

# Study Notes of Principles of Mathematical Analysis

Jacob Xie

January 1, 2023

# 1 The Real and Complex Number Systems

## Ordered Sets

**Definition 1.7.** Suppose  $S$  is an ordered set,  $E \subset S$ , and  $E$  is bounded above. Suppose there exists an  $\alpha \in S$  with the following properties:

- (i)  $\alpha$  is an upper bound of  $E$ .
- (ii) If  $\gamma < \alpha$  then  $\gamma$  is not an upper bound of  $E$ .

Then  $\alpha$  is called the *least upper bound of  $E$*  or the *supremum of  $E$* , and we write

$$\alpha = \sup E$$

The *greatest lower bound*, or *infimum*, of a set  $E$  which is bounded below is defined in the same manner: The statement

$$\alpha = \inf E$$

means that  $\alpha$  is a lower bound of  $E$  and that no  $\beta$  with  $\beta > \alpha$  is a lower bound of  $E$ .

**Note**  $S$  是有序集合的情况下,  $E$  又是属于  $S$  的, 并且  $E$  拥有上界。那么只会存在一个  $\alpha$  是  $E$  的最小上界。同理如果是  $E$  拥有下界, 只会存在一个  $\alpha$  是  $E$  的最大下界。发音: Supremum [su:'pri:məm]; Infimum ['ɪnfɪməm]。

**Definition 1.10.** An ordered set  $S$  is said to have the *least-upper-bound property* if the following is true: If  $E \subset S$ ,  $E$  is not empty, and  $E$  is bounded above, then  $\sup E$  exists in  $S$ .

**Note**  $S$  中存在  $E \subset S$ , 且  $E$  具有最小上界, 那么  $S$  就具有最小上界性, 反之亦然。

**Theorem 1.11.** Suppose  $S$  is an ordered set with the least-upper-bound property,  $B \subset S$ ,  $B$  is not empty, and  $B$  is bounded below. Let  $L$  be the set of all lower bounds of  $B$ . Then  $\alpha = \sup L$  exists in  $S$ , and  $\alpha = \inf B$ . In particular,  $\inf B$  exists in  $S$ .

*Proof.*

因为  $B$  是有下界的, 且  $L$  不为空。由于  $L$  包含了所有的  $y$  ( $y \in S$ ) 且满足不等式  $y \leq x$  ( $x \in B$ ), 那么所有的  $x \in B$  都是  $L$  的上界。因此  $L$  是有上界的。关于  $S$  的假设意为在  $S$  中有一个  $L$  的最小上界, 被称为  $\alpha$ 。

如果  $\gamma < \alpha$  那么 (根据 Definition 1.8)  $\gamma$  并不是  $L$  的一个上界, 因此  $\gamma \notin L$ 。对于所有的  $x \in B$  都有  $\alpha \leq x$ 。因此  $\alpha \in L$ 。

如果  $\alpha < \beta$  那么  $\beta \notin L$ , 因为  $\alpha$  是  $L$  的一个上界。

我们展示过了  $\alpha \in L$  但是  $\beta \notin L$  而  $\beta > \alpha$  的情况。也就是说,  $\alpha$  是  $B$  的一个下界, 但是当  $\beta > \alpha$  时  $\beta$  却不是。这就意味着  $\alpha = \inf B$ 。  $\square$

## Fields

**Definition 1.12.** A field is a set  $F$  with two operations, called *addition* and *multiplication*, which satisfy the following so-called "field axioms" (A), (M), and (D):

### (A) Axioms for addition

- (A1) If  $x \in F$  and  $y \in F$ , then their sum  $x + y$  is in  $F$ .
- (A2) Addition is commutative:  $x + y = y + x$  for all  $x, y \in F$ .
- (A3) Addition is associative:  $(x + y) + z = x + (y + z)$  for all  $x, y, z \in F$ .
- (A4)  $F$  contains an element  $0$  such that  $0 + x = x$  for every  $x \in F$ .
- (A5) To every  $x \in F$  corresponds an element  $-x \in F$  such that  $x + (-x) = 0$ .

### (M) Axioms for multiplication

- (M1) If  $x \in F$  and  $y \in F$ , then their product  $xy$  is in  $F$ .
- (M2) Multiplication is commutative:  $xy = yx$  for all  $x, y \in F$ .
- (M3) Multiplication is associative:  $(xy)z = x(yz)$  for all  $x, y, z \in F$ .
- (M4)  $F$  contains an element  $1 \neq 0$  such that  $1x = x$  for every  $x \in F$ .
- (M5) If  $x \in F$  and  $x \neq 0$  then there exists an element  $\frac{1}{x} \in F$  such that  $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$ .

### (D) The distributive law

$$x(y + z) = xy + xz \text{ holds for all } x, y, z \in F.$$

**Note** 域的定义： 维基百科。

**Definition 1.17.** An *ordered field* is a field  $F$  which is also an ordered set, such that:

1.  $x + y < x + z$  if  $x, y, z \in F$  and  $y < z$ ,
2.  $xy > 0$  if  $x \in F, y \in F, x > 0$ , and  $y > 0$ .

如果  $x > 0$ , 我们称  $x$  为 *positive*; 如果  $x < 0$ ,  $x$  则为 *negative*。

## The Real Field

**Theorem 1.19.** *There exists an ordered field  $R$  which has the least-upper-bound property. Moreover,  $R$  contains  $Q$  as a subfield.*

第二个声明意味着  $Q \subset R$  以及加法与乘法在  $R$  上的运算, 当应用于  $Q$  的成员时, 与有理数的通常操作重合; 同样的, 正有理数成员是  $R$  的正元素。

$R$  的成员被称为 *real numbers*, 即实数。

**Theorem 1.20.**

(a) *If  $x \in R$ ,  $y \in R$ , and  $x > 0$ , then there is a positive integer  $n$  such that  $nx > y$ .*

(b) *If  $x \in R$ ,  $y \in R$ , and  $x < y$ , then there exists a  $p \in Q$  such that  $x < p < y$ .*

对于 (a) 部分通常认为是  $R$  具有 *archimedean property*, 即阿基米德性质, 详见维基百科。  
(b) 部分则表明  $Q$  是在  $R$  中 *dense*, 即具有稠密性: 在任意两个实数之间有一个有理数。

*Proof.*

(a) 令  $A$  作为所有  $nx$  的集合, 其中  $n$  为所有的正整数。如果 (a) 是错误的, 那么  $y$  则会是  $A$  的一个上界。但是接着  $A$  会在  $R$  中拥有一个最小上界, 即  $\alpha = \sup A$ 。由于  $x > 0$ ,  $\alpha - x < \alpha$ , 以及  $\alpha - x$  不是  $A$  的上界, 因此  $\alpha - x < mx$  对于某些正整数  $m$  成立。但是这样就会有  $\alpha < (m+1)x \in A$ , 这是不可能的, 因为  $\alpha$  是  $A$  的上界。

(b) 因为  $x < y$ ,  $y - x > 0$  以及由 (a) 所知一个正整数  $n$  满足

$$n(y - x) > 1$$

再次应用 (a), 获取正整数  $m_1$  与  $m_2$  满足  $m_1 > nx$ ,  $m_2 > -nx$ , 那么

$$-m_2 < nx < m_1$$

因此会有一个整数  $m$  ( $-m_2 \leq m \leq m_1$ ) 满足

$$m - 1 \leq nx \leq m$$

如果我们结合这些不等式, 则会得到

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

因为  $n > 0$ , 它遵循

$$x < \frac{m}{n} < y$$

通过  $p = \frac{m}{n}$  证明了 (b)。

□

**Note** (b) 的第一步将  $y - x$  作为整体, 将 (a)  $nx > y$  中的  $x$  替换为  $y - x$ ,  $y$  替换为 1。同理对于整数  $m_1$  与  $m_2$  而言, 可分别将  $nx$  与  $-nx$  视为不等式右侧的  $y$ , 而不等式左侧的  $x$  视为 1, 那么就有了  $m_1 \cdot 1 > nx$  与  $m_2 \cdot 1 > -nx$ 。对于整数  $m$  的  $-m_2 \leq m \leq m_1$  最坏的情况可将  $-m_2$  与  $m_1$  视为相邻的整数, 比如说 1 和 2, 那么当  $m$  取值为 2 时视为  $2 - 1 \leq nx < 2$ , 满足  $m - 1 \leq nx < m$ 。最后根据有理数的定义  $p = m/n$   $m, n \in \mathbb{Q}$  可以得出  $x$  与  $y$  之间一定存在一个有理数。

**Theorem 1.21.** For every real  $x > 0$  and every integer  $n > 0$  there is one and only one positive real  $y$  such that  $y^n = x$ .

这个  $y$  数可以被写作  $\sqrt[n]{x}$  或是  $x^{\frac{1}{n}}$ 。

*Proof.*

对于至多存在一个  $y$  的论证很简单, 因为  $0 < y_1 < y_2$  意味着  $y_1^n < y_2^n$ 。

令  $E$  为所有满足  $t^n < x$  的正实数  $t$  的集合。

如果  $t = x/(1+x)$  那么  $0 \leq t < 1$ , 那么  $t^n \leq t < x$ 。因此  $t \in E$ , 且  $E$  不为空。

如果  $t > 1+x$  那么  $t^n \geq t > x$ , 所以  $t \notin E$ 。因此  $1+x$  是  $E$  的一个上界。

所以根据 Theorem 1.19 得出, 存在一个

$$y = \sup E$$

而证明  $y^n = x$  我们需要展示不等式  $y^n < x$  与  $y^n > x$  皆会导致矛盾。

当  $0 < a < b$  时, 等式  $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$  得出不等式

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

假设  $y^n < x$ 。选择  $h$  使得  $0 < h < 1$  且

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

令  $a = y$ ,  $b = y + h$ , 那么就有

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

因此  $(y+h)^n < x$ , 且  $y+h \in E$ 。因为  $y+h > y$ , 这与  $y$  是  $E$  的一个上界相矛盾。

假设  $y^n > x$ 。令

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$$

那么  $0 < k < y$ 。如果  $t \geq y - k$ , 我们得出以下结论:

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \leq kny^{n-1} = y^n - x$$

因此  $t^n > x$ , 且  $t \notin E$ 。它遵循  $y-k$  是  $E$  的一个上界。

但是因为  $y-k < y$ , 其与  $y$  是  $E$  的最小上界的事实相矛盾。

因此  $y^n = x$ , 证明完成。 □

**Note** 至多存在一个  $y$  换个角度也就是说但凡有第二个  $y$  使得  $y_1^n = y_2^n$ , 那么  $y_1 = y_2$ 。  
等式

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

左侧可以视为

$$(b - a)(b^{n-1} + b^{n-1}\frac{a}{b} + \cdots + b^{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}})$$

提取  $b^{n-1}$  后得

$$(b - a)b^{n-1}(1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}})$$

由于有  $0 < a < b$  这么一个前提, 可以将第三项变为

$$1 + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

因此可得不等式

$$b^n - a^n < (b - a)nb^{n-1}$$

至于在证明  $y^n < x$  不成立时, 选择  $h$  的  $h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$  分母为什么是  $n(y+1)^{n-1}$ , 是因为这是为了之后处理不等式而特意设置的消除项 (这里利用了函数  $f(x) = x^n$  是连续的事实, 也就是说分母一定也是实数, 那么就可以将  $h$  视为小于某实数); 同样的在证明  $y^n > x$  时的  $k$  也是如此。

**Corollary.** *If  $a$  and  $b$  are positive real numbers and  $n$  is a positive integer, then*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$$

*Proof.*

令  $\alpha = a^{1/n}$ ,  $\beta = b^{1/n}$ , 那么有

$$ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n$$

而乘法是符合交换律的, 因此

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}$$

□

## The Extended Real Number System

**Definition 1.23.** The extended real number system consists of the real field  $R$  and two symbols,  $+\infty$  and  $-\infty$ . We preserve the original order in  $R$ , and define

$$-\infty < x < +\infty$$

for every  $x \in R$ .

可以清楚的知道  $+\infty$  是所有衍生的实数系统子集的一个上界, 且每个非空子集都有一个最小上界。如果  $E$  是一个实数的非空集合, 且没有上界在  $R$  中, 那么  $\sup E = +\infty$  在衍生实数系统中。

下界同理。

衍生实数系统并不形成一个域, 但它形成了一下惯例:

(a) 如果  $x$  是实数则

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$$

(b) 如果  $x > 0$  则  $x \cdot (+\infty) = +\infty, x \cdot (-\infty) = -\infty$

(c) 如果  $x < 0$  则  $x \cdot (+\infty) = -\infty, x \cdot (-\infty) = +\infty$

## The Complex Field

**Definition 1.24.** A *complex number* is an ordered pair  $(a, b)$  of real numbers. "Ordered" means that  $(a, b)$  and  $(b, a)$  are regarded as distinct if  $a \neq b$ .

令  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  为两个复数。当且仅当  $a = c$  以及  $b = d$  时有  $x = y$ 。(注意该定义并非是完全不必要的; 考虑有理数的等式, 表现为整数的商。) 我们定义:

$$x + y = (a + c, b + d)$$

$$xy = (ac - bd, ad + bc)$$

**Note** 作为补充 (详见该篇文章), 对于任意两个复数  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  的四则运算:

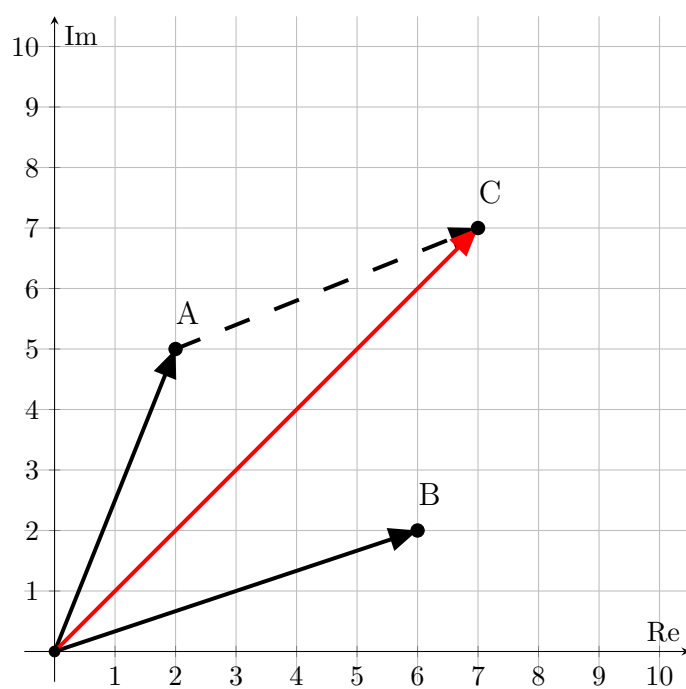
$$(1) \quad x + y = (a + c) + i(b + d)$$

$$(2) \quad x - y = (a - c) + i(b - d)$$

$$(3) \quad xy = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$$

$$(4) \quad \frac{x}{y} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

首先, 对于任意一个复数  $z = a + ib$ , 可以用复平面上的一点来表示, 那么复数加减法可以通过向量来理解:

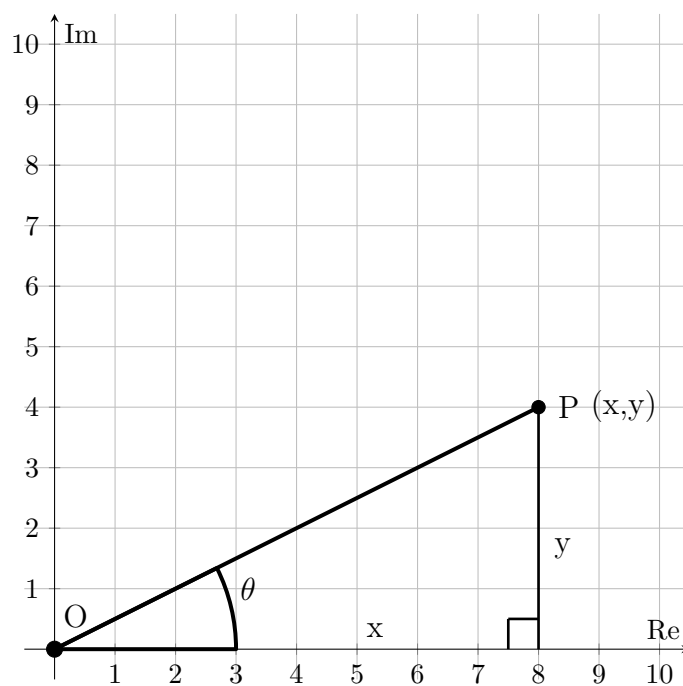


而对于复数的乘除法，需要先引入复数在极坐标上的几何意义 – 对于任意一个复数  $z = a + ib$  用极坐标来表示：





那么复数的三角表示为:



这里将  $OP$  的长度作为复数  $z$  的模 (Modulus), 用  $|z|$  表示; 而角  $\theta$  为复数  $z$  的幅角 (Ar-

gument), 用  $\arg(z)$  表示。那么复数的三角表示为:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

接下来是复数乘法的几何意义, 使用复数的三角形式计算下列两个复数的乘积:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

那么有:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \end{aligned}$$

那么根据三角和差公式:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

可以发现  $z_1 \cdot z_2$  计算后模为两个复数模的乘积  $|z_1||z_2|$ , 幅角为两个复数幅角之和  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ 。因此复数的乘积可以理解**为拉伸与旋转**。例如:



因为

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

所以  $z_1 z_2$  的模长为  $\sqrt{2}$  且幅角为  $\frac{3\pi}{4}$ 。而复数的除法只需要将除法写成乘法形式即可

$$\begin{aligned} z^{-1} &= (r(\cos \theta + i \sin \theta))^{-1} \\ &= r^{-1} \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \\ &= r^{-1} \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} \\ &= r^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$

那么两个复数

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{aligned}$$

的除法便是

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1) \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

因此,  $\frac{z_1}{z_2}$  的模长为两个模相除  $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ , 幅角为  $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ 。所以复数的除法也可以理解为**拉伸与旋转**。

综上所述, 复数的加减法就是向量的加减法, 乘除法就是拉伸与旋转变换。

**Theorem 1.25.** *These definitions of addition and multiplication turn the set of all complex numbers into a field, with  $(0, 0)$  and  $(1, 0)$  in the role of 0 and 1.*

*Proof.*

我们简单的验证一下域的公理 (Definition 1.12), 使用  $R$  的域结构。令  $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$ 。

(A1) 很清楚。

$$(A2) \quad x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$$

$$\begin{aligned} (A3) \quad (x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

$$(A4) \quad x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x$$

$$(A5) \quad \text{令 } -x = (-a, -b), \text{ 那么 } x + (-x) = (0, 0) = 0$$

(M1) 很清楚。

$$(M2) \quad xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = yx$$

$$\begin{aligned} (M3) \quad (xy)z &= (ac - db, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bef, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= x(yz) \end{aligned}$$

$$(M4) \quad 1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x$$

(M5) 如果  $x \neq 0$  那么  $(a, b) \neq (0, 0)$ , 也就是说  $a$  和  $b$  至少有一个实数不等于 0。因此  $a^2 + b^2 > 0$ , 根据 Proposition 1.18(d), 我们可以定义

$$\frac{1}{x} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

那么

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a, b) \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1$$

$$\begin{aligned} (D) \quad x(y + z) &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= xy + yz \end{aligned}$$

□

**Theorem 1.26.** *For any real numbers  $a$  and  $b$  we have*

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

**Definition 1.27.**  $i = (0, 1)$

**Theorem 1.28.**  $i^2 = -1$

*Proof.*

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

□

**Theorem 1.29.** *If  $a$  and  $b$  are real, then  $(a, b) = a + bi$*

*Proof.*

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

□

**Definition 1.30.** If  $a, b$  are real and  $z = a + bi$ , then the complex number  $\bar{z} = a - bi$  is called the *conjugate* of  $z$ . The numbers  $a$  and  $b$  are the *real part* and the *imaginary part* of  $z$ , respectively. We shall occasionally write

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

**Theorem 1.31.** If  $z$  and  $w$  are complex, then

- (a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- (b)  $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (c)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- (d)  $z\bar{z}$  is real and positive (except when  $z = 0$ )

**Definition 1.32.** If  $z$  is a complex number, its absolute value  $|z|$  is the non-negative square root of  $z\bar{z}$ ; that is,  $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ .

$|z|$  的存在 (以及唯一性) 遵循 Theorem 1.12 以及 Theorem 1.31 (d)。

注意当  $x$  为实数时, 那么  $\bar{x} = x$ , 因此  $|x| = \sqrt{x^2}$ 。所以如果  $x \geq 0$  时  $|x| = x$ , 如果  $x < 0$  时  $|x| = -x$ 。

**Theorem 1.33.** Let  $z$  and  $w$  be complex numbers. Then

- (a)  $|z| > 0$  unless  $z = 0, |0| = 0$
- (b)  $|\bar{z}| = |z|$
- (c)  $|zw| = |z||w|$
- (d)  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$
- (e)  $|z + w| \leq |z| + |w|$

*Proof.*

(a) 与 (b) 不足为道。令  $z = a + bi$ ,  $w = c + di$ , 其  $a, b, c, d$  皆为实数。那么

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$$

即  $|zw|^2 = (|z||w|)^2$ 。(c) 遵循 Theorem 1.21 所声明的唯一性。

证明 (d), 有  $a^2 \leq a^2 + b^2$ , 因此

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

证明 (e), 有  $\bar{z}w$  与  $z\bar{w}$  是共轭的, 因此  $\bar{z}w + z\bar{w} = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$ 。因此

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

两边开根号后即可得 (e)。 □

**Note** 计算中第一步的  $|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$  是将  $z + w$  视为整体, 并使用了 Definition 1.32 中的  $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$  转换为  $(z + w)(\bar{z} + \bar{w})$ , 而又因为 Theorem 1.31 (a) 可将第二项变为  $(\bar{z} + \bar{w})$ ; 而第三步到第四步的不等式则利用了 Theorem 1.33 (d), 即  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ ; 第四步到第五步则使用了 Theorem 1.33 (c), 即  $|zw| = |z||w|$ 。

**Notation 1.34.** If  $x_1, \dots, x_n$  are complex numbers, we write

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j$$

我们用一个重要的不等式来结束本节, 它通常被称为 *Schwarz inequality*。

**Theorem 1.35.** If  $a_1, \dots, a_n$  and  $b_1, \dots, b_n$  are complex numbers, then

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2$$

*Proof.*

令  $A = \sum |a_j|^2$ ,  $B = \sum |b_j|^2$ ,  $C = \sum a_j \bar{b}_j$ , 本证明中  $j$  取值  $1, \dots, n$ 。如果  $B = 0$ , 那么就有  $b_1 = \dots = b_n = 0$ , 那么结论很清楚。因此假设  $B > 0$ 。根据 Theorem 1.31 有

$$\begin{aligned} \sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum (Ba_j - Cb_j)(B\bar{a}_j - \overline{Cb_j}) \\ &= B^2 \sum |a_j|^2 - B\bar{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \bar{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2) \end{aligned}$$

因为在首次求和的每个项都是非负的, 可以知道

$$B(AB - |C|^2) \geq 0$$

又因为  $B > 0$ , 它遵循  $AB - |C|^2 \geq 0$ 。它便是预期的不等式。  $\square$

**Note**  $|Ba_j - Cb_j|^2$  为构造项, 将其中  $Ba_j - Cb_j$  视为整体根据 Definition 1.32, 可转换为  $(Ba_j - Cb_j)(\overline{Ba_j - Cb_j})$ , 而后者根据 Theorem 1.31 即可写为  $B\bar{a}_j - \overline{Cb_j}$  (这里  $B = \sum |b_j|^2$  的共轭还是其本身); 根据乘法分配律得出第二步后, 将之前设定的  $A, B, C$  带入即可得出  $B(AB - |C|^2)$ ; 最后根据起始的构造项  $|Ba_j - Cb_j|^2$  必然非负以及之前假设的  $B > 0$  可以得出  $AB - |C|^2 \geq 0$ ; 将  $A, B, C$  原本代表的值带入, 即  $\sum |a_j|^2 \sum |b_j|^2 - |\sum a_j \bar{b}_j| \geq 0$ 。

## Euclidean Spaces

**Definition 1.36.** For each positive integer  $k$ , let  $R^k$  be the set of all ordered  $k$ -tuples

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

where  $x_1, \dots, x_k$  are real numbers, called the *coördinates* of  $\mathbf{x}$ . The elements of  $R^k$  are called points, or vectors, especially when  $k > 1$ . We shall denote vectors by boldfaced letters. If  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$  and if  $\alpha$  is a real number, put

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_k)$$

so that  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R^k$  and  $\alpha \mathbf{x} \in R^k$ . This defines addition of vectors, as well as multiplication of a vector by a real number (a scalar). These two operations satisfy the commutative, associative, and distributive laws (the proof is trivial, in view of the analogous for the real numbers) and make  $R^k$  into a *vector space over the real field*. The zero element of  $R^k$  (sometimes called the *origin* or the *null vector*) is the point  $\mathbf{0}$ , all of whose coördinates are 0.

We also define the so-called “inner product” (or scalar product) of  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$  by

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k x_i y_i$$

and the *norm* of  $\mathbf{x}$  by

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^k x_i^2 \right)^{1/2}$$

The structure now defined (the vector space  $R^k$  with the above inner product and norm) is called euclidean  $k$ -space.

**Theorem 1.37.** Suppose  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^k$ , and  $\alpha$  is real. Then

- (a)  $|\mathbf{x}| \geq 0$ ;
- (b)  $|\mathbf{x}| = 0$  if and only if  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- (c)  $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha| |\mathbf{x}|$ ;
- (d)  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ ;
- (e)  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ ;
- (f)  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$

*Proof.*

前三项不必赘述，而 (d) 是 Schwarz 不等式的间接结论。通过 (d) 可以有

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\ &\leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \\ &= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 \end{aligned}$$

这样 (e) 就被证明了。最后替换 (e) 中的  $\mathbf{x}$  为  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  以及  $\mathbf{y}$  为  $\mathbf{y} - \mathbf{z}$  (f) 可以得出 (f)。  $\square$

*Remark 1.38.* Theorem 1.37 (a), (b), and (f) will allow us (see Chap. 2) to regard  $R^k$  as a metric space.

$R^1$  (the set of all real numbers) is usually called the line, or the real line. Likewise,  $R^2$  is called the plane, or the complex plane (compare Definitions 1.24 and 1.36). In these two cases the norm is just the absolute value of the corresponding real or complex number.



## 2 Basic Topology

### Finite, Countable, and Uncountable Sets

本节由函数概念的定义开始。

**Definition 2.1.** Consider two sets  $A$  and  $B$ , whose elements may be any objects whatsoever, and suppose that with each element  $x$  of  $A$  there is associated, in some manner, an element of  $B$ , which we denote by  $f(x)$ . Then  $f$  is said to be a *function* from  $A$  to  $B$  (or a *mapping* of  $A$  into  $B$ ). The set  $A$  is called the *domain* of  $f$  (we also say  $f$  is defined on  $A$ ), and the elements  $f(x)$  are called the *values* of  $f$ . The set of all values of  $f$  is called the *range* of  $f$ .

**Definition 2.2.** Let  $A$  and  $B$  be two sets and let  $f$  be a mapping of  $A$  into  $B$ . If  $E \subset A$ ,  $f(E)$  is defined to be the set of all elements  $f(x)$ , for  $x \in E$ . We call  $f(E)$  the *image* of  $E$  under  $f$ . In this notation,  $f(A)$  is the range of  $f$ . It is clear that  $f(A) \subset B$ . If  $f(A) = B$ , we say that  $f$  maps  $A$  *onto*  $B$ . (Note that, according to this usage, *onto* is more specific than *into*.)

If  $E \subset B$ ,  $f^{-1}(E)$  denotes the set of all  $x \in A$  such that  $f(x) \in E$ . We call  $f^{-1}(E)$  the *inverse image* of  $E$  under  $f$ . If  $y \in B$ ,  $f^{-1}(y)$  is the set of all  $x \in A$  such that  $f(x) = y$ . If, for each  $y \in B$ ,  $f^{-1}(y)$  consists of at most one element of  $A$ , then  $f$  is said to be a 1-1 (*one-to-one*) mapping of  $A$  into  $B$ . This may also be expressed as follows:  $f$  is a 1-1 mapping of  $A$  into  $B$  provided that  $f(x_1) \neq f(x_2)$  whenever  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1 \in A$ ,  $x_2 \in A$ .

(The notation  $x_1 \neq x_2$  means that  $x_1$  and  $x_2$  are distinct elements; otherwise we write  $x_1 = x_2$ .)

**Note** 简单来说:

1.  $f(E)$  是集合  $E$  通过  $f$  得到的像 (image)。
2.  $f(A)$  是  $f$  的范围。
3. 如果  $f(A) = B$ , 那么称  $f$  将  $A$  完全映射至 (onto)  $B$ 。
4. 而当  $E \subset B$  且  $x \in A$  时, 反函数  $f^{-1}(E)$  是集合  $E$  通过  $f$  得到的反像 (inverse image)。
5.  $\forall x \in A$  通过  $f$  映射后且满足  $\forall f(x) \in B$  被称为一一映射 (1-1 mapping)。

**Definition 2.3.** If there exists a 1-1 mapping of  $A$  onto  $B$ , we say that  $A$  and  $B$  can be put in 1-1 *correspondence*, or that  $A$  and  $B$  have the same *cardinal number*, or, briefly, that  $A$  and  $B$  are *equivalent*, and we write  $A \sim B$ . This relation clearly has the following properties:

It is reflexive:  $A \sim A$ .

It is symmetric: If  $A \sim B$ , then  $B \sim A$ .

It is transitive: If  $A \sim B$  and  $B \sim C$ , then  $A \sim C$ .

Any relation with these three properties is called an *equivalence relation*.

**Note** Reflexive 自反性, 维基百科。

**Definition 2.4.** For any positive integer  $n$ , let  $J_n$  be the set whose elements are the integers  $1, 2, \dots, n$ ; let  $J$  be the set consisting of all positive integers. For any set  $A$ , we say:

- (a)  $A$  is *finite* if  $A \sim J_n$  for some  $n$  (the empty set is also considered to be finite).
- (b)  $A$  is *infinite* if  $A$  is not finite.
- (c)  $A$  is *countable* if  $A \sim J$ .
- (d)  $A$  is *uncountable* if  $A$  is neither finite nor countable.
- (e)  $A$  is *at most countable* if  $A$  is finite or countable.

Countable sets are sometimes called *enumerable*, or *denumerable*.

For two finite sets  $A$  and  $B$ , we evidently have  $A \sim B$  if and only if  $A$  and  $B$  contain the same number of elements. For infinite sets, however, the idea of “having the same number of elements” becomes quite vague, whereas the notion of 1-1 correspondence retains its clarity.

**Note** 可数集 (countable set), 是指每个元素都能与自然数集  $N$  的每个元素之间能建立一一对应的集合; 不可数集顾名思义就是无法与自然数集  $N$  建立一一对应的集合。

**Definition 2.7.** By a *sequence*, we mean a function  $f$  defined on the set  $J$  of all positive integers. If  $f(n) = x_n$ , for  $n \in J$ , it is customary to denote the sequence  $f$  by the symbol  $\{x_n\}$ , or sometimes by  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . The values of  $f$ , that is, the elements  $x_n$ , are called the *terms* of the sequence. If  $A$  is a set and if  $x_n \in A$  for all  $n \in J$ , then  $\{x_n\}$  is said to be a *sequence* in  $A$ , or a *sequence of elements* of  $A$ .

注意一个序列的  $x_1, x_2, x_3, \dots$  项不需要是独特的。

由于每个可数集合是一个定义在  $J$  上一一映射的范围, 可将每个可数集合视为一系列不同项的范围。更宽泛来说, 任何可数集合中的原始可以被 “排列在一个序列上”。

有时可以将定义中的  $J$  替换为所有非负整数集合, 这样可能会更加的方便, 例如开始于 0 而不是 1。

**Theorem 2.8.** *Every infinite subset of a countable set  $A$  is countable.*

*Proof.*

假设  $E \subset A$ , 且  $E$  为无限的。排列  $A$  中的元素  $x$  构建  $\{x_n\}$  独特序列。构建一个满足如下的序列  $\{n_k\}$ :

令  $n_1$  为最小的正整数使得  $x_{n_1} \in E$ 。选择  $n_1, \dots, n_{k-1}$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ), 令  $n_k$  为最小的大于  $n_{k-1}$  的整数使得  $x_{n_k} \in E$ 。

令  $f(k) = x_{n_k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), 我们获取一个  $E$  与  $J$  的一一映射关系。

根据定理, 粗略的说可数集合表示了“最小的”无限性: 没有不可数集合可以成为一个可数集合的子集。  $\square$

**Note** 一个可数集合  $A$  的任意无限子集都是可数的。

**Definition 2.9.** Let  $A$  and  $\Omega$  be sets, and suppose that with each element  $\alpha$  of  $A$  there is associated a subset of  $\Omega$  which we denote by  $E_\alpha$ .

The set whose elements are the sets  $E_\alpha$  will be denoted by  $\{E_\alpha\}$ . Instead of speaking of sets of sets, we shall sometimes speak of a collection of sets, or a family of sets.

The *union* of the sets  $E_\alpha$  is defined to be the set  $S$  such that  $x \in S$  if and only if  $x \in E_\alpha$  for at least one  $\alpha \in A$ . We use the notation

$$(1) \quad S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha.$$

If  $A$  consists of the integers  $1, 2, \dots, n$ , one usually writes

$$(2) \quad S = \bigcup_{m=1}^n E_m$$

or

$$(3) \quad S = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n.$$

If  $A$  is the set of all positive integers, the usual notation is

$$(4) \quad S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

The symbol  $\infty$  in (4) merely indicates that the union of a *countable* collection of sets is taken, and should not be confused with the symbols  $+\infty$ ,  $-\infty$ , introduced in Definition 1.23.

The *intersection* of the sets  $E_\alpha$  is defined to be the set  $P$  such that  $x \in P$  if and only if  $x \in E_\alpha$  for every  $\alpha \in A$ . We use the notation

$$(5) \quad P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha,$$

or

$$(6) \quad P = \bigcap_{m=1}^n E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n,$$

or

$$(7) \quad P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m,$$

as for unions. If  $A \cap B$  is not empty, we say that  $A$  and  $B$  *intersect*; otherwise they are *disjoint*.

*Remark 2.11.* Many properties of unions and intersections are quite similar to those of sums and products; in fact, the words sum and product were sometimes used in this connection, and the symbols  $\Sigma$  and  $\Pi$  were written in place of  $\bigcup$  and  $\bigcap$ .

The commutative and associative laws are trivial:

$$(8) \quad A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

$$(9) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Thus the omission of parentheses in (3) and (6) is justified.

The distributive law also holds:

$$(10) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

To prove this, let the left and right members of (10) be denoted by  $E$  and  $F$ , respectively.

Suppose  $x \in E$ . Then  $x \in A$  and  $x \in B \cup C$ , that is,  $x \in B$  or  $x \in C$  (possibly both). Hence  $x \in A \cap B$  or  $x \in A \cap C$ , so that  $x \in F$ . Thus  $E \subset F$ .

Next, suppose  $x \in F$ . Then  $x \in A \cap B$  or  $x \in A \cap C$ . That is,  $x \in A$ , and  $x \in B \cup C$ . Hence  $x \in A \cap (B \cup C)$ , so that  $F \subset E$ .

It follows that  $E = F$ .

We list a few more relations which are easily verified:

$$(11) \quad A \subset A \cup B,$$

$$(12) \quad A \cap B \subset A.$$

If  $0$  denotes the empty set, then

$$(13) \quad A \cup 0 = A, \quad A \cap 0 = 0.$$

If  $A \subset B$ , then

$$(14) \quad A \cup B = B, \quad A \cap B = A.$$

## **Metric Spaces**

WIP

## **Compact Sets**

WIP

## **Perfect Sets**

WIP

## **Connected Sets**

WIP

### 3 Numerical Sequences and Series

## 4 Continuity

## 5 Differentiation



## 6 The Riemann-Stieltjes Integral

## 7 Sequences and Series of Functions

## 8 Some Special Functions

## **9 Functions of Several Variables**

## 10 Integration of Differential Forms

## 11 The Lebesgue Theory