The Problem

In dieser Arbeit wollen wir ein Feature zum Clustern von Bildern implementieren, und qualitativ bewerten.
Das Feature heißt persistent Homology.

Persistent Homology

Für eine gegebene Punktwolke $X \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mannigfaltikeit M_r mit Rand, die aus der Vereinigung aller Bälle $B_r(x_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_i) \leq r\}$ besteht. Wir erhalten also eine Filtration $M_0 \subset ... \subset M_r \subset M_{r'} \subset M_{r''} \subset ...$ von CW-Komplexen, für $0 \leq ... \leq r \leq r' \leq r'' \leq ....$ Durch diese Filtration erhält man nun eine Reihe von Homomorphismen für jedes $i \geq 0$:

$$H_i(M_0) \to ... \to H_i(M_r) \to H_i(M_{r'}) \to H_i(M_{r''}) \to ...$$

Für diese Kette von Abbildungen betrachten wir nun das "Leben und Sterben"von Erzeugern. Mathematischer, sei α ein Erzeuger von $H_i(M_{r'})$, welcher im Cokern der Abbildung $H_i(M_r) \to H_i(M_{r'})$ liegt, und sei $H_i(M''_r)$ das erste Element in der Sequenz, sodass das Bild von α im Kern der Abbildung $H_i(M_{r'}) \to H_i(M_{r''})/H_i(M_r)$ ist. Dann sagen wir dass α von r' bis r'' "lebt". Betrachten wir alle solche α für alle i, können wir diese Information in einem sogenannten Persistenz Diagramm eintragen, und erhalten so ein Feature Vektor zu einer gegebenen Punktwolke. Dieses Diagramm entsteht für jedes $i \geq 0$, indem man für jedes α, das von r' bis r'' lebt, einen Punkt an $(r', r'') \in \mathbb{R}^2$ einträgt.

Für unsere Anwendung auf Bildern benötigen wir lediglich H_0 und H_1, denn $H_{\geq 2}$ für Mannigfaltigkeiten, die sich in $\mathbb{R}^2$ einbetten lassen, ist immer 0.

Clustering with Diagram Distances

Um ein Ähnlichkeitsmaß für zwei gegebene Bilder anhand ihrer Persistenz Diagramme zu erhalten, Betrachten wir zwei mägliche Abstandsmaße. Die Wasserstein Distanz und ein SPezialfall dieser, der Bottleneck Distanz.

Wasserstein Distanz

Bei der üblichen Wasserstein Distanz aus z.B. der Wahrscheinlichkeitstheorie betrachtet man zwei Punktwolken gleicher Kardinalität $X, Y \subset \mathbb{R}^n$. Dann nennt man die Wasserstein Distanz

$$W_p(X, Y) = \left(\inf_{\varphi: X \to Y} \int_X d(x, \varphi(x)) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

, wobei φ eine Bijektion ist. Für unsere Anwendung haben wir aber nicht die starke Einschränkung, dass $|X| = |Y|$ für die Punktemengen X und Y

in den Persistenz Diagrammen D_A und D_B für die Punktwolken A und B. Daher wollen wir uns ein neues, durch die Wasserstein Distanz motiviertes Abstandsmaß für zwei Punktmengen unterschiedlicher Kardinalität erarbeiten.

Ein Spezialfall der Wasserstein Distanz ist die Bottleneck Distanz, definiert als:

$$B(X,Y) = W_\infty(X,Y) = \inf_{\varphi:X\to Y} \sup_{x\in X} d(x,\varphi(x))$$

Punktwolken erzeugen

Ein weiterer Schritt ist es, zu einem gegebenen Bild eine Punktwolke zu finden, um zu dieser dann das Persistenz Diagramm zu berechnen. Hierzu wollen wir auch ein paar Methoden qualitativ vergleichen. Hierzu wollen wir uns der Computervision behelfen, um Features aus dem Bild zu extrahieren.

Alles zusammen

Wir wollen also für zwei gegebene Bilder I und J erst zwei Feature-Punkt Listen A resp. B extrahieren. Für diese Feature-Punkte wollen wir dann die Persistenz Diagramme D_I resp. D_J erstellen, und dann ein geeignetes Abstandsmaß für diese Diagramme finden.

The Solution

Im Folgenden wollen wir unsere Implementierung der genannten Problemstellung erläutern und vorstellen.

Persistent Homology

Wasserstein Distance