Axiomas

1- Axioma 1 = $P(A) \geq 0$ para cualquier $A \subseteq \Omega$

$P(A) = a_1 P_1(A) + a_2 \cdot P_2(A)$

Dado que $P_1(A) \geq 0$ y $P_2(A) \geq 0$

y que:

$a_1, a_2 \geq 0$

Se tiene: $P(A) \geq 0$

Axioma 2 = $P(\Omega) = 1$

$P(\Omega) = a_1 \cdot P_1(\Omega) + a_2 P_2(\Omega)$

Como $P_1(\Omega) = 1$ y $P_2(\Omega) = 2$:

$P(\Omega) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1$

Como $a_1 + a_2 = 1$, $P(\Omega) = 1$ //

Axioma 3 = Aditividad

Para conjuntos distintos $A \cap B = 0$

verificamos

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dado que:

$P(A \cup b) = a_1 P_1(a \cup b) + a_2 P_2(a \cup b)$

Como P_1 y P_2 son medidas de Probabilidad, cumplen la propiedad de aditividad

$P_1(A \cup B) = P_1(A) + P_1(B)$ y $P_2(A \cup B) = P_2(A) + P_2(B)$

Sustituimos

$P(A \cup B) = a_1[P_1(A) + P_1(B)] + a_2[P_2(A) + P_2(B)]$

Agrupando,

$P(A \cup B) = (a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A)) + (a_1 P_1(B) + a_2 P_2(B))$

P es igual a

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ //

2- $\Omega=\{1,2\}$, $\mathcal{F}=\sigma(\Omega)$

$$P(A)=\begin{cases} 0 & \text{si } A=\emptyset, \\ 1/3 & \text{si } A=\{1\} \\ 2/3 & \text{si } A=\{2\} \\ 1 & \text{si } A=\{1,2\} \end{cases}$$

Verificamos Axiomas:

1- $P(A)\geq 0$

$P(\emptyset)=0\geq 0$
$P(\{1\})=1/3\geq 0$
$P(\{2\})=2/3\geq 0$
$P(\{1,2\})=1\geq 0$

2- $P(\Omega)=1$

$\Omega=\{1,2\}$ y $P(\{1,2\})=1$

$P(\Omega)=1$

3- Vemos todos los casos

$P(A\cup B)=P(\{1,2\})=1$ //

Mientras que:

$P(A)+P(B)=P(\{1\})+P(\{2\})=1/3+2/3=1$ //

$P(A \cup B) = P(\{1\}) = 1/3$

Mientras que:

$P(A) + P(B) = P(\{1\}) + P(\{0\}) = 1/3 + 0 = 1/3$

y

$P(A \cup B) = P(\emptyset) = 0$

Mientras que:

$P(A) + P(B) = P(\emptyset) + P(\emptyset) = 0 + 0 = 0$

3.

a) $P(\emptyset) = 0$

Sabimos que $P(A) \geq 0$ y que son aditivos

Sea $A = \Omega$ y $B = \emptyset$, entonces $\Omega \cup \emptyset = \Omega$

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

b) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Sea $A^c = \Omega / A$, usando el Axioma de Aditividad

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Como $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

c) Si $A \subset B$; entonces $P(B) = P(A) + P(B/A)$

$$B = A \cup (B \setminus A), \text{ con } A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

Por aditividad

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

d) $P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$

de $A \subset \Omega$ tenemos que:

$$A \cup A^c = \Omega \text{ y } A \cap A^c = 0$$

Usando Aditividad:

$$P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$$

Como $P(A^c) \geq 0$

$$P(A) \leq 1$$

e) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

$A \subseteq B$ entonces:

$$B = A \cup (B \setminus A), \text{ con } A \cap (B \setminus A) = 0$$

Con Aditividad:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Como $P(B \setminus A) \geq 0$

$$P(B) \geq P(A)$$

f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Por union:

$$A \cup B = A + B - (A \cap B)$$

Por Aditividad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

CamScanner