

4-Mannigfaltigkeiten mit vorgegebenen Fundamentalgruppen

Jacobus Leander Conradi
Vincent Rheinthal

Geboren am 27. Februar 1998 in Grevenbroich

24. Mai 2019

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

Zweitgutachter: Dr. Lennart Meier

MATHEMATISCHES INSTITUT

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

Vorwort

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Vorwort | I |
| Inhaltsverzeichnis | II |
| 1 Problemstellung und Definition | 1 |
| 1.1 Einführung | 1 |
| 1.2 Persistente Homologie | 1 |
| 1.2.1 Persistenz Diagramme | 3 |
| 1.3 Wasserstein Distanz | 3 |
| 1.4 Feature Proposals | 4 |
| 2 Persistente Homologie | 5 |
| 2.1 Čech-Komplex | 5 |
| 2.2 Berechnung der persistenten Homologie | 7 |

Kapitel 1

Problemstellung und Definition

1.1 Einführung

In dieser Arbeit wollen wir uns dem Vergleich verschiedener Bilddaten widmen. Hierfür betrachten wir das Konzept der persistenten Homologie. Persistente Homologie lässt sich am besten beschreiben, als das "Erkennen von Formen mit zusammengekniffenen Augen". Wir wollen also einen komplex aussehenden Datensatz mit diesem Ansatz in grundlegende geometrische Formen zurückführen. Dieser Ansatz ist insbesondere auch sehr intuitiv und nah an dem unterbewussten Erkennen von Strukturen, die einen Menschen auszeichnet.

Wir wollen also zuerst ein Persistenzdiagramm zu einer gegebenen Punktmenge X berechnen und danach ein geeignetes Abstandsmaß für solche Diagramme finden.

1.2 Persistente Homologie

Um Homologien zu berechnen benötigen wir zunächst einmal eine Mannigfaltigkeit, oder im Fall eines Computers bzw. einer notwendigerweise diskreten Darstellung, einen Zell-Komplex. Sei also nun im allgemeinen eine Punktmenge $X \subset \mathbb{R}^d$ gegeben. Zuerst wollen wir den Čech-Komplex definieren.

Definition 1 (Čech-Komplex). *Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ eine endliche Menge und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann konstruieren wir $\check{C}_\varepsilon(X)$ wie folgt. Das 0-Skellet von $\check{C}_\varepsilon(X)$ ist X und für jede Menge $\sigma \subset X$ ist σ im $|\sigma|$ -Skellet von $\check{C}_\varepsilon(X)$, falls der Schnitt der Bälle mit Radius ε um alle Punkte in σ : $\bigcap_{x \in \sigma} B_\varepsilon(x)$ nicht leer ist.*

Man bemerke zunächst, dass für jedes endliche X ein $\varepsilon > 0$ existiert,

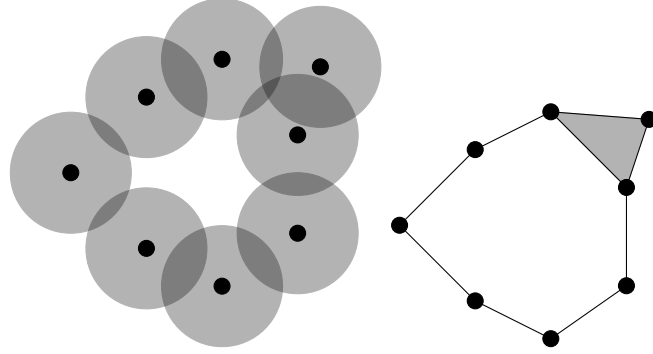


Abbildung 1.1: Ein Čech-Komplex für ein gegebenes ε mit dem erzeugenden Datensatz.

sodass für alle $\varepsilon \geq \mathcal{E}$ gilt, dass $\check{C}_\varepsilon(X) = \check{C}_\mathcal{E}(X)$. Nenne diesen Zellkomplex, an dem der Čech-Komplex stabilisiert $C(X) := \check{C}_\mathcal{E}(X)$. Wir definieren nun eine Filtration $f : C(X) \rightarrow \mathbb{R}, \sigma \mapsto \min\{\varepsilon | \sigma \in \check{C}_\varepsilon(X)\}$.

Weiterhin bemerke man, dass das Bild von f endlich ist. Sei $\text{im}(f) = \{\varepsilon_i | 0 \leq i \leq N\}$. Dann erhalten wir eine Sequenz von Zellkomplexen:

$$\check{C}_{\varepsilon_1}(X) \hookrightarrow \check{C}_{\varepsilon_2}(X) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \check{C}_{\varepsilon_{N-1}}(X) \hookrightarrow \check{C}_{\varepsilon_N}(X).$$

Mit einer solchen Kette können wir nun persistente Homologie definieren.

Definition 2 (persistente Homologie). *Gegeben eine Sequenz von Zellkomplex Einbettungen:*

$$X_1 \xhookrightarrow{\iota_1} X_2 \xhookrightarrow{\iota_2} \dots \xhookrightarrow{\iota_{n-2}} X_{n-1} \xhookrightarrow{\iota_{n-1}} X_n$$

Betrachten wir die implizierte Homologie Sequenz für jedes k :

$$H_k(X_1) \xrightarrow{\iota_1^*} H_k(X_2) \xrightarrow{\iota_2^*} \dots \xrightarrow{\iota_{n-2}^*} H_k(X_{n-1}) \xrightarrow{\iota_{n-1}^*} H_k(X_n).$$

Für $0 \leq i < j \leq n$ sei $\mathcal{L}_i^j(X)$ die Menge der Erzeuger σ , die im Cokernel von ι_{i-1}^* liegen, sodass das Bild von σ in $H_{j-1}(X)$ nicht null ist, aber es im Kern von ι_{j-1} liegt. Diese Familie $\{\mathcal{L}_i^j(X) | 0 \leq i < j \leq n\}$ nennen wir die persistente Homologie von X .

Die persistente Homologie speichert also das Leben und Sterben verschiedener Erzeuger während dem Erhöhen der Grenze für Elemente in der Zellkomplexfiltration.

Da wir uns in dieser Arbeit auf 2-dimensionale Punktmengen X beschränken, genügt es, den Zellkomplex $C(X)$ auf sein 2-Komplex zu beschränken, da alle höheren Homologien verschwinden.

Man kann das Berechnen dieser Homologien für 2-dimensionale Daten wir folgt geometrisch definieren. Man lässt um jeden Punkt aus X gleichmäßig Bälle wachsen, vereinigt diese und berechnet die Homologie. Hierbei

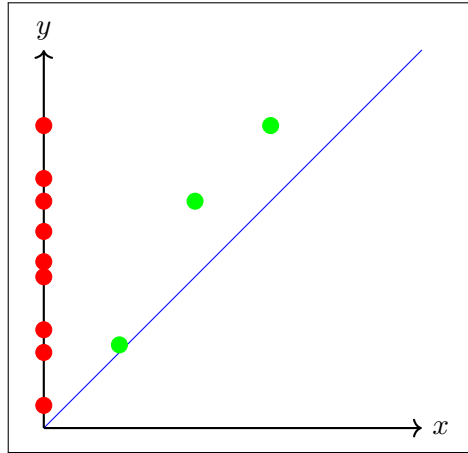


Abbildung 1.2: Ein Persistenzdiagramm. Rote Punkte gehören zur nullten, und grüne Punkt zur ersten Homologie

entstehen zwischendurch Kreise, also Erzeuger der ersten Homologie, die bei großem ε wieder verschwinden.

1.2.1 Persistenz Diagramme

Um jetzt mit persistenter Homologie arbeiten zu können wollen wir diese Visualisieren. Dafür kann man sich zum Beispiel Persistenz Diagramme angucken. Hierbei wollen wir für jeden Erzeuger der zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 geboren wird und zu einem Zeitpunkt t_2 stirbt, den Punkt (t_1, t_2) in \mathbb{R}^2 markieren.

Man bemerke, dass die so markierten Punkte immer oberhalb der Diagonale $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$ liegen, wobei Punkte die direkt an der Diagonalen liegen, Erzeuger repräsentieren, die schnell nach der Geburt sterben, und Punkte die weit von der Diagonalen entfernt sind, Erzeuger repräsentieren, die sehr lange leben. In Abb. 1.2 sieht man ein Persistenzdiagramm, das zu drei unterschiedlichen Zeiten Kreise - also Erzeuger der ersten Homologie - aufweist. Des weiteren kann man sehen, dass die Erzeuger der nullten Homologie - also einer pro Zusammenhangskomponente zu jedem gegebenen Zeitpunkt - alle zum Zeitpunkt 0 geboren werden.

1.3 Wasserstein Distanz

Seien also nun zwei solche Persistenzdiagramme gegeben. Um ein Abstandsmaß zu definieren, betrachten wir die durch die Wahrscheinlichkeitstheorie definierte Wassersteindistanz. Hierbei handelt es sich um den "minimalen

Aufwand, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einer anderen zu bewegen". In unserer konkreten Anwendung definieren wir diese wie folgt.

Definition 3 (Wassersteindistanz). *Seien X und Y zwei Punktmengen gegeben, mit $|X| = |Y|$. Dann definieren wir die Wassersteindistanz*

$$W_p(X, Y) = \min_{\varphi: X \rightarrow Y} \left(\sum_{x \in X} \|x - \varphi(x)\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei über alle Bijektionen $\varphi: X \rightarrow Y$ minimiert wird und $\|\cdot\|$ die ℓ_2 -Norm in \mathbb{R}^2 ist.

Ein Spezialfall $W_\infty(\cdot, \cdot)$ nennen wir die Bottleneckdistanz. Man bemerke die starke Einschränkung, dass $|X| = |Y|$ sein muss. Diese wollen wir geeignet anpassen, sodass auch unterschiedliche große Mengen miteinander verglichen werden können und unterschiedliche Herangehensweisen qualitativ vergleichen.

1.4 Feature Proposals

Als letzten Schritt wollen wir Methoden untersuchen, um zu einem gegebenen Bild eine representierende Punktemenge X zu finden, um diese als Eingabe für das Berechnen der persistenten Homologie zu benutzen. Auch hier wollen wir unterschiedliche Methoden vergleichen und im Zusammenhang mit der persistenten Homologie vergleichen.

Kapitel 2

Persistente Homologie

In diesem Kapitel wollen wir die Implementierung zur Berechnung des Čech-Komplexes, sowie die Berechnung der persistenten Homologie widmen.

2.1 Čech-Komplex

Zum Berechnen des Čech-Komplexes betrachten wir zunächst einmal das Voronoi Diagramm für gegebene Punkte X im 2-dimensionalen Raum. Hierbei wird \mathbb{R}^2 in Regionen unterteilt, sodass in jeder Region genau ein Punkt x aus X liegt, und für jeden anderen Punkt y aus dieser Region ist x der nächste Punkt aus X an y .

Aus dem Voronoi Diagramm können wir den Čech-Komplex extrahieren. Hierbei fügen wir zu dem Zellkomplex eine Kante zwischen x und y aus X hinzu, wenn die Voronoi-Regionen von x und y sich berühren. Die Distanz von x und y gibt uns außerdem den Filtrationswert $f(\{x, y\}) = \frac{\|x-y\|}{2}$ der Kante. Fügt man alle diese Kanten hinzu, erhält man den planaren Dual-Graph, die DeLauney-Triangulierung der Punkte aus X .

Komplizierter wird es bei Flächen, also 2-Zellen. Hierbei müssen wir eine wichtige Fallunterscheidung treffen. Falls sich mehr als 2 Voronoi-Regionen in einem Punkt berühren, korrespondiert dies zu einem Kreis und des weiteren einer 2-Zelle im Čech-Komplex. Doch was genau ist der Filtrationswert. Hier kommt die folgende Fallunterscheidung ins Spiel. Betrachtet man die konvexe Hülle der Punkte $x_1, \dots, x_k \in X$, deren Voronoi Regionen sich berühren, kann es passieren, dass der Punkt, indem sich die Voronoi-Regionen sich berühren, innerhalb oder außerhalb des Polytops liegen. Falls der Punkt v innerhalb des Polytops liegt, muss der Filtrationswert als der Abstand von v zu allen x_i , die alle gleich sind, gewählt werden. Denn sobald dieser Wert überschritten wird, "füllt" sich das Loch in der geometrischen Präsentation mit den Bällen, also muss die Fläche eingefügt werden.

Im anderen Fall gibt es keinen Zeitpunkt, wo der durch die Punkte x_1, \dots, x_k gegebene Kreis im in der geometrischen Repräsentierung "um ein Loch" ist,

```

public class Voronoi {
    //stores voronoi vertices, where more than 2 regions touch
    private PointD[] vertices = null;
    private VEdge[] edges = null;
    ...
    private void compute(int width, int height) {
        VoronoiResults results =
            org.kynosarges.tektosyne.geometry.Voronoi.findAll(
                sites, new RectD(0, 0, width, height));
        vertices = results.voronoiVertices;
        //transform output of library to our own data types
        ...
    }
    ...
}

public class ActionGenerator {
    @NotNull
    public List<Action> generate() {
        //generates the list of elements added to the cell
        //complex sorted by their filtration values
        ...
        voronoi.forEachVertex(this::computeVertex);
        voronoi.forEachEdge(this::computeEdge);
        actions.sort(Action::compareTo);
        return actions;
    }
    private void computeVertex(@NotNull PointD vertex, int
        index) {
        //create list of actions given the Voronoi Diagram
        ...
        VEdge[] edges = voronoi.getEdges(edgeIndices);
        PointD[] sites = getSites(edges);
        if (Util.isInside(vertex, sites)) {
            actions.add(new FaceAction(...));
            return;
        }
        ...
        actions.add(new EdgeFaceAction(...));
    }
}

```

Abbildung 2.1: Codesnippet of the generation of zur Generierung von $C(X)$

sodass die Fläche zu dem Zeitpunkt eingefügt werden muss, wo die letzte Kante den Kreis in x_1, \dots, x_k schließt. Mit anderen Worten, der Filtrationswert ist $\max_{\{x_i, x_j\} \in C(X)} \|x_i - x_j\|$. Diese 2-Zellen wollen wir *degeneriert* nennen.

Für die Implementierung in Java haben wir uns für eine Library entschieden, die uns das Voronoi Diagramm berechnet. Den planaren Dualgraph berechnen wir aufbauend auf der Library, wie mn in Abb. 2.1 sehen kann. Des weiteren sieht man, dass wir im Fall von degenerierten 2-Flächen eine `EdgeFaceAction` benutzten, um die längste Kante aus dem Kreis sowie die 2-Zelle direkt im selben Zeitschritt einfügen.

2.2 Berechnung der persistenten Homologie