选择 h 的 $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ 分母为什么是 $n(y+1)^{n-1}$，是因为这是为了之后处理不等式而特意设置的消除项（这里利用了函数 $f(x) = x^n$ 是连续的事实，也就是说分母一定也是实数，那么就可以将 h 视为小于某实数）；同样的在证明 $y^n > x$ 时的 k 也是如此。

Corollary. *If a and b are positive real numbers and n is a positive integer, then*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$$

Proof.

令 $\alpha = a^{1/n}$，$\beta = b^{1/n}$，那么有

$$ab = \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n$$

而乘法是符合交换律的，因此

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}$$

□

The Extended Real Number System

Definition 1.23. The extended real number system consists of the real field R and two symbols, $+\infty$ and $-\infty$. We preserve the original order in R, and define

$$-\infty < x < +\infty$$

for every $x \in R$.

可以清楚的知道 $+\infty$ 是所有衍生的实数系统子集的一个上界，且每个非空子集都有一个最小上界。如果 E 是一个实数的非空集合，且没有上界在 R 中，那么 $\sup E = +\infty$ 在衍生实数系统中。

下界同理。

衍生实数系统并不形成一个域，但它形成了一下惯例：

(a) 如果 x 是实数则

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

(b) 如果 $x > 0$ 则 $x \cdot (+\infty) = +\infty$，$x \cdot (-\infty) = -\infty$

(c) 如果 $x < 0$ 则 $x \cdot (+\infty) = -\infty$，$x \cdot (-\infty) = +\infty$

The Complex Field

Definition 1.24. A *complex number* is an ordered pair (a, b) of real numbers. "Ordered" means that (a, b) and (b, a) are regarded as distinct if $a \neq b$.

令 $x = (a, b)$，$y = (c, d)$ 为两个复数。当且仅当 $a = c$ 以及 $b = d$ 时有 $x = y$。（注意该定义并非是完全不必要的；考虑有理数的等式，表现为整数的商。）我们定义：

$$x + y = (a + c, b + d)$$

$$xy = (ac - bd, ad + bc)$$

Note 作为补充（详见该篇文章），对于任意两个复数 $x = (a, b)$，$y = (c, d)$ 的四则运算：

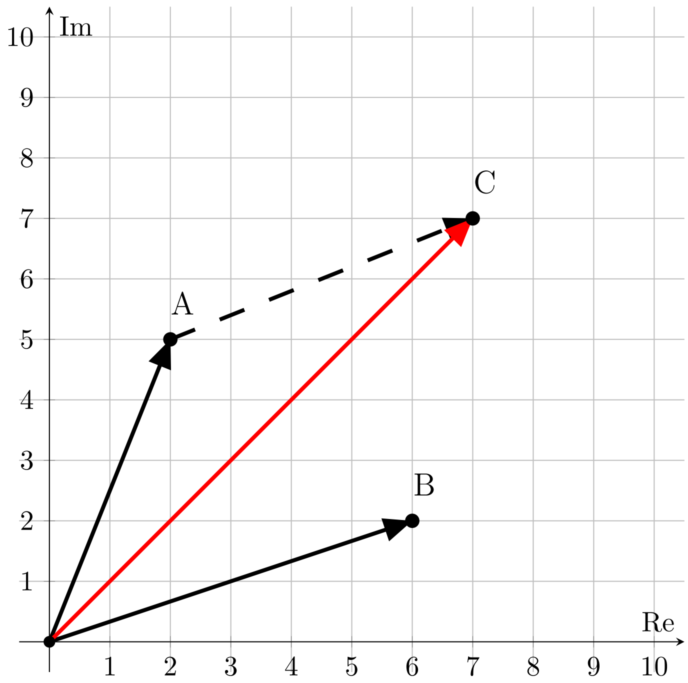
(1) $x + y = (a + c) + i(b + d)$

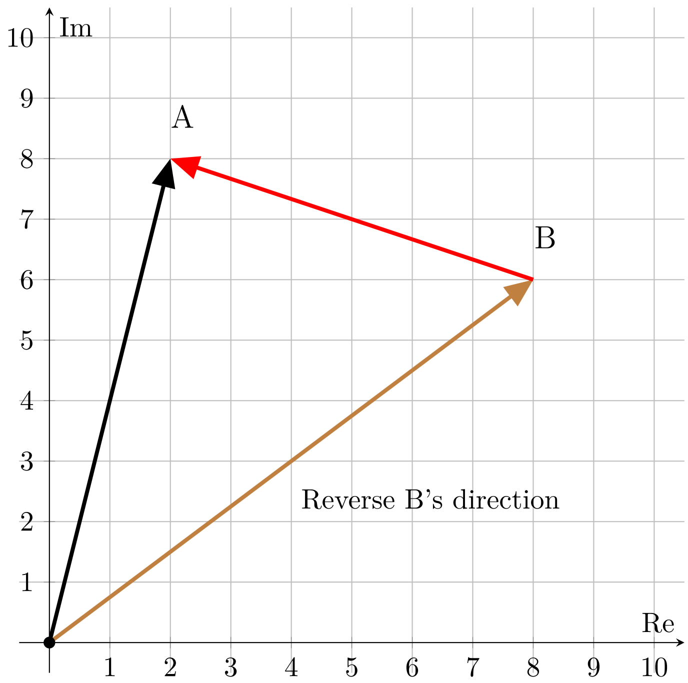
(2) $x - y = (a - c) + i(b - d)$

(3) $xy = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

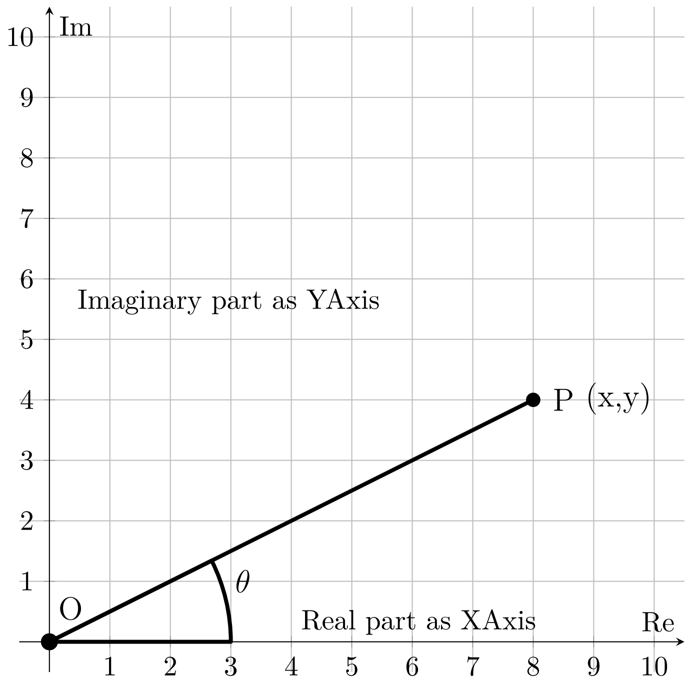
(4) $\frac{x}{y} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

Note 首先，对于任意一个复数 $z = a + ib$，可以用复平面上的一个点来表示，那么复数加减法可以通过向量来理解：

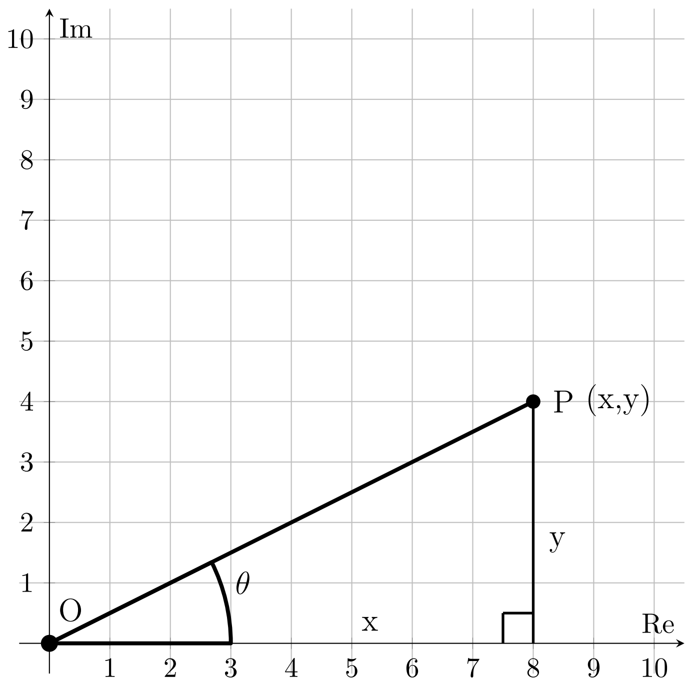




Note 而对于复数的乘除法，需要先引入复数在极坐标上的几何意义 – 对于任意一个复数 $z = a + ib$ 用极坐标来表示：


Im
Imaginary part as YAxis
P (x,y)
θ
O
Real part as XAxis
Re

那么复数的三角表示为:


Im
P (x,y)
y
θ
O
x
Re

这里将 OP 的长度作为复数 z 的**模（Modulus）**，用 $|z|$ 表示；而角 θ 为复数 z 的**幅角（Argument）**，用 $\arg(z)$ 表示。那么复数的三角表示为：

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

接下来是复数乘法的几何意义，使用复数的三角形式计算下列两个复数的乘积：

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

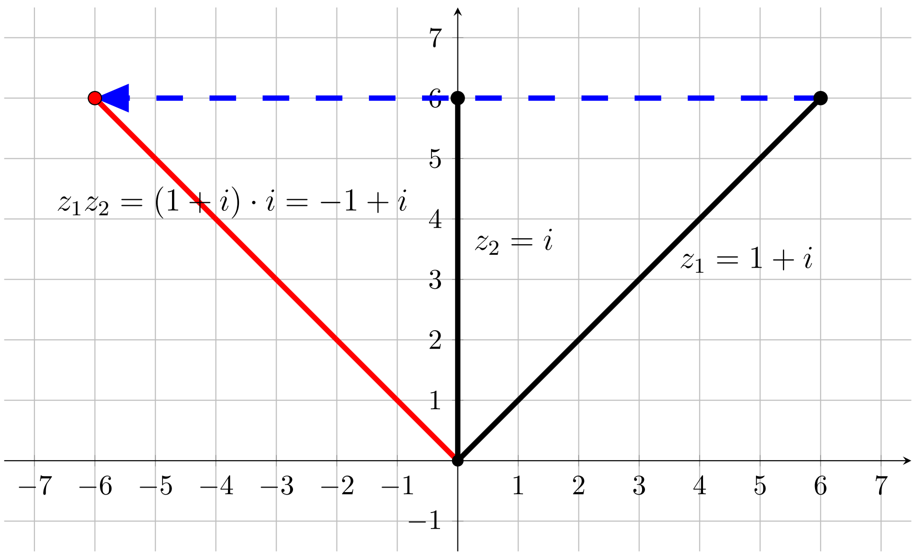
那么有：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\big) \end{aligned}$$

那么根据三角和差公式：

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

可以发现 $z_1 \cdots z_2$ 计算后模为两个复数模的乘积 $|z_1||z_2|$，幅角为两个复数幅角之和 $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$。因此复数的乘积可以理解为**拉伸与旋转**。例如：



因为

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

所以 z_1z_2 的模长为 $\sqrt{2}$ 且幅角为 $\frac{3\pi}{4}$。而复数的除法只需要将除法写成乘法形式即可

$$\begin{aligned}
z^{-1} &= \big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^{-1} \\
&= r^{-1}\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \\
&= r^{-1}\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} \\
&= r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)
\end{aligned}$$

那么两个复数

$$\begin{aligned}
z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\
z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)
\end{aligned}$$

的除法便是

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1{z_2}^{-1} \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))
\end{aligned}$$

因此，$\frac{z_1}{z_2}$ 的模长为两个模相除 $\frac{|z_1|}{|z_2|}$，幅角为 $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$。所以复数的除法也可以理解为**拉伸与旋转**。

Note 综上所述，复数的加减法就是向量的加减法，乘除法就是拉伸与旋转变换。

Theorem 1.25. *These definitions of addition and multiplication turn the set of all complex numbers into a field, with (0, 0) and (1, 0) in the role of 0 and 1.*

Proof.

我们简单的验证一下域的公理（Definition 1.12），使用 R 的域结构。令 $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$。

(A1) 很清楚。

(A2) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$

(A3)
$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\
&= (a + c + e, b + d + f) \\
&= (a, b) + (c + e, d + f) \\
&= x + (y + z)
\end{aligned}$$

(A4) $x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x$

(A5) 令 $-x = (-a, -b)$，那么 $x + (-x) = (0, 0) = 0$

(M1) 很清楚。

(M2) $xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca0dbmda + cb) = yx$

(M3)
$$
\begin{aligned}
(xy)z &= (ac - db, ad + bc)(e, f) \\
&= (ace - bde - adf - bef, acf - bdf + ade + bce) \\
&= (a, b)(ce - df, cf + de) \\
&= x(yz)
\end{aligned}
$$

(M4) $1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x$

(M5) 如果 $x \neq 0$ 那么 $(a, b) \neq (0, 0)$，也就是说 a 和 b 至少有一个实数不等于 0。因此 $a^2 + b^2 > 0$，根据 Proposition 1.18(d)，我们可以定义

$$\frac{1}{x} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2})$$

那么

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a, b)(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) = (1, 0) = 1$$

(D)
$$
\begin{aligned}
x(y + z) &= (a, b)(c + e, d + f) \\
&= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\
&= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\
&= xy + yz
\end{aligned}
$$

□

Theorem 1.26. *For any real numbers a and b we have*

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

Definition 1.27. $i = (0, 1)$

Theorem 1.28. $i^2 = -1$

Proof.

$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ □

Theorem 1.29. *If a and b are real, then $(a, b) = a + bi$*

Proof.

$$
\begin{aligned}
a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\
&= (a, 0) + (0, b) \\
&= (a, b)
\end{aligned}
$$

□

Definition 1.30. If a, b are real and $z = a + bi$, then the complex number $\overline{z} = a - bi$ is called the *conjugate* of z. The numbers a and b are the *real part* and the *imaginary part* of z, respectively. We shall occasionally write

$$a = Re(z), \quad b = Im(z)$$

Theorem 1.31. *If z and w are complex, then*

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(b) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(c) $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$

(d) $z\overline{z}$ *is real and positive (except when* $z = 0$*)*

Definition 1.32. If z is a complex number, its absolute value $|z|$ is the non-negative square root of $z\overline{z}$; that is, $|z| = (z\overline{z})^{1/2}$.

$|z|$ 的存在（以及唯一性）遵循 Theorem 1.12 以及 Theorem 1.31 (d)。

注意当 x 为实数时，那么 $\overline{x} = x$，因此 $|x| = \sqrt{x^2}$。所以如果 $x \geq 0$ 时 $|x| = x$，如果 $x < 0$ 时 $|x| = -x$。

Theorem 1.33. *Let z and w be complex numbers. Then*

(a) $|z| > 0$ *unless* $z = 0$, $|0| = 0$

(b) $|\overline{z}| = |z|$

(c) $|zw| = |z||w|$

(d) $|Re\,z| \leq |z|$

(e) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Proof.

(a) 与 (b) 不足为道。令 $z = a + bi$, $w = c + di$，其 a, b, c, d 皆为实数。那么

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$$

即 $|zw|^2 = (|z||w|)^2$。(c) 遵循 Theorem 1.21 所声明的唯一性。

证明 (d)，有 $a^2 \leq a^2 + b^2$，因此

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

证明 (e)，有 $\overline{z}w$ 与 $z\overline{w}$ 是共轭的，因此 $\overline{z}w + z\overline{w} = 2\,Re\,(z\overline{w})$。因此

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + 2\,Re\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

两边开根号后即可得 (e)。 □

Notation 1.34. If $x_1, \ldots, x_n$ are complex numbers, we write

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

我们用一个重要的不等式来结束本节，它通常被称为 *Schwarz inequality*。

Theorem 1.35. *If $a_1, \ldots, a_n$ and $b_1, \ldots, b_n$ are complex numbers, then*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$$

Proof.

令 $A = \sum |a_j|^2$, $B = \sum |b_j|^2$, $C = \sum a_j \bar{b}_j$，本证明中 j 取值 $1, \ldots, n$。如果 $B = 0$，那么就有 $b_1 = \cdots = b_n = 0$，那么结论很清楚。因此假设 $B > 0$。根据 Theorem 1.31 有

$$\begin{aligned}
\sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a}_j - \overline{CB_j}) \\
&= B^2 \sum |a_j|^2 - B\overline{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \overline{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\
&= B^2 A - B|C|^2 \\
&= B(AB - |C|^2)
\end{aligned}$$

因为在首次求和的每个项都是非负的，可以知道

$$B(AB - |C|^2) \geq 0$$

又因为 $B > 0$，它遵循 $AB - |C|^2 \geq 0$。它便是预期的不等式。 □

Euclidean Spaces

WIP

2 Basic Topology

3 Numerical Sequences and Series

4 Continuity

5 Differentiation

6 The Riemann-Stiltjes Integral

7 Sequences and Series of Functions

8 Some Special Functions

9 Functions of Several Variables

10 Integration of Differential Forms

11 The Lebesgue Theory