POMA Note

Jacob Xie

January 1, 2023

1 The Real and Complex Number Systems

Ordered Sets

Definition 1.8. Suppose S is an ordered set, $E \subset S$, and E is bounded above. Suppose there exists an $\alpha \in S$ with the following properties:

(i) α is an upper bound of E.

(ii) If $\gamma < \alpha$ the γ is not an upper bound of E.

Then α is called the *least upper bound of E* or the *supremum of E*, and we write

$$\alpha = \sup E$$

The *greatest lower bound*, or *infimum*, of a set E which is bounded below is defined in the same manner: The statement

$$\alpha = \inf E$$

means that α is a lower bound of E and that no β with $\beta > \alpha$ is a lower bound of E.

Note S 是有序集合的情况下，E 又是属于 S 的，并且 E 拥有上界。那么只会存在一个 α 是 E 的最小上界。同理如果是 E 拥有下界，只会存在一个 α 是 E 的最大下界。发音：Supremum [suːˈpriːməm]；Infimum [ˈɪnfaɪməm]。

Definition 1.10. An ordered set S is said to have the *least-upper-bound property* if the following is true: If $E \subset S$, E is not empty, and E is bounded above, then $\sup E$ exists in S.

Note S 中存在 $E \subset S$，且 E 具有最小上界，那么 S 就具有最小上界性，反之亦然。

Theorem 1.11. *Suppose S is an ordered set with the least-upper-bound property, $B \subset S$, B is not empty, and B is bounded below. Let L be the set of all lower bounds of B. Then $\alpha = \sup L$ exists in S, and $\alpha = \inf B$. In particular, $\inf B$ exists in S.*

Proof.

因为 B 是有下界的，且 L 不为空。由于 L 包含了所有的 y（$y \in S$）且满足不等式 $y \leq x$（$x \in B$），那么所有的 $x \in B$ 都是 L 的上界。因此 L 是有上界的。关于 S 的假设意为在 S 中有一个 L 的最小上界，被称为 α。

如果 $\gamma < \alpha$ 那么（根据定义 1.8）γ 并不是 L 的一个上界，因此 $\gamma \notin B$。对于所有的 $x \in B$ 都有 $\alpha \leq x$。因此 $\alpha \in L$。

如果 $\alpha < \beta$ 那么 $\beta \notin L$，因为 α 是 L 的一个上界。

我们展示过了 $\alpha \in L$ 但是 $\beta \notin L$ 而 $\beta > \alpha$ 的情况。也就是说，α 是 B 的一个下界，但是当 $\beta > \alpha$ 时 β 却不是。这就意味着 $\alpha = \inf B$。 □

Fields

Definition 1.12. A field is a set F with two operations, called *addition* and *multiplication*, which satisfy the following so-called "field axioms" (A), (M), and (D):

(A) Axioms for addition

(A1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their sum $x + y$ is in F.

(A2) Addition is commutative: $x + y = y + x$ for all $x, y \in F$.

(A3) Addition is associative: $(x + y) + z = x + (y + z)$ for all $x, y, z \in F$.

(A4) F contains an element 0 such that $0 + x = x$ for every $x \in F$.

(A5) To every $x \in F$ corresponds an element $-x \in F$ such that $x + (-x) = 0$.

(M) Axioms for multiplication

(M1) If $x \in F$ and $y \in F$, then their product xy is in F.

(M2) Multiplication is commutative: $xy = yx$ for all $x, y \in F$.

(M3) Multiplication is associative: $(xy)z = x(yz)$ for all $x, y, z \in F$.

(M4) F contains an element $1 \neq 0$ such that $1x = x$ for every $x \in F$.

(M5) If $x \in F$ and $x \neq 0$ then there exists an element $\frac{1}{x} \in F$ such that $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$.

(D) The distributive law

$x(y + z) = xy + xz$ holds for all $x, y, z \in F$.

Note 域的定义：维基百科。

Definition 1.17. An *ordered field* is a field F which is also an ordered set, such that:

1. $x + y < x + z$ if $x, y, z \in F$ and $y < z$,
2. $xy > 0$ if $x \in F$, $y \in F$, $x > 0$, and $y > 0$.

如果 $x > 0$，我们称 x 为 *positive*；如果 $x < 0$，x 则为 *negative*。

The Real Field

Theorem 1.19. *There exists an ordered field R which has the least-upper-bound property. Moreover, R contains Q as a subfield.*

第二个声明意味着 $Q \subset R$ 以及加法与乘法在 R 上的运算，当应用于 Q 的成员时，与有理数的通常操作重合；同样的，正有理数成员是 R 的正元素。

R 的成员被称为 *real numbers*，即实数。

Theorem 1.20.

(a) *If $x \in R$, $y \in R$, and $x > 0$, then there is a positive integer n such that $nx > y$.*

(b) *If $x \in R$, $y \in R$, and $x < y$, then there exists a $p \in Q$ such that $x < p < y$.*

对于 (a) 部分通常认为是 R 具有 *archimedean property*，即阿基米德性质，详见维基百科。(b) 部分则表明 Q 是在 R 中 *dense*，即具有稠密性：在任意两个实数之间有一个有理数。

Proof.

(a) 令 A 作为所有 nx 的集合，其中 n 为所有的正整数。如果 (a) 是错误的，那么 y 则会是 A 的一个上界。但是接着 A 会在 R 中拥有一个最小上界，即 $\alpha = \sup A$。由于 $x > 0$，$\alpha - x < \alpha$，以及 $\alpha - x$ 不是 A 的上界，因此 $\alpha - x < mx$ 对于某些正整数 m 成立。但是这样就会有 $\alpha < (m+1)x \in A$，这是不可能的，因为 α 是 A 的上界。

(b) 因为 $x < y$，$y - x > 0$ 以及由 (a) 所知一个正整数 n 满足

$$n(y-x) > 1$$

再次应用 (a)，获取正整数 m_1 与 m_2 满足 $m_1 > nx$，$m_2 > -nx$，那么

$$-m_2 < nx < m_1$$

因此会有一个整数 m（$-m_2 \leq m \leq m_1$）满足

$$m - 1 \leq nx \leq m$$

如果我们结合这些不等式，则会得到

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

因为 $n > 0$，它遵循

$$x < \frac{m}{n} < y$$

通过 $p = \frac{m}{n}$ 证明了 (b)。

∎

Note (b) 的第一步将 $y-x$ 作为整体，将 (a) $nx>y$ 中的 x 替换为 $y-x$，y 替换为 1。同理对于整数 m_1 与 m_2 而言，可分别将 nx 与 $-nx$ 视为不等式右侧的 y，而不等式左侧的 x 视为 1，那么就有了 $m_1\cdot 1>nx$ 与 $m_2\cdot 1>-nx$。对于整数 m 的 $-m_2\leq m\leq m_1$ 最坏的情况可将 $-m_2$ 与 m_1 视为相邻的整数，比如说 1 和 2，那么当 m 取值为 2 时视为 $2-1\leq nx<2$，满足 $m-1\leq nx<m$。最后根据有理数的定义 $p=m/n\ m,n\in Q$ 可以得出 x 与 y 之间一定存在一个有理数。

Theorem 1.21. *For every real $x>0$ and every integer $n>0$ there is one and only one positive real y such that $y^n=x$.*

这个 y 数可以被写作 $\sqrt[n]{x}$ 或是 $x^{\frac{1}{n}}$。

Proof.

对于至多存在一个 y 的论证很简单，因为 $0<y_1<y_2$ 意味着 $y_1^n<y_2^n$。

令 E 为所有满足 $t^n<x$ 的正实数 t 的集合。

如果 $t=x/(1+x)$ 那么 $0\leq t<1$，那么 $t^n\leq t<x$。因此 $t\in E$，且 E 不为空。

如果 $t>1+x$ 那么 $t^n\geq t>x$，所以 $t\notin E$。因此 $1+x$ 是 E 的一个上界。

所以根据 Theorem 1.19 得出，存在一个

$$y=\sup E$$

而证明 $y^n=x$ 我们需要展示不等式 $y^n<x$ 与 $y^n>x$ 皆会导致矛盾。

当 $0<a<b$ 时，等式 $b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})$ 得出不等式

$$b^n-a^n<(b-a)nb^{n-1}$$

假设 $y^n<x$。选择 h 使得 $0<h<1$ 且

$$h<\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

令 $a=y$，$b=y+h$，那么就有

$$(y+h)^n-y^n<hn(y+h)^{n-1}<hn(y+1)^{n-1}<x-y^n$$

因此 $(y+h)^n<x$，且 $y+h\in E$。因为 $y+h>y$，这与 y 是 E 的一个上界相矛盾。

假设 $y^n>x$。令

$$k=\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}$$

那么 $0<k<y$。如果 $t\geq y-k$，我们得出以下结论：

$$y^n-t^n\leq y^n-(y-k)^n\leq kny^{n-1}=y^n-x$$

因此 $t^n>x$，且 $t\notin E$。它遵循 $y-k$ 是 E 的一个上界。

但是因为 $y-k<y$，其与 y 是 E 的最小上界的事实相矛盾。

因此 $y^n=x$，证明完成。 □

Note 至多存在一个 y 换个角度也就是说但凡有第二个 y 使得 $y_1^n = y_2^n$，那么 $y_1 = y_2$。
等式

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

左侧可以视为

$$(b-a)(b^{n-1} + b^{n-1}\frac{a}{b} + \cdots + b^{n-1}\frac{a}{b^{n-1}})$$

提取 b^{n-1} 后得

$$(b-a)b^{n-1}(1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}})$$

由于有 $0 < a < b$ 这么一个前提，可以将第三项变为

$$1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

因此可得不等式

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

至于在证明 $y^n < x$ 不成立时，选择 h 的 $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ 分母为什么是 $n(y+1)^{n-1}$，是因为这是为了之后处理不等式而特意设置的消除项（这里利用了函数 $f(x) = x^n$ 是连续的事实，也就是说分母一定也是实数，那么就可以将 h 视为小于某实数）；同样的在证明 $y^n > x$ 时的 k 也是如此。

Corollary. *If a and b are positive real numbers and n is a positive integer, then*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$$

Proof.

令 $\alpha = a^{1/n}$，$\beta = b^{1/n}$，那么有

$$ab = \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n$$

而乘法是符合交换律的，因此

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}$$

□

The Extended Real Number System

WIP

The Complex Field

WIP

Euclidean Spaces

WIP

2 Basic Topology

3 Numerical Sequences and Series

4 Continuity

5 Differentiation

6 The Riemann-Stiltjes Integral

7 Sequences and Series of Functions

8 Some Special Functions

9 Functions of Several Variables

10 Integration of Differential Forms

11 The Lebesgue Theory