25 -

a) La formula de Rodrigues para los polinomios de laguerre es:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$$

para $n=2$

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2}(e^{-x} x^2)$$

~~Primera~~ Segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x} x^2) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}(2x - x^2)\right) = e^{-x}(2 - 4x + x^2)$$

Sustituimos

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2} e^{-x}(2 - 4x + x^2) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$ //

b) Para las raices de $L_2(x)$, Resolvemos la ecuacion cuadratica

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 - \sqrt{2} \\ x_1 = 2 + \sqrt{2} \end{array}\right\} \text{las Raices}$$

3

C) Calculo de los Pesos

Los Pesos w_0 y w_1 Se Calculan integrando las bases cardinales con la funcion $\omega(x)=e^{-x}$. la formula es:

$$w_0=\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx$$

$$w_1=\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,dx$$

Calculamos la diferencia

$x_0-x_1=-2\sqrt{2}$

$x_1-x_0=2\sqrt{2}$

Calculamos la integral

$$w_0=\frac{1}{-2\sqrt{2}}\cdot\int_0^{\infty} e^{-x}(x-x_1)\,dx$$

$$w_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\infty} e^{-x}(x-x_0)\,dx$$

Para w_0:

$$w_0=\frac{1}{-2\sqrt{2}}\int_0^{\infty} e^{-x}x\,dx-x_1\int e^{-x}\,dx$$

$$w_0 = \frac{1}{-2\sqrt{2}} \cdot 1 - (2+\sqrt{2}) \cdot 1$$

$$w_0 = \frac{1}{-2\sqrt{2}} \cdot (-1-\sqrt{2})$$

$$w_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$ //

Para w_1:

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty e^{-x} x \, dx - x_0 \int_0^\infty e^{-x} \, dx \right)$$

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 - (2-\sqrt{2}) \cdot 1 \right)$$

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$ //

D) Para un Polinomio de grado 3

Usando la definicion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\tau} \cdot \tau^{x-1} \, d\tau$$

donde $\Gamma(x) = (x-1)!$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^3 \, dx = \Gamma(4) = (4-1)! = 6$$ //

Con los pesos anteriormente calculados

$$\sum_{i=0}^{1} w_i f(x_i) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^3 \, dx$$

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \cdot (2-\sqrt{2})^3 + \frac{(-\sqrt{2}+2)}{4} \cdot (2+\sqrt{2})^3$$

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \cdot (20-14\sqrt{2}) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} \cdot (20+14\sqrt{2}\right)$$

$$w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6$$

Da el mismo valor la suma de Riemann usando laguerre al valor exacto de la integral, así que es exacta para el polinomio cubico x^3