Ejemplo

Sea $f(x)$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.
2. Calcule $P[0 < X \leq 1]$.

3/8, 1/8

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 \\ 0 \end{cases}$$

integramos para obtener el área bajo la curva. el área total es la probabilidad por lo que tiene que ser igual a 1

$$c\int_0^2 \frac{x^3}{3} = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}c = 1 = 8c = 3$$

$$c = \frac{3}{8}$$

$$\text{Probabilidad} = \frac{3}{8}, \frac{x^2}{3} = \frac{3x^2}{24} \quad \frac{x^2}{8} = \Big|_0^1 \frac{1}{8} - \frac{0}{8}$$

$$2 = \frac{1}{8}$$

Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^4}, & si \quad x > 1 \\ 0 & si \quad x \le 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp).

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

$$k\int_1^\infty \frac{1}{x^4} \to x^{-4} \to \frac{x^{-3}}{-3} \to -\frac{1}{3x^3}$$

evaluamos $\displaystyle \Big|_1^\infty -\frac{k}{3x(\infty)^3} - \left(-\frac{k}{3(1)^3}\right) \to 0 + \frac{k}{3} = 1$

a) $k = 3$ //

$$b)\ 3\int_1^\infty x\,\frac{1}{x^4} \to x \cdot x^{-4} \to x^{-3} - \frac{1}{x^3} \to -\frac{1}{2x^2}$$

$$\Big|_1^\infty -\frac{3}{2(\infty)^2} - \left(-\frac{3}{2(1)^2}\right) \to 0 + \frac{3}{2} \to \frac{3}{2} \ //$$

$$E(x^2) = 3\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 3 \left. -\frac{1}{x} \right|_1^{\infty} = 3(0+1) = 3$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

c) $$P(x>2) = \int_2^{\infty} \frac{3}{x^4} \longrightarrow 3 \left. -\frac{1}{3x^3} \right|_2^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{24}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

$$P(x \leq 2) = \int_1^{2} \frac{3}{x^4} \longrightarrow 3 \left. -\frac{1}{3x^3} \right|_1^{2} = -\frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$