# Study Notes of Principles of Mathematical Analysis

Jacob Xie

January 18, 2023

# 1 The Real and Complex Number Systems

## Ordered Sets

**1.7 Definition** Suppose $S$ is an ordered set, $E \subset S$, and $E$ is bounded above. Suppose there exists an $\alpha \in S$ with the following properties:

(i) $\alpha$ is an upper bound of $E$.

(ii) If $\gamma < \alpha$ the $\gamma$ is not an upper bound of $E$.

Then $\alpha$ is called the *least upper bound of* $E$ or the *supremum of* $E$, and we write

$$\alpha = \sup E$$

The *greatest lower bound*, or *infimum*, of a set $E$ which is bounded below is defined in the same manner: The statement

$$\alpha = \inf E$$

means that $\alpha$ is a lower bound of $E$ and that no $\beta$ with $\beta > \alpha$ is a lower bound of $E$.

**Note**

- $S$ 是有序集合的情况下，$E$ 又是属于 $S$ 的，并且 $E$ 拥有上界。那么只会存在一个 $\alpha$ 是 $E$ 的最小上界。同理如果是 $E$ 拥有下界，只会存在一个 $\alpha$ 是 $E$ 的最大下界。
- 上确界 Supremum [suːˈpriːməm]；下确界 Infimum [ˈɪnfaɪməm]。

**1.10 Definition** An ordered set $S$ is said to have the *least-upper-bound property* if the following is true: If $E \subset S$, $E$ is not empty, and $E$ is bounded above, then $\sup E$ exists in $S$.

**Note**
$S$ 中存在 $E \subset S$，且 $E$ 具有最小上界，那么 $S$ 就具有最小上界性，反之亦然。

**1.11 Theorem** *Suppose $S$ is an ordered set with the least-upper-bound property, $B \subset S$, $B$ is not empty, and $B$ is bounded below. Let $L$ be the set of all lower bounds of $B$. Then $\alpha = \sup L$ exists in $S$, and $\alpha = \inf B$. In particular, $\inf B$ exists in $S$.*

*Proof.*

因为 $B$ 是有下界的，且 $L$ 不为空。由于 $L$ 包含了所有的 $y$（$y \in S$）且满足不等式 $y \leq x$（$x \in B$），那么所有的 $x \in B$ 都是 $L$ 的上界。因此 $L$ 是有上界的。关于 $S$ 的假设意为在 $S$ 中有一个 $L$ 的最小上界，被称为 $\alpha$。

如果 $\gamma < \alpha$ 那么（根据 Definition 1.8）$\gamma$ 并不是 $L$ 的一个上界，因此 $\gamma \notin B$。对于所有的 $x \in B$ 都有 $\alpha \leq x$。因此 $\alpha \in L$。

如果 $\alpha < \beta$ 那么 $\beta \notin L$，因为 $\alpha$ 是 $L$ 的一个上界。

我们展示过了 $\alpha \in L$ 但是 $\beta \notin L$ 而 $\beta > \alpha$ 的情况。也就是说，$\alpha$ 是 $B$ 的一个下界，但是当 $\beta > \alpha$ 时 $\beta$ 却不是。这就意味着 $\alpha = \inf B$。 □

## Fields

**1.12 Definition** A field is a set $F$ with two operations, called *addition* and *multiplication*, which satisfy the following so-called ”field axioms” (A), (M), and (D):

**(A) Axioms for addition**

(A1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their sum $x + y$ is in $F$.

(A2) Addition is commutative: $x + y = y + x$ for all $x, y \in F$.

(A3) Addition is associative: $(x + y) + z = x + (y + z)$ for all $x, y, z \in F$.

(A4) $F$ contains an element 0 such that $0 + x = x$ for every $x \in F$.

(A5) To every $x \in F$ corresponds an element $-x \in F$ such that $x + (-x) = 0$.

**(M) Axioms for multiplication**

(M1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their product $xy$ is in $F$.

(M2) Multiplication is commutative: $xy = yx$ for all $x, y \in F$.

(M3) Multiplication is associative: $(xy)z = x(yz)$ for all $x, y, z \in F$.

(M4) $F$ contains an element $1 \neq 0$ such that $1x = x$ for every $x \in F$.

(M5) If $x \in F$ and $x \neq 0$ then there exists an element $\frac{1}{x} \in F$ such that $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$.

**(D) The distributive law**

$x(y + z) = xy + xz$ holds for all $x, y, z \in F$.

**Note**
域的定义：维基百科。

**1.17 Definition** An *ordered field* is a field $F$ which is also an ordered set, such that:

1. $x+y<x+z$ if $x,y,z\in F$ and $y<z$,
2. $xy>0$ if $x\in F$, $y\in F$, $x>0$, and $y>0$.

如果 $x>0$，我们称 $x$ 为 *positive*；如果 $x<0$，$x$ 则为 *negative*。

## The Real Field

**1.19 Theorem** *There exists an ordered field $R$ which has the least-upper-bound property. Moreover, $R$ contains $Q$ as a subfield.*

第二个声明意味着 $Q\subset R$ 以及加法与乘法在 $R$ 上的运算，当应用于 $Q$ 的成员时，与有理数的通常操作重合；同样的，正有理数成员是 $R$ 的正元素。

R 的成员被称为 *real numbers*，即实数。

**1.20 Theorem**

*(a) If $x\in R$, $y\in R$, and $x>0$, then there is a positive integer $n$ such that $nx>y$.*

*(b) If $x\in R$, $y\in R$, and $x<y$, then there exists a $p\in Q$ such that $x<p<y$.*

对于 (a) 部分通常认为是 $R$ 具有 *archimedean property*，即阿基米德性质，详见维基百科。(b) 部分则表明 $Q$ 是在 $R$ 中 *dense*，即具有稠密性：在任意两个实数之间有一个有理数。

*Proof.*

(a) 令 $A$ 作为所有 $nx$ 的集合，其中 $n$ 为所有的正整数。如果 (a) 是错误的，那么 $y$ 则会是 $A$ 的一个上界。但是接着 $A$ 会在 $R$ 中拥有一个最小上界，即 $\alpha=\sup A$。由于 $x>0$，$\alpha-x<\alpha$，以及 $\alpha-x$ 不是 $A$ 的上界，因此 $\alpha-x<mx$ 对于某些正整数 $m$ 成立。但是这样就会有 $\alpha<(m+1)x\in A$，这是不可能的，因为 $\alpha$ 是 $A$ 的上界。

(b) 因为 $x<y$，$y-x>0$ 以及由 (a) 所知一个正整数 $n$ 满足

$$n(y-x)>1$$

再次应用 (a)，获取正整数 $m_1$ 与 $m_2$ 满足 $m_1>nx$，$m_2>-nx$，那么

$$-m_2<nx<m_1$$

因此会有一个整数 m（$-m_2 \leq m \leq m_1$）满足

$$m - 1 \leq nx \leq m$$

如果我们结合这些不等式，则会得到

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

因为 $n > 0$，它遵循

$$x < \frac{m}{n} < y$$

通过 $p = \frac{m}{n}$ 证明了 (b)。

□

**Note**

(b) 的第一步将 $y - x$ 作为整体，将 (a) $nx > y$ 中的 $x$ 替换为 $y - x$，$y$ 替换为 1。同理对于整数 $m_1$ 与 $m_2$ 而言，可分别将 $nx$ 与 $-nx$ 视为不等式右侧的 $y$，而不等式左侧的 $x$ 视为 1，那么就有了 $m_1 \cdot 1 > nx$ 与 $m_2 \cdot 1 > -nx$。对于整数 $m$ 的 $-m_2 \leq m \leq m_1$ 最坏的情况可将 $-m_2$ 与 $m_1$ 视为相邻的整数，比如说 1 和 2，那么当 $m$ 取值为 2 时视为 $2 - 1 \leq nx < 2$，满足 $m - 1 \leq nx < m$。最后根据有理数的定义 $p = m/n\ m, n \in Q$ 可以得出 $x$ 与 $y$ 之间一定存在一个有理数。

**1.21 Theorem** *For every real $x > 0$ and every integer $n > 0$ there is one and only one positive real $y$ such that $y^n = x$.*

这个 $y$ 数可以被写作 $\sqrt[n]{x}$ 或是 $x^{\frac{1}{n}}$。

*Proof.*

对于至多存在一个 $y$ 的论证很简单，因为 $0 < y_1 < y_2$ 意味着 $y_1^n < y_2^n$。

令 $E$ 为所有满足 $t^n < x$ 的正实数 $t$ 的集合。

如果 $t = x/(1 + x)$ 那么 $0 \leq t < 1$，那么 $t^n \leq t < x$。因此 $t \in E$，且 $E$ 不为空。

如果 $t > 1 + x$ 那么 $t^n \geq t > x$，所以 $t \notin E$。因此 $1 + x$ 是 $E$ 的一个上界。

所以根据 Theorem 1.19 得出，存在一个

$$y = \sup E$$

而证明 $y^n = x$ 我们需要展示不等式 $y^n < x$ 与 $y^n > x$ 皆会导致矛盾。

当 $0 < a < b$ 时，等式 $b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$ 得出不等式

$$b^n - a^n < (b - a)nb^{n-1}$$

假设 $y^n < x$。选择 h 使得 $0 < h < 1$ 且

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

令 $a = y$，$b = y + h$，那么就有

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

因此 $(y+h)^n < x$，且 $y + h \in E$。因为 $y + h > y$，这与 $y$ 是 $E$ 的一个上界相矛盾。

假设 $y^n > x$。令

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$$

那么 $0 < k < y$。如果 $t \geq y - k$，我们得出以下结论：

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \leq kny^{n-1} = y^n - x$$

因此 $t^n > x$，且 $t \notin E$。它遵循 $y - k$ 是 $E$ 的一个上界。

但是因为 $y - k < y$，其与 $y$ 是 $E$ 的最小上界的事实相矛盾。

因此 $y^n = x$，证明完成。 □

**Note**

至多存在一个 $y$ 换个角度也就是说但凡有第二个 $y$ 使得 $y_1^n = y_2^n$，那么 $y_1 = y_2$。

等式

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

左侧可以视为

$$(b-a)(b^{n-1} + b^{n-1}\frac{a}{b} + \cdots + b^{n-1}\frac{a}{b^{n-1}})$$

提取 $b^{n-1}$ 后得

$$(b-a)b^{n-1}(1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}})$$

由于有 $0 < a < b$ 这么一个前提，可以将第三项变为

$$1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

因此可得不等式

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

至于在证明 $y^n < x$ 不成立时，选择 $h$ 的 $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ 分母为什么是 $n(y+1)^{n-1}$，是因为这是为了之后处理不等式而特意设置的消除项（这里利用了函数 $f(x) = x^n$ 是连续的事实，也就是说分母一定也是实数，那么就可以将 $h$ 视为小于某实数）；同样的在证明 $y^n > x$ 时的 $k$ 也是如此。

**Corollary** *If $a$ and $b$ are positive real numbers and $n$ is a positive integer, then*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$$

*Proof.*

令 $\alpha = a^{1/n}$，$\beta = b^{1/n}$，那么有

$$ab = \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n$$

而乘法是符合交换律的，因此

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}$$

□

## The Extended Real Number System

**1.23 Definition** The extended real number system consists of the real field $R$ and two symbols, $+\infty$ and $-\infty$. We preserve the original order in $R$, and define

$$-\infty < x < +\infty$$

for every $x \in R$.

可以清楚的知道 $+\infty$ 是所有广义实数系子集的一个上界，且每个非空子集都有一个最小上界。如果 $E$ 是一个实数的非空集合，且没有上界在 $R$ 中，那么 $\sup E = +\infty$ 在广义实数系中。

下界同理。

广义实数系并不形成一个域，但它形成了一下惯例：

(a) 如果 $x$ 是实数则

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

(b) 如果 $x > 0$ 则 $x \cdot (+\infty) = +\infty$，$x \cdot (-\infty) = -\infty$

(c) 如果 $x < 0$ 则 $x \cdot (+\infty) = -\infty$，$x \cdot (-\infty) = +\infty$

## The Complex Field

**1.24 Definition** A *complex number* is an ordered pair $(a, b)$ of real numbers. "Ordered" means that $(a, b)$ and $(b, a)$ are regarded as distinct if $a \neq b$.

令 $x=(a,b)$，$y=(c,d)$ 为两个复数。当且仅当 $a=c$ 以及 $b=d$ 时有 $x=y$。（注意该定义并非是完全不必要的；考虑有理数的等式，表现为整数的商。）我们定义：

$$x+y=(a+c,b+d)$$

$$xy=(ac-bd,ad+bc)$$

**Note**

作为补充（详见该篇文章），对于任意两个复数 $x=(a,b)$，$y=(c,d)$ 的四则运算：

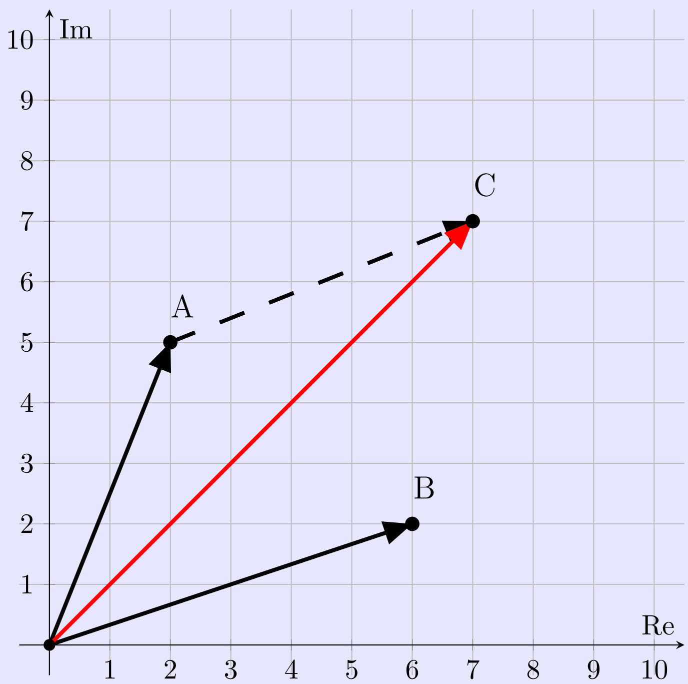
(1) $x+y=(a+c)+i(b+d)$

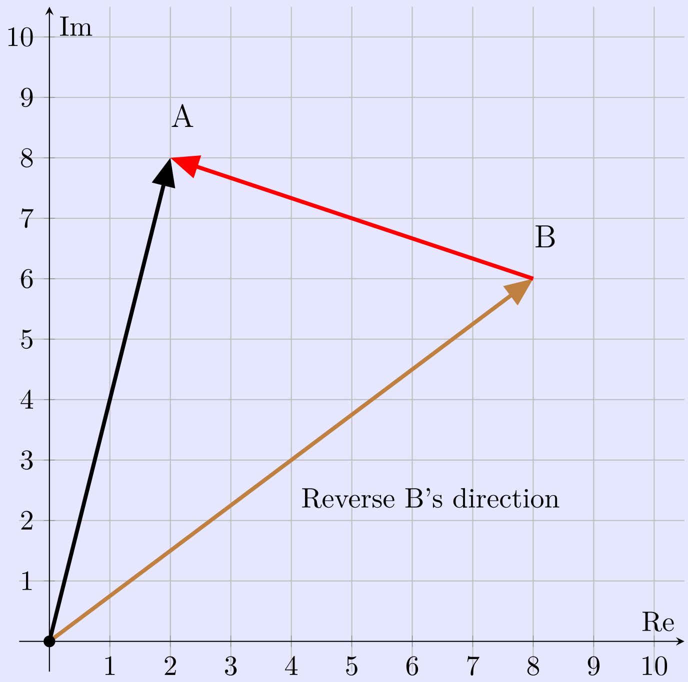
(2) $x-y=(a-c)+i(b-d)$

(3) $xy=(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc)$

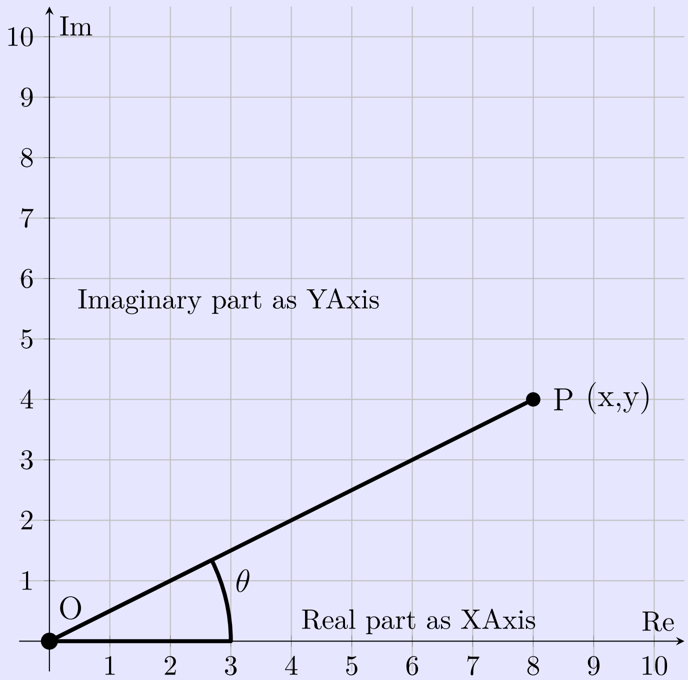
(4) $\frac{x}{y}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

首先，对于任意一个复数 $z=a+ib$，可以用复平面上的一个点来表示，那么复数加减法可以通过向量来理解：

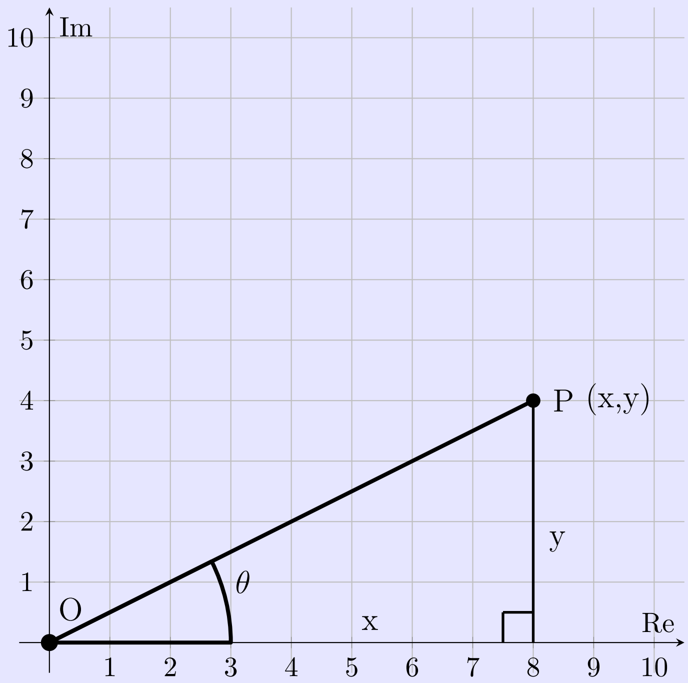





而对于复数的乘除法，需要先引入复数在极坐标上的几何意义 – 对于任意一个复数 $z = a + ib$ 用极坐标来表示：



那么复数的三角表示为:




这里将 $OP$ 的长度作为复数 $z$ 的**模(Modulus)**，用 $|z|$ 表示；而角 $\theta$ 为复数 $z$ 的**幅角(Argument)**，用 $\arg(z)$ 表示。那么复数的三角表示为:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

接下来是复数乘法的几何意义，使用复数的三角形式计算下列两个复数的乘积:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

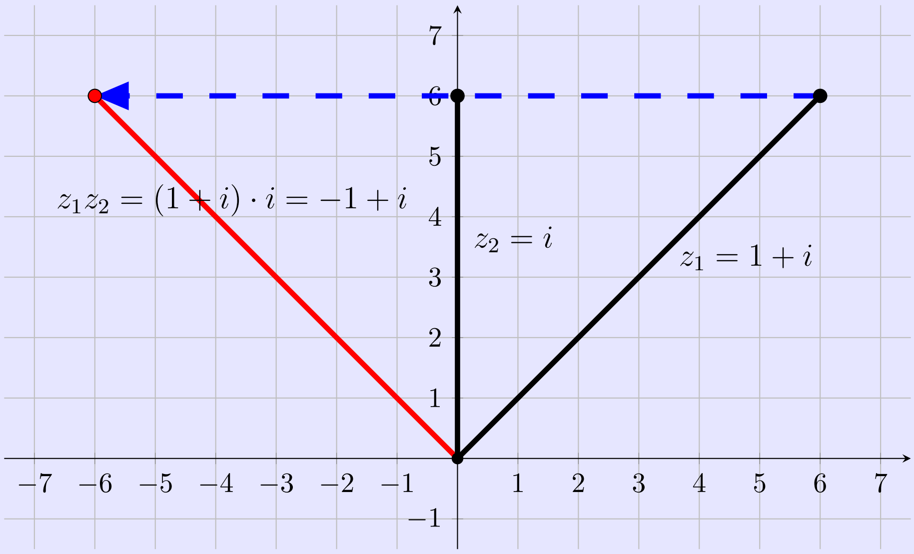
那么有:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\big) \end{aligned}$$

那么根据三角和差公式:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$$

可以发现 $z_1 \cdot z_2$ 计算后模为两个复数模的乘积 $|z_1||z_2|$，幅角为两个复数幅角之和 $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$。因此复数的乘积可以理解为**拉伸与旋转**。例如:




因为

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

所以 $z_1z_2$ 的模长为 $\sqrt{2}$ 且幅角为 $\frac{3\pi}{4}$。而复数的除法只需要将除法写成乘法形式即可

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^{-1} \\ &= r^{-1}\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= r^{-1}\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} \\ &= r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta) \end{aligned}$$

那么两个复数

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

的除法便是

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1{z_2}^{-1} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

因此，$\frac{z_1}{z_2}$ 的模长为两个模相除 $\frac{|z_1|}{|z_2|}$，幅角为 $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$。所以复数的除法也可以理解为**拉伸与旋转**。

综上所述，复数的加减法就是向量的加减法，乘除法就是拉伸与旋转变换。

**1.25 Theorem** *These definitions of addition and multiplication turn the set of all complex numbers into a field, with (0, 0) and (1, 0) in the role of 0 and 1.*

*Proof.*

我们简单的验证一下域的公理（Definition 1.12），使用 $R$ 的域结构。令 $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$。

(A1) 很清楚。

(A2) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$

(A3)
$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= x + (y + z)\end{aligned}$$

(A4) $x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x$

(A5) 令 $-x = (-a, -b)$，那么 $x + (-x) = (0, 0) = 0$

(M1) 很清楚。

(M2) $xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = yx$

(M3)
$$\begin{aligned}(xy)z &= (ac - db, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bef, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= x(yz)\end{aligned}$$

(M4) $1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x$

(M5) 如果 $x \neq 0$ 那么 $(a, b) \neq (0, 0)$，也就是说 $a$ 和 $b$ 至少有一个实数不等于 0。因此 $a^2 + b^2 > 0$，根据 Proposition 1.18(d)，我们可以定义

$$\frac{1}{x} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2})$$

那么

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a,b)\Big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\Big) = (1,0) = 1$$

(D)

$$\begin{aligned} x(y+z) &= (a,b)(c+e,d+f) \\ &= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) \\ &= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) \\ &= xy+yz \end{aligned}$$

□

**1.26 Theorem** *For any real numbers $a$ and $b$ we have*

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0), \quad (a,0)(b,0) = (ab,0)$$

**1.27 Definition** $i = (0,1)$

**1.28 Theorem** $i^2 = -1$

*Proof.*
$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$ □

**1.29 Theorem** *If $a$ and $b$ are real, then $(a,b) = a+bi$*

*Proof.*

$$\begin{aligned} a+bi &= (a,0)+(b,0)(0,1) \\ &= (a,0)+(0,b) \\ &= (a,b) \end{aligned}$$

□

**1.30 Definition** If $a$, $b$ are real and $z = a+bi$, then the complex number $\overline{z} = a-bi$ is called the *conjugate* of $z$. The numbers $a$ and $b$ are the *real part* and the *imaginary part* of $z$, respectively. We shall occasionally write

$$a = Re(z), \quad b = Im(z)$$

**1.31 Theorem** *If $z$ and $w$ are complex, then*

*(a)* $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

*(b)* $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

*(c)* $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$

*(d)* $z\overline{z}$ *is real and positive (except when* $z = 0$*)*

**1.32 Definition** If $z$ is a complex number, its absolute value $|z|$ is the non-negative square root of $z\overline{z}$; that is, $|z| = (z\overline{z})^{1/2}$.

$|z|$ 的存在（以及唯一性）遵循 Theorem 1.12 以及 Theorem 1.31 (d)。

注意当 $x$ 为实数时，那么 $\overline{x} = x$，因此 $|x| = \sqrt{x^2}$。所以如果 $x \geq 0$ 时 $|x| = x$，如果 $x < 0$ 时 $|x| = -x$。

**1.33 Theorem** *Let* $z$ *and* $w$ *be complex numbers. Then*

*(a)* $|z| > 0$ *unless* $z = 0$, $|0| = 0$

*(b)* $|\overline{z}| = |z|$

*(c)* $|zw| = |z||w|$

*(d)* $|Re\, z| \leq |z|$

*(e)* $|z + w| \leq |z| + |w|$

*Proof.*

(a) 与 (b) 不足为道。令 $z = a + bi$, $w = c + di$，其 $a$, $b$, $c$, $d$ 皆为实数。那么

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$$

即 $|zw|^2 = (|z||w|)^2$。(c) 遵循 Theorem 1.21 所声明的唯一性。

证明 (d)，有 $a^2 \leq a^2 + b^2$，因此

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

证明 (e)，有 $\overline{z}w$ 与 $z\overline{w}$ 是共轭的，因此 $\overline{z}w + z\overline{w} = 2\, Re\,(z\overline{w})$。因此

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + 2\, Re\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

两边开根号后即可得 (e)。 □

**Note**

计算中第一步的 $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$ 是将 $z+w$ 视为整体，并使用了 Definition 1.32 中的 $|z| = (z\overline{z})^{1/2}$ 转换为 $(z+w)(\overline{z+w})$，而又因为 Theorem 1.31 (a) 可将第二项变为 $(\overline{z}+\overline{w})$；而第三步到第四步的不等式则利用了 Theorem 1.33 (d)，即 $|Rez| \le |z|$；第四步到第五步则使用了 Theorem 1.33 (c)，即 $|zw| = |z||w|$。

**1.34 Notation** If $x_1, \ldots, x_n$ are complex numbers, we write

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

我们用一个重要的不等式来结束本节，它通常被称为 *Schwarz inequality*。

**1.35 Theorem** *If $a_1, \ldots, a_n$ and $b_1, \ldots, b_n$ are complex numbers, then*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$$

*Proof.*

令 $A = \sum |a_j|^2$, $B = \sum |b_j|^2$, $C = \sum a_j \bar{b}_j$，本证明中 j 取值 $1, \ldots, n$。如果 $B = 0$，那么就有 $b_1 = \cdots = b_n = 0$，那么结论很清楚。因此假设 $B > 0$。根据 Theorem 1.31 有

$$\begin{aligned}\sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a}_j - \overline{CB_j}) \\ &= B^2 \sum |a_j|^2 - B\overline{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \overline{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2)\end{aligned}$$

因为在首次求和的每个项都是非负的，可以知道

$$B(AB - |C|^2) \ge 0$$

又因为 $B > 0$，它遵循 $AB - |C|^2 \ge 0$。它便是预期的不等式。 $\square$

**Note**

$|Ba_j - Cb_j|^2$ 为构造项，将其中 $Ba_j - Cb_j$ 视为整体根据 Definition 1.32，可转换为 $(Ba_j - Cb_j)(\overline{Ba_j - Cb_j})$，而后者根据 Theorem 1.31 即可写为 $B\overline{a}_j - \overline{Cb_j}$（这里 $B = \sum |b_j|^2$ 的共轭还是其本身）；根据乘法分配律得出第二步后，将之前设定的 $A, B, C$ 带入即可得出 $B(AB - |C|^2)$；最后根据起始的构造项 $|Ba_j - Cb_j|^2$ 必然非负以及之前假设的 $B > 0$ 可以得出 $AB - |C|^2 \ge 0$；将 $A, B, C$ 原本代表的值带入，即 $\sum |a_j|^2 \sum |b_j|^2 - |\sum a_j \bar{b}_j| \ge 0$。

## Euclidean Spaces

**1.36 Definitions** For each positive integer $k$, let $R^k$ be the set of all ordered $k$-tuples

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

where $x_1, \ldots, x_k$ are real numbers, called the *coordintates* of $\mathbf{x}$. The elements of $R^k$ are called points, or vectors, especially when $k > 1$. We shall denote vectors by boldfaced letters. If $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ and if $\alpha$ is a real number, put

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k)$$

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k)$$

so that $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R^k$ and $\alpha\mathbf{x} \in R^k$. This defines addition of vectors, as well as multiplication of a vector by a real number (a scalar). These two operations satisfy the commutative, associative, and distributive laws (the proof is trivial, in view of the analogous for the real numbers) and make $R^k$ into a *vector space over the real field.* The zero element of $R^k$ (sometimes called the *origin* or the *null vector*) is the point $\mathbf{0}$, all of whose coordintates are 0.

We also define the so-called "inner product" (or scalar product) of $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ by

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

and the *norm* of $\mathbf{x}$ by

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$$

The structure now defined (the vector space $R^k$ with the above inner product and norm) is called euclidean $k$-space.

**1.37 Theorem** *Suppose* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^k$*, and* $\alpha$ *is real. Then*

*(a)* $|\mathbf{x}| \geq 0$*;*

*(b)* $|\mathbf{x}| = 0$ *if and only if* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*;*

*(c)* $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$*;*

*(d)* $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$*;*

*(e)* $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$*;*

*(f)* $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$

*Proof.*

前三项不必赘述，而 (d) 是 Schwarz 不等式的间接结论。通过 (d) 可以有

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\
&\le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \\
&= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2
\end{aligned}$$

这样 (e) 就被证明了。最后替换 (e) 中的 $\mathbf{x}$ 为 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 以及 $\mathbf{y}$ 为 $\mathbf{y}-\mathbf{z}$ (f) 可以得出 (f)。 □

**1.38 Remarks** Theorem 1.37 (a), (b), and (f) will allow us (see Chap. 2) to regard $R^k$ as a metric space.

$R^1$ (the set of all real numbers) is usually called the line, or the real line. Likewise, $R^2$ is called the plane, or the complex plane (compare Definitions 1.24 and 1.36). In these two cases the norm is just the absolute value of the corresponding real or complex number.

# 2 Basic Topology

## Finite, Countable, and Uncoutable Sets

本节由函数概念的定义开始。

**2.1 Definition** Consider two sets $A$ and $B$, whose elements may be any objects whatsover, and suppose that with each element $x$ of $A$ there is associated, in some manner, an element of $B$, which we denote by $f(x)$. Then $f$ is said to be a *function* from $A$ to $B$ (or a *mapping* of $A$ into $B$). The set $A$ is called the *domain* of $f$ (we also say $f$ is defined on $A$), and the elements $f(x)$ are called the *values* of $f$. The set of all values of $f$ is called the *range* of $f$.

**2.2 Definition** Let $A$ and $B$ be two sets and let $f$ be a mapping of $A$ into $B$. If $E \subset A$, $f(E)$ is defined to be the set of all elements $f(x)$, for $x \in E$. We call $f(E)$ the *image* of $E$ under $f$. In this notation, $f(A)$ is the range of $f$. It is clear that $f(A) \subset B$. If $f(A) = B$, we say that $f$ maps $A$ *onto* $B$. (Note that, according to this usage, *onto* is more specific than *into*.)

If $E \subset B$, $f^{-1}(E)$ denotes the set of all $x \in A$ such that $f(x) \in E$. We call $f^{-1}(E)$ the *inverse image* of $E$ under $f$. If $y \in B$, $f^{-1}(y)$ is the set of all $x \in A$ such that $f(x) = y$. If, for each $y \in B$, $f^{-1}(y)$ consists of at most one element of $A$, then $f$ is said to be a 1-1 (*one-to-one*) mapping of $A$ into $B$. This may also be expressed as follows: $f$ is a 1-1 mapping of $A$ into $B$ provided that $f(x_1) \neq f(x_2)$ whenever $x_1 \neq x_2,\ x_1 \in A,\ x_2 \in A$.

(The notation $x_1 \neq x_2$ means that $x_1$ and $x_2$ are distinct elements; otherwise we write $x_1 = x_2$.)

**Note**
简单来说：

1. $f(E)$ 是集合 $E$ 通过 $f$ 得到的像（image）。
2. $f(A)$ 是 $f$ 的范围。
3. 如果 $f(A) = B$，那么称 $f$ 将 $A$ 完全映射至（onto）$B$ 。
4. 而当 $E \subset B$ 且 $x \in A$ 时，反函数 $f^{-1}(E)$ 是集合 $E$ 通过 $f$ 得到的反像（inverse image）。
5. $\forall x \in A$ 通过 $f$ 映射后且满足 $\forall f(x) \in B$ 被称为一一映射（1-1 mapping）。

**2.3 Definition** If there exists a 1-1 mapping of $A$ *onto* $B$, we say that $A$ and $B$ can be put in 1-1 *correspondence*, or that $A$ and $B$ have the same *cardinal number*, or, briefly, that $A$ and $B$ are *equivalent*, and we write $A \sim B$. This relation clearly has the following properties:

It is reflexive: $A \sim A$.

It is symmetric: If $A \sim B$, then $B \sim A$.

It is transitive: If $A \sim B$ and $B \sim C$, then $A \sim C$.

Any relation with these three properties is called an *equivalence relation*.

**Note**

- 基数 Cardinal number。
- 自反性 Reflexive，维基百科；
- 对称性 Symmetric；
- 传递性 Transitive。

**2.4 Definition** For any positive integer $n$, let $J_n$ be the set whose elements are the integers $1, 2, \ldots, n$; let $J$ be the set consisting of all positive integers. For any set $A$, we say:

(a) $A$ is *finite* if $A \sim J_n$ for some $n$ (the empty set is also considered to be finnite).

(b) $A$ is *infinite* if $A$ is not finite.

(c) $A$ is *countable* if $A \sim J$.

(d) $A$ is *uncountable* if $A$ is neither finite nor countable.

(e) $A$ is *at most countable* if $A$ is finite or countable.

Countable sets are sometimes called *enumerable*, or *denumerable*.

For two finite sets $A$ and $B$, we evidently have $A \sim B$ if and only if $A$ and $B$ contain the same number of elements. For infinite sets, however, the idea of "having the same number of elements" becomes quite vague, whereas the notion of 1-1 correspondence retains its clarity.

**Note**

可数集（countable set），是指每个元素都能与自然数集 $N$ 的每个元素之间能建立一一对应的集合；不可数集顾名思义就是无法与自然数集 $N$ 建立一一对应的集合；至多可数集（at most coutable）是有限集（finite）与可数集（coutable）的统称。

**2.7 Definition** By a *sequence*, we mean a function $f$ defined on the set $J$ of all positive integers. If $f(n) = x_n$, for $n \in J$, it is customary to denote the sequence $f$ by the symbol $\{x_n\}$, or sometimes by $x_1, x_2, x_3, \ldots$. The values of $f$, that is, the elements $x_n$, are called the *terms* of the sequence. If $A$ is a set and if $x_n \in A$ for all $n \in J$, then $\{x_n\}$ is said to be a *sequence* in $A$, or a *sequnce of elements* of $A$.

注意一个数列的 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ 项不需要是独特的。

由于每个可数集合是一个定义在 $J$ 上一一映射的范围，可将每个可数集合视为一系列不同项的范围。更宽泛来说，任何可数集合中的原始可以被“排列在一个数列上”。

有时可以将定义中的 $J$ 替换为所有非负整数集合，这样可能会更加的方便，例如开始于 0 而不是 1。

**2.8 Theorem** *Every infinite subset of a countable set $A$ is coutable.*

*Proof.*

假设 $E \subset A$，且 $E$ 为无限的。排列 $A$ 中的元素 $x$ 构建 $\{x_n\}$ 独特数列。构建一个满足如下的数列 $\{n_k\}$：

令 $n_1$ 为最小的正整数使得 $x_{n_1} \in E$。选择 $n_1, \ldots, n_{k-1}$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$，令 $n_k$ 为最小的大于 $n_{k-1}$ 的整数使得 $x_{n_k} \in E$。

令 $f(k) = x_{n_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$，我们获取一个 $E$ 与 $J$ 的一一映射关系。

根据定理，粗略的说可数集合表示了“最小的”无限性：没有不可数集合可以成为一个可数集合的子集。 □

**Note**

一个可数集合 $A$ 的任意无限子集都是可数的。

**2.9 Definition** Let $A$ and $\Omega$ be sets, and suppose that with each element $\alpha$ of $A$ there is associated a subset of $\Omega$ which we denote by $E_\alpha$.

The set whose elements are the sets $E_\alpha$ will be denoted by $\{E_\alpha\}$. Instead of speaking of sets of sets, we shall sometimes speak of a collection of sets, or a family of sets.

The *union* of the sets $E_\alpha$ is defined to be the set $S$ such that $x \in S$ if and only if $x \in E_\alpha$ for at least one $\alpha \in A$. We use the notation

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{1}$$

If $A$ consists of the integers $1, 2, \ldots, n$, one usually writes

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \tag{2}$$

or

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n. \tag{3}$$

If $A$ is the set of all positive integers, the usual notation is

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m. \tag{4}$$

The symbol $\infty$ in (4) merely indicates that the union of a *countable* collection of sets is taken, and should not be confused with the symbols $+\infty$, $-\infty$, introduced in Definition 1.23.

The *intersection* of the sets $E_\alpha$ is defined to be the set $P$ such that $x \in P$ if and only if $x \in E_\alpha$ for every $\alpha \in A$. We use the notation

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha, \tag{5}$$

or

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n, \tag{6}$$

or

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m, \tag{7}$$

as for unions. If $A \cap B$ is not empty, we say that $A$ and $B$ *intersect*; otherwise they are *disjoint*.

**Note**

- 元素为 $E_\alpha$ 的集合记为 $\{E_\alpha\}$，可以称其为集合群 collection of sets 或是类 family of sets。
- $S$ 代表所有 $E_\alpha$ 集合的并集；
- $P$ 代表所有 $E_\alpha$ 集合的交集。

**2.11 Remarks** Many properties of unions and intersections are quite similar to those of sums and products; in fact, the words sum and product were sometimes used in this connection, and the symbols $\Sigma$ and $\Pi$ were written in place of $\bigcup$ and $\bigcap$.

The commutative and associative laws are trivial:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A. \tag{8}$$

(9) $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Thus the omission of parenthese in (3) and (6) is justified.

The distributive law also holds:

(10) $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

To prove this, let the left and right members of (10) be denoted by $E$ and $F$, respectively.

Suppose $x \in E$. Then $x \in A$ and $x \in B \cup C$, that is, $x \in B$ or $x \in C$ (possibly both). Hence $x \in A \cap B$ or $x \in A \cap C$, so that $x \in F$. Thus $E \subset F$.

Next, suppose $x \in F$. Then $x \in A \cap B$ or $x \in A \cap C$. That is, $x \in A$, and $x \in B \cup C$. Hence $x \in A \cap (B \cup C)$, so that $F \subset E$.

It follows that $E = F$.

We list a few more relations which are easily verified:

(11) $$A \subset A \cup B,$$

(12) $$A \cap B \subset A.$$

If 0 denotes the empty set, then

(13) $$A \cup 0 = A, \quad A \cap 0 = 0.$$

If $A \subset B$, then

(14) $$A \cup B = B, \quad A \cap B = A.$$

**2.12 Theorem** *Let $\{E_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, be a sequence of countable sets, and put*

(15) $$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

*Then $S$ is countable.*

*Proof.*

Let every set $E_n$ be arranged in a sequence $\{x_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, and consider the infinite array

(16) $$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

in which the elements of $E_n$ form the $n$th row. The array contains all elements of $S$. As indicated by the arrows, these elements can be arranged in a sequence

$$x_{11}; x_{21}, x_{12}; x_{32}, x_{22}, x_{13}; x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}; \dots \tag{17}$$

If any two of the sets $E_n$ have elements in common, these will appear more than once in (17). Hnce there is a subset $T$ of the set of all positive integers such that $S \sim T$, which shows that $S$ is at most coutable (Theorem 2.8). Since $E_1 \subset S$, and $E_1$ is infinite, $S$ is infinite, and thus countable. □

**Corollary** *Suppose $A$ is at most coutable, and, for every $\alpha \in A$, $B_\alpha$ is at most countable. Put*

$$T = \bigcup_{\aleph \in A} B_\alpha \ .$$

*Then $T$ is at most countable.*

$T$ 相当于 (15) 的子集。

**2.13 Theorem** *Let $A$ be a countable set, and let $B_n$ be the set of all $n$-tuples $(a_1, \dots, a_n)$, where $a_k \in A$ $(k = 1, \dots, n)$, and the elements $a_1, \dots, a_n$ need not be distinct. Then $B_n$ is coutable.*

*Proof.*

$B_1$ 可数是显而易见的，因为 $B_1 = A$。假设 $B_{n-1}$ 是可数的（$n = 2, 3, 4, \dots$）。$B_n$ 的元素形式是

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1}, \alpha \in A). \tag{18}$$

对于每个固定的 $b$，成对集合（set of pairs）$b, a$ 等同于 $A$，即是可数的。因此 $B_n$ 是若干可数集合的并集构成的可数集合。根据 Theorem 2.12，$B_n$ 是可数的。 □

**Corollary** *The set of all rational numbers is countable.*

*Proof.*

我们应用 Theorem 2.13 同时 $n = 2$，所有有理数 $r$ 都可以表示为 $b/a$，其中 $a$ 与 $b$ 都是整数。那么成对集合 $(a, b)$ 就是分数 $b/a$ 的集合，即是可数的。 □

实际上，所有代数集合都是可数的。

然而并不是所有的无限集合是可数的，详见下个定理。

**2.14 Theorem** *Let $A$ be the set of all sequences whose elements are the digits 0 and 1. This set $A$ is uncoutable.*

$A$ 集合中的元素数列类似于 $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots$。

*Proof.*

令 $E$ 为集合 $A$ 中的一个可数子集，且令 $E$ 由数列 $s_1, s_2, s_3, \ldots$ 构成。再构建一个满足以下条件的数列 $s$。如果在 $s_n$ 中的第 $n$ 个小数是 1，令 $s$ 的第 $n$ 个小数为 0，以此类推。那么数列 $s$ 至少有一处是有别于所有 $E$ 中的成员；因此 $s \notin E$。但是陷入 $s \in A$，因此 $E$ 是 $A$ 的一个合理子集。

我们证明了所有 $A$ 集合的可数子集是合理的子集。对于 $A$ 是不可数的也同理（否则 $A$ 将会是 $A$ 合理的子集，这是荒谬的）。 □

## Metric Spaces

**2.15 Definition** A set $X$, whose elements we shall call *points*, is said to be a *metirc space* if with any two points $p$ and $q$ of $X$ there is associated a real number $d(p,q)$, called the *distance* from $p$ to $q$, such that

(a) $d(p,q) > 0$ if $p \neq q$; $d(p,p) = 0$;

(b) $d(p,q) = d(q,p)$;

(c) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$, for any $r \in X$.

任何拥有上述三个性质的函数都被称为*距离函数 distance function*，或者*度规 metric*。

**2.16 Examples** The most important examples of metric spaces, from our standpoint, are the euclidean spaces $R^k$, especially $R^1$ (the real line) and $R^2$ (the complex plane); the distance in $R^k$ is defined by

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k). \tag{19}$$

**Note**

- 欧几里得空间的距离概念抽象化后，即度量空间（Metric Space）。
- (a) 正定性，(b) 对称性，(c) 三角不等式。

**2.17 Definition** By the *segment* $(a,b)$ we mean the set of all real numbers $x$ such that $a < x < b$.

By the *interval* $[a,b]$ we mean the set of all real numbers $x$ such that $a \leq x \leq b$.

Occasionally we shall also encounter "half-open intervals" $[a, b)$ and $(a, b]$; the first consists of all $x$ such that $a \leq x < b$, the second of all $x$ such that $a < x \leq b$.

If $a_i < b_i$ for $i = 1, \ldots, k$, the set of all points $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ in $R^k$ whose coordinates satisfy the inequalities $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(1 \leq i \leq k)$ is called a *k-cell.* Thus a 1-cell is an interval, a 2-cell is a rectangle, etc.

If $\mathbf{x} \in R^k$ and $r > 0$, the *open (or closed) ball* $B$ with center at $\mathbf{x}$ and radius $r$ is defined to be the set of all $\mathbf{y} \in R^k$ such that $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$ (or $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq r$).

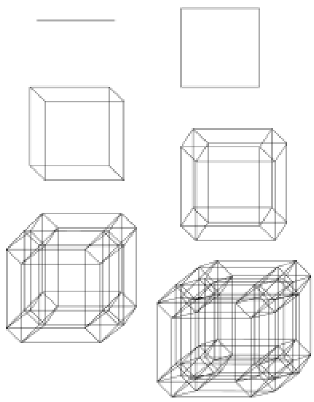
We call a set $E \subset R^k$ *convex* if

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in E$$

whenever $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$, and $0 < \lambda < 1$.

**Note**

- Segment 开区间 $(a, b)$
- Interval 闭区间 $[a, b]$
- $k$-cell k-方格
- $R^k$ 空间定义**开/闭球（open/closed ball）**
- ball 和 $k$-cell 都是凸的（**convex**）



k-cell

**2.18 Definition** Let $X$ be a metirc space. All points and sets mentioned below are understood to be elements and subsets of $X$.

(a) A *neighborhood* of $p$ is a set $N_r(p)$ consisting of all $q$ such that $d(p, q) < r$, for some $r > 0$. The number $r$ is called the *radius* of $N_r(p)$.

(b) A point $p$ is a *limit point* of the set $E$ if *every* neighborhood of $p$ contains a point $q \neq p$ such that $q \in E$.

(c) If $p \in E$ and $p$ is not a limit point of $E$, then $p$ is called an *isolated point* of $E$.

(d) $E$ is *closed* if every limit point of $E$ is a point of $E$.

(e) A point $p$ is an *interior* point of $E$ if there is a neighborhood $N$ of $p$ such that $N \subset E$.

(f) $E$ is *open* if every point of $E$ is an interior point of $E$.

(g) The *complement* of E (denoted by $E^c$) is the set of all points $p \in X$ such that $p \notin E$.

(h) $E$ is *perfect* if $E$ is closed and if every point of $E$ is a limit point of $E$.

(i) $E$ is *bounded* if there is a real number $M$ and a point $q \in X$ such that $d(p,q) < M$ for all $p \in E$.

(j) $E$ is *dense* in $X$ if every point of $X$ is a limit point of $E$, or a point of $E$ (or both).

注意 $R^1$ 的邻域为线段，而 $R^2$ 的邻域是圆圈的内点们。

**Note**

- 邻域 neighborhood：到 $p$ 点距离小于 $r$ 的集合（$r > 0$）；
- 极限点 limit point：所有邻域存在一个与 $p$ 不同的点，无论半径多小（例如一维空间的开闭区间 $(a, b]$，$a < b$，$a, b \in R$ 的 $a, b$ 点皆为极限点，$a$ 虽然不属于 $(a, b]$，但是其右侧总是会有一个点 $p$ 使得 $p - a > 0$，$b$ 同理。二维空间集合的边间点亦是如此，以此类推所有的边界点皆为极限点）；
- 孤立点 isolated point：例如 $S = \{0\} \cup [1, 2]$ 的 0 点为孤立点；
- 闭 closed：如果所有极限点都属于 $E$，那么 $E$ 为闭（例如一维空间 $S = [a, b]$，$a < b$，$a, b \in R$，$S$ 为 closed。特例：在孤立点构成的度量空间中，任何子集都是即开又闭）；
- 内点 interior point：用一维空间解释就是 $S = [a, b]$，$a < b$，$a, b \in R$ 且 $p \in (a, b)$，那么 $p$ 为 $S$ 的内点；
- 开 open：如果 $E$ 中任意一点都是内点，$E$ 为开；
- 补集 complement：$\forall p \in X$ 且 $\forall p \notin E$ 那么 $X$ 为 $E$ 补集；
- 完全 perfect：一个闭集中每一个点都是它的极限点，那么该集合为完全；
- 有界的 bounded：如果集合中任意一点都在某个 $r$ 为实数的邻域内，那么该集合为有界的；
- 稠密 dense：$X$ 中任意一点都是 $E$ 的一个极限点或者 $E$ 中的一点（例如有理数在实数上稠密，Theorem 1.20 (b) 中证明了）。

**2.19 Theorem** *Every neighborhood is an open set.*

*Proof.*

考虑一个邻域 $E = N_r(p)$，并令 $q$ 为 $E$ 的任意一点。那么则有一个正实数 $h$ 满足

$$d(p,q) = r - h.$$

对于所有满足 $d(q,s) < h$ 的点 $s$，有

$$d(p,s) \le d(p,q) + d(q,s) < r - h + h = r,$$

使得 $s \in E$。因此 $q$ 是 $E$ 的一个内点。 □

**Note**

所有邻域都是开的。

**2.20 Theorem** *If $p$ is a limit point of a set $E$, then every neighborhood of $p$ contains infinitely many points of $E$.*

*Proof.*

假设 $p$ 有一个邻域 $N$，其仅包含了有限点的 $E$。令 $q_1, \ldots, q_n$ 为 $N \cap E$ 的这些点，它们有别与点 $p$，且令

$$r = \min_{1 \le m \le n} d(p, q_m)$$

（我们使用这个记号来表示最小的 $d(p,q_1), \ldots, d(p,q_n)$）。一个有限集的最小值很明显是正数，因此 $r > 0$。

邻域 $N_r(p)$ 包含了除了点 $q$ 的 $E$ 即 $q \ne p$，使得 $p$ 不是 $E$ 的一个极限点。这与定理自身相悖。 □

**Note**

简单来说，假设 $p$ 有一个邻域是有限集合，那么就一定会有 $r$ 满足 $\min_{1 \le m \le n} d(p, q_m)$，也就是有最小距离存在；然而这与 Definition 2.18 (b) 相悖，即与“无论半径多小”的定义相悖，因此 $p$ 不是一个极限点。因此，如果 $p$ 是一个极限点，那么它的任何邻域都有无限个点。

**Corollary** *A finite point set has no limit points.*

**2.21 Examples** Let us consider the following subsets of $R^2$:

(a) The set of all complex z such that $|z| < 1$.

(b) The set of all complex z such that $|z| \le 1$.

(c) A nonempty finite set.

(d) The set of all integers.

(e) The set consisting of the numbers $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Let us note that this set $E$ has a limit point (namely, $z = 0$) but that no point of $E$ is a limit point of $E$; we wish to stress the difference between having a limit point and containing one.

(f) The set of all complex numbers (that is, $R^2$).

(g) The segment $(a, b)$.

Let us note that (d), (e), (g) can be regarded also as subsets of $R^1$. Some properties of these sets are tabulated below:

| | *Closed* | *Open* | *Perfect* | *Bounded* |
|---|---|---|---|---|
| $(a)$ | $No$ | $Yes$ | $No$ | $Yes$ |
| $(b)$ | $Yes$ | $No$ | $Yes$ | $Yes$ |
| $(c)$ | $Yes$ | $No$ | $No$ | $Yes$ |
| $(d)$ | $Yes$ | $No$ | $No$ | $No$ |
| $(e)$ | $No$ | $No$ | $No$ | $Yes$ |
| $(f)$ | $Yes$ | $Yes$ | $Yes$ | $No$ |
| $(g)$ | $No$ | | $No$ | $Yes$ |

In (g), we left the second entry blank. The reason is that the segment $(a, b)$ is not open if we regard it as a subset of $R^2$, but it is an open subset of $R^1$.

**2.22 Theorem** *Let $\{E_\alpha\}$ be a (finite or infinite) colllection of sets $E_\alpha$. Then*

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha (E_\alpha^c). \tag{20}$$

*Proof.*

令 $A$ 与 $B$ 分别为 (20) 的左右成员。如果 $x \in A$，那么 $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$，因此对于任何 $\alpha$ 而言 $x \notin E_\alpha$，因此对于所有 $\alpha$ 而言 $x \in E_\alpha^c$，使得 $x \in \bigcap E_\alpha^c$。所以 $A \subset B$。

相反的，如果 $x \in B$，那么对于所有 $\alpha$ 而言 $x \in E_\alpha^c$，因此对于任何 $\alpha$ 而言 $x \notin E$，因此 $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$，使得 $x \in (\cup_\alpha E_\alpha)$。所以 $B \subset A$。

综上所述 $A = B$。 □

**2.23 Theorem** *A set $E$ is open if and only if its complement is closed.*

*Proof.*

首先，假设 $E^c$ 是闭的。选 $x \in E$，且 $x \notin E^c$，且 $x$ 不是 $E^c$ 的一个极限点。因此 $x$ 存在一个邻域 $N$ 使得 $E^c \cap N$ 是空集，也就是说 $N \subset E$。因此 $x$ 是 $E$ 的一个内点，且 $E$ 是开的。

接着，假设 $E$ 是开的。令 $x$ 为 $E^c$ 的一个极限点。那么 $x$ 的所有邻域包含 $E^c$ 的一个点，使得 $x$ 不是 $E$ 的一个内点。由于 $E$ 是开的，这意味着 $x \in E^c$。即遵循了 $E^c$ 是闭的。 □

**Corollary** *A set $F$ is closed if and only if its complement is open.*

**2.24 Theorem**

(a) *For any collection $\{G_\alpha\}$ of open sets, $\cup_\alpha G_\alpha$ is open.*

(b) *For any collection $\{F_\alpha\}$ of closed sets, $\cap_\alpha F_\alpha$ is closed.*

(c) *For any finite collection $G_1, \ldots, G_n$ of open sets, $\cap_{i=1}^n G_i$ is open.*

(d) *For any finite collection $F_1, \ldots, F_n$ of closed sets, $\cup_{i=1}^n F_i$ is closed.*

*Proof.*

令 $G = \cup_\alpha G_\alpha$。如果 $x \in G$ 那么对一些 $\alpha$ 而言，有 $x \in G_\alpha$。因为 $x$ 是 $G_\alpha$ 的一个内点，同时也是 $G$ 的一个内点，所以 $G$ 是开的。即证明了 (a)。

根据 Theorem 2.22，

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha^c) \tag{21}$$

且 $F_\alpha^c$ 是开的，根据 Theorem 2.23。因此 (a) 意为 (21) 是开的，因此 $\cap_\alpha F_\alpha$ 是闭的。

接着令 $H = \cap_{i=1}^n G_i$。对于任何 $x \in H$，存在 $x$ 半径 $r_i$ 的邻域 $N_i$，使得 $N_i \subset G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$。令

$$r = \min(r_1, \ldots, r_n)$$

且令 $N$ 为 $x$ 半径 $r$ 的邻域。那么对于 $i = 1, \ldots, n$ 而言 $N \subset G_i$ 使得 $N \subset H$，所以 $H$ 是开的。

通过获取补集，(d) 遵循 (c)：

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n (F_i^c)$$

□

**Note**

对于 (a) 而言，利用了开集的定义 Definition 2.18 (f)，也就是说 $x$ 可以是 $G$ 的任意一点，且因为 $x \in G_\alpha$ 都是内点，满足开集定义。

对于 (b) 而言，将 Theorem 2.23 应用在 Theorem 2.22 即可得出结论。

对于 (c) 而言，$H$ 是有限个数开集的交集，那么对于每个构成 $H$ 的 $G_i$ 而言都有一个 $N_i$ 作为 $x$ 的邻域，那么在有限个集合内肯定可以找到最小的邻域（最小半径 $r$），又因为该最小的邻域为所有 $G_i$ 的子集，即 $N \subset G_i$，$i = 1, \ldots, n$，因此有 $N \subset H$。最后因为对于任意 $x \in H$ 而言，上述论证的 $N_x \subset H$ 都成立，即符合开集定义。

对于 (d) 而言，再次将 Theorem 2.23 应用在 (c) 上即可得出结论。

简言之：

- 任意多的开集的并集仍然是开的；
- 任意多的闭集的交集仍然是闭的；
- 有限个的开集的交集仍然是开的；
- 有限个的闭集的并集仍然是闭的。

**2.26 Definition** If $X$ is a metric space, if $E \subset X$, and if $E$'s denotes the set of all limit points of $E$ in $X$, then the *closure* of $E$ is the set $\overline{E} = E \cup E'$.

**Note**

$E'$ 为所有极限点的集，那么 $\overline{E} = E \cup E'$ 为闭包（例如一维空间 $(a, b)$，$a < b$，$a, b \in R$ 有极限点 $a$，$b$，那么 $\overline{E} = (a, b) \cup a \cup b = [a, b]$）。

**2.27 Theorem** *If $X$ is a metric space and $E \subset X$, then*

*(a) $\overline{E}$ is closed,*

*(b) $E = \overline{E}$ if and only if $E$ is closed,*

*(c) $\overline{E} \subset F$ for every closed set $F \subset X$ such that $E \subset F$.*

*By (a) and (c), $\overline{E}$ is the smallest closed subset of $X$ that contains $E$.*

*Proof.*

(a) 如果 $p \in X$ 且 $p \notin \overline{E}$，那么 $p$ 既不是 $E$ 的点也不是 $E$ 的极限点。因此 $p$ 有一个邻域不与 $E$ 相交。那么 $\overline{E}$ 的补集是开的。因此 $\overline{E}$ 是闭的。

(b) 如果 $E=\overline{E}$，那么 (a) 意味着 $E$ 是闭的。如果 $E$ 是开的，那么 $E' \subset E$（根据 Definitions 2.18 (d) 与 2.26），因此 $\overline{E}=E$。

(c) 如果 $F$ 是闭的且 $F \supset E$，那么 $F \supset F'$，因此 $F \supset E'$。所以 $F \supset \overline{E}$。

□

**Note**

对于 (c) 而言，如果 $E \subset F$，那么 $E$ 的极限点要么属于 $F$ 的内点，要么属于 $F$ 的极限点；而根据闭集的定义，闭集中所有的极限点都属于闭集，所以 $E \cup E' \subset F$，即 $\overline{E} \subset F$。

**2.28 Theorem** *Let $E$ be a nonempty set of real numbers which is bounded above. Let $y = \sup E$. Then $y \in \overline{E}$. Hence $y \in E$ if $E$ is closed.*

*Proof.*

如果 $y \in E$ 那么 $y \in \overline{E}$。假设 $y \notin E$。那么对于所有的 $h>0$ 存在一个点 $x \in E$ 使得 $y-h<x<y$，不然的话 $y-h$ 会是 $E$ 的一个上界。因此 $y$ 是 $E$ 的一个极限点，所以 $y \in \overline{E}$。 □

**Note**

如果 $E$ 是闭集，而 $y \notin E$ 时，那么总会有 $h>0$ 使得 $y-h<y$ 为 $E$ 的上界，那么与 $y=\sup E$ 相悖。

**2.29 Remark** Suppose $E \subset Y \subset X$, where $X$ is a metric space. To say that $E$ is an open subset of $X$ means that to each point $p \in E$ there is associated a positive number $r$ such that the conditions $d(p,q)<r$, $q \in X$ imply that $q \in E$. But we have already observed (Examples 2.16) that $Y$ is also a metric space, so that our definitions may equally well be made within $Y$. To be quite explicit, let us say that $E$ is *open relative* to $Y$ if to each $p \in E$ there is associated an $r>0$ such that $q \in E$ whenever $d(p,q)<r$ and $q \in Y$. Examples 2.21(g) showed that a set may be open relative to $Y$ without being an open subset of $X$. However, there is a simple relation between these concepts, which we now state.

**Note**

根据 Examples 2.16 与 2.21 (g) 引入相对开集这个概念，在下面的定理中证明相对开集 $E$ 与 $Y$ 和 $X$ 的关系。

**2.30 Theorem** *Suppose $Y \subset X$. A subset $E$ of $Y$ is open relative to $Y$ if and only if $E = Y \cap G$ for some open subset $G$ of $X$.*

*Proof.*

假设 $E$ 是相对 $Y$ 是开。每个 $p \in E$ 都存在一个正数 $r_p$ 满足 $d(p,q) < r_p$，$q \in Y$ 意味着 $q \in E$。令 $V_p$ 为所有 $q \in X$ 的集，使得 $d(p,q) < r_p$，并且定义

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p$$

那么根据 Theorems 2.19 与 2.24 可知 $G$ 是 $X$ 的一个子开集。

因为对于所有 $p \in E$ 而言 $p \in V_p$，即 $E \subset G \cap Y$。

对于 $V_p$ 而言，对于每个 $p \in E$ 有 $V_p \cap Y \subset E$，使得 $G \cap Y \subset E$。因此 $E = G \cap Y$，这样该定理的一半被证明了。

相反的，如果 $G$ 在 $X$ 中是开的，且对于每个 $x \in E$ 而言 $E = G \cap Y$ 有一个邻域 $V_p \subset G$。那么 $V_p \cap Y \subset E$，使得 $E$ 相对 $Y$ 是开的。 □

**Note**

证明的一开始 "假设 $E$ 是相对 $Y$ 是开" 利用了 Remark 2.29 的结论（而 Remark 2.29 的前半结论是由 Examples 2.16 所得出的）："to each point $p \in E$ there is associated a positive number $r$ such that the conditions $d(p,q) < r$, $q \in X$ imply that $q \in E$"。接下来，Theorem 2.19 说的是 "所有邻域都是开集"，而证明中 Theorem 2.24 (a) 说的是若干开集的并集也是开集。简言之 $p$ 在 $X$ 上有邻域，且对所有 $p \in E$ 有效，那么 $G = \bigcup_{p \in E} V_p$ 在 $X$ 中是开的。

又因为对于所有的 $p \in E$ 都有 $p \in Vp$，那么就有 $E \subset G$；同时 $E \subset Y$，所以有 $E \subset G \cap Y$。

而证明中设定的 $V_p$ 本身就是 $p$ 点在 $Y$ 上的邻域，即 $V_p \cap Y \subset E$；这又对于所有 $p \in E$ 生效，即 $G \cap Y \subset E$。结合上面的结论有 $E \subset G \cap Y \subset E$，即 $E = G \cap Y$。

而 $E$ 相对 $Y$ 为开的证明就简单多了，因为 $p \in E$ 在 $G$ 上的邻域有 $V_p \subset G$，而 $G \cap Y = E$ 且 $V_p \subset G$ 可知 $V_p \cap Y \subset E$，即 $p \in E$ 在 $Y$ 上的邻域满足 Theorem 2.19，再结合 Theorem 2.24 (a)，可得结论。

性质：集合的**开**性质是相对的。相对 $Y$ 的开集 $E$，对于更大的 $X$ 来说不一定是开的。要证明对于更大的 $X$ 是开，就必须要引入 $X$ 的开子集 $G$。

## Compact Sets

**2.31 Definition** By an *open cover* of a set $E$ in a metric space $X$ we mean a collection $\{G_\alpha\}$ of open subsets of $X$ such that $E \subset \cup_\alpha G_\alpha$.

**Note**

开覆盖 open cover。

**2.32 Definition** A subset $K$ of a metric space $X$ is said to be *compact* if every open cover of $K$ contains a $finite$ subcover.

More explicitly, the requirement is that if $\{G_\alpha\}$ is an open cover of $K$, then there are finitely many indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ such that

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} .$$

紧性 compactness 这个概念在数学分析中非常的重要,特别是它连接了连续性这个概念(第四章)。

很明显所有的有限集都是紧的。$R^k$ 上存在大类无限紧集将会在 Theorem 2.41 中提及。

我们之前观察到的(Remark 2.29)如果 $E \subset Y \subset X$,那么 $E$ 有可能相对 $Y$ 是开的,而不需要相对 $X$ 是开的。开这个属性因此取决于 $E$ 所嵌入的空间,对于闭这个属性亦是如此。

**Note**

- 紧集 compact set:任何开覆盖都存在有限的子覆盖。
- 若一个集合是紧集,可以称这个集合具有紧性 compact。
- 紧性实际上是一种拓扑性质。

**2.33 Theorem** *Suppose $K \subset Y \subset X$. Then $K$ is compact relative to $X$ if and only if $K$ is compact relative to $Y$.*

凭借这个定理,在许多情况下,我们能够将紧集本身视为度量空间,而无需关注任何嵌入空间。尽管讨论开空间,或者闭空间的意义不大(每个度量空间 $X$ 是其自身的一个开子集,以及一个闭子集),但是讨论紧度量空间却是很有意义的。

*Proof.*

假设 $K$ 是相对 $X$ 紧的,且令 $\{V_\alpha\}$ 为相对 $Y$ 是开的集合类,使得 $K \subset \cup_\alpha V_\alpha$。根据 Theorem 2.30,存在若干相对 $X$ 是开的集合 $G_\alpha$,使得对于所有 $\alpha$ 有 $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$;又因为 $K$ 是相对 $X$ 紧的,我们有

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \tag{22}$$

对于一些有限数量索引 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$。因为 $K \subset Y$,(22) 意味着

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} \tag{23}$$

这证明了 $K$ 是相对 $Y$ 紧的。

相反的，假设 $K$ 是相对 $Y$ 紧的，令 $\{G_\alpha\}$ 为 $X$ 开子集的类，其覆盖了 $K$，且令 $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$。那么 (23) 将包含一些 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$；又因为 $V_\alpha \subset G_\alpha$，(23) 意味着 (22)。

证明结束。 □

**Note**

首先是证明 $K$ 相对 $Y$ 紧：假设 $K$ 相对 $X$ 紧。根据条件 $K \subset Y$ 可以设定 $V_\alpha$ 为 $K$ 在 $Y$ 上的子覆盖，那么根据开覆盖的定义有 $K \subset \cup_\alpha V_\alpha$；利用 Theorem 2.30 – $Y$ 上的子集 $V$ 当且仅当 $V = Y \cap G$ 且 $G$ 为 $X$ 的开集时，$V$ 相对 $Y$ 开，那么对于所有的 $\alpha$ 则有 $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$；根据假设 $K$ 相对 $X$ 紧，那么在 $X$ 上存在有限的子覆盖，即 $K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$；而先前的设定的 $V_\alpha$ 与 $G_\alpha$ 因为子覆盖是有限的，那么可以建立 $V_{\alpha_1} = Y \cap G_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n} = Y \cap G_{\alpha_n}$ 这样一一对应的关系，对于 $K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$ 可以在子集符两边做与 $Y$ 的交集，即

$$\begin{aligned}Y \cap K &\subset Y \cap (G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}) \\ &\subset (Y \cap G_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup (Y \cap G_{\alpha_n}) \\ &\subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}\end{aligned}$$

又因为 $K \subset Y$ 那么 $Y \cap K = K$，所以上述简化为 $K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$，也就是说 $V_\alpha$ 是 $K$ 在 $Y$ 上有限的子覆盖，即证明了 $K$ 是相对 $Y$ 紧的。

其次是证明 $K$ 相对 $X$ 紧：假设 $K$ 相对 $Y$ 紧。令 $\{G_\alpha\}$ 为 $K$ 在 $X$ 上的开覆盖子集的类，利用 Theorem 2.30 有 $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$，那么根据 (23) 可以推导出 (22)。即证明了 $K$ 是相对 $X$ 紧的。

**2.34 Theorem** *Compact subsets of metric spaces are closed.*

*Proof.*

令 $K$ 为度量空间 $X$ 的一个紧子集。我们应该证明 $K$ 的补集是 $X$ 上的一个子开集。

假设 $p \in X$，$p \notin K$。如果 $q \in K$，令 $V_q$ 与 $W_q$ 分别为 $p$ 与 $q$ 的邻域，它们的半径小于 $\frac{1}{2}d(p,q)$（详见 Definition 2.18 (a)）。由于 $K$ 是紧的，那么在 $K$ 中存在有限数量的点 $q_1, \ldots, q_n$ 使得

$$K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W\ .$$

如果 $V = V_{q_1} \cup \cdots \cup V_{q_n}$，那么 $V$ 是 $p$ 的一个邻域，且不与 $W$ 相交。因此 $K \subset K^c$，所以 $p$ 是 $K^c$ 的一个内点。 □

**Note**

度量空间的紧子集是闭的；度量空间的紧集都是有界的.

**2.35 Theorem** *Closed subsets of compact sets are compact.*

*Proof.*

假设 $F \subset K \subset X$，$F$ 是闭的（相对于 $X$），且 $K$ 是紧的。令 $\{V_\alpha\}$ 为 $F$ 的一个开覆盖。如果 $F^c$ 临近 $\{V_\alpha\}$，我们得到一个 $K$ 的开覆盖 $\Omega$。由于 $K$ 是紧的，那么存在一个有限的子类 $\Phi$ 覆盖 $K$，也覆盖了 $F$。如果 $F^c$ 是 $\Phi$ 的一个成员，我们将其从 $Phi$ 中移除并保持 $F$ 的一个开覆盖。综上所述，$\{V_\alpha\}$ 的一个有限的子类覆盖了 $F$。 □

**Note**

紧集的子闭集是紧的。

**Corollary** *If $F$ is closed and $K$ is compact, then $F \cap K$ is compact*

*Proof.*

Theorem 2.24 (b) 以及 2.34 展示了 $F \cap K$ 是闭的；由于 $F \cap K \subset K$。Theorem 2.35 展示了 $F \cap K$ 是紧的。 □

**Note**

闭集与紧集的交集是紧的。

**2.36 Theorem** *If $\{K_\alpha\}$ is a collection of compact subsets of a metric space $X$ such that the intersection of every finite subcollection of $\{K_\alpha\}$ is nonempty, then $\cap K_\alpha$ is nonempty.*

*Proof.*

从 $\{K_\alpha\}$ 中固定一个成员 $K_1$ 并令 $G_\alpha = K_\alpha^c$。假设 $K_1$ 中没有点属于任何的 $K_\alpha$。那么集合 $G_\alpha$ 形成了 $K_1$ 的一个开覆盖；又因为 $K_1$ 是紧的，存在有限数量的索引 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 使得 $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$。但是这就意味着

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n}$$

为空，与假设相悖。 □

**Note**

证明中的假设是拿出一个子紧集 $\{K_1\}$ 作为特例，假设其不与任何其他 $\{K_\alpha\}$ 相交，那么它则会属于其他 $K_\alpha$ 并集的补集，也就是说后者成为了前者的开覆盖；又因为紧集的性质，$K_1$ 开覆盖的子集是有限的，这意味后者是有限的，即证明中的

$$K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$$

成立，那么就有

$$
\begin{aligned}
K_1 \not\subset K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n} \\
\cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n} \\
= \emptyset
\end{aligned}
$$

与假设相悖。

**Corollary** *If $\{K_n\}$ is a sequence of nonempty compact sets such that $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, then $\cap_1^\infty K_n$ is not empty.*

**Note**

如果 $\{K_n\}$ 是一个非空紧集的数列，使得 $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$，那么 $\cap_1^\infty K_n$ 不为空。

**2.37 Theorem** *If $E$ is an infinite subset of a compact set $K$, then $E$ has a limit point in $K$.*

*Proof.*

如果 $K$ 中没有点是 $E$ 的极限点，那么每个 $q \in K$ 将会有一个邻域 $V_\alpha$，其包含了 $E$ 中至多一个点（命名 $q$，如果 $q \in E$）。很明显 $\{V_q\}$ 没有有限子类可以覆盖 $E$；对 $K$ 也是同理，因为 $E \subset K$。这与 $K$ 的紧性相悖。 □

**Note**

如果 $E$ 是紧集 $K$ 的无限子集，那么 $E$ 在 $K$ 中存在极限点。证明中的"$\{V_q\}$ 没有有限子类可以覆盖 $E$"是因为 $E$ 是无限子集。

**2.38 Theorem** *If $\{I_n\}$ is a sequence of intervals in $R^1$, such that $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, then $\cap_1^\infty I_n$ is not empty.*

*Proof.*

如果 $I_n = [a_n, b_n]$，令 $E$ 为所有 $a_n$ 的集合。那么 $E$ 是非空且有上界的（为 $b_1$）。令 $x$ 称为 $E$ 的上确界。如果 $m$ 与 $n$ 是正整数，那么

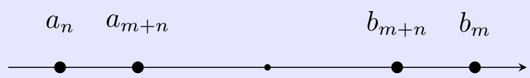
$$a_n \le a_{m+n} \le b_{m+n} \le b_m \ ,$$

使得对每个 $m$ 有 $x \le b_m$。很显然 $a_m \le x$，可知对 $m = 1, 2, 3, \ldots$ 有 $x \in I_m$。 □

**Note**

证明中所设置的 $m$ 作为增量，记 $m = 1, 2, 3, \dots$，这是为了满足定理中的 $I_n \supset I_{n+1}$。

$$I_n = [a_n, b_n]$$




$$a_m \leq x \leq b_m$$

集合 $E$ 在最开始有明确的上界，即 $b_1$，随着 $m$ 增加 $a_m \leq x \leq b_m$ 始终成立。

**2.39 Theorem** *Let $k$ be a positive integer. If $\{I_n\}$ is a sequence of $k$-cells such that $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, then $\cap_1^\infty I_n$ is not empty.*

*Proof.*

令 $I_n$ 包含所有点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ 使得

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, ...)$$

且令 $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$。对于每个 $j$，数列 $\{I_{n,j}\}$ 满足 Theorem 2.38 的假设。因此存在实数 $x_j^*(1 \leq j \leq k)$ 使得

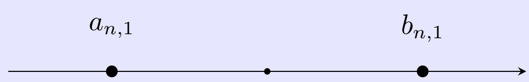
$$a_{n,j} \leq x_j^* \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, ...)$$

设置 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$，得 $\mathbf{x}^* \in I_n$ 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$。 □

**Note**

本定理作为 Theorem 2.38 在更高的度量空间上的延伸，与 2.38 不同的是 $I_n$ 的构成是每个 $k$-cell 中符合条件的中间值，即

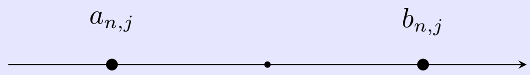
$$I_{n,1} = [a_{n,1}, b_{n,1}]$$




$$a_{n,1} \leq x \leq b_{n,1}$$

$$\dots$$

$$I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$$




$$a_{n,j} \le x \le b_{n,j}$$

$$\ldots$$

对于每个 $j$ 而言都满足 Theorem 2.38，因此证明中所给的某实数集 $x_j^*$ $(1 \le j \le k)$ 也满足定理。

**2.40 Theorem** *Every $k$-cell is compact.*

*Proof.*

令 $I$ 为一个 $k$-方格，由所有点 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ 构成，使得 $a_j \le x_j \le b_j$ $(1 \le j \le k)$。令

$$\delta = \left\{ \sum_1^k (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2}$$

那么 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le \delta$，如果 $\mathbf{x} \in I$，$\mathbf{y} \in I$。

假设为了得到一个悖论，存在一个 $I$ 的开覆盖 $\{G_\alpha\}$ 不包含 $I$ 的有限子覆盖。令 $c_j = (a_j + b_j)/2$。那么区间 $[a_j, c_j]$ 以及 $[c_j, b_j]$ 决定了 $2^k$ $k$-方格 $Q_i$ 的并集为 $I$。在 $Q_i$ 中至少有一个称为 $I_1$ 的集合，不能被 $\{G_\alpha\}$ 的任何有限子类覆盖（否则 $I$ 就被覆盖了）。接下来再细分 $I_1$ 并继续上述步骤。我们获得一个具有以下属性的数列 $\{I_n\}$：

(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$；

(b) $I_n$ 没有被 $\{G_\alpha\}$ 任何的有限子类覆盖；

(c) 如果 $\mathbf{x} \in I_n$ 且 $\mathbf{y} \in I_n$，那么 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le 2^{-n}\delta$。

通过 (a) 与 Theorem 2.39 可知，点 $\mathbf{x}^*$ 存在于每个 $I_n$ 中。对于某些 $\alpha$ 有 $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$。因为 $\{G_\alpha\}$ 是开的，存在 $r > 0$ 使得 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| < r$ 推导出 $\mathbf{y} \in G_\alpha$。如果 $n$ 很大使得 $2^{-n}\delta < r$（这个 $n$ 是存在的，否则对于所有正整数 $n$ 有 $2^n \le \delta / r$，这就与有理数 $R$ 的阿基米德性质相悖），那么 (c) 意为 $I_n \subset G_\alpha$，即与 (b) 相悖。

证明完成。 □

下一个定理中的与 (a) 和 (b) 相等部分又被称作海涅－博雷尔定理 Heine–Borel theorem。

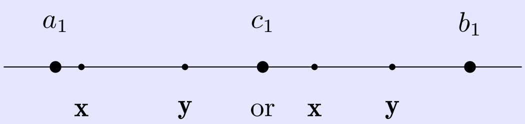
**Note**

简单来说 $1 \le j \le k$ 的 $j$ 代表着每个维度，那么其所设定的 $a_j \le x_j \le b_j$ 可视为每个维度都有"闭区间"对 $x$ 进行约束。那么 $\delta = \left\{\sum_1^k (b_j - a_j)^2\right\}^{1/2}$ 很明显就是一个距离公式（例如二维情况下的 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$）。那么对于任意 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y} \in I$ 有 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le \delta$ 的意思就是任意两点之间的距离永远小于等于这个最大边界范围 $\delta$。

那么为了证明 $k$-方格是紧的，可以利用紧性的定理来做悖论的假设，即假设 $I$ 不存在有限个开覆盖。随后的"determine $2^k$ $k$-cells"看起来比较抽象，但是从其设定的 $c_j = (a_j + b_j)/2$ 可以看的出来 $c_j$ 是 $a_j$ 与 $b_j$ 的中点。那么 $c_j$ 所分隔的"两边"为 $[a_j, c_j]$ 与 $[c_j, b_j]$ 构成了 $2^k$ 个 $k$-方格（带入到一维空间就是分隔成了两个线段，而带入到二维则是被分隔成四个象限，三维则是八个象限）。那么对于 $2^k$ 的 $k$-方格而言，设其为 $Q_i$，而其本质还是 $I$，因此说 $Q_i$ 的并集为 $I$。为了得到悖论，将其中一个称为 $I_1$ 的 $Q_i$，假设为不紧的，即不存在有限的子覆盖。接下来就是对该 $I_1$ 进行分解，利用了 Theorem 2.39 的结论将其转换为数列 $\{I_n\}$ 并附上证明中的三个性质。由 (a) 和 Theorem 2.39 得出总有 $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$。而因为 $G_\alpha$ 是开集，总会有 $r > 0$ 使得 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| < r$，所以 $\mathbf{y} \in G$。

这其中 (c) 的 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le 2^{-n}\delta$ 可视为在 $I_n$ 中的两点，它们之间的距离小于 $\frac{1}{2^n}\delta$。这里最简单的几何理解就是在一维空间下的：

$$I_1 = [a_1, c_1] \quad \text{or} \quad I_1 = [c_1, b_1]$$




也就是说，根据之前 $c_j$ 的分隔动作，将 $I$ 分成了 $2^1$ 个 1-方格的 $Q_i$。那么证明中说的至少其中一个不会被 $\{G_\alpha\}$ 中任何有限的子类所覆盖，那么如图所示，$I_1$ 要么是在左侧的 $[a_1, c_1]$ 处，要么是在右侧的 $[c_1, b_1]$ 处。因此图示中 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的距离要小于等于 $\delta/2$，即小于 $\frac{|b_1 - a_1|}{2}$。

之后根据第一章的阿基米德性质"给出任何正数，总能够挑选出一个整数其倒数小过原来的数"，可以很轻松的得出 (c) 与 (b) 相悖。

**2.41 Theorem** *If a set $E$ in $R^k$ has one of the following three properties, then it has the other two:*

*(a) $E$ is closed and bounded.*

*(b) $E$ is compact.*

*(c) Every infinite subset of $E$ has a limit point in $E$.*

*Proof.*

如果 (a) 成立，那么对于一些 $k$-方格有 $E \subset I$，那么 (b) 遵循 Theorems 2.40 与 2.34。Theorem 2.37 展示 (b) 推导 (c)。现在剩下 (c) 如何推导 (a)。

如果 $E$ 没有边界，那么 $E$ 包含了点 $\mathbf{x}_n$ 且

$$|\mathbf{x}_n| > n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由这些点 $\mathbf{x}_n$ 构成的集合 $S$ 是无限的，且明显在 $R^k$ 中没有极限点，因此在 $E$ 中也不存在极限点。因此 (c) 推导出 $E$ 是有界的。

如果 $E$ 不是闭的，那么存在一个点 $\mathbf{x}_0 \in R^k$ 是 $E$ 的极限点且不在 $E$ 中。对于 $n = 1, 2, 3, \dots$ 存在点 $\mathbf{x}_n \in E$ 使得 $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < 1/n$。令 $S$ 成为这些点 $\mathbf{x}_n$ 的集合。那么 $S$ 是无限的（否则 $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$ 将有一个常量正数，对于无限多的 $n$），$S$ 拥有 $\mathbf{x}_0$ 作为一个极限点，且 $S$ 没有其他的极限点在 $R^k$ 中。那么如果 $\mathbf{y} \in R^k$，$\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$，则

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| &\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| \\
&\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - \frac{1}{n} \\
&\geq \frac{1}{2}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|
\end{aligned}$$

满足所有且有限多的 $n$；这证明 $\mathbf{y}$ 不是 $S$ 的极限点（Theorem 2.20）。

因此 $S$ 在 $E$ 中没有极限点；因此如果 (c) 成立，那么 $E$ 必须是闭的。 □

值得注意，这里的 (b) 和 (c) 等同于任何度量空间；但是 (a) 不是，通常来说用于推导 (b) 与 (c)。

**2.42 Theorem (Weierstrass)** *Every bounded infinite subset of $R^k$ has a limit point in $R^k$.*

*Proof.*

因为有界，集合 $E$ 是 $k$-方格 $I \subset R^k$ 的一个子集。根据 Theorem 2.40，$I$ 是紧的，因此根据 Theorem 2.37，$E$ 在 $I$ 中拥有一个极限点。 □

## Perfect Sets

**2.43 Theorem** *Let $P$ be a nonempty perfect set in $R^k$. Then $P$ is uncountable.*

*Proof.*

因为 $P$ 有极限点，$P$ 必须是无限的。假设 $P$ 是可数的，那么通过 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots$ 来表示 $P$。随之可以构建一个数列 $\{V_n\}$ 来表示邻域。

令 $V_1$ 为 $\mathbf{x}_1$ 的任意邻域，使得 $V_n \cap P$ 不为空。如果 $V_1$ 包含了所有的 $\mathbf{y} \in R^k$ 使得 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| < r$，$V_1$ 的闭包 $\overline{V}_1$ 则是所有 $\mathbf{y} \in R^k$ 的集合使得 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| \leq r$。

假设 $V_n$ 被构建了，那么 $V_n \cap P$ 不为空。因为 $P$ 的所有点是 $P$ 的极限点，存在一个邻域 $V_{n+1}$ 使得 (i) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$, (ii) $\mathbf{x} \notin \overline{V}_{n+1}$, (iii) $V_{n+1} \cap P$ 非空。根据 (iii)，$V_{n+1}$ 满足我们的归纳假设，同时构建可以进行。

令 $K_n = \overline{V}_n \cap P$。因为 $\overline{V}_n$ 是闭且有界的，$\overline{V}$ 是紧的。因为 $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$，$P$ 里没有点在 $\cap_1^\infty K_n$ 中。因为 $K_n \subset P$，这意为 $\cap_1^\infty K_n$ 是空的。但是根据 (iii)，每个 $K_n$ 是非空的，且根据 (i)，$K_n \subset K_{n+1}$；这与 Theorem 2.36 的 Corollary 相悖。 □

**Note**

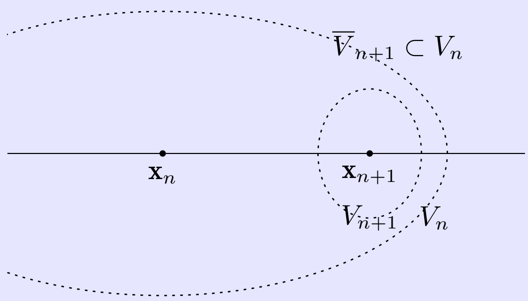
**定理** $P$ 为 $R^k$ 内的非空完全集，那么 $P$ 是不可数的。

**回顾** 完全性 perfect 在 Definition 2.18 (h) 中提到，"$E$ is *perfect* if $E$ is closed and if every point of $E$ is a limit point of $E$"。根据 Wikipedia 对完全集的表述：

> In general topology, a subset of a topological space is **perfect** if it is closed and has no isolated points. Equivalently: the set $S$ is perfect if $S = S'$, where $S'$ denotes the set of all limit points of $S$, also known as the derived set of $S$.

相较于闭集，完全集多了一条定义，即集合上的点都是集合的极限点。

**证明** 完全集也是闭集，因此有极限点；又根据 Theorem 2.20 衍生的 Corollary，"A finite point set has no limit points"，即完全集不是有限集合。构建的 $\{V_n\}$ 邻域数列与假设中的可数集 $P$ 的 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$ 一一对应。那么对于 $V_1$ 这个邻域而言，其中包含的 $\mathbf{y} \in R^k$ 点满足 $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| < r$（用二维空间对 $V_1$ 邻域与 $\mathbf{x}_1$ 的关系理解就很简单了：某一点 $x$ 为圆心 $r$ 为半径构成的圆，圆中所有的点构成了 $V$；那么闭包 $\overline{V}_1$ 则是包含了圆周长上的所有点）。如果在一维空间来表示 $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$ 与 $V_n, V_{n+1}$ 之间的关系，那么如图所示：




即表示出了 $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$，且 $\mathbf{x}_n \notin \overline{V}_{n+1}$。当令 $K_n = \overline{V}_n \cap P$，那么有 $K_{n+1} = \overline{V}_{n+1} \cap P$。同时，根据 Theorem 2.41，当一个集合既闭又有界时，该集合为紧集。因此 $\overline{V}_n$ 为紧集。由上面的 $\mathbf{x}_n \notin \overline{V}_{n+1}$ 与 $K_{n+1} = \overline{V}_{n+1} \cap P$ 可知 $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$。那么在一维的图中可知

$K_n \cap K_{n+1} = K_{n+1}$，那么当 $n$ 趋近无穷时，可知 $\mathbf{x} \notin \cap_1^\infty K_n$，即证明中的 $P$ 中没有点在 $\cap_1^\infty$；而又因 $K_n \subset P$，那么 $\cap_1^\infty K_n$ 只能为空。然而根据 (iii) 与 (i) 所知 $K_n$ 不是空集，那么根据 Theorem 2.36 的 Corollary，"如果 $\{K_n\}$ 是非空紧集的数列且 $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$，那么 $\cap_1^\infty K_n$ 不为空"，与推导相悖，因此 $P$ 是不可数的，证明完毕。

**Corollary** *Every interval $[a, b]$ $(a < b)$ is uncountable. In particular, the set of all real numbers is uncountable.*

**Note**
任何区间都是不可数的，尤其是所有实数的集合都是不可数的。

**2.44 The Cantor set** The set which we are now going to construct shows that there exist perfect sets in $R^1$ which contain no segment.

Let $E_0$ be the interval $[0, 1]$. Remove the segment $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, and let $E_1$ be the union of the intervals

$$[0, \frac{1}{3}]\ [\frac{2}{3}, 1].$$

Remove the middle thirds of these intervals, and let $E_2$ be the union of the intervals

$$[0, \frac{1}{9}],\ [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}],\ [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}],\ [\frac{8}{9}, 1].$$

Continuing in this way, we obtain a sequence of compact sets $E_n$, such that

(a) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$;

(b) $E_n$ is the union of $2^n$ intervals, each of length $3^{-n}$.

The set

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

is called the *Cantor set*. $P$ is clearly compact, and Theorem 2.36 shows that $P$ is not empty.

No segment of the form

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right), \tag{24}$$

where $k$ and $m$ are positive integers, has a pint in common with $P$. Since every segment $(\alpha, \beta)$ contains a segment of the form (24), if

$$3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6},$$

$P$ contains no segment.

To show that $P$ is perfect, it is enough to show that $P$ contains no isolated point. Let $x \in P$, and let $S$ be any segment containing $x$. Let $I_n$ be that interval of $E_n$ which contains $x$. Choose $n$ large enough, so that $I_n \subset S$. Let $x_n$ be an endpoint of $I_n$, such that $x_n \neq x$.

It follows from the construction of $P$ that $x_n \in P$. Hence $x$ is a limit point of $P$, and $P$ is perfect.

One of the most interesting properties of the Cantor set is that it provides us with an example of an uncountable set of measure zero (the concept of measure will be discussed in Chap. 11).

**Note**

Cantor 集说明了 $R^1$ 中存在没有区间的完全集。Cantor 集在构造的过程中，每次去掉的都是开区间。重要性质（实分析 & 泛函分析）：

1. Cantor 集的 Lebesgue 测定是 0
2. Cantor 集是非空有界闭集
3. Cantor 集完全集
4. Cantor 集是无处稠密集（疏朗集）
5. Cantor 集是不可数集

### Connected Sets

**2.45 Definition** Two subsets $A$ and $B$ of a metric space $X$ are said to be *separated* if both $A \cap \overline{B}$ and $\overline{A} \cap B$ are empty, i.e., if no point of $A$ lies in the closure of $B$ and no point of $B$ lies in the closure of $A$.

A set $E \subset X$ is said to be *connected* if $E$ is *not* a union of two nonempty separated sets.

**Note**

度量空间 $X$ 的两个子集 $A$ 与 $B$ 被称为**分离的 separated** 如果 $A \cap \overline{B}$ 与 $\overline{A} \cap B$ 皆为空集；与分离相反的概念为**连通的 connected**。

**2.46 Remark** Separated sets are of course disjoint, but disjoint sets need not be separated. For example, the interval $[0, 1]$ and the segment $(1, 2)$ are *not* separated, since 1 is a limit point of $(1,2)$. However, the segments $(0,1)$ and $(1,2)$ *are* separated.

**Note**

分离的两个集是不相交的，但不相交的集合不一定是分离的。例如 $[0,1]$ 与 $(1,2)$ 不是分离的。

线的连通子集拥有一个特殊的简单结构：

**2.47 Theorem** *A subset $E$ of the real line $R^1$ is connected if and only if it has the following property: If $x \in E, y \in E$, and $x < z < y$, then $z \in E$.*

*Proof.*

如果存在 $x \in E$，$y \in E$，以及某些 $z \in (x,y)$ 使得 $z \notin E$，那么有 $E = A_z \cup B_z$ 其中

$$A_z = E \cap (-\infty, z), \quad B_z = E \cap (z, \infty)$$

因为 $x \in A_z$ 以及 $y \in B_z$，$A$ 与 $B$ 为非空。因为 $A_z \subset (-\infty, z)$ 以及 $B_z \subset (z, \infty)$，它们是分开着的。因此 $E$ 不为连接。

接下来是反着证明，假设 $E$ 不为连接。那么不存在非空并分开的集合 $A$ 与 $B$ 使得 $A \cup B = E$。令 $x \in A$，$y \in B$，且假设（而不失去普遍性）$x < y$。定义

$$z = \sup(A \cap [x,y])$$

根据 Theorem 2.28，$z \in \overline{A}$；因此 $z \notin B$。特别是 $x \leq z < y$。

如果 $z \notin A$，它遵循 $x < z < y$ 且 $z \notin E$。

如果 $z \in A$，那么 $z \notin \overline{B}$，因此存在 $z_1$ 使得 $z < z_1 < y$ 且 $z_1 \notin B$。那么 $x < z_1 < y$ 且 $z_1 \notin E$。 □

**Note**

实数集 $R^1$ 的子集 $E$ 是连通的，当且仅当：如果 $x \in E$，$y \in E$ 且 $x < z < y$，那么 $z \in E$。

# 3 Numerical Sequences and Series

## Convergent Sequences

**3.1 Definition** A sequence $\{P_n\}$ in a metric space $X$ is said to *converge* if there is a point $p \in X$ with the following property: For every $\varepsilon > 0$ there is an integer $N$ such that $n \geq N$ implies that $d(p_n, p) < \varepsilon$. (Here $d$ denotes the distance in $X$.)

In this case we also say that $\{p_n\}$ converges to $p$, or that $p$ is the limit of $\{p_n\}$ [see Theorem 3.2(b)], and we write $p_n \to p$, or

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

If $\{P_n\}$ does not converge, it is said to *diverge*.

It might be well to point out that our definition of "convergent sequence" depends not only on $\{p_n\}$ but also on $X$; for instance, the sequence $1/n$ converges in $R^1$ (to 0), but fails to converge in the set of all positive real numbers [with $d(x, y) = |x - y|$]. In cases of possible ambiguity, we can be more precise and specify "convergent in $X$" rather than "convergent".

We recall hat the set of all point $p_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ is the *range* of $\{p_n\}$. The range of a sequence may be a finite set, or it may be infinite. The sequence $\{p_n\}$ is said to be *bounded* if its range is bounded.

As examples, consider the following sequences of complex numbers (that is, $X = R^2$):

(a) If $s_n = 1/n$, then $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$; the range is infinite, and the sequence is bounded.

(b) If $s_n = n^2$, the sequence $\{s_n\}$ is unbounded, is divergent, and has infinite range.

(c) If $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$, the sequence $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, and has infinite range.

(d) If $s_n = i^n$, the sequence $\{s_n\}$ is divergent, is bounded, and has finite range.

(e) If $s_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, then $\{s_n\}$ converges to 1, is bounded, and has finite range.

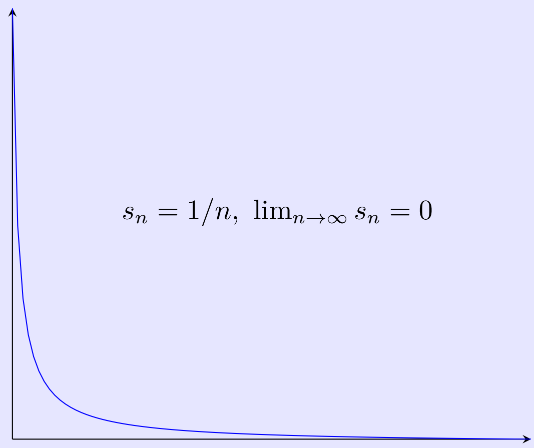
**Note**

度量空间 $X$ 中的序列 $\{p_n\}$ 叫做**收敛的 converged**，如果有一个下述性质的点 $p \in X$：对每个 $\varepsilon > 0$，有一个正整数 $N$，使得 $n \geq N$ 时，$d(p_n, p) < \varepsilon$。也可以说 $\{p_n\}$ 收敛于 $p$，或者说 $p$ 是 $\{p_n\}$ 的极限，写作 $p_n \to p$ 或 $\lim_{n\to\infty} p_n = p$。如果不收敛，则是**发散的 diverged**。

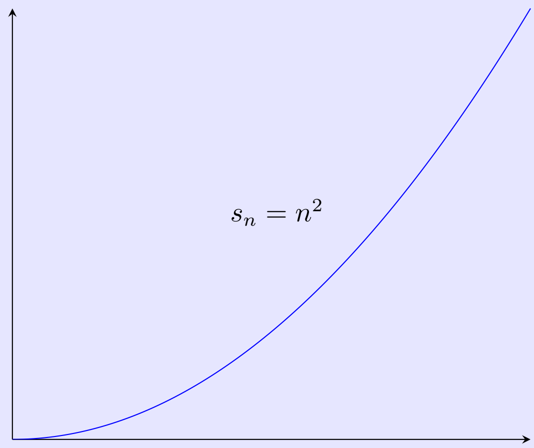
收敛的定义不仅依赖于数列还依赖于 $X$，例如 $1/n$ 在 $R^1$ 中收敛与 0，但在正实数集合中不收敛。所以要强调"在 $X$ 中收敛"。

一切点 $p_n$ 的集合是 $\{p_n\}$ 的**值域 range**，序列的值域可以是有限的，也可以使无限的。如果值域是有界的，那么序列是有界的。

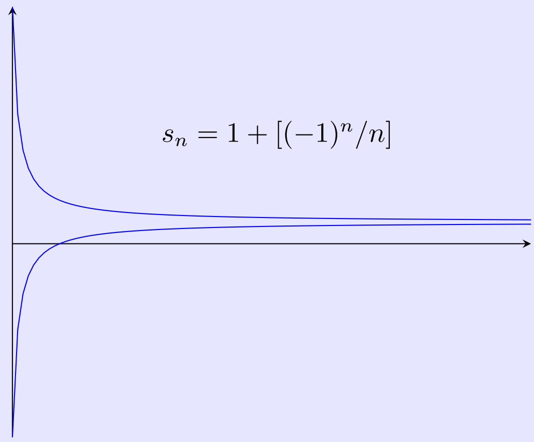
(a) 值域无限，且数列有界：



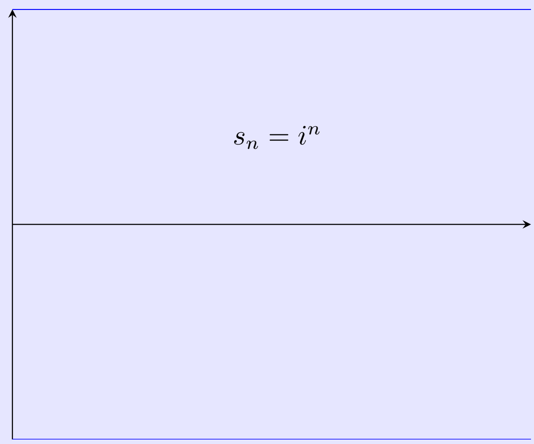

(b) 值域无限，且数列无界，同时为发散的：




(c) 值域无限，且数列有界，同时收敛于 1：




(d) 值域有限，且数列有界，同时为发散的：




(e) 值域有限，且数列有界，同时收敛于 1。

我们现在来总结收敛数列在度量空间中的一些重要特性。

**3.2 Theorem** *Let $\{p_n\}$ be a sequence in a metric space $X$.*

*(a) $\{p_n\}$ converges to $p \in X$ if and only if every neighborhood of $p$ contains $p_n$* ***for*** *all but finitely many $n$.*

*(b) If $p \in X, p' \in X$, and if $\{p_n\}$ converges to $p$ and to $p'$, then $p' = p$.*

*(c) If $\{p_n\}$ converges, then $\{p_n\}$ is bounded.*

(d) *If $E \subset X$ and if $p$ is a limit point of $E$, then there is a sequence $p_n$ in $E$ such that $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.*

*Proof.*

(a) 假设 $p_n \to p$ 且令 $V$ 为 $p$ 的一个邻域。对于某些 $\varepsilon > 0$ 而言，条件 $d(q,p) < \varepsilon, q \in X$ 意味着 $q \in V$。与该 $\varepsilon$ 关联的，存在 $N$ 使得 $n \geq N$ 满足 $d(p_n,p) < \varepsilon$。因此 $n \geq N$ 表明 $p_n \in V$。

相反的，假设 $p$ 的每个邻域包含所有的，且是有限个的 $p_n$。令 $\varepsilon > 0$ 且 $V$ 为 $d(p,q) < \varepsilon$ 的集合，其中 $q \in X$。根据假设，存在 $N$（与该 $V$ 关联）使得 $n \geq N$ 时有 $p_n \in V$。因此如果 $n \geq N$ 时，有 $d(p_n,p) < \varepsilon$；因此 $p_n \to p$。

(b) 令 $\varepsilon > 0$。存在整数 $N$，$N'$ 使得

$$n \geq N \text{ 表明 } d(p_n,p) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq N' \text{ 表明 } d(p_n,p') < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

那么如果 $n \geq \max(N,N')$，我们有

$$d(p,p') \leq d(p,p_n) + d(p_n,p') < \varepsilon$$

因为 $\varepsilon$ 是随机的，我们得出结论 $d(p,p') = 0$。

(c) 假设 $p_n \to p$。存在一个整数 $N$ 使得 $n > N$ 表明 $d(p_n,p) < 1$。令

$$r = \max\{1, d(p_1,p), \ldots, d(p_N,p)\}$$

那么对于 $n = 1,2,3,\ldots$ 有 $d(p_n,p) \leq r$。

(d) 对于每个正整数 $n$，有一个点 $p \in E$ 使得 $d(p_n,p) < 1/n$。给定 $\varepsilon > 0$，选择 $N$ 使得 $N_\varepsilon > 1$。如果 $n > N$，它遵循 $d(p_n,p) < \varepsilon$。因此 $p_n \to p$。

证明完毕。 □

对于在 $R^k$ 中的数列，我们可以学习收敛之间的关系，另一方面，可以学习代数的运算。我们首先考虑复数的数列。

**Note**

度量空间 $X$ 中的序列 $\{p_n\}$：

(a) $\{p_n\}$ 收敛于 $p \in X$，当且仅当 $p$ 的每个邻域，能包含除了有限项以外的一切项；

(b) 如果数列同时收敛于 $p$, $p'$，那么 $p' = p$；

(c) 数列收敛必有界；

(d) 如果 $E \subset X$，而 $p$ 是 $E$ 的极限点，那么在 $E$ 中有一个序列收敛到 $p$。

**3.3 Theorem** *Suppose* $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ *are complex sequences, and* $\lim_{n\to\infty} s_n = s, \lim_{n\to\infty t_n = t}$. *Then*

*(a)* $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$*;*

*(b)* $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs, \lim_{n\to\infty}(c + s_n) = c + s$*, for any number* $c$*;*

*(c)* $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$*;*

*(d)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$*, provided* $s_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$*, and* $s \neq 0$*.*

*Proof.*

(a) 给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N_1$, $N_2$ 使得

$$n \geq N_1 \text{ implies } |s_n - s| < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

$$n \geq N_2 \text{ implies } |t_n - t| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

如果 $N = \max(N_1, N_2)$，那么 $n \geq N$ 表明

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon$$

(a) 证明完毕。

(b) 很简单，跳过。

(c) 使用等式

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s) \tag{1}$$

给定 $\varepsilon > 0$，存在整数 $N_1, N_2$ 使得

$$n \geq N_1 \text{ 表明 } |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$n \geq N_2 \text{ 表明 } |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}$$

如果选取 $N = \max(N_1, N_2), n \geq N$ 表示

$$|(s_n = s)(t_n - t)| < \varepsilon$$

使得

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0$$

现在将 (a) 与 (b) 应用到等式 (1) 上，可以得出结论

$$\lim_{n\to\infty} (s_n t_n - st) = 0$$

(d) 选择 $m$ 使得 $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$ 如果 $n \geq m$，可以得出

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \quad (n \geq m)$$

给定 $\varepsilon > 0$，存在一个整数 $N > m$ 使得 $n \geq N$ 表明

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2\varepsilon$$

因此，对于 $n \geq N$ 有

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon$$

□

**Note**

假定 $s_n, t_n$ 是复序列，且极限为 $s, t$，那么 (a) $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$, (b) 对任何数 $c$, $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs$, (c) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$; (d) $\lim_{n\to\infty}(c + s_n) = c + s$。

**3.4 Theorem** *(a) Suppose* $\mathbf{x}_n \in R^k (n = 1, 2, 3, \ldots)$ *and*

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n}, ).$$

*Then* $\{\mathbf{x}_n\}$ *converges to* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *if and only if*

(2) $$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \qquad (1 \leq j \leq k).$$

*(b) Suppose* $\{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n\}$ *are sequences in* $R^k$, $\{\beta_n\}$ *is a sequence of real numbers, and* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \to \mathbf{y}, \beta_n \to \beta$. *Then*

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n\mathbf{x}_n = \beta\mathbf{x}.$$

*Proof.*

如果 $|\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}|$，那么不等式

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|$$

遵循 $R^k$ 的定理，即 (2) 成立。

反过来，如果 (2) 成立，那么每个 $\varepsilon > 0$ 存在一个关联的整数 $N$ 使得 $n \geq N$ 满足

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \qquad (1 \leq j \leq k)$$

因此 $n \geq N$ 表明

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = \left\{\sum_{j=1}^{k}|\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2\right\}^{1/2} < \varepsilon$$

使得 $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$。(a) 证明完毕。

根据 (a) 与 Theorem 3.3 可得 (b)。 □

**Note**

在通过 (2) 证明 $\{\mathbf{x}_n\}$ 收敛于 $\{\mathbf{x}\}$ 时，不等式 $|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ 右侧的 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ 用于构建接下来的欧式距离公式。以下为构建过程：

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$$
$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \cdot \sqrt{k} < \varepsilon$$
$$(|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \cdot \sqrt{k})^2 < \varepsilon^2$$
$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \cdot k < \varepsilon^2$$

那么对于 $1 \leq j \leq k$ 而言，有：

$$|\alpha_{1,n} - \alpha_1|^2 \cdot k + |\alpha_{2,n} - \alpha_2|^2 \cdot k + \cdots + |\alpha_{k,n} - \alpha_k|^2 \cdot k < \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^2$$

即：

$$\sum_{k}^{j=1}|\alpha_{j,n}-\alpha_j|^2\cdot k<k\cdot\varepsilon^2$$

$$k\cdot\sum_{k}^{j=1}|\alpha_{j,n}-\alpha_j|^2<k\cdot\varepsilon^2$$

$$\sum_{k}^{j=1}|\alpha_{j,n}-\alpha_j|^2<\varepsilon^2$$

$$(\sum_{k}^{j=1}|\alpha_{j,n}-\alpha_j|^2)^{1/2}<\varepsilon$$

该不等式左侧即为欧式距离公式，因此有：

$$|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}|=(\sum_{k}^{j=1}|\alpha_{j,n}-\alpha_j|^2)^{1/2}$$

那么根据 Definition 3.1，即收敛的定义：

$$|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}|<\varepsilon$$

可得：

$$\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}$$

## Subsequences

**3.5 Definition** Given a sequence $\{p_n\}$, consider a sequence $\{n_k\}$ of positive integers, such that $n_1<n_2<n_3<\cdots$. Then the sequence $\{p_{n_i}\}$ is called a subsequence of $\{p_n\}$. If $\{p_{n_i}\}$ converges, its limit is called a *subsequential limit* of $\{p_n\}$.

It is clear that $\{p_n\}$ converges to $p$ if and only if every subsequence of $\{p_n\}$ converges to $p$.

**Note**

有序列 $\{p_n\}$ 取正整数序列 $\{n_k\}$ 使 $n_1<n_2<\ldots$，那么序列 $\{p_{n_i}\}$ 便叫做**子序列**，如果 $\{p_{n_i}\}$ 收敛，那么它的极限叫做 $\{p_n\}$ 的**部分极限**。序列收敛于 $p$ 当且仅当它的任何子序列收敛于 $p$。

**3.6 Theorem** *(a) If $\{p_n\}$ is a sequence in a compact metric space $X$, then some subsequence of $\{p_n\}$ converges to a point of $X$.*

*(b) Every bounded sequence in $R^k$ contains a convergent subsequence.*

*Proof.*

(a) 令 $E$ 为 $\{p_n\}$ 的值域。如果 $E$ 是有限的，那么存在一个 $p \in E$ 及一个序列 $\{n_i\}$ 且 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 满足

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p$$

而子序列 $\{p_{n_i}\}$ 因此收敛于 $p$。

如果 $E$ 是无限的，根据 Theorem 2.37 所提的 $E$ 拥有一个极限点 $p \in X$。选取 $n_1$ 使得 $d(p, p_{n_1}) < 1$。选取 $n_1, \ldots, n_{i-1}$，根据 Theorem 2.20 所提的，存在一个整数 $n_i > n_{i-1}$ 满足 $d(p, p_{n_i}) < 1/i$。那么 $\{p_{n_i}\}$ 收敛于 $p$。

(b) 遵循 (a)，因为 Theorem 2.41 推导每个有界的 $R^k$ 子集存在于 $R^k$ 的一个紧集中。

□

**Note**

如果 $\{p_n\}$ 是紧度量空间 $X$ 中的序列，那么 $\{p_n\}$ 有某个子序列收敛到 $X$ 中的某个点；$R^k$ 中的每个有界序列包含收敛的子序列。

(a) 值域是有限的情况下，其某个点 $p$ 可以成为某序列的收敛点；值域是无限的情况下，利用 Theorem 2.37 存在的极限点再加上 Theorem 2.20 所描述的极限点的邻域存在无限点可以证明子序列 $\{p_{n_i}\}$ 收敛于该极限点。

(b) 而 (b) 则是作为 (a) 在 $R^k$ 度量空间上的延伸：$E$ 作为序列的值域，根据 Theorem 2.41 (a) 可知 (c)，即存在极限点。

**3.7 Theorem** *The subsequential limits of a sequence $\{p_n\}$ in a metric space $X$ form a closed subset of $X$.*

*Proof.*

令 $E^*$ 为 $\{p_n\}$ 所有子序列极限的集合，同时令 $q$ 为 $E^*$ 的一个极限点。我们需要证明 $q \in E^*$。

选取 $n_1$ 满足 $p_{n_1} \neq q$。(如果没有这样的 $n_1$ 存在，那么 $E^*$ 只有一个点，这样便没有必要证明了。）令 $\delta = d(q, p_{n_1})$。假设选取了 $n_1, \ldots, n_{i-1}$。因为 $q$ 是 $E^*$ 的一个极限点，那么存在一个 $x \in E^*$ 满足 $d(x, q) < 2^{-i}\delta$。因为 $x \in E^*$，存在一个 $n_i > n_{i-1}$ 满足 $d(x, p_{n_i}) < 2^{-i}\delta$。因此

$$d(q, p_{n_i}) \leq 2^{1-i}\delta$$

对于 $i = 1, 2, 3, \ldots$。这意味着 $\{p_{n_i}\}$ 收敛于 $q$。因此 $q \in E^*$。 □

**Note**

度量空间 $X$ 里的序列 $\{p_n\}$ 的部分极限组成 $X$ 的闭子集。

证明中所构建的不等式 $d(x, p_{n_i}) < \frac{1}{2^i}\delta$ 与 $d(q, p_{n_i}) < \frac{1}{2^i}\delta$ 两者相加可得

$$d(x, p_{n_i}) + d(q, p_{n_i}) < 2 \cdot \frac{1}{2^i}\delta$$

而新的不等式左侧可知 $d(x, p_{n_i}) + d(q, p_{n_i}) \leq d(q, p_{n_i})$，即 $d(q, p_{n_i}) \leq 2^{1-i}\delta$。随着 $i$ 逐渐增大 $2^{1-i}\delta$ 越小，即证明 $\{p_{n_i}\}$ 收敛于 $q$。

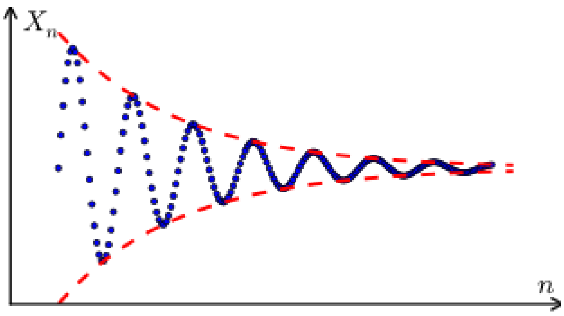
## Cauchy Sequences

**3.8 Definition** A sequence $\{p_n\}$ in a metric space $X$ is said to be a *Cauchy* sequence if for every $\varepsilon > 0$ there is an integer $N$ such that $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ if $n \geq N$ and $m \geq N$.

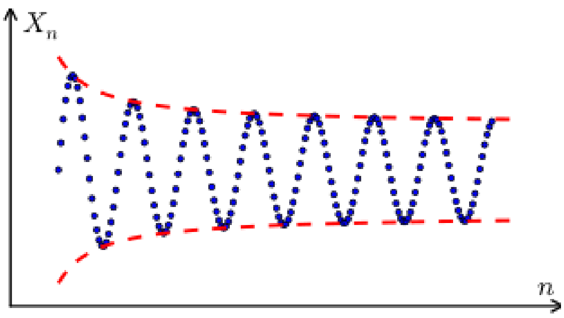
**Note**

度量空间 $X$ 中的序列 $\{p_n\}$ 叫做 **柯西序列 Cauchy**，如果对于任何 $\varepsilon > 0$ 存在正整数 $N$，只要 $m, n \geq N$ 就有 $d(p_n, p_m) < \varepsilon$。

根据 Wikipedia：




一个柯西序列 $\{x_n\}$ 相对于 $n$ 的绘图（蓝色）。如果包含这个序列的空间是完备的，则这个序列的有一个极限。




一个非柯西序列。这个序列的元素不能随着序列前进而相互靠近。

**3.9 Definition** Let $E$ be a nonempty subset of a metric space $X$, and let $S$ be the set of all real numbers of the form $d(p, q)$, with $p \in E$ and $q \in E$. The sup of $S$ is called the *diameter* of $E$.

如果 $\{p_n\}$ 是 $X$ 中的一个序列，且如果 $E_n$ 包含所有点 $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$，那么从前两个定义中可以清楚的得到 $\{p_n\}$ 是一个**柯西序列**当且仅当

$$\lim_{N \to \infty} diam\ E_N = 0$$

**Note**

设 $E$ 是度量空间 $X$ 中的非空子集，又设 $S$ 是一切形式为 $d(p,q)$ 的实数集，$p,q \in E$。$\sup S$ 叫做 $E$ 的直径，记为 $diam\ E$。

**3.10 Theorem**

*(a) If $\overline{E}$ is the closure of a set $E$ in a metric space $X$, then*

$$diam\ \overline{E} = diam\ E.$$

*(b) If $K_n$ is a sequence of compact sets in $X$ such that $K_n \supset K_{n+1} (n = 1,2,3,\dots)$ and if*

$$\lim_{n\to\infty} diam\ K_n = 0,$$

*then $\bigcap_1^\infty K_n$ consists of exactly one point.*

*Proof.*

(a) 因为 $E \subset \overline{E}$，那么可以清楚的知道

$$diam\ E \le diam\ \overline{E}$$

选取 $\varepsilon > 0, p \in \overline{E}, q \in \overline{E}$。根据 $\overline{E}$ 的定义，$E$ 中存在点 $p'$，$q$‘，满足 $d(p,p') < \varepsilon$，$d(q,q') < \varepsilon$。因此

$$\begin{aligned} d(p,q) &\le d(p,p') + d(p',q') + d(q',q) \\ &< 2\varepsilon + d(p',q') \\ &\le 2\varepsilon + diam\ E. \end{aligned}$$

它遵循

$$diam\ \overline{E} \le 2\varepsilon + diam\ E,$$

且因为 $\varepsilon$ 是随机的，(a) 则被证明。

(b) 令 $K = \bigcap_1^\infty K_n$。根据 Theorem 2.36，$K$ 为非空。如果 $K$ 包含一个以上的点，那么 $diam\ K > 0$。但是对于每个 $n$ 而言，$K_n \supset K$，所以 $diam\ K_n \ge diam\ K$。这与假设的 $diam\ K_n \to 0$ 相悖。

□

**Note**

(a) 如果 $E$ 是度量空间 $X$ 中的集，那么闭包满足 $diam\ \overline{E} = diam\ E$; (b) 如果 $\{K_n\}$ 是 $X$ 中的紧集的序列，且 $K_n \supset K_{n+1}$ 又若 $\lim_{n\to\infty} diam\ K_n = 0$，那么 $\bigcap_1^\infty K_n$ 由一个点组成。

**3.11 Theorem**

1. *In any metric space $X$, every convergent sequence is a Cauchy sequence.*
2. *In $X$ is a compact metric space and if $\{p_n\}$ is a Cauchy sequence in $X$, then $\{p_n\}$ converges to some point of $X$.*
3. *In $R^k$, every Cauchy sequence converges.*

注意: 收敛的定义与柯西序列定义的不同在于前者明确存在极限，后者未必。因此 Theorem 3.11(b) 可以判定一个序列是否收敛，而不需知道其收敛的极限。事实（包含于 Theorem 3.11）上，一个序列收敛在 $R^k$，当且仅当它是一个柯西序列，这通常被称为收敛的**柯西标准**。

*Proof.*

(a) 如果 $p_n \to p$ 且 $\varepsilon > 0$，存在一个整数 $N$ 对于所有的 $n \geq N$ 满足 $d(p, p_n) < \varepsilon$。因此只要 $n \geq N$ 同时 $m \geq N$，那么

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon$$

因此 $\{p_n\}$ 是一个柯西序列。

(b) 令 $\{p_n\}$ 为一个在紧空间 $x$ 的柯西序列。对于 $N = 1, 2, 3, \ldots$，令 $E_N$ 为一个包含了 $P_N, P_{N+1}, P_{N+3}, \ldots$ 的集合。那么根据 Definition 3.9 与 Theorem 3.10(a)，有

(3)
$$\lim_{N\to\infty} diam\ \overline{E}_N = 0$$

作为紧空间 $X$ 中的一个闭集，每个 $\overline{E}_N$ 都是紧的（Theorem 2.35）。又因为 $E_N \supset E_{N+1}$，因此有 $\overline{E}_N \supset \overline{E}_{N+1}$。

Theorem 3.10(b) 说明存在一个唯一的 $p \in X$ 位于每个 $\overline{E}_N$ 中。

令 $\varepsilon > 0$，根据 (3) 存在一个整数 $N_0$ 当 $N \geq N_0$ 时，满足 $\overline{E}_N < \varepsilon$。又因为 $p \in \overline{E}_N$，对于每个 $q \in \overline{E}_N$ 它遵循 $d(p, q) < \varepsilon$，所以对于每个 $q \in E_n$ 也成立。换言之，如果 $n \geq N_0$，那么就有 $d(p, p_n) < \varepsilon$。即 $p_n \to p$。

(c) 令 $\{\mathbf{x}_n\}$ 为一个在 $R^k$ 上的柯西序列。如同 (b) 那样定义 $E_N$，用 $\mathbf{x}_i$ 替换 $p_i$。对于某些 $N$ 而言，$diam\ E_N < 1$。$\{\mathbf{x}_n\}$ 的值域是 $E_N$ 与有限集 $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ 的并集。因此 $\{\mathbf{x}_n\}$ 是有界的。因为每个 $R^k$ 的有界子集在 $R^k$ 中拥有紧闭包（Theorem 2.41），(c) 遵循了 (b)。

□

**3.12 Definition** A metric space in which every Cauchy sequence converges is said to be **complete**.

因此 Theorem 3.11 说的所有紧度量空间以及所有欧几里得空间是完备的。Theorem 3.11 同样说明了一个完备度量空间 $X$ 中的每个闭子集 $E$ 都是完备的。(每个在 $E$ 中的柯西序列也是 $X$ 中的柯西序列，因此它收敛于某 $p \in X$，且实际上 $p \in E$，因为 $E$ 是闭的)。一个度量空间中不具完备性质的例子是，所有符合 $d(x, y) = |x - y|$ 的有理数。

Theorem 3.2(c) 与 Definition 3.1 中的 example(d) 说明了收敛的序列是有界的，而在 $R^k$ 上有界的序列并不需要收敛。不过这里有一个重要的例子，收敛等同于有界；这发生在 $R^1$ 中的单调序列。

**3.13 Definition** A sequence $\{s_n\}$ of real numbers is said to be

(a) *monotonically increasing* if $s_n \leq s_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$;

(b) *monotonically decreasing* if $s_n \geq s_{n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$;

单调序列的类由递增以及递减序列所构成。

**Note**
实数序列的**单调递增**（$s_n \leq s_{n+1}$）和**单调递减**。

**3.14 Theorem** *Suppose $\{s_n\}$ is monotonic. Then $\{s_n\}$ converges if and only if it is bounded.*

*Proof.*

假设 $s_n \leq s_{n+1}$（另一方向的证明类似）。令 $E$ 为 $\{s_n\}$ 的值域。如果 $\{s_n\}$ 有界，令 $s$ 为 $E$ 的最小上界。那么有

$$s_n \leq s \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

对于每个 $\varepsilon > 0$，有一个整数 $N$ 满足

$$s - \varepsilon < s_N \leq s$$

否则 $s - \varepsilon$ 将会变为 $E$ 的一个上界。由于 $\{s_n\}$ 递增，$n \geq N$ 因此说明

$$s - \varepsilon < s_n \leq s$$

即 $\{s_n\}$ 收敛（于 $s$）。

另一方向的证明遵从 Theorem 3.2(c)。 □

**Note**
单调序列收敛，当且仅当它是有界的。

## Upper and Lower Limits

**3.15 Definition** Let $\{s_n\}$ be a sequence of real numbers with the following property: For every real $M$ there is an integer $N$ such that $n \geq N$ implies $s_n \geq M$. We then write

$$s_n \to +\infty$$

Similarly, if for every real $M$ there is an integer $N$ such that $n \geq N$ implies $s_n \leq M$, we write

$$s_n \to -\infty$$

值得注意的是我们现在使用的符号 $\to$（在 Definition 3.1 中提出）用于特定类型的发散序列以及收敛序列，但是对于收敛以及极限的定义（Definition 3.1）并没有改变。

**Note**
$s_n \to \pm\infty$ 的定义。

**3.16 Definition** Let $\{s_n\}$ be a sequence of real numbers. Let $E$ be the set of numbers $x$ (in the extended real number system) such that $s_{n_k} \to x$ for some subsequence $\{s_{n_k}\}$. This set $E$ contains all subsequential limits as defined in Definition 3.5, plus possibly the numbers $+\infty$, $-\infty$.

我们现在回忆 Definitions 1.8 与 1.23 且令

$$s^* = \sup E$$

$$s_* = \inf E$$

数字 $s^*, s_*$ 分别被称为 $\{s_n\}$ 的 上极限与 下极限；使用以下标记

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = s^*, \qquad \lim_{n\to\infty} \inf s_n = s_*$$

**3.17 Theorem** *Let $\{s_n\}$ be a sequence of real numbers. Let $E$ and $s^*$ have the same meaning as in Definition 3.16. Then $s^*$ has the following two properties:*

*(a)* $s^* \in E$.

*(b) If $x > s^*$, there is an integer $N$ such that $n \geq N$ implies $s_n < x$.*

*Moreover, $s^*$ is the only number with the properties (a) and (b). Of course, an analogous result is true for $s_*$.*

*Proof.*

(a) 如果 $s^* = +\infty$，那么 $E$ 则没有上界；因此 $\{s_n\}$ 没有上界，且存在一个子序列 $\{s_{n_k}\}$ 满足 $s_{n_k} \to +\infty$。

如果 $s^*$ 是实数，那么 $E$ 则有上界，且至少存在一个子序列的极限，因此 (a) 遵循 Theorems 3.7 与 3.8。

如果 $s^* = -\infty$，那么 $E$ 仅包含一个元素，即 $-\infty$，且没有子序列极限。因此对于任何实数 $M, s_n > M$，至多有一个为 $n$ 的有限数，满足 $s_n \to -\infty$。

上述构成了 (a) 的所有条件。

(b) 假设存在一个数 $x > s^*$，对于无限多个的 $n$ 满足 $s_n \geq x$ 。这种情况下，存在一个数 $y \in E$ 满足 $y \geq x > s^*$，与 $s^*$ 的定义相悖。

因此 $s^*$ 满足 (a) 与 (b)。

而对于唯一性，假设存在两个数，$p$ 与 $q$，满足 (a) 与 (b)，且假设 $p < q$。选择 $x$ 满足 $p < x < q$。由于 $p$ 满足 (b)，则对于 $n \geq N$，有 $s_n < x$。但是这样 $q$ 就无法满足 (a) 了。

□

**3.18 Examples**

(a) Let $\{s_n\}$ be a sequence containing all rationals. Then every real number is a subsequential limit, and

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \inf s_n = -\infty$$

.

(b) Let $s_n = (-1^n)/[1 + (1/n)] = 1$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \inf s_n = -1$$

(c) For a real-valued sequence $\{s_n\}$, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ if and only if

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = \lim_{n\to\infty} \inf s_n = s$$

本节由一个有用的 theorem 作为完结：

**3.19 Theorem** *If $s_n \le t_n$ for $n \ge N$, where $N$ is fixed, then*

$$\lim_{n\to\infty} \inf s_n \le \lim_{n\to\infty} \inf t_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n \le \lim_{n\to\infty} \sup t_n.$$

## Some Special Sequences

我们现在可以计算一些常见序列的极限了。这些证明都将基于以下观察：如果对于 $n \ge N$ 有 $0 \le x_n \le s_n$，这里 $N$ 为某固定的数，那么如果 $s_n \to 0$ 则有 $x_n \to 0$。

**3.20 Theorem**

*(a) If $p > 0$, then $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.*

*(b) If $p > 0$, then $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.*

*(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.*

*(d) If $p > 0$ and $\alpha$ is real, then $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.*

*(e) If $|x| < 1$, then $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.*

*Proof.*

(a) 取 $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$。（注意这里使用了实数系统的阿基米德性质。）

(b) 如果 $p > 1$，令 $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$。那么 $x_n > 0$，且根据二项式定理，

$$1 + nx_n \le (1 + x_n)^n = p$$

使得

$$0 < x_n \le \frac{p-1}{n}$$

因此 $x_n \to 0$。如果 $p = 1$，(b) 则无需证明，如果 $0 < p < 1$，则通过倒数可以得出结论。

(c) 令 $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$。那么当 $x_n \ge 0$，且根据二项式定理，

$$n = (1 + x_n)^n \ge \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

因此

$$0 \le x_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad (n \ge 2)$$

(d) 令 $k$ 为一个整数，满足 $k > \alpha, k > 0$。对于 $n > 2k$，

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

因此

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k} \qquad (n > 2k)$$

由于 $\alpha - k < 0$，那么根据 (a) 有 $n^{\alpha-k} \to 0$。

(e) 在 (d) 中取 $\alpha = 0$。

□

**Note**

(b) 中的 $0 < p < 1$ 的情况下，利用倒数即令 $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{p}} - 1$，那么

$$(x_n+1)^n = \frac{1}{p}$$
$$nx_n + 1 \leq (x_n+1)^n = \frac{1}{p}$$
$$nx_n + 1 \leq \frac{1}{p}$$
$$x_n \leq \frac{\frac{1}{p} - 1}{n}$$
$$x_n \leq \frac{1-p}{np}$$

随着 $n$ 增大 $x_n$ 趋近于 0，即 $x_n \to 0$。

(d) 中的假设 $(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k$ 可以分别将 $k = 1$ 以及 $k = n$ 带入，对不等式进行验证。当 $k = 1$ 时

$$(1+p)^n > \binom{n}{1} p^1 = np$$

显然不等式成立；当 $k = n$ 时

$$(1+p)^n > \binom{n}{n} p^n = p^n$$

不等式也同样成立。那么在 $\binom{n}{k}p^k$ 展开后的分子满足

$$n > \frac{n}{2}$$
$$(n-1) > \frac{n}{2}$$
$$\cdots$$
$$(n-k+1) > \frac{n}{2}$$

其中最后一项可以简化为 $n > 2k-2$，而证明中给定的假设是 $n > 2k$，因此同样满足不等式。将上述不等式相乘即

$$(n)(n-1)\cdots(n-k+1) > (\frac{n}{2})^k$$

即

$$\frac{(n)(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

那么可以得到

$$(1+p)^n > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$
$$\frac{2^k k!}{p^k} > \frac{n^k}{(1+p)^n}$$

将不等式右侧的 $n^k$ 转换为 $n^{k+\alpha-\alpha}$，也就是

$$\frac{2^k k!}{p^k} > \frac{n^{k+\alpha-\alpha}}{(1+p)^n}$$
$$\frac{2^k k!}{p^k} > \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \cdot n^{k-\alpha}$$
$$\frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k}$$

又因为假设了 $k > \alpha$，最后通过 (a) 即 $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-k} = 0$。

## Series

在本章的剩余部分中，所有的序列与级数都被视作复数，除了显式的声明不为复数的情况。

**3.21 Definition** Given a sequence $\{a_n\}$, we use the notation

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \qquad (p \leq q)$$

to denote the sum $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$. With $\{a_n\}$ we associate a sequence $\{s_n\}$, where

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

For $\{s_n\}$ we also use the symbolic expression

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

or, more concisely,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4}$$

The symbol (4) we call an *infinite series*, or just a *series*. The numbers $s_n$ are called the *partial sums* of the series. If $\{s_n\}$ converges to $s$, we say that the series *converges*, and write

$$\sum_{n=1}^{\infty} = s.$$

The number $s$ is called the sum of the series; but it should be clearly understood that $s$ *is the limit of a sequence of sums*, and is not obtained simply by addition.

If $\{s_n\}$ diverges, the series is said to diverge.

Sometimes, for convenience of notation, we shall consider series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

And frequently, when there is no possible ambiguity, or when the distinction is immaterial, we shall simply write $\sum a_n$ in place of (4) or (5).

It is clear that every theorem about sequences can be stated in terms of series (putting $a_1 = s_1$, and $a_n = s_n - s_{n-1}$ for $n > 1$), and vice versa. But it is nevertheless useful to consider both concepts.

**Note**

级数的 Wiki 定义。

通常来说，级数的项都由一个环而来，通常是实数域 $\mathbb{R}$ 或者是复数域 $\mathbb{C}$。这种情况下，所有级数的集其自身就是一个环（甚至是一个结合代数），其中加法就是每项级数的相加，而乘法则是柯西乘积。

**Note**

对序列 $a_n$，令 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 为**部分和**，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 叫做无穷级数（*infinite series*），简称级数（*series*）。

如果 $s_n$ 收敛，那么级数收敛并记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$；如果 $s_n$ 发散，那么级数发散。

**3.22 Theorem** *$\Sigma a_n$ converges if and only if for every $\varepsilon > 0$ there is an integer $N$ such that*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \varepsilon \tag{6}$$

*if $m \ge n \ge N$.*

**Note**

柯西准则 Theorem 3.11 可以重新表述为，$\Sigma a_n$ 收敛，当且仅当，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在级数 $N$，使得 $m \ge n \ge N$ 时 $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \varepsilon$。

尤其是在取值 $m = n$ 的时候 (6) 则会变为

$$|a_n| \le \varepsilon \qquad (n \ge N).$$

换言之：

**3.23 Theorem** *If $\Sigma a_n$ converges, then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

然而其中 $a_n \to 0$ 并不能完全确保 $\Sigma a_n$ 的收敛。例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

是发散的；我们将在 Theorem 3.28 中进行证明。

Theorem 3.14 中所提出的单调序列，也有着与级数所直接对应的部分。

**Note**

如果 $\Sigma a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

**3.24 Theorem** *A series of nonnegative terms converges if and only if its partial sums form a bounded sequence.*

**Note**

各项为非负的级数收敛，当且仅当其部分和构成有界数列。

我们从现在开始，将收敛测试统一称为“比较测试”。

**3.25 Theorem**

*(a) If $|a_n| \le c_n$ for $n \ge N_0$, where $N_0$ is some fixed integer, and if $\Sigma c_n$ converges, then $\Sigma a_n$ converges.*

*(b) If $a_n \ge d_n \ge 0$ for $n \ge N_0$, and if $\Sigma d_n$ diverges, then $\Sigma a_n$ diverges.*

注意 (b) 仅作用于级数的非负部分 $a_n$。

*Proof.*

给定 $\varepsilon > 0$，根据柯西准则，存在 $N \ge N_0$ 满足 $m \ge n \ge N$ 使得

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \le \varepsilon$$

因此

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} c_k \le \varepsilon$$

且 (a) 成立。

接着，(b) 遵循 (a)，如果 $\Sigma a_n$ 收敛，所以 $\Sigma d_n$（注意 (b) 同样遵循 Theorem 3.24）。 □

比较测试是非常有用的；为了更效率的使用，我们需要熟悉一些级数的非负项是否为收敛或者发散。

**Note**

- 如果 $N_0$ 是某个固定的正整数。$n \geq N_0$ 时 $|a_n| \leq c_n$，而且 $\Sigma c_n$ 也收敛，那么 $\Sigma a_n$ 也收敛；
- 如果当 $n \geq N_0$ 时 $a_n \geq d_n \geq 0$，而且 $\Sigma d_n$ 发散，那么 $\Sigma a_n$ 也发散。

对于 (a) 而言，当 $n \geq N_0$ 之后的所有 $n$ 都满足 $|a_n| \leq c_n$，那么往后的每个 $n$ 即为

$$
\begin{gathered}
|a_{n+1}| \leq c_{n+1} \\
|a_{n+2}| \leq c_{n+2} \\
\cdots \\
|a_m| \leq c_m
\end{gathered}
$$

那么将上述所有不等式相加以后得到的便是

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k$$

而又因为柯西标准的缘故有 $\sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$，同时 $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|$ 意为和之绝对值，是肯定小于或等于绝对值之和的，因此有了证明中

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$$

这样的不等式。

## Series of Nonnegative Terms

**3.26 Theorem** *If* $0 \leq x < 1$*, then*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

*If* $x \geq 1$*, the series diverges.*

*Proof.*

如果 $x \neq 1$，

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

如果令 $n \to \infty$，对于 $x = 1$ 而言，有

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

即明显是发散的。 □

在应用中出现的很多案例，级数部分是单调递减的。下面的柯西定理因此特别有趣。该定理显著的特征是 $\{a_n\}$ 的一个相当“薄”的子序列决定了 $\Sigma a_n$ 的收敛或发散。

**Note**

如果 $x \neq 1$，那么 $s_n$ 作为部分和即为 $\sum_{k=0}^{n} x^k$，而对于 $x^k$ 而言可以写成 $\frac{(1-x)x^k}{1-x}$，即证明中的 $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$。

**3.27 Theorem** *Suppose* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. *Then the series* $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ *converges if and only if the series*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \tag{7}$$

*converges.*

*Proof.*

根据 Theorem 3.24，足够考虑部分和的边界。令

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

对于 $n < 2^k$，有

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k, \end{aligned}$$

因此

$$s_n \leq t_k \tag{8}$$

另一方面，如果 $n > 2^k$，

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}t_k, \end{aligned}$$

因此

(9) $$2s_n \geq t_k.$$

根据 (8) 与 (9)，序列 $\{s_n\}$ 与 $\{t_k\}$ 要么同时是有界的，要么是同时是无界的。证明完毕。 □

**Note**

令 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$，那么 $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当且仅当 $\Sigma_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛。

**3.28 Theorem** *$\sum \frac{1}{n^p}$ converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.*

*Proof.*

如果 $p \leq 0$，遵循 Theorem 3.23 收敛。如果 $p > 0$，则 Theorem 3.27 是适当的，且将带来级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

现在，$2^{1-p} < 1$ 当且仅当 $1 - p < 0$，那么该结果咋遵循了几何级数的比较测试（在 Theorem 3.26 中取 $x = 2^{1-p}$）。 □

**Note**

若 $p > 1$，$\Sigma \frac{1}{n^p}$ 收敛；若 $p \leq 1$，它就发散。

**3.29 Theorem** *If $p > 1$,*

(10) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

*converges; if $p \leq 1$, the series diverges.*

“log n” 意味着 $n$ 在基 $e$ 的对数；$e$ 将在后续 Definition 3.30 中进行定义。我们令级数从 $n = 2$ 开始，因为 $\log 1 = 0$。

*Proof.*

对数函数的单调性（将会在第八章中做详细的讨论）表明 $\{\log n\}$ 递增。因此 $\{1/n\log n\}$ 递减，可以应用 Theorem 3.27 在 (10) 上；这将给我们一个级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k(\log 2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} \tag{11}$$

且 Theorem 3.29 遵循 Theorem 3.28.

该过程很明显是连续的。例如，

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n \log\log n} \tag{12}$$

是发散的，而

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n(\log\log n)^2} \tag{13}$$

是收敛的。 □

## The Number e

**3.30 Definition**

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

这里 $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ 如果 $n \geq 1$，且 $0! = 1$。

因为

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 3 \end{aligned}$$

级数收敛，因此定理成立。实际上，该级数收敛的非常迅速，使得我们可以计算 $e$ 时获得很大的精确度。

同样 $e$ 也可以被其他的极限过程所定义：

**3.31 Theorem**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

*Proof.*

令

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

根据二项式定理，

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

因此 $t_n \le s_n$，所以根据 Theorem 3.19 有

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \le e, \tag{14}$$

接下来如果 $n \ge m$，

$$t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

令 $n \to \infty$，保持 $m$ 固定。我们有

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

使得

$$s_m \le \liminf_{n\to\infty} t_n$$

令 $m \to \infty$，我们最终可以获得

$$e \le \liminf_{n\to\infty} t_n \tag{15}$$

定理遵循 (14) 以及 (15)。

那么级数 $\sum \frac{1}{n!}$ 的急速收敛可以被如下估计：如果 $s_n$ 具有上述的意义，则有

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

使得

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n} \tag{16}$$

因此比如说 $s_{10}$，近似 $e$ 的错误小于 $10^{-7}$。不等式 (16) 也具有理论上的意义，因为它让我们更容易证明 $e$ 的无理性。 □

**3.32 Theorem** *$e$ is irrational.*

*Proof.*

假设 $e$ 是有理的。那么有 $e = p/q$，且 $p$ 与 $q$ 是正整数。根据 (16)，

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \tag{17}$$

根据假设，$q!e$ 是一个整数。由于

$$q!s_q = q!(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!})$$

是一个整数，可知 $q!(e - s_q)$ 是一个整数。

由于 $q \geq 1$，(17) 表明存在一个位于 0 与 1 之间的整数，有此得到了悖论。 □

## The Root and Ratio Tests

**3.33 Theorem (Root Test)** *Given $\sum_{a_n}$, put $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Then*

*(a) if $\alpha < 1$, $\Sigma a_n$ converges;*

*(b) if $\alpha > 1$, $\Sigma a_n$ diverges;*

*(c) if $\alpha = 1$, the test gives no information.*

*Proof.*

如果 $\alpha < 1$，我们可以选择 $\beta$ 使得 $\alpha < \beta < 1$，以及一个整数 $N$ 满足

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

其中 $n \geq N$（根据 Theorem 3.17(b)）。即，$n \geq N$ 说明

$$|a_n| < \beta^n$$

。因为 $0 < \beta < 1$，$\Sigma\beta^n$ 收敛，其收敛遵循比较测试。

如果 $\alpha > 1$，那么在此根据 Theorem 3.17，存在一个序列 $\{n_k\}$ 满足

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha$$

因此 $|a_n| > 1$ 对于无穷的 $n$，条件 $a_n \to 0$ 对于 $\Sigma a_n$ 的收敛而言是必要的，即不成立（Theorem 3.23）。

证明 (c)，考虑以下级数

$$\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}$$

对于这些级数 $\alpha = 1$，但是前者发散，后者收敛。 □

**Note**
**根值审敛法**

**3.34 Theorem (Ratio Test)** *The series* $\Sigma a_n$

(a) *converges if* $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$,

(b) *diverges if* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ *for all* $n \geq n_0$, *where* $n_0$ *is some fixed integer.*

*Proof.*

如果条件 (a) 成立，我们可以找到 $\beta < 1$，以及一个整数 $N$，满足

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$$

其中 $n \geq N$。尤其是，

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < \beta|a_n|, \\
&|a_{N+2}| < \beta|a_{N+1}| < \beta^2|a_n|, \\
&\cdots \\
&|a_{N+p}| < \beta^p|a_N|.
\end{aligned}$$

即

$$|a_n| < |a_N|\beta^{-N} \cdot \beta^n$$

其中 $n \geq N$，且 (a) 遵循比较测试，因为 $\Sigma\beta^n$ 收敛。

如果 $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ 其中 $n \geq n_0$，很容易得出条件 $a_n \to 0$ 并不成立，因此 (b) 成立。

注：$\lim a_{n+1}/a_n = 1$ 说明不了 $\Sigma a_n$ 是收敛的，级数 $\Sigma 1/n$ 与 $\Sigma 1/n^2$ 可以证明。 □

**Note**
**比值审敛法**

**3.35 Examples**

(a) 考虑级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

其拥有

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,\\
\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.
\end{aligned}$$

根植审敛法表明收敛；而比值审敛法并不。

(b) 同样对下面级数成立

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$$

满足

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{8},\\
\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_2} &= 2,
\end{aligned}$$

但是

$$\lim\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

**3.37 Theorem** *For any sequence $\{c_n\}$ of positive numbers,*

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} &\le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n},\\
\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} &\le \limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}.
\end{aligned}$$

*Proof.*

我们应该证明第二个不等式；第一个不等式非常的类似。令

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

如果 $\alpha=+\infty$，则无需证明。如果 $\alpha$ 是有限的，选择 $\beta>\alpha$。存在一个整数 $N$ 满足

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\beta$$

其中 $n \geq N$。特别是对于任何 $p > 0$，

$$c_{N+k+1} \leq \beta c_{N+k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

将这些不等式相乘我们获得

$$c_{N+p} \leq \beta^p c_N$$

或者

$$c_n \leq c_N \beta^{-N} \cdot \beta^n \qquad (n \geq N)$$

因此

$$\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}} \cdot \beta$$

根据 Theorem 3.20(b)，有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \beta \tag{18}$$

又因为 (18) 对于任何 $\beta > \alpha$ 而言都成立，因此有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha$$

□

## Power Series

**3.38 Definition** Given a sequence $\{c_n\}$ of complex numbers, the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{19}$$

is called a *power series*. The numbers $c_n$ are called the *coefficients* of the series; $z$ is a complex number.

通常而言，级数的收敛或发散取决于 $z$ 的选择。更确切的来说，每个幂级数都有一个关联圆，称为**收敛圆**，如果 $z$ 在圆内，幂级数就收敛，如果在圆外则发散（这里把平面看做半径无限大的圆的内部，把一点看作是半径为零的圆）。级数在收敛圆上的性质不能简单的叙述。

**Note**

对于复数序列 $\{c_n\}$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 叫做**幂级数**，$c_n$ 叫做这个级数的**系数**。

单变量的幂级数是一个拥有下列形式的无限级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

其中 $a_n$ 代表第 $n$ 项的系数，$c$ 为一个常数。

**3.39 Theorem** *Given the power series $\Sigma c_n z^n$, put*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad R = \frac{1}{\alpha}.$$

*(If $\alpha = 0, R = +\infty$; if $\alpha = +\infty, R = 0$.) Then $\Sigma c_n z^n$ converges if $|z| < R$, and diverges if $|z| > R$.*

*Proof.*

令 $a_n = c_n z^n$，并且应用根值审敛法：

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}$$

注意：$R$ 被称为 $\Sigma c_n z^n$ 收敛的半径。 □

**3.40 Examples**

(a) The series $\Sigma n^n z^n$ has $R = 0$.

(b) The series $\sum \frac{z^n}{n!}$ has $R = +\infty$. (In this case the ratio test is easier to apply than the root test.)

(c) The series $\Sigma z^n$ has $R = 1$. If $|z| = 1$, the series diverges, since $\{z^n\}$ does not tend to 0 as $n \to \infty$.

(d) The series $\sum \frac{z^n}{n}$ has $R = 1$. It diverges if $z = 1$. It converges for all other $z$ with $|z| = 1$. (The last assertion will be proved in Theorem 3.44.)

(e) The series $\sum \frac{z^n}{n^2}$ has $R = 1$. It converges for all $z$ with $|z| = 1$, by the comparison test, since $|z^n/n^2| = 1/n^2$.

## Summation by Parts

**3.41 Theorem** *Given two sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, put*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

*if $n \geq 0$; put $A_{-1} = 0$. Then, if $0 \leq p \leq q$, we have*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \tag{20}$$

*Proof.*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q}(A_n - A_{n-1})b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1}$$

式 (20)，被称为 “部分和式 partial summation formula”，在探索带有 $\Sigma a_n b_n$ 项的级数时非常有用，特别是当 $\{b_n\}$ 是单调的情况下。 □

**Note**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q}(A_n - A_{n-1})b_n \\
&= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} - A_{p-1} b_p \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n + b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p
\end{aligned}$$

其中第 3 步的第三项 $\sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n$ 转换至第四步的过程中，可将 $n$ 视为 $m+1$，那么就有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n &= \sum_{m+1=p}^{q} A_{m+1-1} b_{m+1} \\
&= \sum_{m=p-1}^{q-1} A_m b_{m+1}
\end{aligned}$$

**3.42 Theorem** *Suppose*

*(a) the partial sums $A_n$ of $\Sigma a_n$ form a bounded sequence;*

*(b) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ ;*

*(c)* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

*Then* $\Sigma a_n b_n$ *converges.*

*Proof.*

选取 $M$ 对所有 $n$ 满足 $|A_n| \le M$。给定 $\varepsilon > 0$，存在一个整数 $N$ 使得 $b_N \le (\varepsilon/2M)$。对于 $N \le p \le q$，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-q} b_p\right| \\ &\le M\left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right| \\ &= 2Mb_p \le 2Mb_N \le \varepsilon\end{aligned}$$

收敛现在遵循柯西准则。注意第一个不等式中依赖了 $b_n - b_{n+1} \ge 0$。 □

**3.43 Theorem** *Suppose*

*(a)* $|c_1| \ge |c_2| \ge |c_3| \ge \cdots$;

*(b)* $c_{2m-1} \ge 0,\ c_{2m} \le 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots)$;

*(c)* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

*Then* $\Sigma c_n$ *converges.*

*满足 (b) 的级数也被称为“交错级数 alternating series”；该定理也熟知为莱布尼兹定理。*

*Proof.*

应用 Theorem 3.42，以及 $a_n = (-1)^{n+1}$，$b_n = |c_n|$。 □

**3.44 Theorem** *Suppose the radius of convergence of* $\Sigma c_n z^n$ *is* 1*, and suppose* $c_0 \ge c_1 \ge c_2 \ge \cdots, \lim_{n\to\infty} c_n = 0$. *Then* $\Sigma c_n z^n$ *converges at every point on the circle* $|z| = 1$*, except possibly at* $z = 1$.

*Proof.*

令 $a_n = z^n$，$b_n = c_n$。Theorem 3.42 的假设满足了，因为

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \le \frac{2}{|1 - z|}$$

如果 $|z| = 1$，$z \ne 1$ □

## Absolute Convergence

当级数 $\Sigma|a_n|$ 收敛，那么级数 $\Sigma a_n$ 则被称为绝对收敛。

**3.45 Theorem** *If $\Sigma a_n$ converges absolutely, then $\Sigma a_n$ converges.*

*Proof.*

该声明遵循不等式

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

再加上柯西准则。 □

**Note**

绝对收敛必收敛。

**3.46 Remarks** For series of positive terms, absolute convergence is the same as convergence.

If $\Sigma a_n$ converges, but $\Sigma|a_n|$ diverges, we say that $\Sigma a_n$ converges *non-absolutely.*

## Addition and Multiplication of Series

**3.47 Theorem** *If $\Sigma a_n = A$, and $\Sigma b_n = B$, then $\Sigma(a_n + b_n) = A + B$, and $\Sigma c a_n = cA$, for any fixed $c$.*

*Proof.*

令

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

那么有

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k).$$

又因为 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ 以及 $\lim_{n\to\infty} B_n = B$，可得

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B$$

而第二个声明更简单，此处省略。

因此两个收敛的级数或许可以逐项相加，而得到的级数收敛于两个级数之和。当考虑级数相乘时的情况，则会变得更复杂。这可以有几种方法完成；我们应该考虑“柯西乘法 Cauchy product”。 □

**3.48 Definition** Given $\Sigma a_n$ and $\Sigma b_n$, we put

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

and call $\Sigma c_n$ the *product* of the two given series.

This definition may be motivated as follows. If we take two power series $\Sigma a_n z^n$ and $\Sigma b_n z^n$, multiply them term by term, and collect terms containing the same power of $z$, we get

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\end{aligned}$$

Setting $z = 1$, we arrive at the above definition.

**3.49 Example** If

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

and $A_n \to A$, $B_n \to B$, then it is not at all clear that $\{C_n\}$ will converge to $AB$, since we do not have $C_n = A_n B_n$. The dependence of $\{C_n\}$ on $\{A_n\}$ and $\{B_n\}$ is quite a complicated one (see the proof of Theorem 3.50). We shall now show that the product of two convergent series may actually diverge.

The series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

converges (Theorem 3.43). We form the product of this series with itself and obtain

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ - (\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}) + \cdots\end{aligned}$$

so that

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

Since

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \le \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2$$

we have

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

so that the condition $c_n \to 0$, which is necessary for the convergence of $\Sigma c_n$, is not satisfied.

**Note**

级数 $\Sigma\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 与自身的乘积，以下 $a_n$ 与 $b_n$ 皆为 $\Sigma\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}c_n &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n \\ &= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots \qquad \text{(a)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}}\cdot\frac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}}+(\frac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}}\cdot\frac{(-1)^1}{\sqrt{1+1}}+\frac{(-1)^1}{\sqrt{1+1}}\cdot\frac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}})+ \\ &\quad (\frac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}}\cdot\frac{(-1)^2}{\sqrt{2+1}}+\frac{(-1)^1}{\sqrt{1+1}}\cdot\frac{(-1)^1}{\sqrt{1+1}}+\frac{(-1)^2}{\sqrt{2+1}}\cdot\frac{(-1)^0}{\sqrt{0+1}})+\cdots \\ &= 1-(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}})-(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}) \\ &\quad +\cdots\end{aligned}$$

那么根据 Definition 3.48，

$$\begin{aligned}c_n &= \sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \\ &\geq (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2} \qquad \text{(b)}\end{aligned}$$

那么取绝对值后有

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}$$

显然 $c_n\to 0$ 不成立，那么 $\Sigma c_n$ 则无法收敛（Theorem 3.23）。

注: (a): Definition 3.48 中, $z=1$ 的情况; (b): 根据 $(n-k+1)(k+1)=(\frac{n}{2}+1)^2-(\frac{n}{2}-k)^2\leq(\frac{n}{2}+1)^2$。

**3.50 Theorem** *Suppose*

*(a)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converges absolutely,*

*(b)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$*,*

*(c)* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$*,*

*(d)* $c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$.

*Then*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

*That is, the product of two convergent series converges, and to the right value, if at least one of the two series converges absolutely.*

*Proof.*

令

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \qquad \beta_n = B_n - B$$

那么有

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_nB + \beta_0 \\ &= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 \end{aligned}$$

令

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0$$

我们希望得到 $C_n \to AB$。由于 $A_nB \to AB$，它足够得到

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \tag{21}$$

令

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

【这里用到了 (a)。】给定 $\varepsilon > 0$。根据 (c)，$\beta_n \to 0$。因此我们可以选择 $N$ 使得对于 $n \geq N$ 满足 $|\beta_n| \leq \varepsilon$，其中

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha \end{aligned}$$

保持 $N$ 固定，令 $n \to \infty$，得到

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha$$

因为 $k \to \infty$ 时有 $a_k \to 0$。而 $\varepsilon$ 是随机的，式 (21) 成立。 □

**3.51 Theorem** *If the series $\Sigma a_n, \Sigma b_n, \Sigma c_n$ converge to $A, B, C$, and $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$, then $C = AB$.*

这里没有关于绝对收敛的假设。我们将在 Theorem 8.2 完成之后给到一个简单的证明（其依赖于幂级数的连续性）。

## Rearrangements

**3.52 Definition** Let $\{k_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, be a sequence in which every positive integer appears once and only once (that is, $\{k_n\}$ is a 1-1 function from $\boldsymbol{J}$ onto $\boldsymbol{J}$, in the notation of Definition 2.2). Putting

$$a'_n = a_{k_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

we say that $\Sigma a'_n$ is a **rearrangement** of $\Sigma a_n$.

如果 $\{s_n\}$，$\{s'_n\}$ 分别为 $\Sigma a_n$，$\Sigma a'_n$ 部分和的序列，那么很容易知道这两个序列有完全不同的成员所组成。因此问题就被引导到：在什么条件下，一个收敛级数的所有重排会收敛，以及总和是否一定相同。

**3.53 Example** Consider the convergent series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{22}$$

and one of its rearrangements

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{23}$$

in which two positive terms are always followed by one negative. If $s$ is the sum of (22), then

$$s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Since

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0$$

for $k \geq 1$, we see that $s'_3 < s'_6 < s'_9 < \cdots$, where $s'_n$ is $n$th partial sum of (23). Hence

$$\limsup_{n\to\infty} s'_n > s'_3 = \frac{5}{6}$$

so that (23) certainly does not converge to $s$.

**3.54 Theorem** *Let $\Sigma a_n$ be a series of real numbers which converges, but not absolutely. Suppose*

$$-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$$

*Then there exists a rearrangement $\Sigma a'_n$ with partial sums $s'_n$ such that*

$$\liminf_{n\to\infty} s'_n = \alpha, \qquad \limsup_{n\to\infty} s'_n = \beta. \tag{24}$$

*Proof.*

令

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

那么 $p_n - q_n = a_n$，$p_n + q_n = |a_n|$，$p_n \ge 0$，$q_n \ge 0$。级数 $\Sigma p_n$，$\Sigma q_n$ 必须皆为发散。

如果皆为收敛，那么

$$\Sigma(p_n + q_n) = \Sigma|a_n|$$

将会收敛，这与假设相悖。又因为

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n$$

若 $\Sigma p_n$ 发散而 $\Sigma q_n$ 收敛（或者反过来）说明 $\Sigma a_n$ 发散，同样与假设相悖。

现在令 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 顺序代表 $\Sigma a_n$ 的非负项，令 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ 顺序代表 $\Sigma a_N$ 负数项的绝对值。

级数 $\Sigma P_n, \Sigma Q_n$ 与 $\Sigma p_n, \Sigma q_n$ 仅不同于为零的项，因此是发散的。

接着构建序列 $\{m_n\}, \{k_n\}$ 满足级数

$$\begin{aligned} &P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots \\ &\qquad + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots \end{aligned} \tag{25}$$

即显然是 $\Sigma a_n$ 的重排，满足 (24)。

选择实数序列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 满足 $\alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta, \alpha_n < \beta, \beta_1 > 0$。

令 $m_1, k_1$ 为最小的整数满足

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1;$$

令 $m_2, k_2$ 为最小的整数满足

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2;$$

并持续这个过程。由于 $\Sigma P_n$ 与 $\Sigma Q_n$ 是发散的，因此上述过程成立。

如果 $x_n, y_n$ 代表 (25) 的部分和，其最终项为 $P_{m_n}, -Q_{k_n}$，那么

$$|x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}, \qquad |y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}$$

由于在 $n \to 0$ 时有 $P_n \to 0$ 以及 $Q_n \to 0$，可得 $x_n \to \beta, y_n \to \alpha$。

最后，很明显没有小于 $\alpha$ 或是大于 $\beta$ 的数可以成为 (25) 部分和子序列的极限。 □

**3.55 Theorem** *If $\Sigma a_n$ is a series of complex numbers which converges absolutely, then every rearrangement of $\Sigma a_n$ converges, and they all converge to the same sum.*

*Proof.*

令 $\Sigma a_n'$ 作为重排，其部分和为 $s_n'$。给定 $\varepsilon > 0$，存在一个整数 $N$ 使得 $m \geq n \geq N$ 满足

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \varepsilon \tag{26}$$

选择 $p$ 使得整数 $1, 2, \ldots, N$ 都包含在 $k_1, k_2, \ldots, k_p$ 集中（使用 Definition 3.52）。那么如果 $n > p$，那么 $a_1, \ldots, a_N$ 将取消差值 $s_n - s_n'$，根据 (26) 满足 $|s_n - s_n'| \leq \varepsilon$。因此 $\{s_n'\}$ 与 $\{s_n\}$ 一样收敛。 □

# 4 Continuity

函数与其相关的术语在 Definition 2.1 与 2.2 中有过介绍。尽管我们更应该（在之后的章节中）关注实数与复数函数（例如函数中值为实数或复数），同样讨论向量化值的函数（例如函数的值在 $R^k$ 中）以及在任意的度量空间中的函数。在这些范畴内讨论的定理并不会比仅约束在实数函数中讨论更容易，这例如实际上简化了以及区分了场景，以抛弃不必要的假设并在更适当且普遍的上下文中陈述以及证明定理。

函数定义的领域同样是在度量空间上，适用于不同特化的实例。

## Limits of Functions

**4.1 Definition** Let $X$ and $Y$ be metric spaces; suppose $E \subset X$, $f$ maps $E$ into $Y$, and $p$ is a limit point of $E$. We write $f(x) \to q$ as $x \to p$, or

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{1}$$

if there is a point $q \in Y$ with the following property: For every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \tag{2}$$

for all points $x \in E$ for which

$$0 < d_X(x, p) < \delta \tag{3}$$

此处的 $d_X$ 与 $d_Y$ 分别代表 $X$ 与 $Y$ 中的距离。

如果 $X$ 以及/或者 $Y$ 被替换成实数线，复数平面，或者是欧式空间 $R^k$，那么距离 $d_X, d_Y$ 也被替换为绝对值，或者是距离（详见 Sec 2.16）。

需要注意的是 $p \in X$，这里的 $p$ 需要是上述定义中，非 $E$ 上的任何一点。除此之外，即使如果 $p \in E$，我们很容易得到 $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$。

我们可以将上述定义重新表现为序列的极限形式：

**4.2 Theorem** *Let $X, Y, E, f$, and $p$ be as in Definition 4.1. Then*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4}$$

*if and only if*

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \tag{5}$$

*for every sequence $\{p_n\}$ in $E$ such that*

$$p_n \neq p, \qquad \lim_{n \to \infty} p_n = p \tag{6}$$

*Proof.*

假设 (4) 成立。在 $E$ 中选择 $\{p_n\}$ 满足 (6)。令 $\varepsilon > 0$, 那么如果 $x \in E$ 以及 $0 < d_X(x,p) < \varepsilon$ 存在 $\delta > 0$ 使得 $d_Y(f(x),q) < \varepsilon$。同样的，存在 $N$ 使得 $n > N$ 有 $0 < d_X(p_n,p) < \delta$。因此，对于 $n > N$ 有 $d_Y(f(p_n),q) < \varepsilon$，即证明了 (5) 成立。

相反的，假设 (4) 不成立。那么存在某些 $\varepsilon > 0$，对于每个 $\delta > 0$ 存在一个点 $x \in E$（依赖 $\delta$），满足 $d_Y(f(x),q) \geq \varepsilon$ 但是 $0 < d_X(x,p) < \varepsilon$。选取 $\delta_n = 1/n$ $(n = 1,2,3,\dots)$，因此找到一个在 $E$ 中的序列满足 (6) 而 (5) 却不成立。 □

**Corollary** *If $f$ has a limit at $p$, this limit is unique.*

**4.3 Definition** Suppose we have two complex functions, $f$ and $g$, both defined on $E$. By $f+g$ we mean the function which assigns to each point $x$ of $E$ the number $f(x)+g(x)$. Similarly we define the difference $f-g$, the product $fg$, and the quotient $f/g$ of the two functions, with the understanding that the quotient is defined only at those points $x$ of $E$ at which $g(x) \neq 0$. If $f$ assigns to each point $x$ of $E$ the same number $c$, then $f$ is said to be a constant functions, and if $f(x) \geq g(x)$ for every $x \in E$, we shall sometimes write $f \geq g$, for brevity.

Similarly, if $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$ map $E$ into $R^k$, we define $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ and $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ by

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{g}(x), \qquad (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{f}(x)\cdot\boldsymbol{g}(x);$$

and if $\lambda$ is a real number, $(\lambda\boldsymbol{f}(x)) = \lambda\boldsymbol{f}(x)$.

**4.4 Theorem** *Suppose $E \subset X$, a metric space, $p$ is a limit point of $E$, $f$ and $g$ are complex functions on $E$, and*

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = B.$$

*Then*

*(a)* $\lim_{x\to p}(f+g)(x) = A+B$;

*(b)* $\lim_{x\to p}(fg)(x) = AB$

*(c)* $\lim_{x\to p}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$, *if* $B \neq 0$.

*Proof.*

根据 Theorem 4.2，上述声明遵循了类似序列的属性（Theorem 3.3）。 □

**Remark** 如果 $f$ 与 $g$ 映射 $E$ 至 $R^k$, 那么 (a) 仍然为真, 而 (b) 则变为 (b′) $\lim_{x\to p}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$。

# 5 Differentiation

# 6 The Riemann-Stiltjes Integral

# 7 Sequences and Series of Functions

# 8 Some Special Functions

# 9 Functions of Several Variables

# 10 Integration of Differential Forms

# 11 The Lebesgue Theory